

CORRECTION IO 1994 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Pour que $3\alpha 4y$, un nombre dans le système décimal soit divisible par $36 = 9 \times 4$, il faut que $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et que $3 + \alpha + 4 + y$ soit un multiple de 9.

Les multiples de 9 sont : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81...

- Trouvons le chiffre α pour que $3\alpha 40$ soit multiples de 9.

$$3 + \alpha + 4 + 0 = 9 \quad \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$3 + \alpha + 4 + 0 = 18 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

- Trouvons le chiffre α pour que $3\alpha 42$ soit multiples de 9

$$3 + \alpha + 4 + 2 = 9 \quad \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$3 + \alpha + 4 + 2 = 18 \quad \Leftrightarrow \alpha = 9$$

$$3 + \alpha + 4 + 2 = 27 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

- Trouvons le chiffre α pour que $3\alpha 44$ soit multiples de 9

$$3 + \alpha + 4 + 4 = 9 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$3 + \alpha + 4 + 4 = 18 \quad \Leftrightarrow \alpha = 7$$

$$3 + \alpha + 4 + 4 = 27 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

- Trouvons le chiffre α pour que $3\alpha 46$ soit multiples de 9

$$3 + \alpha + 4 + 6 = 9 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$3 + \alpha + 4 + 6 = 18 \quad \Leftrightarrow \alpha = 5$$

$$3 + \alpha + 4 + 6 = 27 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

- Trouvons le chiffre α pour que $3\alpha 48$ soit multiples de 9

$$3 + \alpha + 4 + 8 = 9 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$3 + \alpha + 4 + 8 = 18 \quad \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$3 + \alpha + 4 + 8 = 27 \quad \Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{N}$$

Les couples $(\alpha; y)$ solutions sont : $(2; 0), (9; 2), (7; 4), (5; 6), (3; 8), (0; 2)$.

EXERCICE 2

Soit α : Nombre de délégués d'Afrique

y : Nombre de délégués d'Amérique avec

z : Nombre de délégués d'Asie

t : Nombre de délégués d'Europe

$$y + z = 6; \quad z + t = 7$$

$$* \alpha + y + z + t = 15$$

$$* \alpha \neq y \neq z \neq t$$

$$* \alpha \geq 1; y \geq 1; z \geq 1; t \geq 1.$$

* L'un des continents a envoyé 4 délégués.

Déterminons le nombre de délégués envoyés par chaque continent.

1^{er} cas : Supposons que l'Afrique ait envoyé 4 délégués soit $\alpha = 4$

$$\alpha + y + z + t = 15$$

$$y + z = 6 \quad \Leftrightarrow y = 6 - z$$

$$\alpha + (6 - z) + z + (7 - z) = 15$$

$$z + t = 7 \quad \Leftrightarrow t = 7 - z$$

$$\alpha + 6 - z + z + 7 - z = 15$$

$$y = 6 - z$$

$$\alpha + 13 - z = 15$$

$$y = 6 - 2 = 4 \quad \underline{y = 4} \quad \text{car } z = 2$$

$$4 + 13 - z = 15 \quad \Leftrightarrow \underline{z = 2}$$

$$t = 7 - z = 7 - 2 = 5 \quad \underline{t = 5} \quad \text{car } z = 2$$

On a finalement $\alpha = 4; y = 4; z = 2$ et $t = 5$. Nous remarquons que $\alpha = 4$ et $y = 4$ c'est-

à-dire que l'Afrique et l'Amérique ont le même nombre de délégués ce qui n'est pas possible. Donc $x \neq 4$ c'est-à-dire que l'Afrique n'a pas envoyé 4 délégués.

2^{ème} cas : Supposons que l'Amérique ait envoyé 4 délégués soit $y = 4$

$$Y = 4 \Rightarrow 6 - z = 4 \Rightarrow \underline{z = 2}$$

$$t = 7 - z \Rightarrow t = 7 - 2 = 5 \quad \underline{t = 5}$$

$$x + y + z + t = 15$$

$$x + 4 + 2 + 5 = 15 \quad \underline{x = 4}$$

on a finalement $x = 4$; $y = 4$; $z = 2$; $t = 5$

$x = y$, impossible. L'Amérique n'a donc pas envoyé 4 délégués.

3^{ème} cas : Supposons que l'Europe ait envoyé 4 délégués soit $t = 4$

$$z + t = 7 \quad y = 6 - z$$

$$z = 7 - t \quad y = 6 - 3$$

$$z = 7 - 4 \quad y = 3$$

$$\underline{z = 3}$$

$z = y$, impossible. L'Europe n'a donc pas envoyé 4 délégués.

4^{ème} cas : Supposons que l'Asie ait envoyé 4 délégués soit $z = 4$

$$Y = 6 - z \Rightarrow y = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \underline{y = 2} \quad x + y + z + t = 15$$

$$t = 7 - z \Rightarrow t = 7 - 4 = 3 \Rightarrow \underline{t = 3} \quad \Rightarrow \quad x + 2 + 4 + 3 = 15 \quad \underline{x = 6}$$

on a finalement $x = 6$; $y = 2$; $z = 4$; $t = 3$. On remarque que $x \neq y \neq z \neq t$

avec $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$, $t > 1$.

On peut donc conclure en disant que :

- L'Asie envoie 4 délégués
- L'Afrique 6 délégués
- L'Europe 3 délégués
- Et enfin l'Amérique envoie 2 délégués.

EXERCICE 3

Soit L la longueur de ce rectangle, et ℓ sa largeur.

P : Périmètre du rectangle

A : Aire du rectangle

$$P = (\ell + L) \times 2 = 130$$

$$\ell + L = 130/2 = 65$$

$$\underline{L + \ell = 65}$$

$$\text{soit: } L' = L - 1 \quad A' = A + 14$$

$$\ell' = \ell + 1 \quad A' = L \times \ell + 14 = (L - 1)(\ell + 1)$$

$$L \times \ell + 14 = L \times \ell + L - \ell - 1 \Rightarrow L - \ell - 1 = 14 \Rightarrow \underline{L - \ell = 15}$$

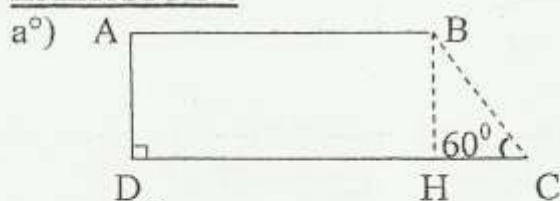
$$\begin{cases} L + \ell = 65 \\ L - \ell = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2L = 65 + 15 = 80 \Rightarrow \underline{L = 40}$$

$$\boxed{} \quad L + \ell = 65 \Rightarrow \ell = 65 - 40 = 25 \Rightarrow \underline{\ell = 25}$$

La longueur du rectangle est donc $L = 40$ et sa largeur, $\ell = 25$

EXERCICE 4



b°) $\cos \hat{C} = HC / BC = HC / 3$

$$\cos C = \cos 60^\circ = \sqrt{3} / 2 = HC / 3 \Rightarrow 2HC = 3\sqrt{3} \Rightarrow HC = 3\sqrt{3} / 2$$

$$DC = DH + HC \text{ donc } DC = AB + HC = 2 \times BC \Rightarrow AB = 2 \times BC - HC = 2 \times 3 - HC$$

$$AB = 6 - 3\sqrt{3} / 2 = (12 - 3\sqrt{3}) / 2 = 3(4 - \sqrt{3}) / 2 = 3/2 \cdot (4 - \sqrt{3}) \quad \underline{AB = 3/2 \cdot (4 - \sqrt{3})}$$

EXERCICE 5

Soit x l'âge de Jean, y l'âge de Paul et z mon âge.

$$\begin{cases} y = z - 9 \\ y = 3x + 4 \\ x + y + z = 38 \end{cases}$$

$$y = z - 9 \Rightarrow z = y + 9$$

$$x + y + z = 38 \Rightarrow (y - 4) / 3 + y + y + 9 = 38$$

$$y = 3x + 4 \Rightarrow x = (y - 4) / 3$$

$$(y - 4) / 3 + 2y + 9 = 38$$

$$\frac{(y - 4) + 3(2y + 9)}{3} = \frac{38 \times 3}{3}$$

$$y - 4 + 6y + 27 = 114$$

$$7y = 114 - 23 = 91$$

$$\underline{y = 13}$$

$$y = 13$$

$$z = y + 9 = 13 + 9 = 22 \quad \underline{z = 22}$$

$$x + 13 + 22 = 38 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

$$\boxed{x = 3 \quad ; \quad y = 13 \quad ; \quad z = 22}$$

Jean a donc 3 ans, Paul 13 ans et moi 22 ans

EXERCICE 6

Réolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation $a^2 - b^2 = 45$

$$a^2 - b^2 = 45$$

$$(a+b)(a-b) = 45 \text{ or } 45 = 9 \times 5 = 15 \times 3$$

$$\text{Donc } a + b = 9 \text{ et } a - b = 5$$

$$\text{Ou } a + b = 5 \text{ et } a - b = 9$$

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a = 14 \\ \underline{a = 7} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{b = 2}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow 2a = 14$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = -2 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{on a aussi } a + b = 15 \text{ et } a - b = 3$$

$$\text{ou } a + b = 3 \text{ et } a - b = 15$$

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a = 18 \\ \underline{a = 9} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow b = a - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$\underline{b = 6}$$

$$S = [(7; 2), (9; 6)]$$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 94

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

Exercice 1

Un nombre $\overline{3x4y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 36 ; on donnera toutes les solutions possibles.

Exercice 2

Une conférence internationale réunit 15 délégués d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Europe. Chaque continent a envoyé un nombre différent de délégués. Chacun est représenté par au moins un délégué.

- L'Amérique et L'Asie ont envoyé au total 6 délégués
- L'ASIE et l'Europe ont envoyé au total 7 délégués
- L'un des continents a envoyé 4 délégués

Combien de délégués a envoyé chacun des continents ?

Exercice 3

Un rectangle a pour périmètre 130 m. Sa longueur diminue de 1 m et sa largeur augmente de 1 m, son aire augmente de 14 m^2 .

Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Exercice 4

a) Construire un trapèze ABCD rectangle en D tel que :

- en degré, mes $\hat{C} = 60$
- la distance CD est le double de la distance BC.

b) quelle serait la longueur du segment [AB] si $BC = 3 \text{ cm}$.

Exercice 5

J'ai deux frères : Jean et Paul. Paul a 9 ans de moins que moi. En ajoutant 4 ans au triple de l'âge de Jean, on obtient celui de Paul.

La somme de nos âges est 38.

Quel est l'âge de chacun de nous trois ?

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$a^2 - b^2 = 45$$

**CORRECTION IO 1995
MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1

Déterminons dans $\mathbb{R}$, le nombre x tel que $2^{(2x-1)} = 8^{(x-2)}$

1^{ère} méthode

$$2^{(2x-1)} = 8^{(x-2)}$$

$$2^{(2x-1)} = (2^3)^{(x-2)} \Leftrightarrow 2^{(2x-1)} = 2^{3(x-2)} \Leftrightarrow 2^{(2x-1)} = 2^{(3x-6)} \Leftrightarrow 2x-1 = 3x-6$$

$$\Leftrightarrow 2x-3x = -6+1$$

$$\Leftrightarrow -x = -5 \quad x = 5 \quad S_{IR} = \{5\}$$

2^{ème} méthode

$$2^{(2x-1)} = 8^{(x-2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, 2^{(2x-1)} > 0 \text{ et } 8^{(x-2)} > 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} \ln [2^{(2x-1)}] = \ln [8^{(x-2)}]$$

$$(2x-1) \ln 2 = (x-2) \ln 8$$

$$(2x-1) \ln 2 = (x-2) \ln 2^3$$

$$(2x-1) \ln 2 = 3(x-2) \ln 2$$

$$2x \ln 2 - \ln 2 = 3x \ln 2 - 6 \ln 2$$

$$2x \ln 2 - 3x \ln 2 = -6 \ln 2 + \ln 2$$

$$-x \ln 2 = -5 \ln 2$$

$$x = -5 \ln 2 / -\ln 2 = 5 \quad x = 5 \quad S_{IR} = \{5\}$$

EXERCICE 2

1/ [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]

$$2/ AC = 4AB \quad AD + BD = 16AB + 15AB$$

$$CB = 3AB \quad = 31AB$$

$$BD = 15AB \quad AC - BC = 4AB - 3AB = AB$$

$$3/ * AB = 1/4 \cdot AC$$

$$* BC = 3/4 \cdot AC$$

$$CD = 4BC$$

$$= 4 \times 3/4 \cdot AC$$

$$* CD = 3AC$$

$$AD = AB + BD$$

$$= 1/4 AC + 15/4 AC$$

$$= 16/4 \cdot AC$$

$$* AD = 4AC$$

$$BD = 5BC$$

$$= 5 \times 3/4 \cdot AC$$

$$* BD = 15/4 \cdot AC$$

EXERCICE 3

$P_0 = 500$, prix du kg de café au 1^{er} Octobre 1994.

En admettant que l'accroissement annuel du prix constant est égal à 12%, la suite P_n est une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme P_0 .

$$\text{Car } P_{n+1} = P_n + 0,12 P_n$$

$$= (1 + 0,12) P_n$$

$$P_{n+1} = 1,12 P_n \Leftrightarrow q = 1,12.$$

1/ Exprimons P_n en fonction de P_{n+1} et en fonction de P_0 et de n .

$$* P_{n+1} = 1,12 P_n \Leftrightarrow P_n = 1/1,12 P_{n+1}$$

$$P_n = q^n P_0 = (1,12)^n P_0$$

$$* P_n = (1,12)^n P_0$$

2/ a) Prix au 1^{er} Octobre 1995 c'est-à-dire 1 ans après.

$$P_1 = (1,12)^1 \times P_0$$

$$= 1,12 \times 500$$

$P_1 = 560$ F au 1^{er} Octobre 1995 le prix du kg de café sera 560 F

b) Prix au 1^{er} Octobre 1997 c'est-à-dire 3 ans après.

$$P_3 = (1,12)^3 \times P_0$$

$$= (1,12)^3 \times 500$$

$P_3 = 752,640$ F Au 1^{er} Octobre 1997 le prix du kg de café sera 752,640 F.

EXERCICE 4

$$x + y + z = 18$$

y et z sont proportionnelles à 4 et 5. Soit $K \in \mathbb{R}$ le coefficient de proportionnalité, on a :

y	z
4	5

× k

$$y \times k = 4 \Leftrightarrow k = 4/y$$

$$z \times k = 5 \Leftrightarrow k = 5/z$$

$$4/y = 5/z \Leftrightarrow 5y = 4z$$

$$\Leftrightarrow y = 4/5 z$$

$$z = 5/4 y$$

$$x + y + z = 18$$

$$x + y + 5/4 y = 18$$

$$x + 9/4 y = 18$$

$$9/4 y = 18 - x$$

$$y = 4/9 (18 - x)$$

$$y = 4/9 (18 - x)$$

$$= 4/9 \times 18 - 4/9 x$$

$$y = -4/9 x + 8$$

$$x + y + z = 18$$

$$x + 4/5 z + z = 18$$

$$x + 9/5 z = 18$$

$$9/5 z = 18 - x$$

$$z = 5/9 (18 - x)$$

$$z = -5/9 x + 10$$

EXERCICE 5

3780 est-il divisible par 45 ? $45 = 9 \times 5$

$3 + 7 + 8 + 0 = 18$, multiple de 9. Donc 3780 est divisible par 9.

3780 se termine par 0, donc 3780 est divisible par 5.

3780 est alors divisible par 9 et par 5.

3780 peut donc s'écrire : $3780 = 9 \times 5 \times \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$

$$3780/9 = 5 \times \alpha \in \mathbb{N} . 3780 \text{ divisible par } 9$$

$$3780/5 = 9 \times \alpha \in \mathbb{N} . 3780 \text{ divisible par } 5.$$

$$3780/9 \times 5 = 3780/45 = \alpha \in \mathbb{N} . 3780 \text{ divisible par } 45.$$

On peut donc dire sans opérer, que le nombre 3780 est divisible par 45.

EXERCICE 6

Soit x le prix d'un quintal de la variété de café Robusta.

et y le prix d'un quintal de la variété de café Arabica

$$2x + 3y = 13800 \times 5 = 69\ 000$$

$$x + 2y = 14\ 000 \times 3 = 42\ 000$$

Déterminons x et y . pour cela résolvons le système ;

$$\begin{cases} 2x + 3y = 69\ 000 \\ x + 2y = 42\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 69\ 000 \\ -2x - 4y = -84\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 4y = 69\ 000 - 84\ 000 \\ -y = -15\ 000 \\ y = 15\ 000 \end{cases}$$

$$x + 2y = 42\ 000$$

$$x = 42\ 000 - 2y$$

$$x = 42\ 000 - 2 \times 15\ 000$$

$$x = 12\ 000 . \text{ Le prix d'un quintal de la variété Robusta est de } 12\ 000 \text{ F et celui d'un}$$

$$\text{quintal de la variété Arabica est de } 15\ 000 \text{ F.}$$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 95

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

Exercice I

Déterminer dans IR, le nombre x tel que $2^{(2x-1)} = 8^{(x-2)}$.

Exercice II

Sur une droite, placer bout à bout trois segments tels que :

AB, BC = 3AB et CD = 4BC.

1- Nommer tous les segments formés.

2- AB étant choisi comme unité, évaluer AC, CB, BD, AD + BD et AC – BC.

3- AC étant choisi comme unité, évaluer AB, BC, CD, BD et AD.

Exercice III

On suppose que $P_0 = 500$ soit le prix du Kg de café au 1^{er} Octobre 1994.

On désigne par P_n son prix en n "années" plus tard.

En attendant que l'accroissement annuel du prix constant est égal à 12%.

1- Exprimer P_n en fonction de P_{n+1} , en fonction de P_0 et de n.

2- Calculer le prix du kg de café

a) Au 1^{er} Octobre 1995 ;

b) Au 1^{er} Octobre 1997.

Exercice IV

Le périmètre d'un triangle est de 18 cm ; on désigne par x la longueur d'un de ses côtés. Les longueurs y et z des deux autres côtés sont proportionnelles à 4 et 5.

Calculer y et z en fonction de x.

Exercice V

Peut-on dire sans opérer, si le nombre 3780 est divisible ou non par 45 ? (Justifier).

Exercice VI

Un négociant en café fait un mélange de deux variétés de café Arabica et la variété robusta.

S'il les mélange en prenant deux quintaux de variétés Robusta et trois quintaux de variété Arabica, le prix de revient d'un quintal est de 13 800 F CFA.

S'il les mélange en prenant un quintal de variété Robusta et deux quintaux de variété Arabica, le prix de revient d'un quintal de mélange est de 14 000 F CFA.

Quel est en F CFA, le prix du quintal de chaque variété de café ?

**CORRECTION IO 1996
MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1

Les nombres décimaux sont : $-2,586$; $3/25$; $67/10$; $-\sqrt{144}/2$; 15

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2-4} = x/2 - 1$

Cherchons le domaine de validité

$\sqrt{x^2-4}$ existe ssi $x^2 - 4 \geq 0$

$(x-2)(x+2) \geq 0$

* $D =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

Réolvons l'équation

$\sqrt{x^2-4} = \frac{x}{2} - 1$

$(\sqrt{x^2-4})^2 = (\frac{x}{2} - 1)^2$

$x^2 - 4 = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$3x^2/4 + x - 5 = 0$

* $3x^2 + 4x - 20 = 0$

$\Delta = 16 + 240 = 256$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$

$x_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{-4-16}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3} = -3,3\bar{3}$

$x_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (-4+16)/6 = 2$

$x_1 \notin D$; $x_2 \in D$ d'où $S = \left\{ \frac{10}{3}; 2 \right\}$

	-2		2	
$x-2$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$(x-2)(x+2)$	+	-	+	+

EXERCICE 3

a) La surface que défricheront 30 ouvriers dans le même temps.

$25 \longrightarrow 2\text{ha}$

$30 \longrightarrow ?$

Soit "S" cette surface : $S = 30 \times 2/25 = 2,4 \text{ ha}$

b) La surface que défricheront 30 ouvriers en 12 jours de travail. soit "S₁" cette surface.

$2,4 \text{ ha} \longrightarrow 8\text{j}$ $S_1 = 2,4 \times 12/8 = 3,6 \text{ ha}$

$? \longleftarrow 12\text{j}$

c) Le nombre d'ouvriers nécessaires pour défricher 2,80 ha en 8 jours. Soit "N" ce nombre.

$25 \longrightarrow 2\text{ha}$ $N = 25 \times 2,80/2 = 35 \text{ ouvriers}$

$? \longleftarrow 2,80 \text{ ha}$

EXERCICE 4

1/ Le nombre d'oranges qu'avait le père au début

Soit x le nombre d'oranges du père au début.

Part du premier : $x/2 + 1/2 = (x+1)/2$

Part du second : $1/2 [x - (x+1)/2] + 1/2 = 1/2 \times (x-1)/2 + 1/2 = (x-1)/4 + 1/2 = (x+1)/4$

Part de troisième : $1/2 [x - (\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4})] + 1/2 = 1/2 [x - (\frac{3x+3}{4})] + 1/2$

$= 1/2 \times (x-3)/4 + 1/2$

$= (x-3)/8 + 1/2 = (x+1)/8$

Après cette distribution, le père n'a plus d'orange donc $(x+1)/2 + (x+1)/4 + (x+1)/8 = x$

$\frac{4(x+1) + 2(x+1) + (x+1)}{8} = \frac{8x}{8}$

$$P_1 = (1,12)^1 \times P_0$$

$$= 1,12 \times 500$$

$P_1 = 560$ F au 1^{er} Octobre 1995 le prix du kg de café sera 560 F

b) Prix au 1^{er} Octobre 1997 c'est-à-dire 3 ans après.

$$P_3 = (1,12)^3 \times P_0$$

$$= (1,12)^3 \times 500$$

$P_3 = 752,640$ F Au 1^{er} Octobre 1997 le prix du kg de café sera 752,640 F.

EXERCICE 4

$$x + y + z = 18$$

y et z sont proportionnelles à 4 et 5. Soit $K \in \mathbb{R}$ le coefficient de proportionnalité, on a :

y	z
4	5

$\times k$

$$y \times k = 4 \Leftrightarrow k = 4/y$$

$$z \times k = 5 \Leftrightarrow k = 5/z$$

$$4/y = 5/z \Leftrightarrow 5y = 4z$$

$$\Leftrightarrow y = 4/5 z$$

$$z = \Leftrightarrow 5/4 y$$

$$x + y + z = 18$$

$$y = 4/9 (18 - x)$$

$$x + y + 5/4 y = 18$$

$$= 4/9 \times 18 - 4/9 x$$

$$x + 9/4 y = 18$$

$$y = -4/9 x + 8$$

$$9/4 y = 18 - x$$

$$y = 4/9 (18 - x)$$

$$x + y + z = 18$$

$$x + 4/5 z + z = 18$$

$$x + 9/5 z = 18$$

$$9/5 z = 18 - x$$

$$z = 5/9 (18 - x)$$

$$z = -5/9 x + 10$$

EXERCICE 5

3780 est-il divisible par 45 ? $45 = 9 \times 5$

$3 + 7 + 8 + 0 = 18$, multiple de 9. Donc 3780 est divisible par 9.

3780 se termine par 0, donc 3780 est divisible par 5.

3780 est alors divisible par 9 et par 5.

3780 peut donc s'écrire : $3780 = 9 \times 5 \times \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$

$3780/9 = 5 \times \alpha \in \mathbb{N}$. 3780 divisible par 9

$3780/5 = 9 \times \alpha \in \mathbb{N}$. 3780 divisible par 5.

$3780/9 \times 5 = 3780/45 = \alpha \in \mathbb{N}$. 3780 divisible par 45.

On peut donc dire sans opérer, que le nombre 3780 est divisible par 45.

EXERCICE 6

Soit x le prix d'un quintal de la variété de café Robusta.

et y le prix d'un quintal de la variété de café Arabica

$$2x + 3y = 13800 \times 5 = 69\ 000$$

$$x + 2y = 14\ 000 \times 3 = 42\ 000$$

Déterminons x et y . pour cela résolvons le système ;

$$\begin{cases} 2x + 3y = 69\ 000 \\ x + 2y = 42\ 000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 69\ 000 \\ -2x - 4y = -84\ 000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4y = 69\ 000 - 84\ 000 \\ -y = -15\ 000 \\ y = 15\ 000 \end{cases}$$

$$x + 2y = 42\ 000$$

$$x = 42\ 000 - 2y$$

$$x = 42\ 000 - 2 \times 15\ 000$$

$x = 12\ 000$. Le prix d'un quintal de la variété Robusta est de 12 000 F et celui d'un quintal de la variété Arabica est de 15 000 F.

$$7(x+1) = 8x$$

$$7x + 7 = 8x \quad x = 7 \quad \text{le père avait donc au début 7 oranges.}$$

$$2/ \text{ part du premier : } (7+1)/2 = 4 \text{ oranges}$$

$$\text{Part du second : } (7+1)/4 = 2 \text{ oranges}$$

$$\text{Part du troisième : } (7+1)/8 = 1 \text{ orange}$$

Le premier a donc 4 oranges, le second 2 oranges et le troisième 1 orange.

EXERCICES 5

$$1/ *PGCD(120; 300) = ?$$

$$PGCD(120; 300) = 2^2 \times 3 \times 5 \\ = 4 \times 15 = 60$$

$$* PPCM(120; 300) = 60 \times 2 \times 5 \\ = 600$$

$$2/ PGCD(a; b) = 3$$

$$a = 3 \times \alpha \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{N}$$

$$PPCM(a; b) = 60$$

$$b = 3 \times \beta \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}.$$

$$PPCM(a; b) = 3 \times \alpha \times \beta = 60 \Leftrightarrow \alpha \times \beta = 20$$

$$a \times b = 3 \times \alpha \times 3 \times \beta$$

$$= 9 \times \alpha \times \beta$$

$$= 9 \times 20$$

$$\boxed{a \times b = 180}$$

Déterminons a et b

$$\alpha \times \beta = 20 = 4 \times 5 = 10 \times 2$$

$$\text{Si } \alpha = 10 \text{ et } \beta = 2 \text{ on a : } a = 3 \times 10 = 30 \quad PPCM(a, b) = 30 \text{ et non } 60, \\ b = 3 \times 2 = 6 \quad \text{Cette hypothèse n'est donc pas bonne.}$$

$$\text{Si } \alpha = 4 \text{ et } \beta = 5 \text{ on a : } a = 3 \times 4 = 12 \quad PPCM(a, b) = 60. \text{ Cette hypothèse est donc} \\ b = 3 \times 5 = 15 \quad \text{la meilleure. On a donc } \underline{a=12} \text{ et } \underline{b=15}$$

EXERCICE 6

$$1/ A = \{-\sqrt{3}; 0; \frac{1}{2}; 4\sqrt{3}; 6\}$$

$$B = \{-\sqrt{3}k; 0; \frac{1}{2}k; 4\sqrt{3}k; 6k\}$$

$$2/ -\sqrt{3}k + 0 + \frac{1}{2}k + 4\sqrt{3}k + 6k = 13\sqrt{3} + 8$$

$$K(-\sqrt{3} + 0 + \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} + 6) = 13\sqrt{3} + 8$$

$$K(3\sqrt{3} + 13/2) = 13\sqrt{3} + 8$$

$$K = \frac{13\sqrt{3} + 8}{(3\sqrt{3} + \frac{13}{2})} = \frac{13\sqrt{3} + 8}{(6\sqrt{3} + 13)/2} = \frac{26\sqrt{3} + 16}{6\sqrt{3} + 13}$$

$$= \frac{(26\sqrt{3} + 16)(6\sqrt{3} - 13)}{36 \times 3 - 13^2} = \frac{156 \times 3 - 338\sqrt{3} + 96\sqrt{3} - 208}{-61}$$

$$k = \frac{260 - 238\sqrt{3}}{-61}$$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 96

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

Exercice 1

Relever parmi ces nombres, ceux qui sont des nombres décimaux :

$(-2,586)$; $\sqrt{2}$; $37,45\dots$; $\frac{3}{25}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{67}{10}$; $\frac{-\sqrt{144}}{2}$; 15

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 4} = \frac{x}{2} - 1$

Exercice 3

Une équipe de 25 ouvriers a défriché 2 ha de terrain en 8 jours de travail.

- Quelle surface défricheront 30 ouvriers dans le même temps ?
- Quelle surface défricheront 30 ouvriers en 12 jours de travail ?
- Combien d'ouvriers seraient nécessaires pour défricher 2,80 ha en 8 jours ?

Exercice 4

Un père distribue des oranges à ses trois fils.

Il donne, au premier, la moitié de ce qu'il possède et une demi-orange ; au second, la moitié de ce qui lui reste et une demi-orange ; et enfin, au troisième, la moitié de ce qui reste et une demi-orange.

Le père, alors, n'a plus d'orange.

- Combien d'oranges avait le père au début ?
- Quelle est la part de chaque enfant ?

Exercice 5

- On considère deux nombres 120 et 300.
 - donner leur plus grand commun diviseur
 - donner leur plus petit commun multiple
- On considère deux entiers naturels a et b , leur grand commun diviseur est 3 et leur plus petit commun multiple est 60.
 - Quel est le produit $a.b$?
 - Quels sont ces nombres ?

Exercice 6

Soit l'ensemble $A = \{-\sqrt{3} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 4\sqrt{3} ; 6\}$

Les éléments de l'ensemble B sont les images de ceux de A par la fonction linéaire de coefficient k .

- Déterminer l'ensemble B en fonction de k .
- Trouver k sachant que la somme des éléments de B est $13\sqrt{3} + 8$.

CORRECTION IO 1997
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère la fraction $\frac{n+19}{n-7}$ avec $n \in \mathbb{N}$

1/ Déterminons n pour que cette fraction soit égale à un entier naturel.

$\frac{n+19}{n-7} = 1 + \frac{26}{n-7}$. Pour que cette fraction soit égale à un entier naturel, il faut que $n-7$ soit un diviseur de 26.

$26 = 13 \times 2$. Les diviseurs de 26 étant 13 ; 2 et 26. On a :

$$\begin{array}{lll} n-7=2 & \text{ou } n-7=13 & \text{ou } n-7=26 \\ n=9 & n=20 & n=33 \end{array} \quad S = \{9 ; 20 ; 33\}$$

2/ Pour $n=9$ $\frac{n+19}{n-7} = \frac{9+19}{9-7} = \frac{28}{2} = 14$ Pour $n=33$ $\frac{n+19}{n-7} = \frac{33+19}{33-7} = 2$

Pour $n=20$ $\frac{n+19}{n-7} = \frac{20+19}{13} = 3$

EXERCICE 2

Déterminons la consommation totale en eau de tous les élèves au cours de l'année scolaire.

Soit "C" cette consommation.

$$C = (212 \times 65) \times 178 = 2.452.840 \text{ cl}$$

$$0,845 \text{ dm}^3 \Leftrightarrow 0,845 \text{ l} = 84,5 \text{ cl}$$

Déterminons le nombre de fois qu'il aura fallu remplir la citerne au cours de l'année scolaire. Soit "n" ce nombre de fois.

$$n = \frac{2.452.840}{84,5} = 29027,6 \quad \text{Il aura fallu remplir la citerne 29028 fois.}$$

EXERCICE 3

1^{ère} façon : - Construire un cercle et un rayon de ce cercle.

- A partir de ce rayon et du centre, construire tous les angles de mes $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
 - Relier tous les points d'intersection, des frontières des différents secteurs avec le cercle.
 - Effacer tous les arcs de cercle et tous les angles construits.
- On obtient un pentagone régulier.

2^{ème} façon : - Construire un angle de $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

- A partir du sommet de cet angle construire tous les autres angles de 72°
 - Toujours à partir du sommet de tous les angles, mesurer des segments de même mesure sur chacune des demi-droites délimitant les angles.
 - Relier les sommets de ces segments
 - En dehors des liaisons des différents sommets des segments, effacer tous.
- On obtient ainsi un pentagone régulier.

Pour le polygone de 10 côtés, faire la construction avec un angle de mes $360^\circ/10 = 36^\circ$

EXERCICE 4

$$\text{PGCD}(a; b) = 354 \Rightarrow \begin{aligned} a &= 354 \times \alpha & \alpha \in \mathbb{N} \\ b &= 354 \times \beta & \beta \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 354 \alpha + 354 \beta \\ &= 354 (\alpha + \beta) = 5664 \\ \alpha + \beta &= \frac{5664}{354} = 16 \end{aligned}$$

Toutes les paires $\{\alpha; \beta\}$ sont : $\{16; 0\}; \{15; 1\}; \{14; 2\}; \{13; 3\}; \{12; 4\}; \{11; 5\}$
 $\{10; 6\}; \{9; 7\}; \{8; 8\}$

On doit retenir les paires dont les éléments n'ont pas de diviseurs autres que 1 en commun.
 on a donc $\{15; 1\}; \{13; 3\}; \{11; 5\}; \{9; 7\}$

$$\begin{aligned} a &= 354 \times 15 = 5310 & a &= 354 \times 13 = 4602 & a &= 354 \times 11 = 3894 & a &= 354 \times 9 = 3186 \\ b &= 354 \times 1 = 354 & b &= 354 \times 3 = 1062 & b &= 354 \times 5 = 1770 & b &= 354 \times 7 = 2478 \end{aligned}$$

tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels sont :

$$S = \{(5310; 354); (354; 5310); (4602; 1062); (1062; 4602); (3894; 1770); (1770; 3894); (3186; 2478); (2478; 3186)\}$$

CORRECTION IO 1998 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

$$589\text{kg} = 0\text{t } 589\text{kg} \text{ soit } 0,589\text{t.}$$

$$14,4 \text{ a} = 14,4 \text{ dam}^2$$

$$9,471 \text{ hm}^2 = 94710 \text{ ca}$$

$$16,250 \text{ m}^2 = 0,0016250 \text{ ha}$$

$$316\,800 \text{ mm}^2 = 31,68 \text{ cl}$$

$$12\text{hl} = 1,2 \text{ m}^3$$

$$2400 \text{ m}^3 = 240\,000 \text{ dal}$$

EXERCICE 2

$$299 = 13 \times 23 \quad 247 = 13 \times 19 \quad 221 = 13 \times 17$$

1°/ La longueur de chaque morceau.

PGCD (299 ; 247 ; 221) = 13. Donc la longueur de chaque morceau est de 13 cm.

2°/ Le nombre de morceaux qu'on aura :

$$N = 23 + 19 + 17 = 59. \text{ On aura donc } 59 \text{ morceaux.}$$

EXERCICE 3

- Si les termes de ce triplet (a, a + 4b, 5a + 2b) sont des termes consécutifs de suite arithmétique, tel que $\mu_0 = a$, $\mu_1 = a + 4b$, $\mu_2 = 5a + 2b$, la raison r de cette suite se calcule comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 - \mu_0 = a + 4b - a = 4b = r \\ \mu_2 - \mu_1 = (5a + 2b) - (a + 4b) = 4a - 2b = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4a - 2b = 4b \Rightarrow 4a - 6b = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{array}$$

$$\boxed{b = \frac{2}{3}a}$$

- Si les termes de ce triplet (b+3, 3a+1, 6a+b) sont des termes consécutifs de suite géométrique, tel que $v_0 = b+3$, $v_1 = 3a+1$, $v_2 = 6a+b$, la raison q de cette suite se calcule comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{v_1}{v_0} = \frac{3a+1}{b+3} = q \\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{6a+b}{3a+1} = q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3a+1}{b+3} = \frac{6a+b}{3a+1} \Rightarrow (3a+1)^2 = (b+3)(6a+b) \\ \Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 = 6ab + b^2 + 18a + 3b \\ \Rightarrow 9a^2 - 12a + 1 - 6ab - b^2 - 3b = 0 \quad (\alpha) \end{array}$$

Dans l'équation (α) remplaçons b par sa valeur ($b = \frac{2}{3}a$) on a :

$$9a^2 - 12a + 1 - 6a\left(\frac{2}{3}a\right) - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}a\right) = 0$$

$$9a^2 - 12a + 1 - 4a^2 - \frac{4}{9}a^2 - 2a = 0$$

$$\left(9 - 4 - \frac{4}{9}\right)a^2 - 14a + 1 = 0 \Rightarrow \frac{41}{9}a^2 - 14a + 1 = 0$$

$$\frac{41}{9}a^2 - 14a + 1 = 0 \Rightarrow 41a^2 - 126a + 9 = 0$$

Réolvons cette équation du 2nd degré pour déterminer a

$$41a^2 - 126a + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{126 - 120}{82} = \frac{3}{41} \quad a_1 = \frac{3}{41}$$

$$= 15.876 - 1476$$

$$= 14.400$$

$$a_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a = \frac{126 - 120}{82} = \frac{6}{82} = 3 \quad a_2 = 3$$

$$\sqrt{\Delta} = 120$$

Déterminons les valeurs de b.

$$b = \frac{2}{3} a$$

$$b_1 = \frac{2}{3} a_1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{41} = \frac{2}{41} \quad b_1 = \frac{2}{41}$$

$$b_2 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \quad b_2 = 2$$

on a donc finalement deux valeurs possible de a : $a_1 = \frac{3}{41}$ et $a_2 = 3$ et deux valeurs

possibles de b : $b_1 = \frac{2}{41}$ et $b_2 = 2$.

Comme on le voit pour $a = 3$, $b = 2$. Pour ces valeurs de a et b déterminons les termes des deux suites :

$$\mu_0 = a = 3$$

$$\sqrt{0} = b + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\mu_1 = a + 4b = 3 + 8 = 11$$

$$\sqrt{1} = 3a + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$\mu_2 = 5a + 2b = 5 \times 3 + 2 \times 2 = 19$$

$$\sqrt{2} = 6a + b = 6 \times 3 + 2 = 20$$

Le triplet est donc (3; 11; 19)

le triplet est donc (5 ; 10 ; 20)

EXERCICE 4

Etudions et représentons graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \longrightarrow -2x^2 + x + 1$$

$$g'(x) = -4x + 1$$

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$-4x + 1 = 0 \iff x = 1/4$$

$$g(x) = 0 \iff -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = (-1 - 3)/-4 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_2 = (-1 + 3)/-4 = -1/2$$

Etudions les limites

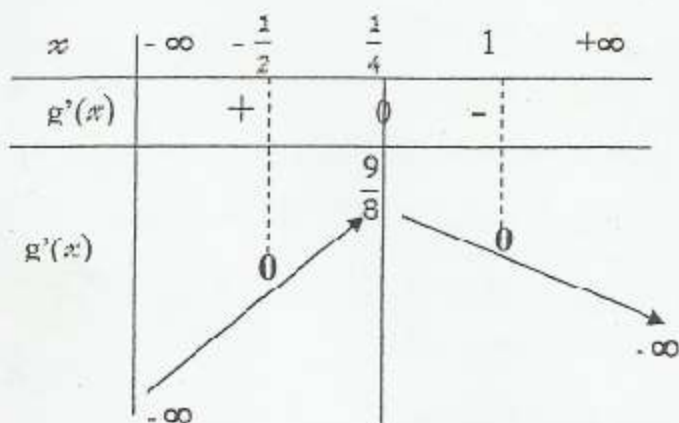
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

Tableau de variation



$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}\right) &= -2x\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1 \\ &= -2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

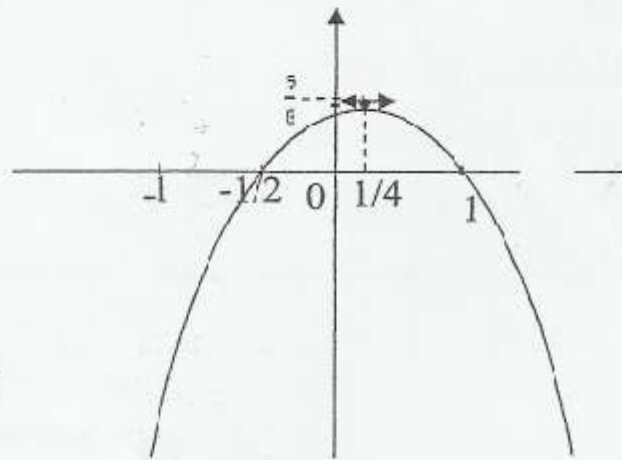
$$g(x) = -2x^2 + x + 1$$

$$\begin{aligned} g(x-2) &= -2(x-2)^2 + (x-2) + 1 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) + (x-2) + 1 \\ &= -2x^2 + 8x - 8 + x - 2 + 1 \\ &= -2x^2 + 9x - 9 \text{ on a donc } g(x-2) = g_1(x) \end{aligned}$$

On obtient la courbe de g_1 (εg_1)

Par la translation de vecteur $\vec{v}(-2; 0)$

Représentation graphique



CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 98

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE I

Convertir

589 kg.....	kg
14,4a.....	dam ²
9,471 hm ²	ca
16,250 m ²	ha
316800 mm ³	cl
12hl.....	m ³
2400 m ³	dal

EXERCICE II

Un cordonnier dispose de 3 cordes de longueur respectives 299 cm, 247 cm et 221 cm. Il veut les découper en morceaux de sorte que tous les morceaux aient la même longueur. 1 - Quelle sera la longueur de chaque morceau?

2- Combien de morceaux aura t-il?

EXERCICE III

Trouvez les réels a et b pour que les triplets (a, a + 4b, 5a + 2b) et (b + 3, 3a + 1, 6a + b) soient respectivement des termes consécutifs de suites arithmétiques et géométriques.

EXERCICE IV

Etudiez et représentez graphiquement la fonction suivante:

$$g: x \longrightarrow -2x^2 + x + 1$$

Déduisez de cg (courbe représentative de g), la courbe de g₁ (cg₁) avec

$$g_1 = -2x^2 + 9x - 9$$

N.B: Calculez g(x-2)

**CORRECTION IO 1999
MATHÉMATIQUES**

EXERCICE 1

Soit x l'âge de l'aîné, y l'âge du cadet et z l'âge du dernier.

$$x = 2y \implies y = \frac{x}{2}$$

$$x = 3z \implies z = \frac{x}{3}$$

$$x+1 = (y+1) + (z+1)$$

$$x+1 - y - 1 - z - 1 = x - y - z - 1 = 0$$

$$x - x/2 - x/3 - 1 = 0$$

$$6x - 3x - 2x - 6 = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad x = 6, \text{ l'aîné a donc 6 ans}$$

$$y = x/2 = 6/2 = 3 \text{ le cadet a 3 ans}$$

$$z = x/3 = 6/3 = 2 \text{ le dernier a 2 ans}$$

L'aîné a donc 6 ans, le cadet 3 ans et le dernier 2 ans.

EXERCICE 2

$$\mu_0 = 1/2 \quad 4\mu_{n+1} - 2\mu_n = 3$$

1/ Calculons μ_1, μ_2, μ_3

$$4\mu_{0+1} - 2\mu_0 = 3$$

$$4\mu_1 = 3 + 2\mu_0$$

$$4\mu_1 = 3 + 2 \times 1/2$$

$$4\mu_1 = 4$$

$$\boxed{\mu_1 = 1}$$

$$4\mu_{1+1} - 2\mu_1 = 3$$

$$4\mu_2 - 2\mu_1 = 3$$

$$4\mu_2 = 3 + 2\mu_1$$

$$4\mu_2 = 5$$

$$\boxed{\mu_2 = 5/4}$$

$$4\mu_{2+1} - 2\mu_2 = 3$$

$$4\mu_3 - 2\mu_2 = 3$$

$$4\mu_3 = 3 + 2\mu_2$$

$$4\mu_3 = 3 + 2 \times 5/4$$

$$4\mu_3 = 3 + 5/2 = 6/2 + 5/2 = 11/2$$

$$\boxed{\mu_3 = 11/8}$$

2/ on pose $\sqrt{n} = 2\mu_n - 3$. Démontrons que $(\sqrt{n})$ est une suite géométrique.

$$\sqrt{n+1} - 2\mu_{n+1} - 3$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = (2\mu_{n+1} - 3) / (2\mu_n - 3)$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = [2(3 + 2\mu_n)/4 - 3] / (2\mu_n - 3)$$

$$= (3 + 2\mu_n - 6) / 2(2\mu_n - 3)$$

$$= (2\mu_n - 3) / (4\mu_n - 6)$$

$$= (2\mu_n - 3) / 2(2\mu_n - 3)$$

$$\sqrt{n+1} / \sqrt{n} = 1/2$$

$$4\mu_{n+1} - 2\mu_n = 3$$

$$4\mu_{n+1} = 3 + 2\mu_n$$

$$\text{car } \mu_{n+1} = (3 + 2\mu_n) / 4$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1/2 \implies \boxed{\sqrt{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{n}} \text{ la suite } (\sqrt{n}) \text{ est donc une}$$

suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$$\sqrt{0} = 2\mu_0 - 3 = 2 \times 1/2 - 3 = -2 \quad \sqrt{0} = -2.$$

Déduisons-en des expressions de $(\sqrt[n]{n})$ et (μ_n) .

$$\sqrt[n]{n} = q^n \sqrt[n]{0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-2)$$

$$\sqrt[n]{n} = 2^{-n} \times 2 \times (-1) = -2^{-n+1}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n} = -2^{-n+1}}$$

$$\sqrt[n]{n} = 2\mu_n - 3$$

$$2\mu_n = \sqrt[n]{n} + 3$$

$$\mu_n = \frac{1}{2}(\sqrt[n]{n} + 3)$$

$$\mu_n = \frac{1}{2} \times \sqrt[n]{n} + \frac{3}{2}$$

$$\mu_n = \frac{1}{2} \times (-2^{-n+1}) + \frac{3}{2}$$

$$= 2^{-1} \times 2^{-n+1} \times (-1) + \frac{3}{2}$$

$$= 2^{-n} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\mu_n = \frac{3}{2} - 2^{-n}}$$

EXERCICE 3

5,61 m = 561 cm et 8,58 m = 858 cm.

Trouvons un diviseur commun à 561 et 858 qui est compris entre 10 et 20 cm.

$$561 = 3 \times 17 \times 11$$

$$858 = 3 \times 2 \times 13 \times 11$$

Il y a donc 3 diviseurs communs à 561 et 858, se sont : 3 ; 11 et $11 \times 3 = 33$

11 cm étant compris entre 10 et 20 cm, 11 cm est donc la dimension d'un carreau.

le nombre de carreaux N utilisés est donc :

$$N = (3 \times 17) \times (3 \times 2 \times 13)$$

$$= 51 \times 78$$

$$= 3.978 \text{ carreaux.}$$

EXERCICE 4

Comme multiples de 9, on peut citer : 9 ; 18 ; 27 ...

- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 9$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 7$. On a donc : (7 ; 0), (6 ; 1), (1 ; 6), (5 ; 2), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3).
- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 18$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 16$. On a donc : (8 ; 8), (9 ; 7), (7 ; 9).
- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 27$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 25$. x et y étant des chiffres, cela est impossible. L'ensemble des couples $(x ; y)$ pour que A soit divisible par 9 sont :

(7 ; 0), (6 ; 1), (1 ; 6), (5 ; 2), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (8 ; 8), (9 ; 7), (7 ; 9).

NB : Le couple (0 ; 7) ne peut pas être pris en compte, parce que si $x = 0$, A est un nombre à deux chiffres et non 3.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 99

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE I

Déterminer l'âge de trois frères sachant que l'âge de l'aîné est le double de celui du cadet et le triple de celui du dernier et que dans un an, l'âge de l'aîné sera la somme des âges des deux autres.

EXERCICE II

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 1/2$ et la relation de récurrence $4U_{n+1} - 2U_n = 3$.

1) Calculer U_1 , U_2 , U_3

2) on pose $V_n = 2U_n - 3$. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n .

EXERCICE III

On a carrelé entièrement le sol d'une pièce rectangulaire de 5,61 m sur 8,58 m en n'utilisant que des carreaux entiers.

Quelle est la dimension d'un carreau sachant qu'elle est comprise entre 10 et 20 cm? Combien de carreaux a-t-on utilisés?

EXERCICE IV

Soit A un entier naturel de trois chiffres écrit dans la notation décimale par $A = \overline{x2y}$

1) Trouver l'ensemble des couples (x,y) pour que A soit divisible par 9.

CORRECTION IO 2001
MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

a, b, c étant les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a :

$$a+b+c = \frac{q^3-1}{q-1} \cdot a$$

$$b = aq$$

$$c = (aq) \times q = aq^2 \text{ on a donc } c - a = aq^2 - a = (q^2 - 1) \cdot a$$

Le système :
$$\begin{cases} a+b+c = 312 \\ c - a = 192 \end{cases} \text{ devient } \begin{cases} \frac{q^3-1}{q-1} \cdot a = 312 \\ (q^2-1) \cdot a = 192 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{q^3-1}{q-1} \cdot a = 312 \\ (q^2-1) \cdot a = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(q-1)(q^2+q+1)}{q-1} \cdot a = 312 \\ (q^2-1) \cdot a = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (q^2+q+1) \cdot a = 312 \\ (q^2-1) \cdot a = 192 \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{(q^2+q+1) \cdot a}{(q^2-1) \cdot a} = 312 / 192$$

$$\begin{aligned} 312 &= 2^3 \times 3 \times 13 \\ 192 &= 2^6 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2+q+1}{q^2-1} = 13/8$$

$$312 / 192 = 13/8$$

$$\Leftrightarrow 8(q^2+q+1) = 13(q^2-1)$$

$$\Rightarrow 8q^2 + 8q + 8 = 13q^2 - 13$$

$$\Rightarrow -5q^2 + 8q + 21 = 0$$

$$\Delta = 64 + 420 = 484$$

$$q_1 = (-8-22) / -10$$

$$q_2 = (-8+22) / -10$$

$$\sqrt{\Delta} = 22$$

$$q_1 = 3$$

$$q_2 = -1,4$$

La raison de cette suite est donc $\boxed{q=3}$

Déterminons le premier terme, a : $(2) : (q^2-1) \cdot a = 192$

$$(9-1) \cdot a = 192$$

$$a = 192/8 = 24 \quad \boxed{a=24}$$

Déterminons maintenant les autres termes :

$$a = 24 \quad q = 3 \text{ donc } b = aq = 24 \times 3 = 72$$

$$\boxed{b=72}$$

$$c = bq = 72 \times 3 = 216$$

$$\boxed{c=216}$$

EXERCICE 2

Soit x la somme d'argent qu'ont à se partager les trois personnes :

$$\text{Part de la première : } \frac{2}{3}x - 600$$

$$\text{Part de la deuxième : } \frac{1}{4}x$$

$$\text{Part de la troisième : } \frac{1}{2}x - 400$$

1/ La part totale (x) à partager :

$$\frac{2}{3}x - 600 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x - 400 = x$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x - x = 1000$$

$$\frac{8x+3x+6x-12x}{12} = 1000$$

$$\frac{5x}{12} = 1000$$

$$5x = 12000$$

$$x = 2400$$

2/ La somme totale à partager est donc de 2 400F.

Part du premier : $\frac{2}{3} \times 2400 - 600 = 1000$ F

Part de deuxième : $\frac{1}{4} \times 2400 = 600$ F

Part de troisième : $\frac{1}{2} \times 2400 - 400 = 800$ F

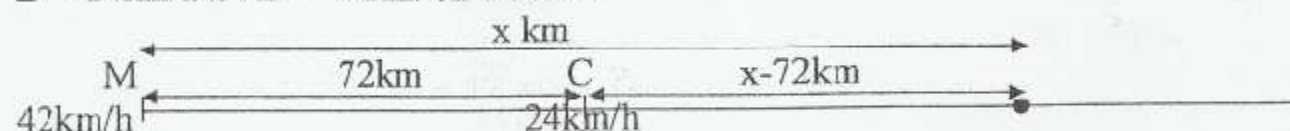
EXERCICE 3

Soit t le temps mis par chacun d'eux, après le départ du motocycliste pour arriver au point de rencontre.

Soit x la distance parcourue par le motocycliste, pour arriver au point de rencontre. $\sqrt{1}$, la vitesse du cycliste et $\sqrt{2}$ celle du motocycliste.

Calculons la distance parcourue par le cycliste après 3h de route

$D = 24\text{km/h} \times 3\text{h} = 72\text{km}$. on a donc :



La distance parcourue par le motocycliste est donc $x = \sqrt{2} \times t$

La distance parcourue par le cycliste après le départ du motocycliste est donc $x-72 = \sqrt{1} \times t$

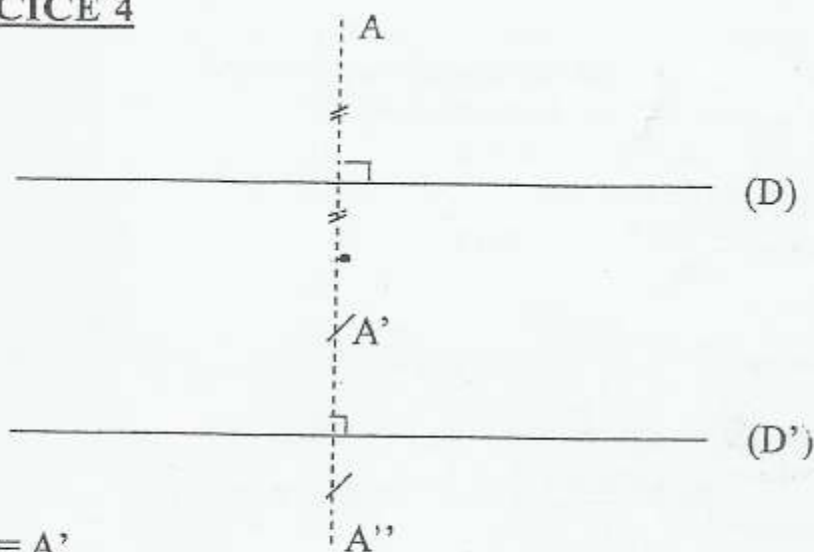
Réolvons donc le système suivant :

$$\begin{cases} \textcircled{1} \sqrt{2} \times t = x \\ \textcircled{2} \sqrt{1} \times t = x-72 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \begin{cases} \sqrt{2}t - \sqrt{1}t = x - (x-72) \\ \sqrt{2}t = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = \frac{72}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} = \frac{72}{42-24} = 4\text{h} \\ x = 42 \times 4 = 168 \text{ km.} \end{cases}$$

Le motocycliste aura mis 4 heures de temps pour rejoindre le cycliste à une distance de 168 km de Daloa.

EXERCICE 4



$$S_{(D)}(A) = A'$$

$$S'_{(D)}(A') = A'' \quad S'_{(D)} \circ S_{(D)}(A) = A''$$

La composée de deux symétries orthogonales dont les droites sont parallèles, est une translation.

Donc l'application $f : S'_{(D)} \circ S_{(D)}$ est une translation.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2001

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE I

Soient a , b , c trois termes consécutifs d'une suite géométrique.
Déterminer a , b , c si :

$$\begin{cases} a+b+c=312 \\ c-a=192 \end{cases}$$

EXERCICE II

Trois personnes ont à se partager une somme d'argent. La première en prend les deux tiers moins 600 F; la deuxième en prend le quart et la troisième, la moitié moins 400 F.

- 1) Quelle est la somme totale à partager?
- 2) Quelle est la part de chacune d'entre elles?

EXERCICE III

Un cycliste part de Daloa à la vitesse de 24 km/h. Trois heures plus tard, un motocycliste quitte le même lieu à la vitesse de 42 km/h. Dans combien de temps aura-t-il rejoint le cycliste et à quelle distance de Daloa?

EXERCICE IV

Soient (D) et (D') deux droites parallèles. $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (D) et $S'_{(D)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la (D') .

Déterminer l'application $f: S'_{(D)} \circ S_{(D)}$

CORRECTION IO 2002 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 2002

Soient L la longueur du rectangle et ℓ sa largeur.

Sont périmètre $P = (\ell + L) \times 2 = 50$ * $\ell + L = 25$

1°) Déterminons les dimensions du rectangle ABCD.

$$L \times \ell = (L+2) \times (\ell-1)$$

$$L\ell = L\ell - L + 2\ell - 2$$

$$-L + 2\ell - 2 = 0$$

$$\text{or } \ell + L = 25$$

$$-(25 - \ell) + 2\ell - 2 = 0 \quad \text{car} \quad L = 25 - \ell$$

$$-25 + \ell + 2\ell - 2 = 0$$

$$3\ell = 27$$

$$\boxed{\ell = 9 \text{ cm}}$$

$$L = 25 - \ell = 25 - 9 = 16$$

$$\boxed{L = 16 \text{ cm}}$$

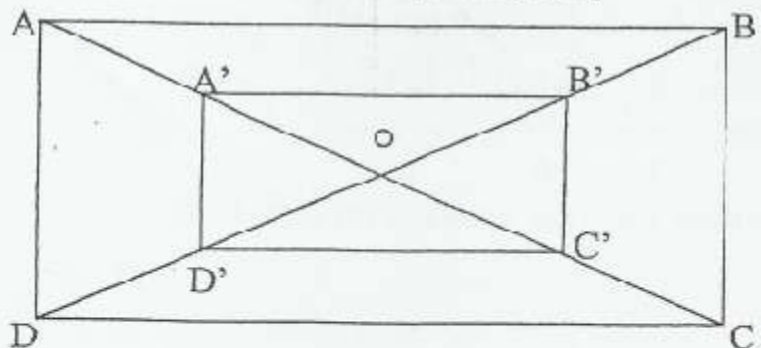
2°)

$$\vec{OA'} = \frac{1}{2} \vec{OA}$$

$$\vec{OB'} = \frac{1}{2} \vec{OB}$$

$$\vec{OC'} = \frac{1}{2} \vec{OC}$$

$$\vec{OD'} = \frac{1}{2} \vec{OD}$$



EXERCICE 2

Soit k la part du cinquième coureur. Les parts des autres coureurs seront :

$$1^{\text{er}} : k \times 5$$

$$2^{\text{ème}} : k \times 4$$

$$3^{\text{ème}} : k \times 3$$

$$4^{\text{ème}} : k \times 2$$

$$5^{\text{ème}} : k \times 1$$

La somme (S) des parts est donc :

$$S = 5k + 4k + 3k + 2k + k$$

$$= 15k = 137.000 \text{ F}$$

$$k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \simeq 9\,133 \text{ F}$$

La part du cinquième coureur est donc $k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \simeq 9\,133 \text{ F}$.

La part du quatrième coureur est donc $2k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \times 2 \simeq 18\,266 \text{ F}$.

La part du troisième coureur est donc $3k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \times 3 = 27\,400 \text{ F}$.

La part du deuxième coureur est donc $4k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \times 4 \simeq 36\,533 \text{ F}$.

La part du premier est donc $5k = \frac{137.000 \text{ F}}{15} \times 5 \simeq 45\,666 \text{ F}$.

EXERCICE 3

Soit les nombres 1234, 2345, 6789 dont les 4 chiffres sont rangés par ordre de grandeur croissantes. Les nombres correspondants respectivement à ces premiers nombres dont les chiffres sont rangés par ordre de grandeur décroissante sont : 4321, 5432, 9876.

$$\text{Faisons les différences : } \begin{array}{r} 4321 \\ -1234 \\ \hline 3087 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5432 \\ -2345 \\ \hline 3087 \end{array} \quad 9876-6789 = 3087$$

De manière générale, soit x : Le nombre de millièmes

$x+1$: Le nombre de centaines

$x+2$: Le nombre de dizaines

$x+3$: Le nombre de d'unités.

x ; $x+1$; $x+2$; $x+3$ étant des chiffres, les deux nombres N_1 et N_2 de 4 chiffres rangés par ordre croissant et décroissant seront :

Croissant : $N_1 = x(x+1)(x+2)(x+3)$

Décroissant : $N_2 = (x+3)(x+2)(x+1)x$

Faisons la soustraction des deux nombres :

$$\begin{array}{r} (x+3)(x+2)(x+1)^{+10} (x)^{+10} \\ - x(x+1)^{+1} (x+2)^{+1} (x+3) \\ \hline N_2 - N_1 = \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 8 & 7 \end{array} \end{array}$$

La différence entre ces nombres est donc 3087.

EXERCICE 4

a) Soit x et y les termes de cette fraction. Trouver x et y amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x+y=110 \end{cases} \xrightarrow{x(+2)} \begin{cases} 3x-2y=0 \\ x+y=110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+2y=220 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 2x+2y=220 \\ \hline 5x=220 \\ \boxed{x=44} \end{array} \quad \begin{array}{r} y=110-x \\ y=110-44 \\ \boxed{y=66} \end{array}$$

La fraction est donc $\frac{44}{66}$

Comme on le voit $44+66=110$ et $\frac{44}{66} = \frac{22 \times 2}{22 \times 3} = \frac{2}{3}$

b) Soit $P(x) = 4x^3 - 32x^2 + 63x$
 $= x(4x^2 - 32x + 63)$

Soit $Q(x) = 4x^2 - 32x + 63$

Réolvons $Q(x) = 4x^2 - 32x + 63 = 0$

$\Delta = 1024 - 1008 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$x_1 = \frac{32-4}{8} = 3,5 \quad x_2 = (32+4)/8 = 4,5$

Factorisons $Q(x)$: $Q(x) = 4(x-3,5)(x-4,5)$

Déduisons la factorisation de $p(x)$.

$P(x) = x(4x^2 - 32x + 63)$

$= x \times Q(x)$

$= x \times 4(x-3,5)(x-4,5)$

$\boxed{P(x) = 4x(x-3,5)(x-4,5)}$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2002

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE 1

Un rectangle ABCD a pour périmètre 50 cm. Quand on augmente la longueur de 2 cm et on diminue la largeur de 1 cm, on obtient un nouveau rectangle de même aire que ABCD.

- 1) Quelles sont les dimensions du rectangle ABCD ?
- 2) Soit O le centre du cercle circonscrit au rectangle ABCD.
Construire le rectangle.

A'B'C'D' image par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

EXERCICE 2

Les cinq premiers d'une compétition sportive sont récompensés avec une somme de 137000 FCFA. Sachant que le partage se fait proportionnellement au mérite, trouver la part de chacun.

EXERCICE 3

Un nombre s'écrit avec quatre (4) chiffres consécutifs rangés par ordre de grandeur croissante. On intervertit l'ordre des chiffres en les rangeant par ordre de grandeur décroissante. Quelle est la différence entre ces deux nombres ?

EXERCICE 4

- a) Trouver une fraction égale à $\frac{2}{3}$ dont la somme des termes est 110.
- b) Soit $P(x) = 4x^3 - 32x^2 + 63x$. Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois (3) facteurs.

CORRECTION IO 2003 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Soit a le dividende, et b le diviseur de cette division euclidienne. Prenons c comme quotient. On aura donc :

$$\begin{cases} 1 \int a = (b \times c) + 73 \\ 2 \int a + 9 = (c + 1) \times b + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2 \int -9 = -b + 73 \\ 1 \int a = cb + 73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 82 \\ a = 82c - 73 \end{cases}$$

La valeur de a dépend de celle du quotient c .

Si $c = 1$ alors $a = 82 \times 1 - 73 = 155$

Si $c = 0$ alors $a = 82 \times 0 + 73 = 73$

Pour $c \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$. $S_a = \mathbb{R}_+$

EXERCICE 2

Soit x cm la longueur initiale du côté du carré ABCD

— $(x + 3)$ cm la longueur du côté du carré AEFG

L'aire de la surface du carré ABCD est : $A_{ABCD} = x \times x = x^2 \text{ cm}^2$

L'aire de la surface du carré AEFG est : $A_{AEFG} = (x + 3)^2 = (x^2 + 6x + 9) \text{ cm}^2$

On sait que $A_{AEFG} = A_{ABCD} + 48$

$$A_{AEFG} - A_{ABCD} = 48$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 48$$

$$6x + 9 = 48$$

$$x = \frac{48 - 9}{6} = 6,5 \text{ cm}$$

a) La mesure de la longueur du côté du carré ABCD est $x = 6,5 \text{ cm}$

b) La mesure de l'aire de la surface du carré ABCD est $x^2 = 6,5^2 = 42,25 \text{ cm}^2$

c) La mesure de l'aire de la surface du carré AEFG est : $(x + 3)^2 = 9,5^2 = 90,25 \text{ cm}^2$

2. a) Soit h , la hauteur de la boîte, et c le côté de la surface de base.

$$h = 3 \text{ cm} \qquad h = 3 \text{ cm}$$

$$c = 9,5 - (3 + 3) = 3,5 \text{ cm} \qquad c = 3,5 \text{ cm}$$

b) Soit V le volume de la boîte et S_B la surface de base.

$$V = S_B \times h = (c \times c) \times h = 3,5 \times 3,5 \times 3 = 36,75 \text{ cm}^3. \quad \boxed{V = 36,75 \text{ cm}^3}$$

EXERCICE 3

$$a * b = a^2 + b^2$$

1/ Cette opération est-elle commutative ?

$$\begin{aligned} a * b &= a^2 + b^2 & a^2 + b^2 &= b^2 + a^2 \text{ donc } a * b = b * a & \text{l'opération est donc} \\ b * a &= b^2 + a^2 & & & \text{commutative.} \end{aligned}$$

2/ Cette opération est-elle associative ?

$$(a * b) * c = (a^2 + b^2) * c = (a^2 + b^2)^2 + c^2$$

$$a * (b * c) = a^2 + (b * c)^2 = a^2 + (b^2 + c^2)^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 + c^2 \neq a^2 + (b^2 + c^2)^2 \text{ donc } (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

L'opération n'est donc pas associative.

3/ Cette opération est-elle munie d'un élément neutre ?

Si b est l'élément neutre alors on aura : $a * b = a$

Déterminons b.

$$a * b = a$$

$$a^2 + b^2 = a$$

$$b^2 = a - a^2$$

$$b^2 = a(1-a)$$

$$b = \sqrt{a(1-a)} \text{ or } \forall a \in]1; +\infty[, b \text{ n'existe pas.}$$

L'opération n'est donc pas munie d'un élément neutre.

EXERCICE 4

$$1/ \begin{cases} a + b = 1 \\ a \times b = -2 \\ a - a^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a \times (1 - a) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a - a^2 = -2 \end{cases}$$

$$-a^2 + a + 2 = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ donc a existe, ce qui veut dire que b existe.

Déterminons a, puis b.

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 \quad a_1 = \frac{1-3}{2} \quad a_2 = \frac{1+3}{2}$$

$$\sqrt{\Delta} = 3 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 2$$

$$b_1 = 1 - a_1 = 1 - (-1) = 2 \quad \text{si } a = -1, b = 2$$

$$b_2 = 1 - a_2 = 1 - 2 = -1 \quad \text{si } a = 2, b = -1$$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2003

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE 1

La division euclidienne de a par b , a pour reste 73. En ajoutant 9 au dividende, le quotient augmente de 1 et le reste devient nul.

Trouver : 1) la valeur de b
2) les valeurs de a

EXERCICE 2

En augmentant la longueur du côté d'un carré ABCD de 3 cm, on obtient le carré AEFG dont l'aire de la surface surpasse de 48 cm^2 celle du carré ABCD.

1) calculer :

- a) la mesure de la longueur du côté du carré ABCD
- b) la mesure de l'aire de la surface du carré ABCD
- c) la mesure de l'aire de la surface du carré AEFG.

Aux quatre coins du carré AEFG, on découpe quatre petits carrés dont la mesure de la longueur du côté est 3 cm, pour obtenir par collage une boîte ouverte.

2) Calculer :

- a) les dimensions de la boîte
- b) le volume de la boîte.

EXERCICE 3

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère l'opération interne $*$, définie par $a*b = a^2 + b^2$. cette opération est-elle :

- 1) commutative ?
- 2) Associative ?
- 3) munie d'un élément neutre ?

EXERCICE 4

Soient deux réels a et b tels que leur somme est égale à 1 et leur produit est égale à -2.

- 1) Montrer que ces 2 nombres existent.
- 2) Déterminer a , puis b .

**CORRECTION IO 2004
MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1

$$4512 = 3 \times 2^5 \times 47 \quad 4128 = 3 \times 2^5 \times 43$$

Les diviseurs communs de 4512 et 4128 sont :

$$1; 2; 3; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 3 \times 2; 3 \times 2^2; 3 \times 2^3; 3 \times 2^4; 3 \times 2^5$$

Soit : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96.

$$4525 = 4512 + 13 = 3 \times 2^5 \times 47 + 13$$

$$4147 = 4128 + 19 = 3 \times 2^5 \times 43 + 19$$

- Donc en divisant 4525 et 4147 par 3 les quotients seront respectivement $2^5 \times 47$ et $2^5 \times 43$ et les restes respectivement 13 et 19.
- En divisant 4525 et 4147 par 3×2^5 les quotients seront respectivement 47 et 43 et les restes respectivement 13 et 19.
- En divisant 4525 et 4147 par 2^5 les quotients seront respectivement 3×47 et 3×43 et les restes respectivement 13 et 19.

Dans ces 3 exemples, d, prend les valeurs 3 ; 3×2^5 ; 2^5 le nombre total de solutions de d, est donc l'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128. Soit 12 solutions comme vu précédemment.

EXERCICE 2

Soit x l'effectif total de la classe.

$$\frac{x \times 65}{100} = 26 \Rightarrow x = \frac{26 \times 100}{65} = 40$$

Cette classe compte 40 élèves.

Le nombre d'élève admis au CEPE

$$\frac{40 \times 40}{100} = 16$$

Il y a 16 admis au CEPE

Le nombre d'élève admis au concours d'entrée en sixième.

$$\frac{40 \times 25}{100} = 10$$

Il y a 10 admis au concours d'entrée en sixième.

EXERCICE 3

1/ Le nombre total de possibilité est :

$$A_4^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Ce chef de famille a donc 504 possibilités d'offrir une volaille à chacun de ses enfants.

2/ Le nombre de cas où les trois volailles offertes sont de la même espèce animale.

$$A_4^3 + A_3^3 = \frac{4!}{(4-3)!} + \frac{3!}{0!} = 24 + 6 = 30$$

Il y a donc 30 cas où les trois volailles offertes sont de la même espèce animale.

3/ La probabilité pour que chacun des trois enfants reçoive 1 poulet.

$$P = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{24}{504} = \frac{2^3 \times 3}{2^3 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{1}{21}$$

La probabilité pour que chacun des trois enfants reçoive 1 poulet est $\frac{1}{21}$

4/ a) La probabilité pour que parmi les trois volailles offertes il n'y ait aucun canard.

$$P = \frac{A_7^3}{A_9^3} = \frac{A_7^3}{504} = (7! / 4!) / 504 = \frac{7 \times 6 \times 5}{504} = \frac{210}{504} = \frac{5}{12}$$

La probabilité pour que parmi les trois volailles offertes il n'y ait aucun canard est $P = \frac{5}{12}$.

b) La probabilité pour qu'il y ait au moins un canard est : les événements qu'il n'y ait aucun canard et qu'il y ait au moins un canard étant contraire on a donc :

$$P = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \quad . \quad \text{La probabilité pour que parmi les trois volailles il y ait au moins un canard est } P = \frac{7}{12}$$

5/ a) La probabilité pour qu'un seul reçoive un canard.

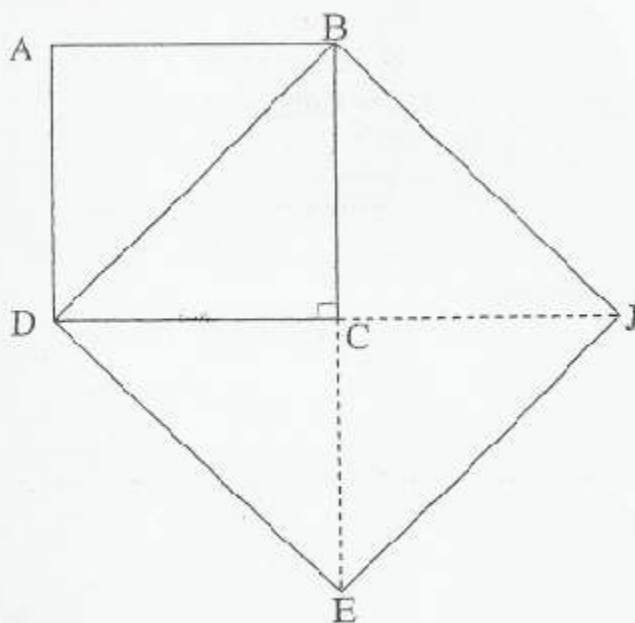
si un a un canard, pour les deux autres, on prendra soit 2 poulets, 2 pintades ou 1 poulet 1 pintade.

$$P = \frac{A_4^2 + A_3^2 + A_2^1 \times A_2^1}{A_9^3} = \frac{12 + 6 + 12}{504} = \frac{30}{504} = \frac{5}{84} \quad \text{on a donc } P = \frac{5}{84}$$

b) La probabilité pour que l'aîné reçoive un canard.

$$P = \frac{A_2^1 \times A_7^2}{A_9^3} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6} \quad \text{on a donc } P = \frac{1}{6}$$

EXERCICE 4



1/ J symétrique de D par rapport à (BC), donc C est milieu de [DJ]

E symétrique de B par rapport à (CD), donc C est milieu de [BE].

ABCD est un carré, donc $(BC) \perp (DC)$, on a alors $(BE) \perp (DJ)$. [BE] et [DJ] étant les diagonales du quadrilatère DBJE, on peut donc dire que les diagonales du quadrilatère DBJE sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu C. DBJE est donc un losange.

2/ Déterminons la mesure d'un côté du losange DBJE.

Considérons le triangle rectangle DCB rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore,

$$DC^2 + CB^2 = DB^2$$

$$x^2 + x^2 = DB^2$$

$$2x^2 = DB^2 \Rightarrow DB = x\sqrt{2} \quad x > 0$$

[DB] étant un côté du losange DBJE, son aire est donc :

$$\mathcal{A} = DB \times DB = x\sqrt{2} \times x\sqrt{2} = 2x^2$$

Conclusion : L'aire du losange DBJE est donc le double de l'aire du carré ABCD

$$\text{car } \mathcal{A}_{ABCD} = x \times x = x^2$$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2004

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE 1

Déterminer, dans N , l'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128.
Trouver un entier naturel d tel que, si l'on divise par d les nombres 4525 et 4147, les restes obtenus soient respectivement 13 et 19.
Préciser le nombre de solutions.

EXERCICE 2

Au contrôle final d'une leçon de mathématique, un maître tenant une classe de CM2 constate que seules 26 ardoises portent une bonne réponse. Il affirme avec raison avoir réussi son cours à 65%. Quel est l'effectif de cette classe ?
En fin d'année, ladite classe obtient 40% de réussite au CEPE et 25% au concours d'entrée en sixième.
Trouve le nombre d'élèves admis à chacun de ces essais.

EXERCICE 3

Un chef de famille possède dans un poulailier traditionnel non transparent 9 volailles dont 4 poulets, 3 pintades et 2 canards. Pour participer à la joie de ses trois enfants qui viennent de réussir brillamment leur année scolaire, il décide d'offrir à chacun d'eux une volaille tirée au hasard du poulailier. Il effectue ainsi trois tirages successifs sans remise.

- 1) Justifier que ce chef de famille a 504 possibilités d'offrir une volaille à chacun de ses enfants,
- 2) Combien y a-t-il de cas où les trois volailles offertes sont de la même espèce animale ?
- 3) Calculer la probabilité pour que chacun des trois enfants reçoive 1 poulet.
- 4) Quelle est la probabilité pour que parmi les trois volailles offertes :
 - a) Il n'y ait aucun canard ?
 - b) Il y ait au moins un canard ?
- 5) Les trois jeunes récipiendaires n'ont d'yeux que pour les canards.
 - a) Calculer la probabilité pour qu'un seul d'entre eux reçoive un canard.
 - b) Quelle est la probabilité pour que l'aîné reçoive un canard ?

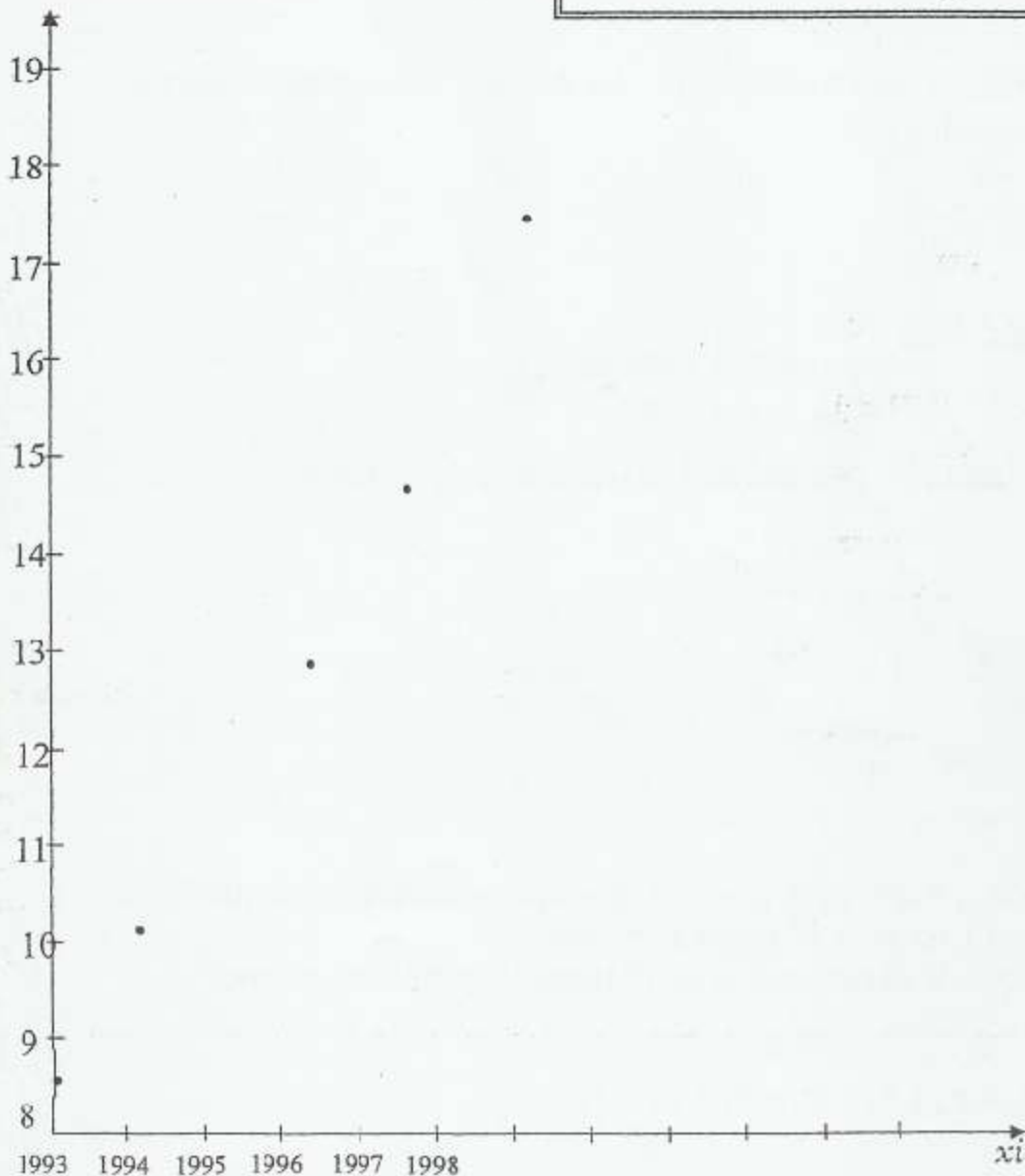
EXERCICE 4

Construire un carré ABCD puis le symétrique J du point D par rapport à la droite (BC) et le symétrique E point B par rapport à la droite (CD).

- 1) Déterminer la nature du quadrilatère DBJE; justifier la réponse.
- 2) Soit X , la mesure de la longueur du côté du carré ABCD.
Exprimez en fonction de x la mesure de l'aire du quadrilatère DBJE et conclure.

**CORRECTION IO 2005
MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1



2/ Soit E_1 : Ensemble des 3 premiers points de coordonnées : (1993 ; 850), (1994 ; 1025), (1995 ; 1125).

E_2 : Ensemble des 3 autres points de coordonnées : (1996 ; 1300), (1997 ; 1450), (1998 ; 1750).

Calcul des coordonnées (x_1, y_1) de G_1

$$x_1 = \frac{1993+1994+1995}{3} \quad y_1 = \frac{805+1025+1125}{3}$$

$$x_1 = 1994 \quad y_1 = 1000$$

Calcul des coordonnées (x_2, y_2) de G_2

$$x_2 = \frac{1996+1997+1998}{3} \quad y_2 = \frac{1300+1450+1750}{3}$$

$$x_2 = 1997 \quad y_2 = 1500$$

(G_1, G_2) est la droite d'ajustement linéaire de nuage de points, déterminons son équation. Son équation étant de la forme $y = ax + b$, $G_1(1994 ; 1000)$ et $G_2(1997 ; 1500)$ étant des points de cette droite on a :

$$\begin{cases} (1) \quad 1000 = 1994a + b \\ (2) \quad 1500 = 1997a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \quad 500 = 3a \\ (1) \quad 1000 = 1994a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{500}{3} \\ b = 1000 - 1994 \times \frac{500}{3} \\ b = -994000/3 \end{cases}$$

$$y = ax + b$$

$$y - \frac{500}{3}x = 994000 / 3$$

$3y = 500x - 994000 \iff 500x - 3y - 994000 = 0$ La droite d'ajustement linéaire du nuage de points a donc pour équation :

$$(G_1 \ G_2) : 500x - 3y - 994000 = 0$$

$$3/ \quad 500x - 3y - 994000 = 0$$

$$3y = 500x - 994000$$

$$y = (500x - 994000)/3$$

Le montant des recettes fiscales de ce pays en l'an 1999 sera :

$$y = (500 \times 1999 - 994000)/3 = \frac{5500}{3} \approx 1833,33$$

les recettes fiscales de ce pays en l'an 1999 sera de 1833,33 milliards de francs.

EXERCICE 2

$$1/ P_2 = P_1 + P_1 \times 0,03$$

$$= P_1(1+0,03)$$

$$P_2 = 1,03 P_1 = 1,03 \times 3000 = 3\,090 \text{ tonnes}$$

$$2/ \quad P_{n+1} = P_n + P_n \times 0,03$$

$$= P_n(1 + 0,03)$$

$$= P_n \times 1,03$$

$$\text{Donc } P_{n+1} = 1,03 P_n$$

$$3/ a) P_{n+1} = 1,03 P_n$$

Cette expression est la forme $V_{n+1} = qV_n$ avec $q = 1,03$. Nous pouvons donc dire que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de 1^{er} terme $P_1 = 3000$.

b) P_n étant une suite géométrique de raison 1,03 et de 1^{er} terme $P_1 = 3000$ on a donc

$$P_n = (1,03)^{n-1} \cdot 3000$$

$$P_n = 3000 \cdot (1,03)^{n-1}$$

$$4/ \text{ Calculons } X = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10}$$

$$S_n = [(a^n - 1) / (a - 1)] \cdot P_1$$

$$X = [(1,03^{10} - 1) / (1,03 - 1)] \times 3000 = 34391,64 \text{ tonnes.}$$

La production totale des 10 premières années de fonctionnement est :

$$X = 34391,64 \text{ tonnes.}$$

EXERCICE 3

$$\begin{aligned} 1/ \quad x - 3 + 8/(x^2+3) &= [(x-3)(x^2+3)+8]/(x^2+3) \\ &= (x^3+3x-3x^2-9+8)/(x^2+3) \\ &= (x^3-3x^2+3x-1)/(x^2+3) = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) = x - 3 + 8/(x^2+3)$$

$$2/ a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3/x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3/x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \infty} 8/(x^2+3) = 0$. donc la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique

$$x \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

3/ $a(\epsilon)$ en + ou - l'infini.

4/ Étudions la position de (ϵ) par rapport à (D)

Étudions donc le signe de $f(x) - y = 8/(x^2+3)$

$8 > 0$ et $x^2 + 3 > 0$ donc $8/(x^2+3) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. On peut donc dire que la courbe (ϵ) est toujours au dessus de la droite (D) .

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) / (x^2 + 3)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)'(x^2 + 3) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3)'] / (x^2 + 3)^2 \\ &= [(3x^2 - 6x + 3)(x^2 + 3) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \times 2x] / (x^2 + 3)^2 \\ &= [3(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \times 2x] / (x^2 + 3)^2 \\ &= [3(x-1)^2(x^2 + 3) - (x-1)^3 \times 2x] / (x^2 + 3)^2 \\ &= (x-1)^2 [3(x^2 + 3) - 2x(x-1)] / (x^2 + 3)^2 \\ &= (x-1)^2 (3x^2 + 9 - 2x^2 + 2x) / (x^2 + 3)^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x-1)^2 (x^2 - 2x + 9) / (x^2 + 3)^2$$

on peut donc dire que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = [(x-1)^2 (x^2 - 2x + 9)] / (x^2 + 3)^2$

5/ Déterminons le signe de $x^2 - 2x + 9$.

$$x^2 - 2x + 9 = 0 \quad \Delta = 4 - 36 < 0 \text{ donc le signe de ce polynôme est le signe de } a = 1 > 0$$

Le polynôme $x^2 - 2x + 9$ est strictement positif pour tout nombre réel x .

on a alors $f'(x) > 0$ car $(x-1)^2 > 0$ et $(x^2 + 3)^2 > 0$

6/ Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

7/ Démontrons que (T) d'équation $y = x - \frac{1}{3}$ est tangente à (C) au point d'abscisse 0.

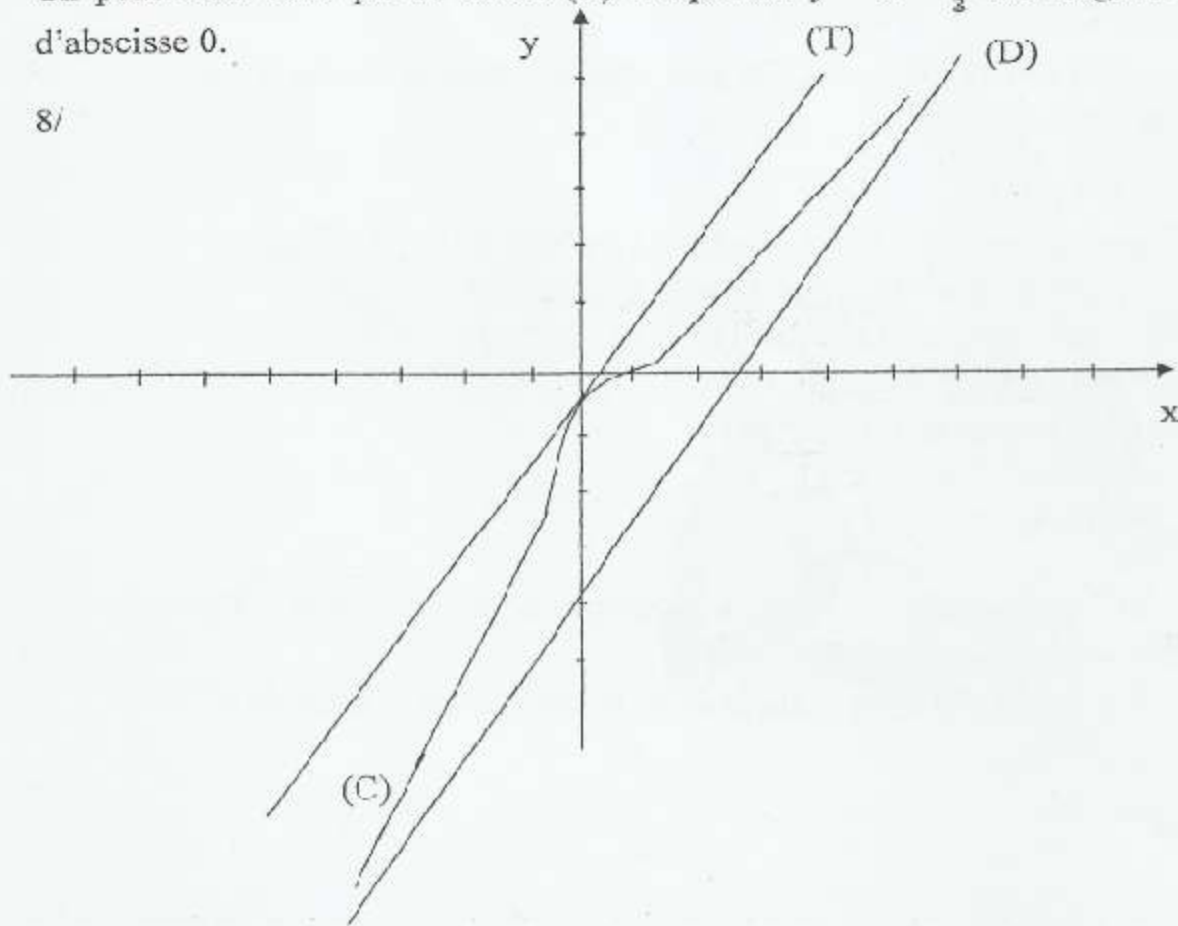
La tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= 1 \times x + \left(-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$y = x - \frac{1}{3}$$

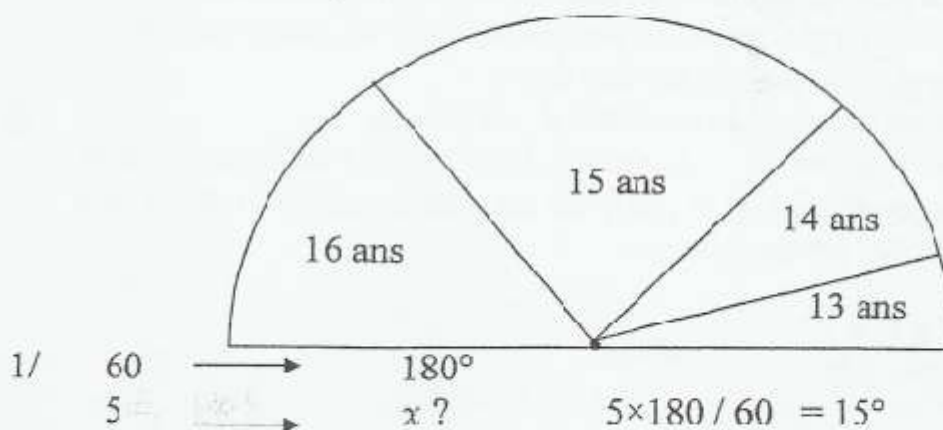
On peut donc dire que la droite (T) d'équation $y = x - \frac{1}{3}$ est tangente à (C) un point d'abscisse 0.

8/



EXERCICE 4

1/ Construisons le diagramme semi-circulaire des effectifs.



Les élèves de 13 ans seront représentés par un secteur de 15°

$$x = 9 \times 180 / 60 = 27^\circ$$

Les élèves de 14 ans seront représentés par un secteur de 15°

$$x = 9 \times 180 / 60 = 27^\circ$$

Ceux de 15 ans par un secteur de 27°

$$x = 27 \times 180 / 60 = 81^\circ$$

Ceux de 16 ans par un secteur de 81°

$$x = 19 \times 180 / 60 = 57^\circ$$

Enfin ceux de 16 ans par un secteur de 57° .

$$2/ \bar{x} = \sum n_i x_i / N = (13 \times 5 + 14 \times 9 + 15 \times 27 + 16 \times 19) / 60 = \frac{900}{60} = 15$$

L'âge moyen des élèves est de 15 ans.

PROBLEMES

1/ a) K est le symétrique de B par rapport à A. Donc les points A, K, B sont alignés. [BK] est donc diamètre du cercle (C) de centre A passant par K.

ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = 3$

Donc $AB = AC = BC = 3$.

K symétrique de B par rapport à A, on a $AK = AB$. On a finalement $AK = AB = AC = 3$.

Le cercle (C) de centre A passant par K, passe également par C. donc le triangle BKC est inscrit dans le cercle (C) de plus son côté [BK] est diamètre de (C). On peut donc conclure que BKC est un triangle rectangle en C, car tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté est diamètre de ce cercle est un triangle rectangle.

b) D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BKC rectangle en C on a :

$$CK^2 + CB^2 = BK^2$$

$$CK^2 = BK^2 - CB^2$$

$$CK^2 = 6^2 - 3^2$$

$$CK^2 = 36 - 9 = 27 = 9 \times 3$$

$$CK = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$CK = 3\sqrt{3}$$

$$2/ \text{mes } \widehat{AKC} = \text{mes } \widehat{BKC}$$

$$\cos \widehat{BKC} = \frac{CK}{BK} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{BKC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \text{mes } \widehat{BKC} = 30^\circ = \text{mes } \widehat{AKC} \text{ on peut donc dire que } \text{mes } \widehat{AKC} = 30^\circ$$

3/ L est le symétrique du point C par rapport à la droite (AB). On a donc $(AB) \perp (CL)$

H est le point d'intersection des droites (CL) et (AB) donc $CH = HL$

H est milieu de [CL]. (AB) est donc perpendiculaire à [CL] en son milieu. On dit que (AB) est la médiatrice du segment [CL]. Tout point situé sur la médiatrice d'un segment étant équidistant des sommets de ce segment, on peut donc dire que :

$BC = BL$ et $AC = AL$ or ABC étant un triangle équilatéral, on a donc

$BC = AC$, on a finalement $BL = BC = AC = AL$. Le quadrilatère BLAC a donc ses 4 côtés qui sont de même mesure et ses diagonales [AB] et [CL] qui sont perpendiculaires, on peut donc affirmer que le quadrilatère BLAC est un losange.

$$4/ \quad \begin{aligned} KH &= KA + 1/2 AB & KB &= 6 \\ &= 3 + 3/2 = 9/2 & KC &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

a)

$$KH / KB = \frac{9/2}{6} = 3/4$$

$$KN / KC = [(9\sqrt{3})/4] / 3\sqrt{3} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{4 \times 3\sqrt{3}} = 3/4$$

$$KH / KB = KN / KC = 3/4$$

Dans le triangle BKC avec $H \in (BK)$ et $N \in (CK)$ on a $\frac{KH}{KB} = \frac{KN}{KC}$ on peut donc dire d'après la réciproque de la propriété de Thalès, que les droites (BC) et (NH) sont parallèles.

**CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
 SESSION 2005**

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne l'évolution sur 6 années de recettes fiscales brutes (en milliards de francs) du budget d'un pays :

Années x_i	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Recettes y_i	850	1025	1125	1300	1450	1750

1) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

En abscisse, choisir 1 centimètre pour représenter une année ; en ordonnées, choisir 2 centimètres pour représenter 100 milliards de francs.

1 cm pour représenter 100 milliards.

2) En utilisant la méthode de Mayer, démontrer que la droite d'ajustement linéaire du nuage de points a pour équation: $500x - 3y - 994000 = 0$.

3) On suppose que le montant des recettes fiscales suit la même évolution jusqu'en 1999. Calculer en milliards de francs le montant des recettes fiscales de ce pays en l'an 1999. (Le résultat sera donné au centimètre près).

EXERCICE 2

La production annuelle de café d'une coopérative agricole augmente chaque année de 3%.

La production de cette coopérative à la fin de la première année de fonctionnement notée P_1 est de 3000 tonnes.

1) Calculer la production P_2 de la coopérative à la fin de la deuxième année de fonctionnement.

2) On note P la production à la fin de la n ème année de fonctionnement et P_{n+1} celle obtenue à la fin de la $(n+1)$ ème année. Démontrer que : $P_{n+1} = 1,03P_n$

3) On considère la suite (P_n) des productions agricoles de cette coopérative.

a) Justifier que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , P_n en fonction de n .

4) Calculer la production totale X en tonnes des 10 premières années de fonctionnement.

EXERCICES 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 3}$

On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O.I.J) ; (unité : 1 cm)

1) Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = x - 3 + \frac{8}{x^2 + 3}$

2 a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C).

3) Préciser la position de (C) par rapport à (D)

4) Vérifier que, pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}$

5) Justifier que, pour tout nombre réel x , $x^2 + 2x + 9$ est strictement positif.

**CORRECTION IO 2006
MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1

Expérience 1

$$1/ P(A) = C_4^1 \times C_3^1 / C_9^1 \times C_7^1 = \frac{4 \times 3}{9 \times 7} = \frac{4 \times 3}{3 \times 3 \times 7} = \frac{4}{21}$$

La probabilité de l'évènement A est donc $P(A) = \frac{4}{21}$

2/ a) Si les billes tirées sont de même couleur, c'est qu'on ne pourra avoir que soit 2 billes rouges, soit 2 billes vertes. Il sera impossible d'avoir deux billes bleues ou deux billes blanches car elles ne sont que d'un côté (une seule poche).

$$P(B) = C_2^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^1 / C_9^1 \times C_7^1 = \frac{2 \times 2 + 4 \times 3}{9 \times 7} = (4 + 12) / 63 = \frac{16}{63}$$

$$P(B) = \frac{16}{63}$$

b) Déduisons-en la probabilité de l'évènement C.

Les évènements B et C sont des évènements contraires donc on a :

$$P(C) + P(B) = 1$$

$$P(C) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{16}{63} = \frac{63 - 16}{63} = \frac{47}{63}$$

$$P(C) = \frac{47}{63}$$

Expérience 2

$$1/ P(B) = (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) / C_9^2 = \frac{1 + 3 + 6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(B) = \frac{5}{18}$$

2/ Probabilité de l'évènement C

$$P(C) = C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_4^1 / C_9^2 = \frac{6 + 8 + 12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$P(C) = \frac{13}{18}$$

Expérience 2

$$1/ P(B) = (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) / C_9^2 = \frac{1+3+6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(B) = \frac{5}{18}$$

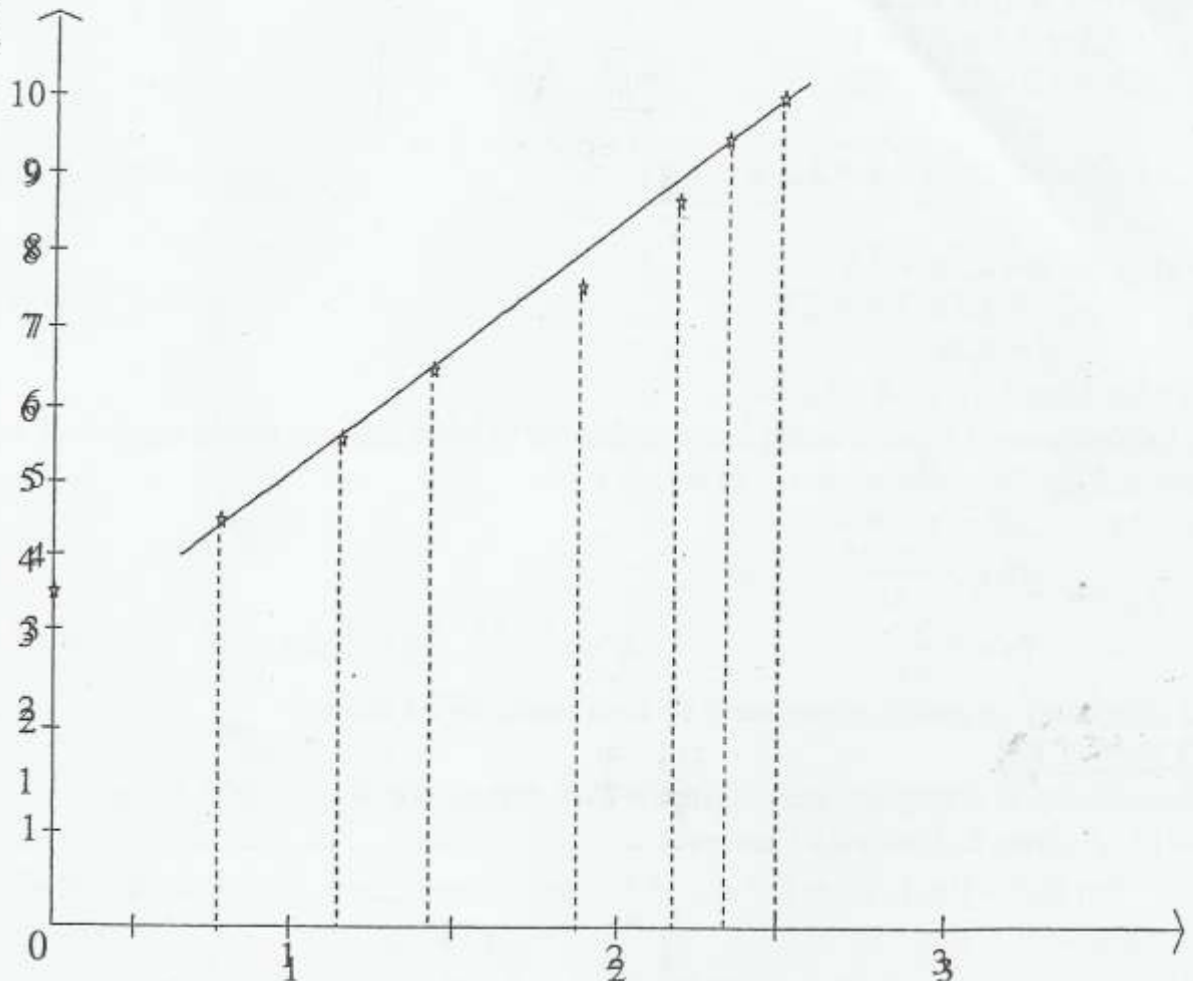
2/ Probabilité de l'évènement C

$$P(C) = C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_4^1 / C_9^2 = \frac{6+8+12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$P(C) = \frac{13}{18}$$

EXERCICE 2

1/



2/ On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i , de coordonnées (x_i, y_i) , le point G de coordonnées $(x_G; y_G)$ telle que : $x_G = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ et $y_G = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$.

$$x_G = (0 + 0,7 + 1,1 + 1,4 + 1,8 + 2,2 + 2,3 + 2,5) / 8 = 1,5$$

$$y_G = \frac{3,6 + 4,3 + 5,2 + 5,7 + 6,6 + 7,8 + 8,2 + 8,6}{8} = 6,25$$

on a donc $G(1,5 ; 6,25)$

3/ a) Calcul des coordonnées (x_1, y_1) de G_1 | Calcul des coordonnées (x_2, y_2) de G_2

$$x_1 = \frac{0 + 0,7 + 1,1 + 1,4}{4} = 0,8$$

$$x_2 = \frac{1,8 + 2,2 + 2,3 + 2,5}{4} = 2,2$$

$$y_1 = \frac{3,6 + 4,3 + 5,2 + 5,7}{4} = 4,7$$

$$y_2 = \frac{6,6 + 7,8 + 8,2 + 8,6}{4} = 7,8$$

On a $G_1(0,8 ; 4,7)$

On a $G_2(2,2 ; 7,8)$

Les points moyens partiels G_1 et G_2 des deux nuages partiels E_1 et E_2 sont $G_1 (0,8 ; 4,7)$ et $G_2 (2,2 ; 7,8)$.

b) justifions qu'une équation de la droite (D), droite d'ajustement linéaire de y en x par la méthode de mayer est : $y = 2,2x + 2,9$ soit (D) : $y = ax + b$. (D) passant par G_1 et G_2 , déterminons une équation de (D).

Déterminons le coefficient directeur, a , de (D) :

$$a = (y_{G_2} - y_{G_1}) / (x_{G_2} - x_{G_1}) = \frac{7,8 - 4,7}{2,2 - 0,8} = \frac{3,1}{1,4} \simeq 2,2$$

On a donc (D) : $y = 2,2x + b$

Déterminons b . $G_2 (2,2 ; 7,8)$ étant un point de (D), ses coordonnées doivent donc vérifier l'équation de (D), on a :

$$7,8 = 2,2 \times 2,2 + b$$

$$b = 7,8 - 2,2 \times 2,2$$

$$b \simeq 2,9$$

on a finalement (D) : $y = 2,2x + 2,9$

$$\begin{aligned} 4/ a) (D) : y &= 2,2x + 2,9 \\ &= 2,2 \times 2,9 + 2,9 \\ y &= 9,28 \end{aligned}$$

Le bébé aura 9,28 kg à 18 mois

b) Déterminons l'âge en mois, à partir duquel le bébé aura un poids supérieur à 10kg.

Soit a , l'âge en mois, avec $x = \ln a$, on a :

$$y = 2,2 \ln a + 2,9 > 10$$

$$\ln a > \frac{10 - 2,9}{2,2}$$

$$\ln a > \frac{7,1}{2,2}$$

$$a > e^{7,1/2,2} \quad a > 25,21$$

Le bébé aura un poids supérieur à 10 kg à partir de 25 mois.

EXERCICE 3

Considérons la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = -2x + 1 + e^x$

1/ a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1 + e^x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

b) Ecrivons $f(x)$ sous la forme : $f(x) = x(-2 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-2 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x})$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \frac{1}{x}) = -2$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}) = +\infty$$

$$\begin{aligned} 2/ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1 + e^x) - (-2x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

3/ La position relative de (C) par rapport à (Δ).

$f(x) - (-2x + 1) = e^x > 0$ donc (C) est toujours au-dessus de (Δ).

4/ a) $f(x) = -2x + 1 + e^x$

$f'(x) = -2 + e^x$

b) Les variations de f

$f'(x) = 0 \iff -2 + e^x = 0$

$e^x = 2$

$x = \ln 2$

$f'(x) > 0 \iff -2 + e^x > 0$

$e^x > 2$

$x > \ln 2$ f croissante

$f'(x) < 0 \iff -2 + e^x < 0$

$e^x < 2$

$x < \ln 2$ f décroissante

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$3 - 2\ln 2$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= -2\ln 2 + 1 + e^{\ln 2} \\ &= -2\ln 2 + 1 + 2 \\ &= 3 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

5/ a) L'équation d'une tangente à la courbe (C) un point d'abscisse x_0 est :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- La tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = -2 + e^0 = -1$

$f(0) = -2 \times 0 + 1 + e^0 = 2$

on a donc (D) : $y = -1(x) + 2$

(D) : $y = -x + 2$

- La tangente au point d'abscisse $x_0 = 2\ln 2$ a pour équation :

$y = f'(2\ln 2)(x - 2\ln 2) + f(2\ln 2)$

$f'(2\ln 2) = -2 + e^{2\ln 2}$

$= -2 + e^{\ln 4} = -2 + 4 = 2$

$f'(2\ln 2) = 2$

$f(2\ln 2) = -2(2\ln 2) + 1 + e^{2\ln 2}$

$= -4\ln 2 + 1 + 4 = 5 - 4\ln 2$

$f(2\ln 2) = 5 - 4\ln 2$

on a donc (L) : $y = 2(x - 2\ln 2) + 5 - 4\ln 2 = 2x - 4\ln 2 + 5 - 4\ln 2$.

(L) : $y = 2x - 8\ln 2 + 5$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2006

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

EXERCICE 1

Un écolier dispose de 2 billes rouges, 3 billes bleues et 4 billes vertes dans sa poche de droite. Dans sa poche de gauche, il a 2 billes rouges, 3 billes vertes et 2 billes blanches. Toutes les billes sont indiscernables au toucher.

Il procède à deux expériences aléatoires différentes.

On considère les événements :

A : « Les deux billes tirées sont vertes »

B : « Les deux billes tirées sont de même couleur »

C : « Les deux billes tirées sont de couleurs différentes ».

Expérience 1

Il tire au hasard une bille de chaque poche.

- Justifier que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{4}{21}$
- a) Calculer la probabilité de l'évènement B
b) En déduire la probabilité de l'évènement C.

Expérience 2

Il tire simultanément deux billes de la poche droite.

- Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $\frac{5}{18}$
- Calculer la probabilité de l'évènement C.

EXERCICE 2

Au Centre de Protection Maternelle et infantile (PMI) de Kolia, on a relevé le poids du bébé de Klothcorô dans les premiers mois de sa naissance.

Le tableau ci-dessous présente les résultats.

Age en mois (a_i)	1	2	3	4	6	9	10	12
Poids en kg (y_i)	3,6	4,3	5,2	5,7	6,6	7,8	8,2	8,6

Si la tendance ainsi observée est conservée, on peut prévoir le poids du bébé après l'âge d'un an. Un statisticien établit un deuxième tableau pour mener cette étude en considérant les séries (x_i) et (y_i) suivantes :

CORRECTION IO 2007 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Soit (E) : $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

1/ Vérifions si $-\ln 2$ et $\ln 3$ sont solutions de l'équation (E)

$$\begin{aligned} E(-\ln 2) &= e^{2x(-\ln 2)} + 2 \cdot e^{-\ln 2} - 15 \\ &= e^{2x \ln 1/2} + 2 \cdot e^{\ln 1/2} - 15 \\ &= e^{\ln 1/4} + 2 \cdot e^{\ln 1/2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} - 14 = \frac{1}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{55}{4} \neq 0 \text{ donc } -\ln 2 \end{aligned}$$

n'est pas solution de (E).

$$\begin{aligned} E(\ln 3) &= e^{2\ln 3} + 2 \cdot e^{\ln 3} - 15 \\ &= e^{\ln 9} + 2 \cdot e^{\ln 3} - 15 \\ &= 9 + 2 \times 3 - 15 \\ &= 9 + 6 - 15 = 0 \text{ donc } \ln 3 \text{ est solution de (E).} \end{aligned}$$

2/ Résolvons l'équation (E).

Soit $X = e^x$

$$E(X) : X^2 + 2X - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - [4 \times (-15)] = 64$$

$$X_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{-2-8}{2} = -5$$

$$X_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{-2+8}{2} = 3$$

Déterminons les valeurs de x en fonction des valeurs de X

$$X = e^x = -5$$

$e^x = -5$ impossible

$$X = e^x = 3$$

$$e^x = e^{\ln 3}$$

$x = \ln 3$ on a donc $S_R = \{ \ln 3 \}$

EXERCICE 2

1/ a) Le crédit de consommation de Mlle Badou au début du 1^{er} mois

$$C = 5000 \text{ F} + 18\,000 \text{ F}$$

$$= 23\,000 \text{ F}$$

b) Justifions que le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 2^{ème} mois est égal à 20300F.

$$C = 23\,000 \times 10\% + 18\,000$$

$$= 23000 \times 10 / 100 + 18\,000 = 2300 + 18\,000 = 20\,300 \text{ F}$$

On a donc $C = 20\,300 \text{ F}$

2/ Le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 3^{ème} mois.

$$C = 20\,300 \times 10\% + 18\,000$$

$$= 2\,030 + 18\,000$$

$$= 20\,030 \text{ F}$$

3/ a) Précisons les valeurs de U_1, U_2, U_3

$$U_1 = 23\,000 \text{ F} \quad U_2 = 20\,300 \text{ F} \quad U_3 = 20\,030 \text{ F}$$

b) $U_4 = U_3 \times 10\% + 18\,000$

$$= 0,1 U_3 + 18\,000 = 0,1 \times 20\,030 + 18\,000 = 2003 + 18\,000 = 20\,003$$

$$U_4 = 20\,003$$

c) $U_2 = 0,1 U_1 + 18.000$ $U_3 = 0,1 U_2 + 18.000$

$U_4 = 0,1 U_3 + 18.000$ on peut donc conclure que pour tout nombre entier naturel non nul n , on a : $U_{n+1} = (0,1) U_n + 18.000$

4/ Pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = U_n - 20.000$

a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et précisons le premier terme.

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 20.000$$

$$= (0,1) U_n + 18.000 - 20.000$$

$$V_{n+1} = (0,1) U_n - 2.000$$

$$V_{n+1} = (0,1) U_n - 2.000 \text{ et } V_n = U_n - 20.000 \text{ on remarque que}$$

$$V_{n+1} = 0,1 V_n \text{ on peut donc conclure que la suite } V_n \text{ est une suite géométrique de raison } 0,1.$$

Précisons le premier terme :

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_1 = U_1 - 20.000$$

$$V_1 = 23.000 - 20.000 = 3.000$$

V_n est donc une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $V_1 = 3.000$

b) Exprimons V_n en fonction de n .

La suite géométrique V_n de raison $q = 0,1$ et de premier terme $V_1 = 3.000$ est définie par : $q^{n-1} \cdot V_1$

$$V_n = (0,1)^{n-1} \cdot 3.000 \quad \boxed{V_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1}}$$

c) Déduisons-en U_n en fonction de n .

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$U_n = V_n + 20.000$$

$$\boxed{U_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000}$$

d) Justifions que le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 F.

Le crédit de consommation de Mlle Badou est représenté ici par U_n . Vérifions donc si U_n est toujours supérieur à 20.000

$$U_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000$$

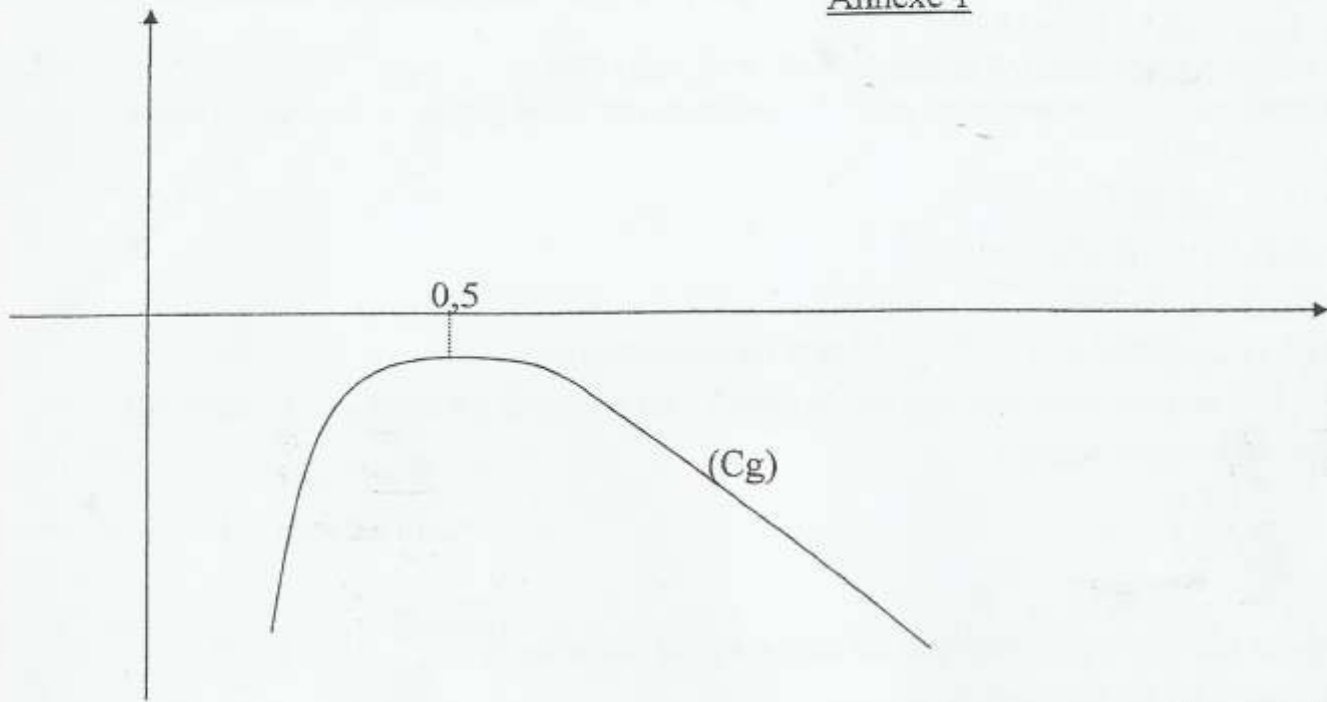
$$(0,1)^{n-1} > 0 \text{ donc } 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} > 0$$

$$3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000 > 20.000$$

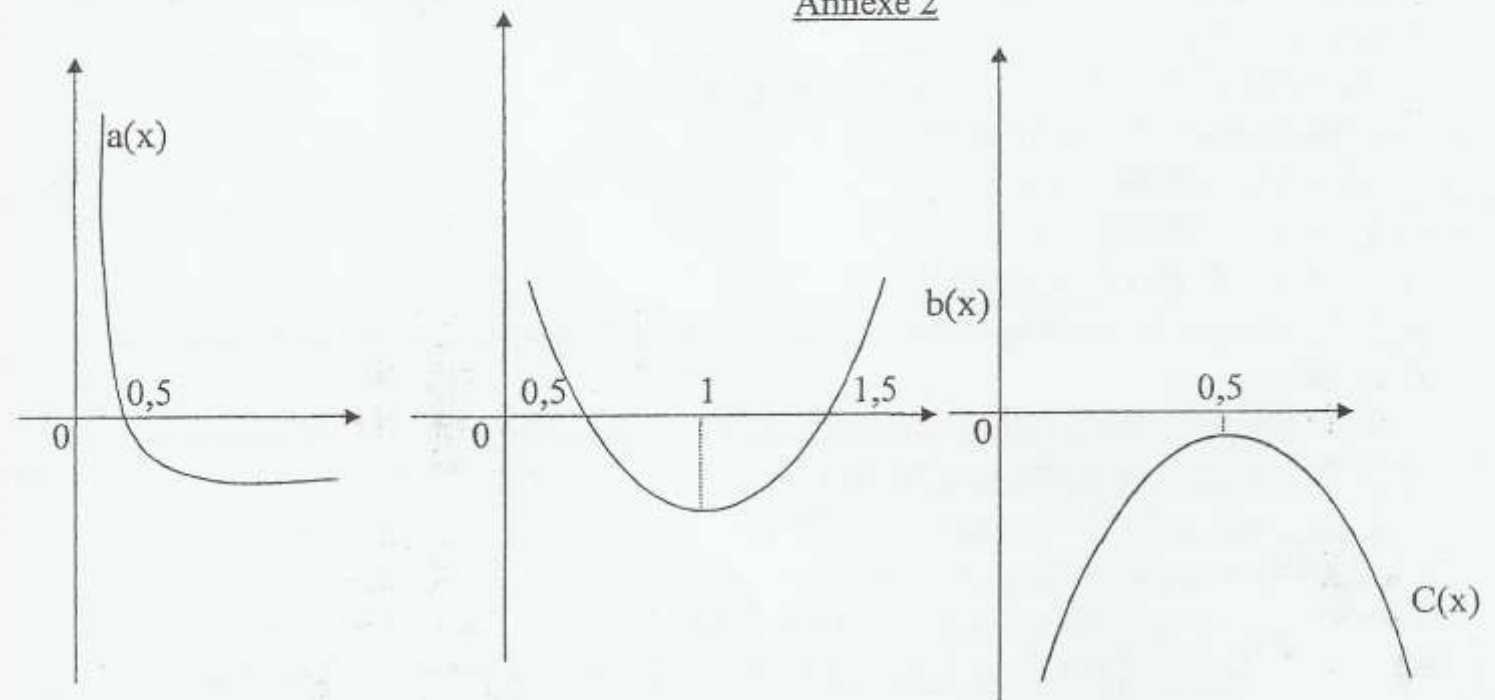
On a donc $\boxed{U_n > 20.000}$. Le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 F.

EXERCICE 3

Annexe 1



Annexe 2



PARTIE A

tableau de variation de $g(x)$

1/

x	0	0,5	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$g(0,5)$	

2/

a /

α	0	0,5	$+\infty$
$a(\alpha)$		+	-

α	0	0,5	1,5	$+\infty$		
$b(\alpha)$		+	0	-	0	+

α	0	$+\infty$
$c(\alpha)$		-

b/ C'est $a(x)$ qui coïncide avec g' sur l'intervalle $]0; +\infty[$ car $a(x)$ s'annule pour l'unique valeur $x = 0,5$

PARTIE B

Considérons la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et définie par : $f(x) = \frac{1-2x}{x}$

1/ Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est une asymptote à (ε) .

$$f(x) = \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{x} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à (ε) en $+\infty$ ou $-\infty$

2/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ graphiquement cela traduit que la droite d'équation $x = 0$

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow 0 & x \rightarrow 0 \\ x > 0 & x > 0 \end{array}$$

est asymptote verticale à (ε) en $+\infty$

3/ Démontrons que le point $A(0; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (ε) .

Pour le faire démontrons que la fonction $g(x) = f(x+\alpha) - b$ dont la représentation graphique est l'image de (ε) par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est impaire.

Avec $A(\alpha; b)$ dans notre cas, $A(0; -2)$.

$$g(x) = f(x+\alpha) - b$$

$$= f(x+0) + 2$$

$$= f(x) + 2$$

$$= \frac{1-2x}{x} + 2$$

$$= \frac{1-2x+2x}{x}$$

$$g(x) = 1/x$$

Montrons que $g(x)$ est impaire.

$$g(-x) = 1/(-x) = -1/x = -g(x)$$

$g(-x) = -g(x)$ la fonction $g(x)$ est donc impaire. On peut donc dire que le point

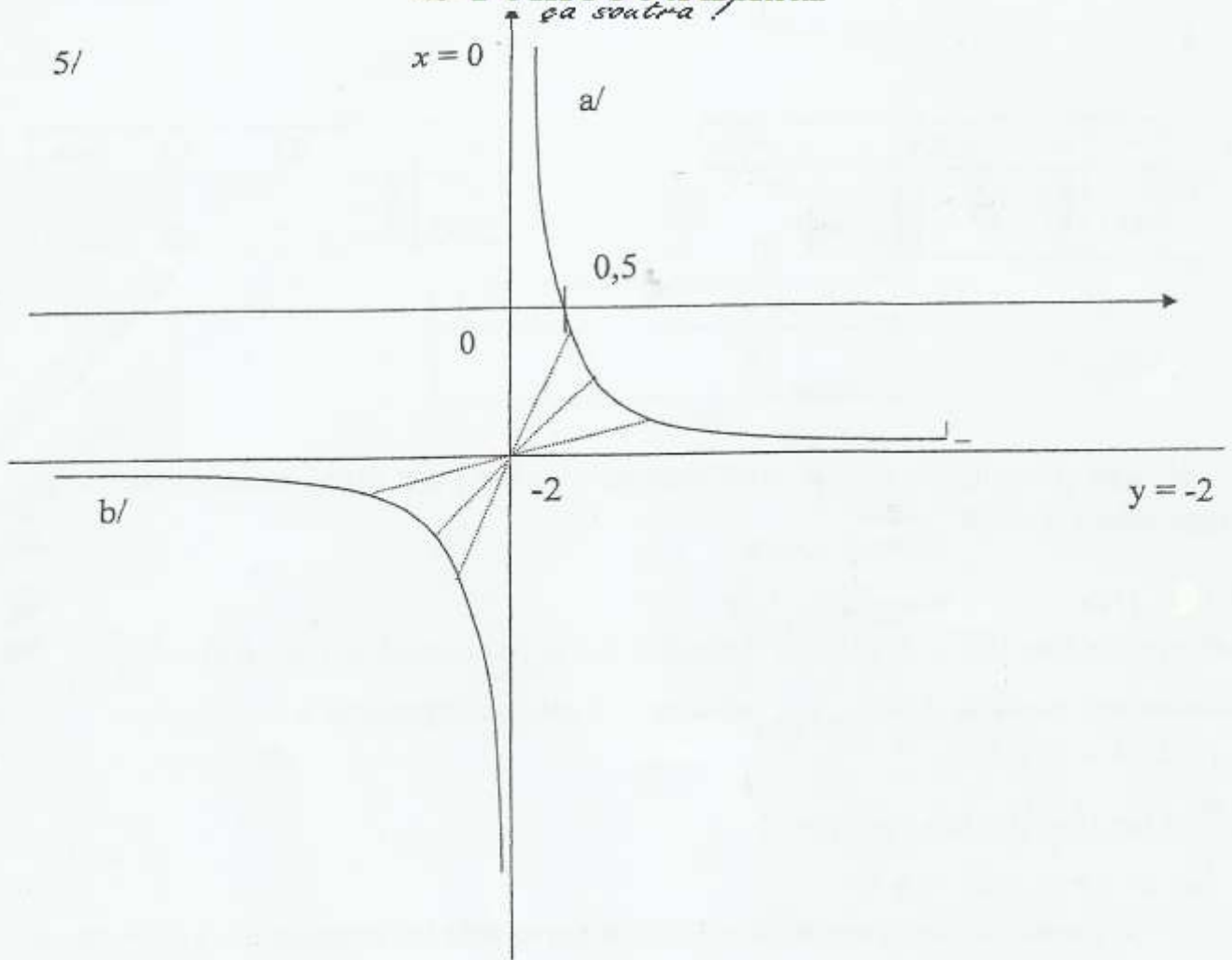
$A(0; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (ε) .

4/ On donne $g(x) = -2x + 1 + \ln x$

Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = f(x)$.

$$g'(x) = -2 + 1/x = \frac{1-2x}{x} = f(x).$$

5/



**CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP * INSTITUTEUR ORDINAIRE (I.O)
SESSION 2007**

MATHEMATIQUES

Durée : 2 h Coef. : 3

*Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2
et deux feuilles annexes à rendre avec la copie.*

Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.

Toute calculatrice est autorisée

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

1. Les nombres $-\ln 2$ et $\ln 3$ sont-ils des solutions de l'équation (E) ? Justifier.
2. Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 2

Une compagnie de téléphonie mobile propose à sa clientèle la formule suivante :

La compagnie offre au début du premier mois au client un crédit de consommation de 5 000 F.

En plus, le client bénéficie chaque mois d'un crédit supplémentaire de 10% de sa consommation du mois précédent.

Pour bénéficier des avantages de cette formule, le client est tenu d'approvisionner son compte chaque mois. Mlle Badou, cliente de cette compagnie, décide de bénéficier de cette formule en approvisionnant son compte d'une valeur fixe au début de chaque mois de 18 000 F

Chaque mois, elle consomme la totalité de son crédit.

1. a) Calculer le crédit de consommation de Mlle Badou au début du 1^{er} mois.
b) Justifier que le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 2^{ème} mois est égal à 20 300 F.
2. calculer le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 3^{ème} mois.
3. On désigne par U_n le crédit dont dispose Mlle Badou au début du n^{ème} mois ($n \geq 1$).
a) Préciser les valeurs de U_1, U_2, U_3
b) Calculer U_4
c) Justifier que pour tout nombre entier naturel non nul $n, U_{n+1} = (0,1) U_n + 18000$.
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = U_n - 20000$.
a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et préciser le premier terme.
b) Exprimer V_n en fonction de n
c) En déduire U_n en fonction de n .
d) Justifier que le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20000.

EXERCICE 3

Sur la feuille annexe 1, la figure présente la courbe (cg) d'une fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$.

La fonction dérivée g' de g s'annule pour l'unique valeur $x = 0,5$.

PARTIE A

1. A partir d'une lecture graphique, dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. (On ne demande pas les limites).

2. On donne sur la feuille annexe 2 les courbes de trois fonctions numériques a , b et c .

L'une parmi ces fonctions coïncide avec la fonction dérivée g' de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a) Par une lecture graphique, préciser le signe de $a(x)$ et $b(x)$ et $c(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) En déduire la fonction qui coïncide avec g' sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Justifie la réponse.

PARTIE B

On considère la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et définie par : $f(x) = \frac{1-2x}{x}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm sur les axes.

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est une asymptote à (C).

2. Calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Démontrer que point $A(0, -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

4. On donne $g(x) = -2x + 1 + \ln x$.

Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = f(x)$.

5. a) A l'aide de la partie A, sur une feuille de papier millimétré, reproduire la courbe de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Compléter, par symétrie, la courbe de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

CORRECTION DU SUJET DE MATHEMATIQUE (I.O)**1- Résolvons l'équation**

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

$$S/R = (\frac{1}{2}; 3)$$

2- déduction de la résolution

$$(E) : X \in \mathbb{R}, 2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$$

$$2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$$

$$2(e^x)^2 - 7e^x + 3 = 0$$

$$\text{Posons } X = e^x$$

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

De (1), on a : $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3$ or $X = e^x$ ainsi donc :

$$e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln \left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } \ln e^x = \ln 3$$

$$X = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 3$$

$$S/R = (-\ln 2; \ln 3)$$

Exercice 2**PARTIE A**

1- Les chiffres sont répétés donc on a :

$$N = 10^4 = 10.000$$

2- Le nombre de codes PIN commençant par 24

Les éléments sont non distincts, les 2 chiffres restants peuvent être répétés :

$$N = 10^2 = 100$$

3- Le nombre de code PIN composés à la fois de 0 ; 2 ; 4 et 8.

Ici, nous avons une permutation car, il s'agit de ranger 4 chiffres dans 4 :
 $N = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

4- Le nombre de code PIN, composés de chiffres distincts

Ici, nous avons un arrangement de 4 dans 10

$$N = A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

PARTIE B

1- Soit le code Pin formé par Angèle commençant par 24. Card A = 100
 et Card $\Omega = 10.000$

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{10.000} = 0,0021$$

Exercice 3

PARTIE A

1- A travers la lecture graphique :

$$\lim f(x) = -8$$

2- Vérifions

$$\begin{aligned} (T) : y = f'(1) &= (x-1) + f(1) \\ &= x - 1 + 1 \\ (T) &= y = x \end{aligned}$$

3- Déterminons graphiquement le signe de $f(x)$ pour $x \in]0;10]$

$$\forall x \in]0;1/e[, f(x) < 0 ;$$

$$\forall x \in]1/e;10[; f(x) > 0$$

$$\forall x \in (1/e), f(x) = 0$$

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante $]1; +\infty[$

3- a- Etude du signe de $f(x) - h(x)$ sur $]0; +\infty[$

$$f(x) - h(x) = 1 + \ln x - (-x + 1 \ln x) = x$$

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ donc $f(x) - h(x) > 0$

b- Position relatives de (G) et (T)

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - h(x) > 0$ Ainsi (G) est au dessus de (T)

4- Construction T (voir le tracé)

5- Soit $F : F : \begin{matrix} \xrightarrow{\infty} \\]1; +\infty[\end{matrix} \xrightarrow{\quad} \mathbf{R}$
 $X \quad x \ln(x) - x$

a* Vérifions

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = (x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

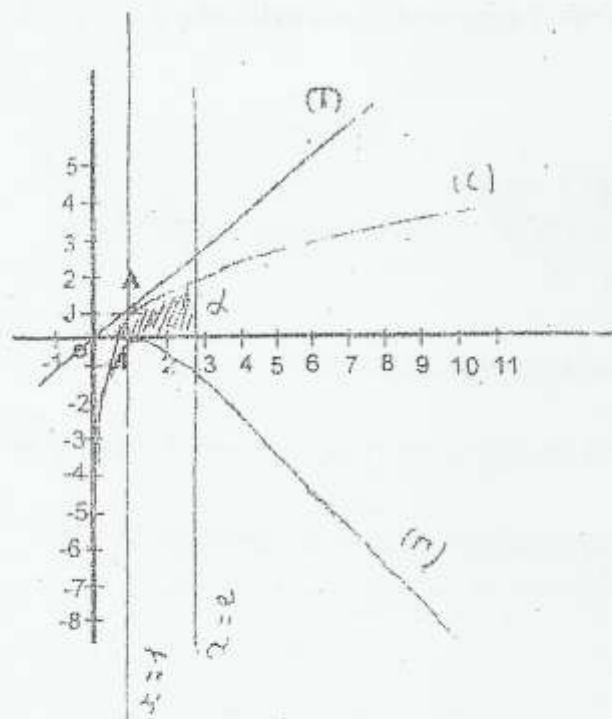
Ainsi donc F est primitive de $\ln x$

b- Justification de $\alpha = e$

$$= \int (1 + \ln x) dx$$

$$= (x + x \ln x - x) \Big|_1^e$$

$$= e + e \ln e - e - 1 + 1 \ln 1 + 1$$



4- Nous avons la fonction $f(x) = ax + b + \ln(x)$

a- vérifions que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (ax + b + \ln x)' \\ = a + 1/x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (ax+1) / x$$

b- Démontrons que $a = 0$ et $b = 1$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = \Leftrightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow b = 1$$

Ainsi donc $f(x) = 1 + \ln x$

PARTIE B

Nous avons les fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{1-x}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = -x + 1 + \ln(x)$$

1- Justifions que (Δ) : $x = 0$ est asymptote à (T)

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1 + \ln x) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} (-x+1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

Ainsi donc (Δ) ; $x = 0$ est asymptote verticale à (T)

2- a- Démontrons

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = (-x+1 + \ln x)' \\ h'(x) = -1 + 1/x = (1-x) / x = g(x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = g(x)$$

b- Déduisons en le sens de variation de h

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \text{ donc le signe de } h'(x) \text{ est celui de } 1-x \text{ ainsi donc :}$$

$$\forall x \in]0; 1[, h'(x) > 0 \text{ donc } h \text{ est strictement croissante }]0; 1[$$

CONCOURS DIRECT D'ENTRÉE AU CAFOP, INSTITUTEUR ORDINAIRE (IO), SESSION 2008

MATHEMATIQUES (IO)

EXERCICE 1

- 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 7x + 3 = 0$
- 2- En déduire les solutions de l'équation (E): $x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$

EXERCICE 2

La puce d'un téléphone portable est munie d'un code de sécurité permettant l'accès au réseau d'une société de téléphonie cellulaire. Ce code dénommé code PIN peut être modifié par l'utilisateur. Le code PIN est un numéro de 4 chiffres choisi dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ / **Exemple de codes PIN: 0101 ; 0000; 7152.**

PARTIE A

- 1- Justifier que le nombre de codes PIN que la société peut attribuer est égal à 10.000
- 2- Déterminer le nombre de codes PIN commençant par le nombre 24.
- 3- Déterminer le nombre de codes PIN composés à la fois des chiffres 0; 2 ; 4 ; et 8.

PARTIE B

Kadio offre une puce de cette société de téléphonie cellulaire à son épouse Angèle âgée de 24 ans. Au moment d'utiliser sa puce, Angèle veut s'attribuer un nouveau code PIN. Elle décide alors de former au hasard son code, en utilisant en priorité les chiffres de son âge

- 1- Calcule la probabilité pour que le code d'Angèle commence par 24.
- 2- Justifier que la probabilité pour que Angèle compose un code formé de chiffres distincts rangés dans l'ordre croissant et où l'on retrouve le nombre indiquant son âge égale à 0,0021

EXERCISE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique est le centimètre.

PARTIE -A

Sur la figure je la feuille annexe:

- (C) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0 ; 10]$
- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C)

- La droite (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1
- A(1 ; 1) et 0 sont deux points de (T)
- (C) coupe la droite (OJ) au point d'abscisse 1/e.

- 1) Conjecturer par lecture graphique la limite de f à droite en 0
- 2) Vérifier qu'une équation de la droite (T) est $y = x$
- 3) Déterminer graphiquement le signe $f(x)$ pour x élément de l'intervalle $]0 ; 10]$
- 4) On admet que pour tout nombre réel x élément de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = ax + b + \ln(x)$ où a et b sont des nombres réels.

5- a- Vérifiez que $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f'(x) = \frac{ax+1}{x}$

b- En utilisant les informations données sur la courbe (C)
Démontrer que $a = 0$ et $b = 1$

Partie B

On considère

Les fonctions g et h définies sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1-x}{x}$ et $h(x) = -x + 1 + \ln(x)$

(T) est la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

- 1- Justifier que la droite (Δ) d'équation $x = 0$ est asymptote à (T)
- 2- A – démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[; h'(x) = g(x)$

En déduire le sens de la variation de h

- 3- a- Etudier le signe de $f(x) - h(x)$ pour tout nombre élément de $]0 ; +\infty[$
- b- En déduire les positions relatives de (C) et (T)
- 4- Construire (T) sur l'intervalle $]0 ; 10]$ dans le repère que (C)

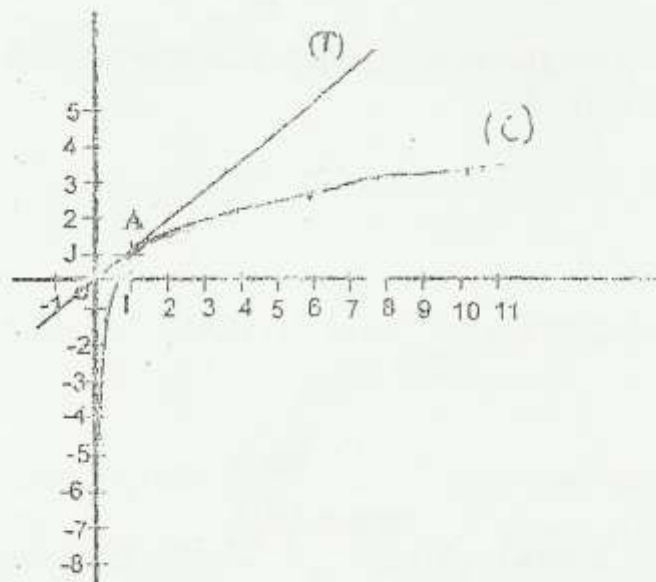
X	0,1	0,3	0,4	1	4	6	8	10
Arrondi d'ordre 1 de $h(x)$	-41,4	-0,5	-0,3	0	-1,6	-3,2	-4,9	-6,7

5- On considère la fonction $F :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $X \mapsto x \ln(x) - x$

a- Vérifier que F est une primitive de la fonction $X \mapsto \ln(x)$ sur $]1; +\infty[$

b- On note l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (O.I) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Hachurer la partie du plan dont l'aire est égale à α
 Justifier que $\alpha = e$



CORRECTION 10 SESSION 2009 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

$$4512 = 3 \times 2^3 \times 47$$

$$4128 = 3 \times 2^5 \times 43$$

Les diviseurs communs de 4512 et 4128 sont :

$$1 ; 2 ; 3 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 \times 3 \times 2 ; 3 \times 2^2 ; 3 \times 2^3 \times 3 \times 2^3 ; 3 \times 2^4 ; 3 \times 2^5$$

$$\text{Soit : } 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 16 ; 32 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96$$

$$4525 = 4512 + 13 = 3 \times 2^5 \times 47 + 13$$

$$4147 = 4128 + 19 = 2^5 \times 43 + 19$$

- Donc en divisant 425 et 4147 par 3 les quotiens seront respectivement $2^5 \times 47$ et $2^5 \times 43$ et les restes respectivement 13 et 19
- En divisant 4525 et 4147 par 3×2^5 les quotiens seront respectivement 47 et 43 et les restes respectivement 13 et 19
- En divisant 4525 et 4147 par 2^5 les quotiens seront respectivement 3×47 et 3×43 et les restes respectivement 13 et 19

Dans ces 3 exemples, d, prend les valeurs 3 ; 3×2^5 ; le nombre total de solutions de d, est donc l'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128, soit 12 solutions comme vu précédemment

EXERCICE 2

Soit x l'effectif total de la classe

$$\frac{x \times 65}{100} = 26 \quad \frac{26 \times 100}{65} = 40$$

Cette classe compte 40 élèves

Le nombre d'élève admis au CEPE

$$\frac{40 \times 40}{100} = 10$$

Il ya 10 admis au concours d'entrée en sixième

EXERCICE 3

1- Le troisième total de possibilité est :

$$A = \frac{9!}{(9-3)!} - \frac{9!}{6!} - \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{6!} - 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Ce chef de famille a donc 504 possibilités d'offrir une volaille à chacun de ses enfants

2- Le nombre de cas où les trois volailles offertes sont de la même espèce animale

$$A + A =$$

Il ya donc 30 cas ou les trois volailles offertes sont de la même espèce animale

3- La probabilité pour que chacun des trois enfants reçoive 1 poulet

La probabilité pour que chacun des trois enfants reçoive 1 poulet est $1/23$

La probabilité pour que parmi les trois volailles offertes il n y avait aucun canard est $P = 5/12$

La probabilité pour qu'il y ai au moins un canard est : l'évènement qu'il n'y ait aucun canard et qu'il n'y ait au moins un canard étant contraire on a donc :

$$P = 1 - 5/12 = 7/12$$

La probabilité pour que parmi les trois volailles il y ait au moins un canard est $P = 7/12$

5-a-La probabilité pour qu'un seul reçoive un canard

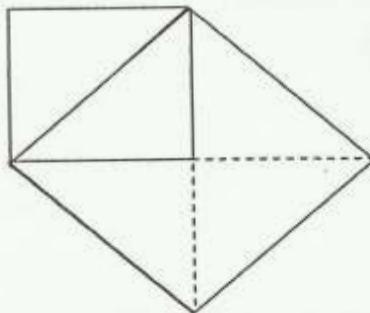
Si un a un canard pour les deux autres, on prendra soit 2 poulets, 2 pintades ou 1 poulet 1 pintade

$$P = 12 + 6 + 12 / 504 = 30 / 504 = 5/84$$

b-La probabilité pour que l'ainé reçoive un canard

$$P = 1/6$$

EXERCICE 4



1-J symétrie de D par rapport à BC donc C est milieu de Dj

E symétrique de b par rapport à CD donc C est milieu de BE

ABCD est un carré, donc $BC = DC$, on a alors $BE = DJ$ BE et DJ étant les diagonales du quadrilatère DBJE, on peut donc dire que les diagonales du quadrilatère DBJE sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu CDBJE est donc un losange

1- Déterminons la mesure d'un coté du losange DBJE

Considérons le triangle rectangle DCB rectangle en C, d'après le th »àrème de Pythagore $DC^2 + CB^2 = DB^2$

$$x^2 + x^2 = DB^2$$

$$2x^2 = DB^2 \quad DB = x\sqrt{2}$$

DB étant un côté du losange DBJE son aire est donc

$$A = DB \times DB = x \times \sqrt{2} \times x \times \sqrt{2} = 2x^2$$

Conclusion: l'aire du losange DBJE est donc le double de l'aire du carré ABCD car

$$A_{ABCD} = x \times x = x^2$$

CONCOURS IO SESSION 2009

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Déterminer ; dans N , l'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128

Trouver un entier naturel d tel que, si l'on divise par d les nombres 4525 et 4147 les restes obtenus soient respectivement 13 et 19

Préciser le nombre de solutions

EXERCICE 2

Au control final d'une leçon de mathématique, un maître tenant une classe de CM2 constate que seules 26 ardoises portent une bonne réponse. Il affirme avec raison avoir réussi son cours à 65%. Quel est l'effectif de cette classe ?

En fin d'année, ladite classe obtient 40% de réussite au CEPE et 25% au concours d'entrée en sixième.

Trouve le nombre d'élève admis à chacun de ces essais

EXERCICE 3

Un chef de famille possède dans poulailler traditionnel non transparent 9 volailles dont 04 poulets, 3 pintades et 2 canards pour participer à la joie de ses trois enfants qui viennent de réussir brillamment leur année scolaire. Il décide d'offrir chacun d'eux une volaille tirée au hasard du poulailler. Il effectue ainsi trois tirage successifs sans remise.

- 1- Justifier que ce chef de famille à 504 possibilités d'offrir une volaille à chacun de ses enfants
- 2- Combien ya t il de cas ou les trois volailles offertes sont de la même espèce animale
- 3- Calculer la probabilité pour chacun des trois enfants reçoive 1 poulet
- 4- Quelle est la probabilité pour que parmi les trois volailles offertes
 - a- Il n y ait aucun canard ?
 - b- Il n y ait au moins un canard ?
- 5- Les trois jeunes récipiendaires n'ont d'yeux que pour les canards
 - a-calculer la probabilité pour qu'un seul entre eux reçoive un canard
 - b-Quelle est la probabilité pour que l'ainé reçoive un canard ?

EXERCICE 4

Construire un carré ABCD puis le symétrique J du point D par rapport à la droite (BC) et le symétrique E point B par rapport à la droite (CD)

- 1- Déterminer la nature du quadrilatère DBJE justifier la réponse
- 2- Soit x , la mesure de la longueur du côté du carré ABCD
- 3- Exprimez en fonction de x la mesure de l'aire du quadrilatère DBJE et conclure

CORRECTION SUJET DE MATHEMATIQUES 2010

CORRECTION DU SUJET DE MATHEMATIQUES 2010

EXERCICE 1

1. Vérifions que le nombre de tirages possibles est 35

$$\text{Nbre} = C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = \frac{210}{6} = 35$$

Nombre de tirage = 35

2. Calculons la probabilité P_1 qu'elle ne gagne rien :

$$P_1 = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{35}$$

3. Calculons la probabilité P_2 qu'elle gagne 100 francs :

$$P_2 = \frac{C_2^1 \times C_2^2}{C_7^3} = \frac{2 \times 1}{35} \Rightarrow P_2 = \frac{2}{35}$$

4. Calculons la probabilité P_3 qu'elle gagne au moins 800 francs

$$P_3 = \frac{(C_2^1 \times C_2^2) \times (C_2^2 + C_2^1)}{C_7^3} = \frac{(2 \times 1) \times (1 + 2)}{35}$$

$$P_3 = \frac{3 \times 3}{35} \Rightarrow P_3 = \frac{9}{35}$$

EXERCICE 2

1. Représentons graphiquement l'image de point associé à cette série de statistique : (voir graphique à la fin de la correction du sujet de mathématiques)

2. a) Calculons les moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques (x_i) et (y_i) :

$$\bar{x} = \frac{5+6+8+8+9+11+12+12+13+14}{10} = 9,8$$

$$\bar{y} = \frac{7+8+9+10+10+13+13+15+15+16}{10} = 11,6$$

b) Donnons les coordonnées du point moyen G de la série statistique double :

$$(x_i, y_i) : G \left(\begin{matrix} 9,8 \\ 11,6 \end{matrix} \right)$$

3. a) Déterminons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 ,

$$\bar{x}_1 = \frac{5+6+8+8+9}{5} = 7,2$$

$$G_1 \left(\begin{matrix} 7,2 \\ 8,8 \end{matrix} \right)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{7+8+9+10+10}{5} = 8,8$$

$$\bar{x}_2 = \frac{11+12+12+13+14}{5} = 12,4$$

$$G_2 \left(\begin{matrix} 12,4 \\ 14,4 \end{matrix} \right)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{13+13+15+15+16}{5} = 14,4$$

3.b) Voir graphique à la fin de la correction

4. a) Vérifions qu'une équation de (D) par la méthode de Mayer est $y = \frac{14}{12}x + \frac{68}{65}$: Nous savons que $y = ax + b$.

$$\text{Mayer est } y = \frac{14}{12}x + \frac{68}{65} : \text{ Nous savons que } y = ax + b.$$

$$\text{on a : } \begin{cases} y_1 : 8,8 = 7,2x + b \\ y_2 : 14,4 = 12,4x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 72x + 10b = 88 \\ 124x + 10b = 144 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -72x - 10b = -38 \\ 124x + 10b = 144 \end{cases}$$

$$52x = 56 \Leftrightarrow x = \frac{56}{52} \Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$$

Nous avons $72x + 10b = 88$

$$\Leftrightarrow 72 \times \frac{14}{13} + 10b = 88$$

$$\Leftrightarrow \frac{72 \times 14}{13} + 10b = 88$$

$$\Leftrightarrow \frac{1008}{13} + 10b = 88$$

$$\Leftrightarrow 10b = 88 - \frac{1008}{13}$$

$$\Leftrightarrow 10b = \frac{88 \times 13 - 1008}{13}$$

Nous déduisons que $y = \frac{14}{13}x + \frac{68}{65}$ est une équation

b- Calculons la note d'un élève :

Nous savons que $y = \frac{14}{13}x + \frac{68}{65}$ si $x = 15$.

$$\text{Nous avons } y = \frac{14}{13} \times 15 + \frac{68}{65}$$

$$= \frac{210}{13} + \frac{68}{65}$$

$$= \frac{210 \times 5 + 68}{13 \times 13}$$

$$= \frac{1050 + 68}{169} = \frac{1118}{169} \approx 6,61$$

la note probable d'un élève qui a obtenu 15/20 en français est 17,2.

PROBLEME

Partie A :

1.a) Donnons la valeur de $f(0)$ et celle de $f(1)$:

$$f(0) = 2 \quad f(1) = 0$$

b) Donnons l'ensemble des solutions de chacune des inéquations (I_1) et (I_2) sur $[-3; 2]$:

$$(I_1) : f(x) < 0 \text{ solution }]1; 2[$$

$$(I_2) : (I_2) : f(x) \geq 0 \text{ solution } [-3; 1]$$

2. a) Donnons la valeur de $f'(0)$: $f'(0) = 0$

b) Déterminons les variations de f sur $[-3; 2]$

$[-3; 0]$ $f(x)$ est croissante

$[0; 2]$ $f(x)$ est décroissante.

c) Dressons le tableau de variation :

x	-3	0	1	2
f'(x)	+	0	-	
f(x)		2	0	-7,3

b) Vérifions que g est strictement croissant sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissant sur $]0; +\infty[$

$e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend de $-x$

or $\forall x \in]-\infty; 0[; -x > 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[; -x < 0$

$\forall x \in]-\infty; 0[; g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Calcul et tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$

$$g(0) = (1-0) \times e^0 = 1 \times 1 \Leftrightarrow g(0) = 1$$

Tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	+	0	-
f'(x)		1	

PARTIE B

soit $g(x) = (1-x)e^x$

1. a) Calculons limite $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

b) Calcul de la limite $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = e^x \cdot xe^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

Interprétation graphique du résultat

Limite $g(x) = 0$ donc (C_s) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2.a) Vérification : pour tout réel x , $g'(x) = -xe^x$

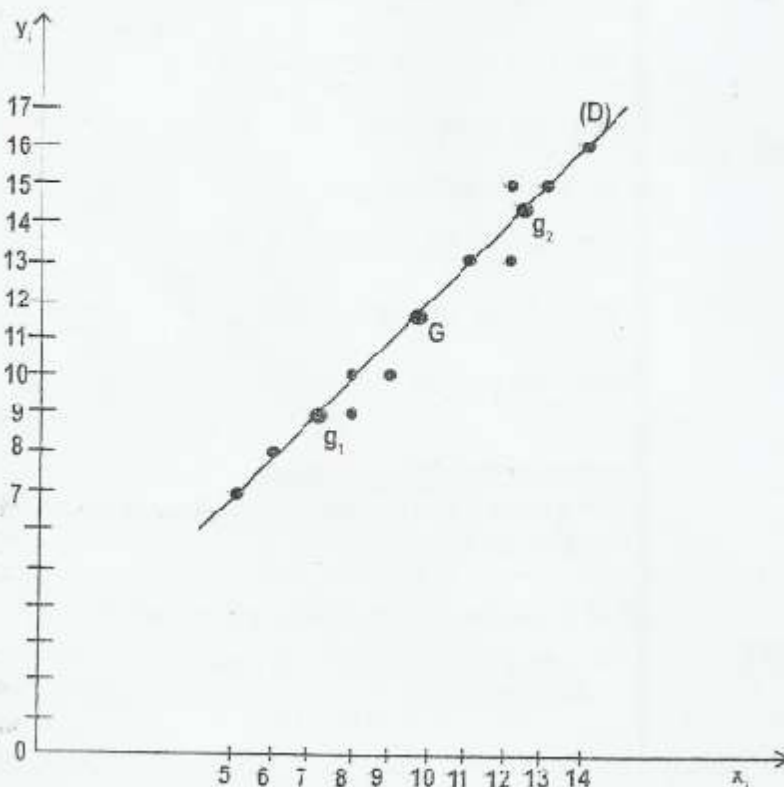
$$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = (1-x)e^x + (1-x)e^x$$

$$= -e^x + (1-x)e^x$$

$$= -e^x + e^x - xe^x$$

$$g'(x) = -xe^x$$

Suite exercice 2



d- Déterminons une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_0)$ au point de l'abscisse 1.

$$(T): y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

$$g'(1) = -1e^1 \Leftrightarrow g'(1) = -e$$

$$g(1) = (1-1)e \Leftrightarrow g(1) = 0$$

$$(T): y = -e(x - 1) + 0$$

$$(T): y = -xe + e$$

SUJET DE MATHEMATIQUES 2010

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION DE BASE

DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS

CONCOURS D'ENTRÉE AU CAFOP (I.O.)
SESSION 2010

Coef : 4
Durée : 2 h

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

A la kermesse d'un Lycée, un jeu consiste à tirer trois enveloppes parmi sept. Deux de ces enveloppes contiennent 1 000 francs, deux autres contiennent 500 francs et les autres enveloppes ne contiennent rien.

Les enveloppes sont identiques et non transparentes.

Fatou tire au hasard et simultanément trois enveloppes.

- Vérifier que le nombre de tirages possibles est 35.
- Calculer la probabilité P_1 qu'elle ne gagne rien.
- Calculer la probabilité P_2 qu'elle gagne exactement 1000 francs.
- Calculer la probabilité P_3 qu'elle gagne au moins 1500 francs.

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenus par dix candidats aux épreuves orales de français et d'anglais à un examen, x_i est la note de français et y_i la note d'anglais.

x_i	5	6	8	8	9	11	12	12	13	14
y_i	7	8	9	10	10	13	13	15	15	16

- représenter graphiquement le nuage de point associé à cette série de statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (L'unité graphique est le centimètre).
- Calculer les moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques (x_i) et (y_i) .
 - Donner les coordonnées du point moyen G de la série statistique double (x_i, y_i) . Placer G .
- On partage la série (x_i, y_i) en deux séries S_1 et S_2 de même effectif.

S_1 :

x_i	5	6	8	8	9
y_i	7	8	9	10	10

S_2 :

x_i	11	12	12	13	14
y_i	13	13	15	15	16

On note G_1 le point moyen de S_1 et G_2 celui de S_2 .

- Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 .
 - Placer les points G_1 et G_2 dans le plan muni du repère (O, I, J) , soit (D) la droite d'ajustement linéaire du nuage de points.
4. a) Vérifier qu'une équation de (D) par la méthode de Mayer est $y = \frac{14}{12}x + \frac{68}{65}$.
- b) Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable d'anglais d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en français. (On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat).

CORRECTION IO SESSION 2011 MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Soit (E) : $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2.e^x - 15 = 0$

1- Vérifions si $-\ln 2$ et $\ln 3$ sont solutions de l'équation (E)

$$\begin{aligned} E(-\ln 2) &= e^{2x(-\ln 2)} + 2.e^{-\ln 2} - 15 \\ &= e^{2x \ln 1/2} + 2.e^{-\ln 1/2} - 15 \\ &= e^{-\ln 1/4} + 2.e^{-\ln 1/2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} - 14 = \frac{1}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{55}{4} \neq 0 \text{ donc } -\ln 2 \end{aligned}$$

N'est pas solution de (E)

$$\begin{aligned} E(\ln 3) &= e^{2\ln 3} + 2.e^{\ln 3} - 15 \\ &= e^{\ln 9} + 2.e^{\ln 3} - 15 \end{aligned}$$

$$= 9 + 6 - 15 = 0 \text{ donc } \ln 3 \text{ est solution de (E)}$$

4) Résolvons l'équation (E)

Soit $X = e^x$

$$E(x) : X^2 + 2X - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - [4 \times (-15)] = 64$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = -5$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = 3$$

Déterminons les valeurs de x en fonction des valeurs de X

$$X = e^x = -5$$

$e^x = -5$ impossible

$$X = e^x = 3$$

$$e^x = e^{\ln 3}$$

$$x = \ln 3 \text{ on a donc } S_R = \{\ln 3\}$$

EXERCICE 2

1-a Le crédit de consommation de Mlle Badou au début du 1^{er} mois

$$\begin{aligned} C &= 5.000 \text{ F} + 18.000 \text{ F} \\ &= 23.000 \text{ F} \end{aligned}$$

b-Justifions que le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 2^{ème} mois est égal à 20.300 F

$$= 23.000 \times 10/100 + 18.000 = 2300 + 18.000 = 20.300 \text{ F}$$

On a donc $C = 20.300 \text{ F}$

2-Le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 3^{ème} mois

$$\begin{aligned} C &= 20.300 \times 10\% + 18.000 \\ &= 2.030 + 18.000 \\ &= 20.030 \text{ F} \end{aligned}$$

3-a-Précisons les valeurs de U_1 , U_2 , U_3

$$U_1 = 23.000 \text{ F}$$

$$U_2 = 20.300 \text{ F}$$

$$U_3 = 20.030 \text{ F}$$

$$b-U_4 = U_3 \times 10\% + 18.000$$

$$= 0,1U_3 + 18.000 + 0,1 \times 20.030 + 18.000 + 2003 + 18.000 + 20.003$$

$$U_4 = 20.003$$

$$U_2 = 0,1U_1 + 18.000$$

$$U_3 = 0,1 U_2 + 18.000$$

$U_4 = 0,1U_3 + 18.000$ on peut donc conclure que pour tout nombre entier naturel non nul n , on a : $U_{n+1} = (0,1)U_n + 18.000$

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = U_n - 20.000$

a-Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et précisons le premier terme

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 20.000$$

$V_{n+1} = (0,1) U_n - 2000$ et $V_n = U_n - 20.000$ on remarque que $V_{n+1} = 0,1V_n$ on peut donc conclure que la suite V_n est une suite géométrique de raison 0,1

Précisons le premier terme :

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_1 = U_1 - 20.000$$

$$V_1 = 23.000 - 20.000 = 3.000$$

V_n est donc une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $V_1 = 3.000$

b) Exprimons V_n en fonction de n

la suite géométrique V_n de raison $q = 0,1$ et de premier terme $V_1 = 3.000$ est définie par : $q^{n-1} \cdot v_1$

$$V_n = (0,1)^{n-1} \cdot 3.000$$

$$V_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1}$$

d-Déduisons en U_n en fonction de n

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$U_n = V_n + 20.000$$

$$U_n = 3.000 (0,1)^{n-1} + 20.000$$

d-Justifions que le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 F

le crédit de consommation de Mlle Badou est représenté ici par U_n

vérifions donc si U_n est toujours supérieur à 20.000 F

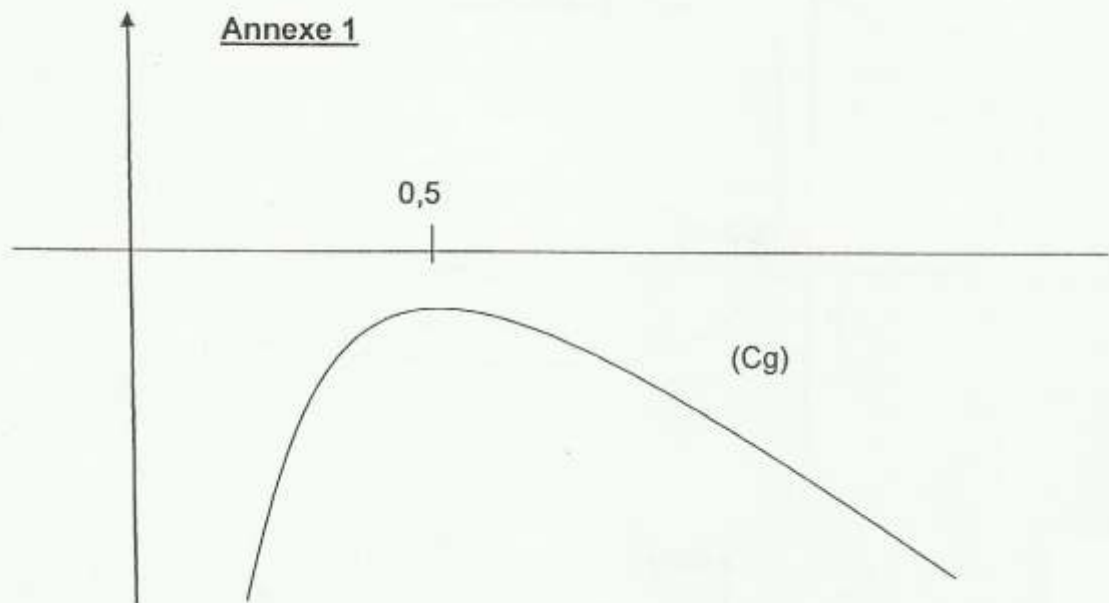
$$U_n = 3.000 (0,1)^{n-1} + 20.000$$

$$(0,1)^{n-1} > 0 \text{ donc } 3.000 (0,1)^{n-1} + 20.000 > 20.000$$

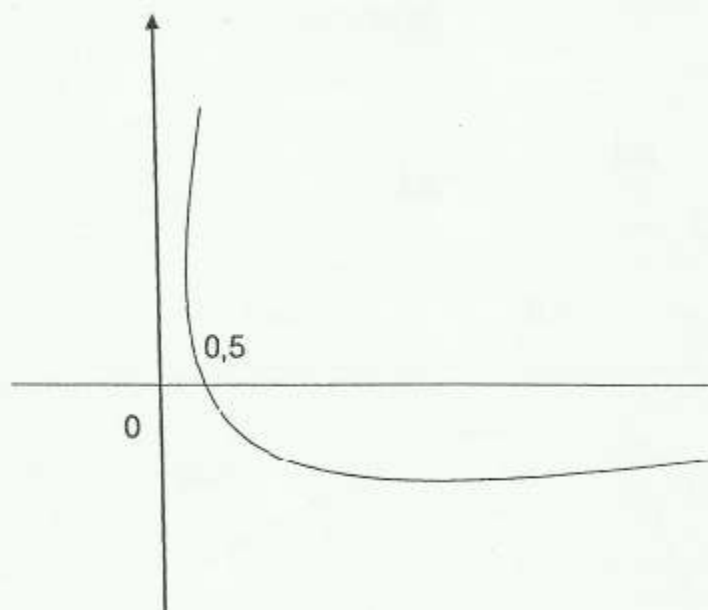
On a donc $Un > 20.000$

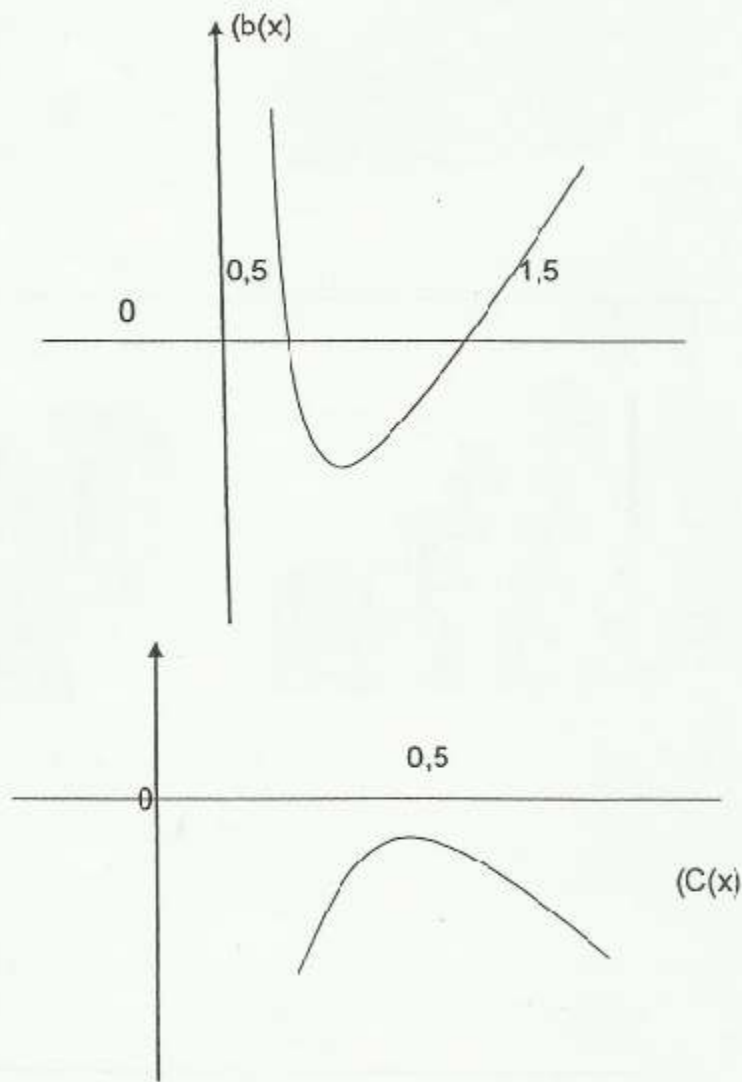
Le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 f

EXERCICE 3



Annexe 2





PARTIE A tableau de variation de $g(x)$

∞	0	0,5	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$g(0,5)$	

The graph illustrates the behavior of the function $g(x)$ based on the sign of its derivative $g'(x)$. The function is increasing on the interval $(0, 0.5)$ and decreasing on the interval $(0.5, +\infty)$. The peak of the function is at $x = 0.5$, where $g'(x) = 0$.

∞	0	0,5	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-

∞	0	0,5	1,5	$+\infty$
$g(x)$		+ 0	- 0	+

∞	0	$+\infty$
$c(x)$		

b) C'est $a(x)$ qui

g' sur l'intervalle $]0; \infty[$ car $a(x)$ s'annule pour l'unique valeur $x = 0,5$

coïncide avec

PARTIE B

Considérons la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et définie par :

$$f(x) = \frac{1-2x}{x}$$

1-démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est une asymptote à (C)

$$f(x) = \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{x} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1-2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$$

$$x \longrightarrow \pm\infty$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ ou $+\infty$

$$x \longrightarrow \pm\infty$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ graphiquement cela traduit que la droite d'équation $x = 0$

$$x \longrightarrow 0^+$$

$$x \longrightarrow 0^-$$

$$x > 0$$

$$x < 0$$

Est asymptote verticale à (C) en $+\infty$

3) démontrons que le point A (0 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe (C)

Pour le faire, démontrons que la fonction $g(x) = f(x + a) - b$ dont la représentation graphique est l'image de (C) par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est impaire

Avec A (a ; b) dans notre cas, A (0 ; 2)

$$g(x) = f(x + a) - b$$

$$= f(x+0) + 2$$

$$= f(x) + 2$$

$$= \frac{1-2x}{x} + 2$$

$$= \frac{1-2x+2x}{x}$$

$$G(x) = 1/x$$

montrons que $g(x)$ est impaire

$$g(-x) = 1/(-x) = -1/x = -g(x)$$

$g(-x) = -g(x)$ la fonction $g(x)$ est donc impaire

on peut donc dire que le point

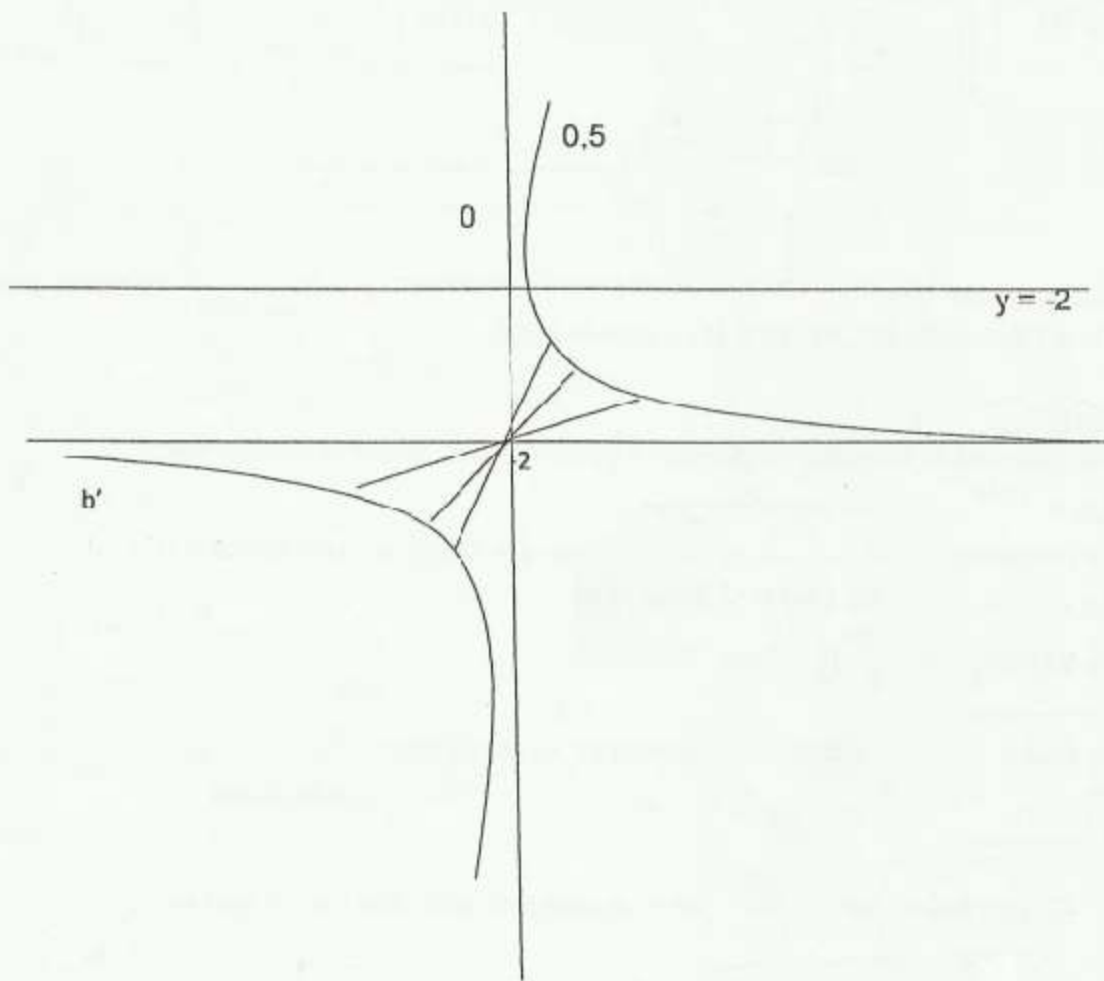
A (0 ; -2) est un centre de symétrie de la courbe (C)

4-On donne $g(x) = -2x + 1 + \ln x$

Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$ $g(x) = f(x)$

$$g'(x) = -2 + 1/x = \frac{1-2x}{x} = f(x)$$

$$x = 0$$



CONCOURS IO SESSION 2011 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère l'équation (E): $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

- 1- Les nombres $-\ln 2$ et $\ln 3$ sont-ils des solutions de l'équation (E) ? Justifier
- 2- Résoudre l'équation (E)

EXERCICE 2

Une compagnie de téléphonie mobile propose à sa clientèle la formule suivante :

La compagnie offre au début du premier mois au client un crédit de 5.000 F

En plus, le client bénéficie chaque mois d'un crédit supplémentaire de 10% de sa consommation du mois précédent.

Pour bénéficier des avantages de cette formule, le client *est tenu d'approvisionner son compte chaque mois*. Mlle Badou, cliente de cette compagnie, décide de bénéficier de cette formule en approvisionnant son compte d'une valeur fixe au début de chaque mois de 18.000 F.

Chaque mois, elle consomme la totalité de son crédit.

- 1- a- Calculer le crédit de consommation de Mlle Badou au début du 1^{er} mois
b Justifier que le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 2^{ème} mois est égal à 20 300 F
2. Calculer le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 3^{ème} mois
3. On désigne par U_n le crédit dont dispose Mlle Badou au début du $n^{\text{ième}}$ mois ($n \geq 1$)
a- Préciser les valeurs de U_1, U_2, U_3
b- calculer U_4
c- justifier que pour tout nombre entier naturel non nul n , $U_{n+1} = (0,1) U_n + 18\,000$
4. pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = U_n - 20\,000$
a-Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et préciser le premier terme
b-Exprimer V_n en fonction de n
c-En déduire U_n en fonction de n
d-Justifier que le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000

EXERCICE 3

Sur la feuille annexe 1, la figure présente la courbe (C_g) d'une fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction dérivée g' s'annule pour l'unique valeur $x = 0,5$

PARTIE A

1. A partir d'une lecture graphique, dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (on ne demande pas les limites),
2. On donne sur la feuille annexe 2 les courbes de trois fonctions numériques a, b et c .
L'une parmi ces fonctions coïncide avec la fonction dérivée g' de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$
a) Par une lecture graphique, préciser le signe de $a(x)$ et $b(x)$ et $c(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$
b) En déduire la fonction qui coïncide avec g' sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Justifier la réponse

PARTIE B

On considère la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et définie par : $f(x) = \frac{1-2x}{x}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm sur les axes,

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est une asymptote à (C)
2. Calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat
3. Démontrer que le point $A(0, -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).
4. On donne $g(x) = -2x + 1 + \ln x$.

Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$; $g'(x) = f(x)$,

5, a) A l'aide de la partie A sur une feuille de papier millimétré, reproduire la courbe de f sur l'intervalle

b) Compléter, par la courbe de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$

CORRECTION IO SESSION 2012 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

1- Résolvons l'équation

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7+5}{4} = 3$$

$$S/R = (1/2 ; 3)$$

2- Déduisons de la résolution

$$E) : X \in \mathbb{R}, 2^{2x} + 7^{e^x} + 3 = 0$$

$$2^{2x} + 7^{e^x} + 3$$

$$2(e^x)^2 + 7^{e^x} + 3 \text{ posons } X = e^x$$

$$2^{2x} + 7^{e^x} + 3 = 0$$

De (1), on a : $X = 1/2$ ou $X = 3$ or $X = X = e^x$ ainsi donc

$$e^x = 1/2 \text{ ou } e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln(1/2) \text{ ou } x \ln e^x = \ln 3$$

$$X = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 3$$

$$S/R = (-\ln 2 ; \ln 3)$$

EXERCICE 2

PARTIE A

1- Les chiffres sont répétés donc on a :

$$N = 10^4 = 10.000$$

2- Le nombre de codes PIN commençant par 24

les éléments sont non distincts, les 2 chiffres restants peuvent être répétés :

$$N = 10^2 = 100$$

3- Le nombre de code PIN composé à la fois de 0 ; 2 ; 4 et 8

Ici, nous avons une permutation car, il s'agit de ranger 4 chiffres dans 4

$$N = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

4- Le nombre de code PIN ; composés de chiffres distincts

Ici, nous avons un arrangement de 4 dans 10

$$N = A = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

PARTIE B

1- Soit le code PIN formé par Angèle commençant par 24 Card

$$A = 100 \text{ et card } \Omega = 10.000$$

$$P(A) = \text{Card } A / \text{Card } \Omega = 21/10.000 = 0,0021$$

EXERCICE 3

PARTIE A

1- A travers la lecture graphique

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -8$$

$$T : Y = f'(1) = (x-1) + f(1)$$

$$= x-1+1$$

$$T = y = x$$

2- Déterminons graphiquement le signe de $f(x)$ pour $x \in (0 ; 10)$

$$\forall x \in]0,1/e[, f(x) < 0;$$

$$\forall x \in]0,1/e[, f > 0$$

$$\forall x \in]0,1/e[, f = 0$$

$$\forall x \in]0; \infty[, f(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; \infty[, h'(x) \text{ est donc } h \text{ est strictement décroissante }]1; \infty[$$

$$3 - a - \text{Etude du signe de } f(x) - h(x) \text{ sur } [0; \infty]$$

$$f(x) - h(x) = 1 + \ln x = x$$

$$\forall x \in]0; \infty[, x > 0 \text{ donc } f(x) - h(x) > 0$$

c- Position relatives de G et T

$$\forall x \in]0; \infty[, f(x) - h(x) > 0 \text{ ainsi G est au dessus de T}$$

4 - Construction T (voir le tracé)

$$\text{Soit } F : F :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto x \ln x - x$$

a- Vérifions

$$\forall x \in]1; \infty[, f'(x) = x \ln x - x = nx + 1 - 1 = \ln x$$

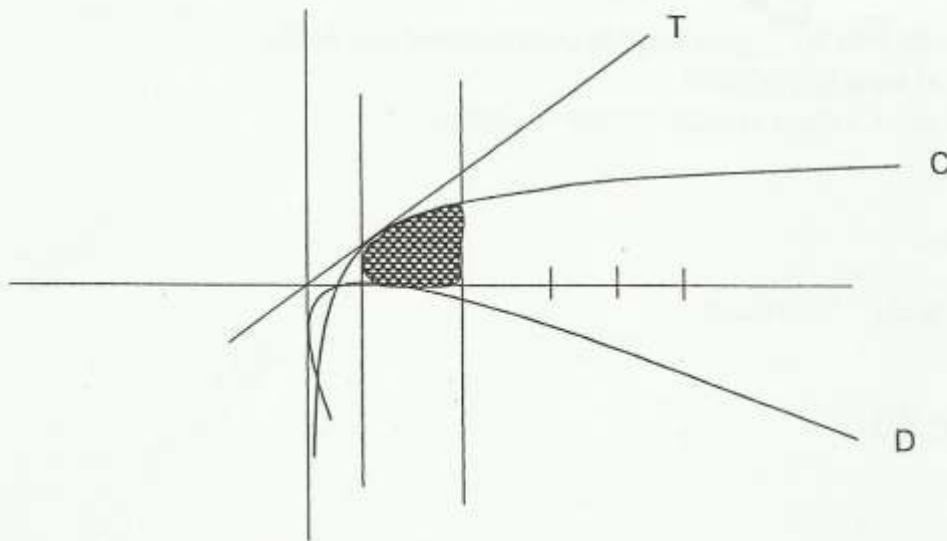
Ainsi donc F est primitive de $\ln x$

b- Justification de $\alpha = e$

$$= 1 + \ln x) dx$$

$$= x + x \ln x - x$$

$$= e + e \ln e - e - 1 + 1 \ln 1 + 1$$



4- Nous avons la fonction $f(x) = ax + b + \ln x$

a- Vérifions que :

$$\forall x \in]1; \infty[, f(x) = ax + b + \ln x$$

$$= 4 + \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in]1; \infty[, f'(x) = (ax+1)/x$$

b- Démontrons que $a=0$ et $b=1$

$$f(1) = 1 \quad a \cdot 1 = 1 \quad a = 0$$

$$f(x) = a + 1 = 1 \quad b = 1$$

Ainsi donc $f(x) = 1 + \ln x$

PARTIE B

Nous avons les fonctions suivantes

$$G(x) = \frac{1-x}{x} \text{ et } h(x) = -x + 1 + \ln x$$

1- Justifions que $\Delta : x = 0$ est asymptote à T

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1 + \ln x) = \infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \infty$$

Ainsi donc $\Delta : x = 0$ est asymptote verticale à T

2- A-Démontrons

$$\forall x \in]1; \infty[, h'(x) = (-x + 1 + \ln x)'$$

$$h'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} = g(x)$$

$$\forall x \in]1; \infty[, h'(x) = g(x)$$

c- Déduisons en le sens de variation de h

$\forall x \in]0; \infty[, x > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $1-x$ ainsi donc

$\forall x \in]0; 1[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante] 0 ; 1[

CONCOURS IO SESSION 2012 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

- 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 7x + 3 = 0$
- 2- En déduire les solutions de l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, 2e^{2x-7e+3} = 0$

EXERCICE 2

La puce d'un téléphone portable est munie d'un code de sécurité permettant l'accès au réseau d'une société de téléphone cellulaire. Ce code dénommé code PIN peut être modifié par l'utilisateur. Le code PIN est un numéro de 4 chiffres choisi dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Exemple code pin : 0101 ; 0000 ; 7152

PARTIE A

- 1- Justifier que le nombre de code PIN que la société peut attribuer est égal à 10.000
- 2- Déterminer le nombre de code PIN commençant par le nombre 24
- 3- Déterminer le nombre de code PIN composés à la fois des chiffres 0 ; 2 ; 4 et 8

PARTIE B

Kadio offre une puce de cette société de téléphonie cellulaire à son épouse angèle âgée de 24 ans. au moment d'utiliser sa puce, angèle veut s'attribuer un nouveau code PIN ; elle décide alors de former au hasard son code en utilisant en priorité les chiffres de son âge

- 1- Calcule la probabilité pour que le code d'angèle commence par 24
- 2- Justifier que la probabilité pour que angèle compose un code formé de chiffres distincts rangés dans l'ordre croissant et où l'on retrouve le nombre indiquant son âge égale à 0,0021

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé OIJ, l'unité graphique est le centimètre

Soit la figure de la feuille annexe

C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $0 ; 10$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe C

La droite t est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1

A (1 ; 1) et O sont deux points de T

C coupe la droite OJ au point d'abscisse $1/0$

- 1- Conjecturer par lecture graphique la limite de f à droite en 0
- 2- Vérifier qu'une équation de la droite (T) est $y=x$
- 3- Déterminer graphiquement le signe $f(x)$ pour x élément de l'intervalle $0 ; 10$
- 4- On admet que pour tout nombre réel x élément de $0 ; +\infty$, $f(x) = ax+b + \ln(x)$ ou a et b sont des nombres réels
- 5- A vérifiez que $x \rightarrow 0^+ ; f(x) = ax + \ln x$
A en utilisant les informations données sur la courbe C démontrer que 0 et $b=1$

PARTIE B

On considère

Les fonctions g et h définies sur $0 ; +\infty$; par $g(x) = 1-x/x$ et $h(x) = -x+1+\ln(x)$

T est la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

- 1- Justifier que la droite A d'équation $x = 0$ est asymptote à T
- 2- Démontrer que $0 ; \infty, h'(x) = g(x) = g(x)$

En déduire le sens de la variation de h

3-a-étudier le signe de $f(x)-h(x)$ pour tout le nombre élément de $0 ; \infty$

b-en déduire les positions relatives de C et T

4-Construire T sur l'intervalle $0 ; 10$ dans le repère que C

X	0,1	0,3	0,4	1	4	6	8	10
Arrondi d'ordre 1 de $h(x)$	-41,4	-0,5	-0,3	0	-1,6	-3,2	-4,9	-6,7

6- On considère la fonction $F : 1 ; +\infty \rightarrow \mathbb{R}$

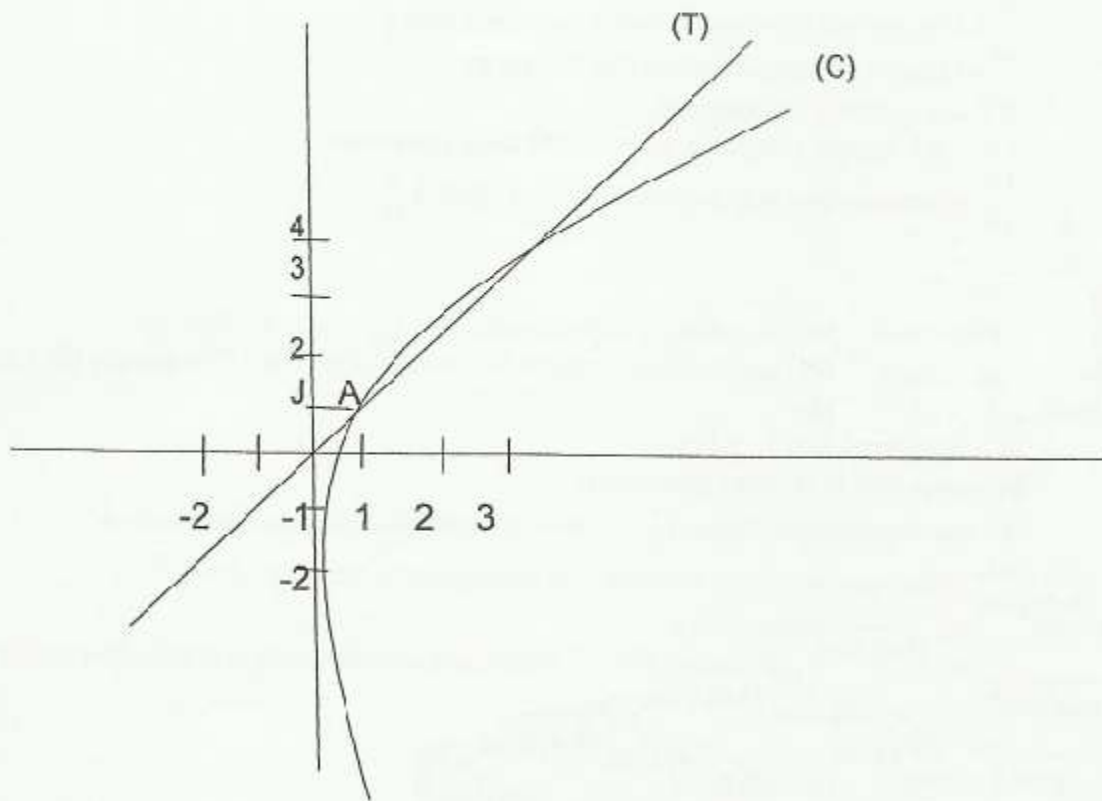
7- $X \mapsto x \ln x - x$

a-vérifier que F est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $1 ; +\infty$

b-on note l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par C, (O,I et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Hachurer la partie du plan dont l'aire est égale à α

Justifier que $\alpha = e$



CORRECTION IO SESSION 2013
MATHEMATIQUES

EXERCICE I

1) Démontrons que $\forall X \in \mathbb{R}, (x-1)(x-100)(x+80) = x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000$
 $(x-1)(x-100)(x+80) = (x-1)(x-100)(x+80)$

$$= x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000$$

$$= (x^2 - 100x - x + 100)(x+80)$$

$$= x^3 - 100x^2 - x^2 + 100x + 80x^2 - 8000x - 80x + 8000$$

$$= x^3 - 101x^2 + 80x^2 + 100x - 8080x + 8000$$

$$(x-1)(x-100)(x+80) = x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000$$

2) Résolvons

a) $x \in \mathbb{R}$

$$(lnx)^3 - 21(lnx)^2 - 7980lnx + 8000 = 0$$

Posons : $X = lnx$

$$X^3 - 21X^2 - 7980X + 8000 = 0$$

$$(X-1)(X-100)(X+80) = 0$$

$$X-1=0 \text{ ou } X-100=0 \text{ ou } X+80=0$$

$$X=1 \text{ ou } X=100 \text{ ou } X=-80$$

On a $X = lnx$ alors $lnx=1$ ou $lnx=100$ ou $lnx=-80$

$$X=e \text{ ou } x=e^{100} \text{ ou } x=e^{-80}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-80}; e; e^{100}\}$$

$$b) 2lnx + ln(x-21) = ln(7980x - 8000)$$

$$(lnx)^2 + ln(x-21) = ln(7980x - 8000)$$

$$ln[x^2(x-21)] = ln(7980x - 8000)$$

$$x^2(x-21) = 7980x - 8000$$

$$x^3 - 21x^2 = 7980x - 8000$$

$$x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000 = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{1; 100; -80\}$$

EXERCICE II

1) Justifions que le nombre d'équipe qu'il peut former est égal à 15504
 Sélectionner 5 athlètes revient à faire une combinaison, d'où

$$C_{20}^5 = 15504$$

2) a) la probabilité de (A)

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(U)}$$

$$P(A) = \frac{C_7^5 + C_{13}^5}{\text{Card}(U)} = \frac{C_7^3 + C_{13}^5}{15504}$$

$$P(B) = \frac{C_{12}^5}{15504}$$

$$c) P(C) = \frac{C_8^2 \times C_{12}^3}{15504}$$

Démontrons que $P(C) = \frac{5}{38}$

$$P(C) = \frac{C_3^3 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_5^3}{15504}$$

D'où $P(C) = \frac{5}{38}$

EXERCICE III

On considère $f \in]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x + \ln x$

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique : la droite (D) d'équation $x = 0$ admet une asymptote horizontale

2) $f(x) = x\left(\frac{3}{x} - 2 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - 2x + \ln x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

3) a) justifions que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1-2x}{x}$

$$f'(x) = (x - 2x + \ln x)'$$

$$f'(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{x}$$

b) Etudions les variations de $f'(x)$

$x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in]0; 1/2[, f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur }]0; 1/2[$$

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ est strictement décroissante sur }]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\forall x = \frac{1}{2}, f'(x) = 0 \text{ donc } f \text{ est constante.}$$

Tableau de signe

x	0	1/2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

c) Tableau de variation

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$(2 \ln 2)$	$-\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \ln 2$$

d) démontrons que $f(x)$ admet une solution unique $\alpha \in [1; 2]$

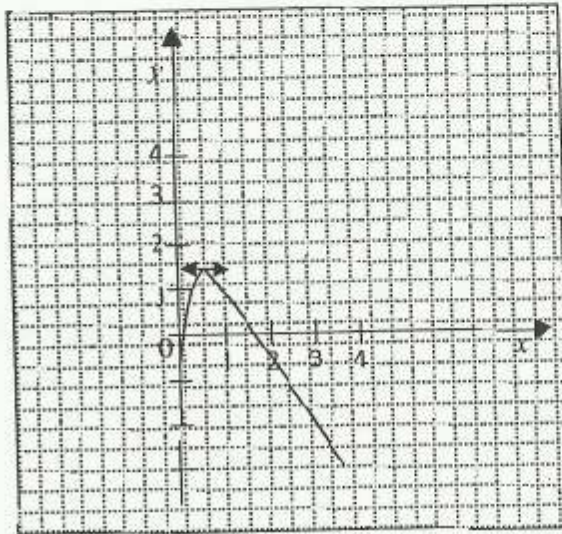
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x + \ln x) \\ &= 1 + \ln x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ln 2 - 1$$

4) Représentation graphique



CONCOURS IO SESSION 2013 MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

- 1) Démontrer que, pour tout les nombres réel x , $(x-1)(x-100)(x+80) = x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000$.
- 2) Résoudre chacune des équations suivantes :
 - a) $(E_1) : x \in \mathbb{R}, (\ln x)^3 - 21(\ln x)^2 - 7980 \ln x + 8000 = 0$;
 - b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}, 2 \ln x + \ln(x-21) = \ln(7980x - 8000)$.

EXERCICE 2

Au terme d'une compétition interne, l'entraîneur du club de Judo a sélectionné :

- 7 filles dont 3 cadettes et 3 juniors ;
- 13 garçons dont 5 cadets et 8 juniors.

L'entraîneur choisit ensuite au hasard parmi ces sélectionnés 5 athlètes pour former une équipe devant participer à une compétition nationale.

- 1) Justifier que le nombre d'équipe qu'il peut former est égal à 15504.

Dans toute la suite on présentera chaque résultat sous forme de fraction.

- 2) a) calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « l'équipe est formée d'athlètes de même sexe » ;

B : « l'équipe ne comporte que des juniors ».

- b) On considère l'événement :

C : « L'équipe comporte exactement deux cadettes ».

Démontrer que la probabilité de C est égale à $\frac{5}{38}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x + \ln x$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe de représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

L'unité graphique est 2cm.

- 1) a) déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
b) Interpréter le résultat graphique.
- 2) En remarquant que $f(x) = x(\frac{3}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x})$, déterminer la limite de f en $+\infty$
- 3) a) Justifier que pour tout nombre réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{1-2x}{x}$
b) Etudier les variations de f .
d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle

$[1; 2]$.

- 4) Tracer $(\mathcal{C})$. (On prendra $\alpha = 1,7$)

On donne le tableau de valeur ci-dessus :

x	0,05	0,06	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	3	4
f(x)	-0,1	0,1	0,5	1	1,3	1	0,4	-0,3	-1,9	-3,6

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ORDINAIRE)
SESSION 2014

Durée : 2 h
Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

*Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2, 2/2
 et une feuille annexe à rendre avec la copie.*

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer la lettre correspondant à la bonne réponse.

		A	B	C
1	Le résultat du calcul de $\frac{13}{15} - \frac{7}{5}(1 - \frac{2}{3})$ est :	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{3}$
2	L'arrondi d'ordre 2 du nombre 4,617 est :	4,61	461	4,62
3	Le quart du nombre 20 augmenté de son cinquième est égal à :	10	9	4,5
4	L'équation $0,4x - 5 = -1,4$ a pour solution :	3,5	$\frac{5}{4}$	9
5	Le nombre de diviseurs de 24 est :	8	9	24
6	3,45 h est égal à :	3h 45 min	345 min	207 min
7	A l'échelle $\frac{1}{20\,000}$, 1 km est représenté par :	5 cm	10 cm	20 cm
8	Une voiture roule à la vitesse moyenne de 80 km/h. En 42 min, cette voiture parcourt :	420 m	56 km	5,6 km
9	Après une remise de 20 %, une moto est vendue à 520 000 F. Son prix initial est :	650 000 F	800 000 F	104 000 F
10	Une facture impayée d'un montant de 125 000 F connaît une augmentation de 15 000 F. Le taux d'augmentation est :	12 %	12,5 %	15 %

EXERCICE 2

En l'an 2010, une ville A comptait 50 000 habitants et sa banlieue B en comptait 20 000. Des mouvements de populations s'opèrent entre les deux zones d'habitation. Chaque année, chacune des zones perd 20 % de sa population et gagne 20 % de la population de l'autre zone. On note a_n le nombre d'habitants de la ville A et b_n celui de sa banlieue en l'an $(2010 + n)$, pour tout entier naturel n .

- Justifier que : pour tout entier naturel n ,
 $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2b_n$ et $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,8b_n$.
 - Calculer a_1 et b_1 , puis a_2 et b_2 .
- On définit les suites (c_n) et (d_n) pour tout entier naturel n par :

$$c_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad d_n = a_n - b_n.$$
 - Justifier que : pour tout entier naturel n , $c_n = 70\,000$.
 - Justifier que : pour tout entier naturel n , $d_{n+1} = 0,6d_n$.
 - Exprimer d_n en fonction de n .

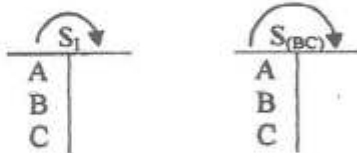
3. a) Démontrer que : pour tout entier naturel n ,
 $a_n = 35\,000 + 15\,000 \times (0,6)^n$ et $b_n = 35\,000 - 15\,000 \times (0,6)^n$.
 b) Déterminer la limite de chacune des suites (a_n) et (b_n) .
 c) Quelle observation peut-on faire sur l'évolution des populations dans ces deux zones ?

EXERCICE 3

(La feuille annexe est à rendre avec la copie.)

Sur la figure de la feuille annexe, ABC est un triangle et (Δ) est la médiatrice du segment [BC].

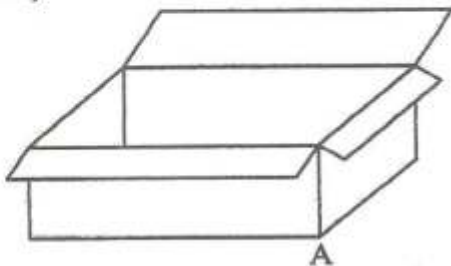
1. Construire le point D, symétrique de A par rapport à la droite (BC).
 Construire le point E, symétrique de A par rapport au point I.
 Tracer les droites (CD) et (BE).
 On note K leur point d'intersection.
2. On note S_I la symétrie de centre I et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC).
 Recopier et compléter les tableaux de correspondance suivants :



3. On note $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) .
 a) Donner l'image de C par $S_{(\Delta)}$.
 b) Justifier que : $S_I \circ S_{(BC)} (D) = E$.
4. On admet que : $S_{(\Delta)} = S_I \circ S_{(BC)}$.
 Déterminer l'image de la droite (CD) par $S_{(\Delta)}$ et justifier que K appartient à (Δ) .

EXERCICE 4

Yapi a une boîte en forme de pavé droit de largeur 8 cm, de longueur 13 cm et de hauteur 7 cm (dimensions intérieures).



Il dispose de nombreux cubes, les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1 cm d'arête.

1. Combien de cubes doit-il utiliser pour remplir complètement la boîte s'il choisit uniquement des cubes d'arêtes 1 cm ?
2. Yapi choisit 9 cubes d'arête 2 cm et 4 cubes d'arête 1 cm avec lesquels il fait une rangée sur chaque côté (largeur, longueur) à partir du point A.
 a) Déterminer le nombre de cubes de 2 cm sur le côté de la largeur.
 b) Combien de cubes de chaque type peut-il ranger sur le côté de la longueur ?
3. Justifier qu'il faut exactement 40 cubes pour couvrir le fond de la boîte et obtenir une couche de hauteur 2 cm.
4. Déterminer le nombre total de cubes nécessaires pour remplir complètement la boîte avec ce type de rangement.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ORDINAIRE)

SESSION 2015

DUREE : 2h
Coefficient : 3

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

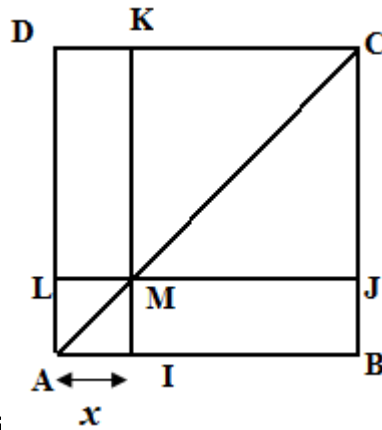
Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
 Docs à portée de main

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré de coté 4cm. On choisit un point M sur la diagonale [AC].

La parallèle à la droite (BC) et passant par M coupe [AB] en I et [CD] en K. la parallèle à la droite (AB) passant par M coupe [BC] en J et [AD] en L.



- Justifier que les quadrilatères AIML et MJCK sont des carrés.
- Trouvez une transformation simple qui applique DKML sur MIBJ.
- On pose : $AI = x$
 On note $\mathcal{A}_1(x)$ et $\mathcal{A}_2(x)$ les aires respectives des carrés AIML et MJCK.
 - Calculer $\mathcal{A}_1(x)$ et $\mathcal{A}_2(x)$
 - Déterminer la fonction f définie par $f(x) = \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x)$.
 - Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de $f(x)$ est minimale.

EXERCICE 2

- Déterminer PPCM (15 ; 18)
 - Déterminer PGCD (15 ; 18)
- dans le cadre des festivités de fin d'année, un feu d'artifice est organisé au plateau par le district d'Abidjan. Un dispositif de tirs est placé au niveau du pont Houphouët Boigny et tire chaque dix huit secondes. Un autre dispositif est placé au niveau du pont Général De Gaulle et tire chaque quinze secondes. A minuit, les deux feux d'artifice ont explosé simultanément.

Déterminer l'heure de la prochaine explosion simultanée des deux feux.

- après une explosion simultanée, cinq explosions successives se font entendre.
 A quelle heure la cinquième explosion s'est-elle produite ?

EXERCICE 3

Le déficit de logements en Côte d'Ivoire est de 400.000 logements en 2014. Il s'accroît de 50.000 logements par an. Pour résorber ce déficit, l'Etat a construit 60.000 logements en 2014. Il s'engage à augmenter le nombre de logements construits de 20% chaque année.

1. On note $u_0 = 60.000$ et u_n le nombre de logements construits en l'an $(2014 + n)$
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
 - c. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n = 60.000 \times (1.2)^n$
2. On note $v_0 = 400.000$ et v_n le déficit de logements en l'an $(2014 + n)$

On admet que : pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n - u_n + 50.000$

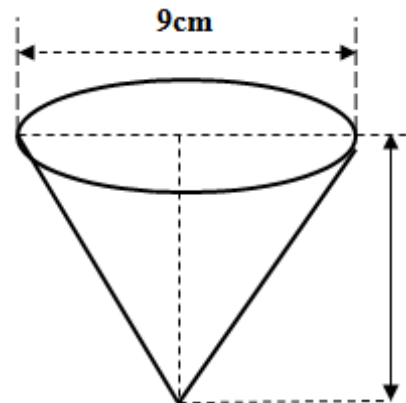
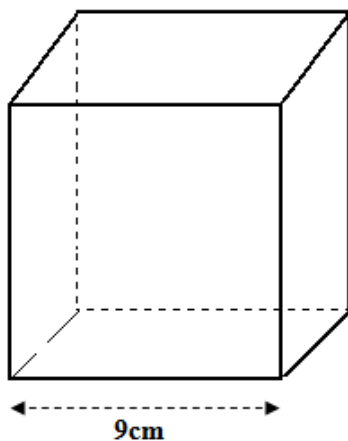
- a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Années	Nombre de logements construits	Déficit de logements
2014		
2015		
2016		
2017		

- b. Le déficit en logements sera-t-il résorbé en l'an 2020 ?

EXERCICE 4

Les figures ci-dessous qui ne sont pas en vraies grandeurs représentent un cube d'arête 9cm et un cône de révolution de base 9cm de diamètre et de hauteur 9cm.



Alex pense que le volume du cône représente 30% du volume du cube.

1. Calculer le volume du cube
2. Calculer la valeur exacte du volume du cône puis, sa valeur arrondie d'ordre 1.
(On prendra $\pi = 3,14$)
3. Vérifier si l'affirmation d'Alex est vraie.

corrigé de l'épreuve de mathématique

Exercice 1



- Justifions que donc le quadrilatère AIML est un carré.

NB : pour justifier que ce quadrilatère (donc 4 cotés) est un carré, on peut partir

- de la définition du losange qui est d'abords un quadrilatère (Un losange est un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur)
- et de cette propriété du losange (Un losange ayant un angle droit est un carré)

☞ Montrons que AIML est un losange

ABCD est un carré, donc, $AB = BC = CD = AD$ et $AB \perp BC$, $BC \perp CD$; $CD \perp AD$

- Dans le triangle ABC rectangle en B, on a $M \in (BC)$. D'après l'énoncé, la parallèle à (BC) passant par M coupe (AB) en I. donc, $(IM) \parallel (BC)$. on a :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{IM}{BC} \text{ C'est-à-dire } AI = IM \text{ car } AB = BC$$

- Dans le triangle ADC rectangle en D, on a $M \in (AC)$. D'après l'énoncé, la parallèle à (AB) passant par M coupe (AD) en L. donc, $(LM) \parallel (AB)$ et $(LM) \parallel (DC)$. on a :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AL}{AD} = \frac{ML}{CD} \text{ C'est-à-dire } AL = ML \text{ car } AD = CD$$

Comme $AI = IM$ et $AL = ML$, alors, AIML est un losange. ❶

☞ Montrons que AIML est un carré

$(IM) \parallel (BC)$ et $(BC) \parallel (AD)$. Donc, $(IM) \parallel (AD)$. Comme $L \in (AD)$ alors $(AL) \parallel (IM)$

Or, $(AD) \perp (AB)$.

Et comme $L \in (AD)$ et $I \in (AB)$, alors, nous pouvons dire que $(AL) \perp (AI)$ ❷

D'après ❶ et ❷, le losange, donc le quadrilatère AIML est un carré.

- Justifions que donc le quadrilatère MJCK est un carré.

D'après l'énoncé, dans le carré ABCD, $(IK) \parallel (AD)$, donc, $(IK) \parallel (BC)$. (AC) est l'hypoténuse de triangle ABC rectangle en B et $(IK) \cap (AC) = M$. Donc, $(IM) \parallel (BC)$.

$$\text{On a } \frac{CM}{CA} = \frac{CJ}{CB} = \frac{MJ}{AB} \text{ C'est-à-dire } MJ = CJ \text{ car } CB = AB$$

$$\text{De la même manière, } \frac{CK}{CD} = \frac{CM}{CA} = \frac{KM}{DA} \text{ C'est-à-dire } CK = KM \text{ car } CD = DA$$



$CK = KM$ et $MJ = CJ$. Donc, MJCK est un losange. ③

$(AD) \perp (DC)$ et $(IK) \parallel (AD)$; donc, $(IK) \perp (DC)$. Et comme $M \in (IK)$, alors, $(MK) \perp (DC)$

Or, $(MK) \cap (DC) = K$. Donc, $(MK) \perp (KC)$

D'après ③ et ④ le losange, donc le quadrilatère MICK est un carré.

1. Trouvons une transformation simple qui applique DKML sur MIBJ

- $[IL]$, $[BD]$ et $[JK]$ sont les diagonales respectives des carrés AIML, ABCD et MJCK.
- (AC) est une diagonale commune des carrés ABCD, AIML et MJCK. On a :



$S_{(AC)}$	
D	B
K	J
M	M
L	I

La transformation qui applique DKML sur MIBJ est la
symétrie orthogonale d'axe (AC)

2.

$AI = x$, $A_1 =$ aire de AIML et $A_2 =$ aire de MJCK

a)

- $A_1 = x^2$	- $A_2 = (4 - x)^2 = x^2 - 8x + 16$
---------------	-------------------------------------

b) $f(x) = (A_1(x) + A_2(x)) = f(x) = x^2 + (4 - x)^2$, c'est-à-dire $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$

c) la valeur pour laquelle $f(x)$ atteindra un extrémum correspond à la valeur pour laquelle $f'(x)$ sera égale à 0.

$$f'(x) = 4x - 8 \text{ et } f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc, l'extrémum en question est un minimum

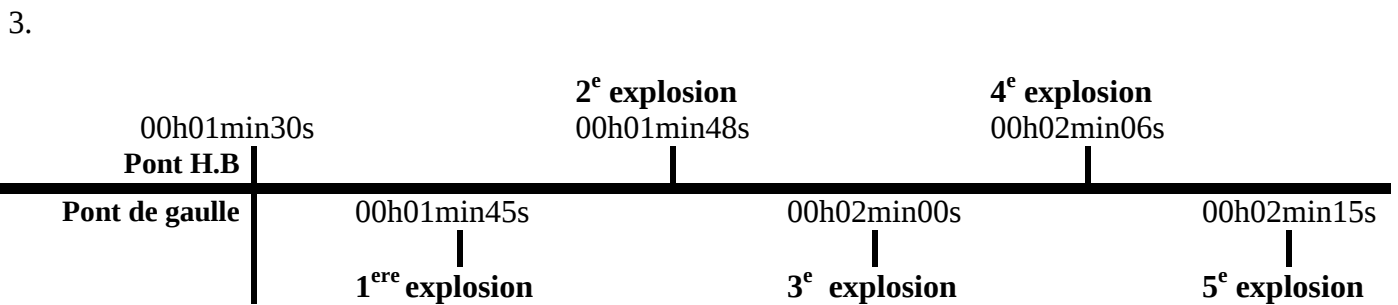
- $f(x)$ atteindra un minimum pour $x = 2$

Exercice 2.

- $15 = 3 \times 5$
 - $18 = 2 \times 3^2$
$$\left. \begin{array}{l} 15 = 3 \times 5 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{PPCM}(15; 18) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90 \\ \text{PGCD}(15; 18) = 3 \end{array}$$
- L'heure de la prochaine explosion simultanée correspond au PPCM (15 ; 18), c'est-à-dire au bout de 90 secondes ou au bout de 1min30s

Donc, l'heure de cette explosion est 00h01min30s

Fomesoutra.com
ga soutra
Docs à portée de main



Cette cinquième explosion s'est produite à 00h02min15s

Exercice 3

- $U_0 = 60.000$
 $U_1 = U_0 + 20\%.$ $U_0 = 60.000 + 20\% \cdot 60.000 = 72.000$ | $U_2 = U_1 + 20\%.$ $U_1 = 72.000 + 20\% \cdot 72.000 = 86.400$
 - $U_{n+1} = U_n + 20\%.$ $U_n = 1,2 \cdot U_n$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1,2 \cdot U_n}{U_n} = 1,2 = \text{constante}$$
- (U_n) est donc une suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 60.000$ et de raison $q = 1,2$

 - Pour toute suite géométrique, on a $U_n = U_0 \cdot q^n$. **Ainsi, $U_n = 60.000 \cdot (1,2)^n$**

2.

a)

années	Nombre de logements construits	Déficit de logements
2014	60.000	400.000
2015	72.000	390.000
2016	86.400	368.000
2017	103.680	331.600

b)

Années	Nombre de logements construits	Déficit de logements
2014	$U_0 = 60.000$	$V_0 = 400.000$
2015	$U_1 = U_0 + 20\%. U_0 = 72.000$	$V_1 = V_0 - U_0 + 50000 = 390.000$
2016	$U_2 = U_1 + 20\%. U_1 = 86.400$	368.000
2017	$U_3 = U_2 + 20\%. U_2 = 103.680$	331.600
2018	$U_4 = 60.000 \times 1.2^4 = 124.416$	$V_4 = V_3 - U_3 + 50000 = 331.600 - 103.680 + 50000 = 277920$
2019	$U_5 = 60.000 \times 1.2^5 = 149.292,2$	$V_5 = V_4 - U_4 + 50000 = 277920 - 124.416 + 50000 = 203.504$
2020	$U_6 = 60.000 \times 1.2^6 = 179.159,04$	$V_6 = V_5 - U_5 + 50000 = 203.504 - 149.292,2 + 50.000 = 104.211,8$

En 2020, le déficit de logements ($V_6 = 104.211,8$) est inférieur au nombre de logements construits ($U_6 = 179.159,04$)

Le déficit de logements sera donc résorbé en 2020

Exercice 4

1. Volume du cube $= a^3 = 9^3 = 729 \text{ cm}^3$
2. Valeur exact du volume du cône $= \frac{1}{3} \times \pi \cdot R^2 \times h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 4,5^2 \times 9 = 190,755 \text{ cm}^3$.
Arrondi d'ordre 1 du volume du cône $= 190,8 \text{ cm}^3$.
3. Vérification de l'affirmation d'Alex :
4. $30\% \times 729 = 218,7$

Or, $218,7 \neq 190$. Donc, le volume du cône ne représente pas 30% du volume du cube.

L'affirmation d'Alex est fausse.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2017

DUREE : 2h
Coefficient 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte une (01) page

EXERCICE N° 1

Un marchand de volailles a vendu ensemble un poulet, un canard, une pintade et un dindon au prix de 46800 F.

Le prix du poulet est le tiers de celui du canard, alors que le prix de la pintade est 1800 F de plus que celui du poulet. Quant au dindon, il est cinq fois plus cher que la pintade.

1. Représente graphiquement les différents prix de chaque volaille.
2. Calcule le prix de chaque volaille.

EXERCICE N° 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = - \frac{\sqrt{3-2x}}{(x-1)^2}$$

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f que l'on notera D_f
b) Ecris D_f sous forme d'une réunion d'intervalles.
2. Justifie que $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ puis, détermine $f(\sqrt{2})$
3. Sachant que :
 $1,414 < \sqrt{2} < 1.415$, encadre $f(\sqrt{2})$ par deux décimaux d'ordre 2 consécutifs.

EXERCICE N° 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). L'unité de longueur est le centimètre.

1. Place dans le repère (O,I,J) les points : A(- 4 ; 5) , B(2 ; - 3) , C(- 1 ; 6).
2. Justifie que le triangle ABC est rectangle . Précise le sommet de l'angle droit.
3. On considère la fonction affine f telle que $f(- 4) = 5$ et $f(- 1) = 6$
 - a) Détermine les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x ,
 $f(x) = ax + b$
 - b) Construit la représentation graphique de f telle que pour tout nombre réel x ,
 $f(x) = ax + b$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2017

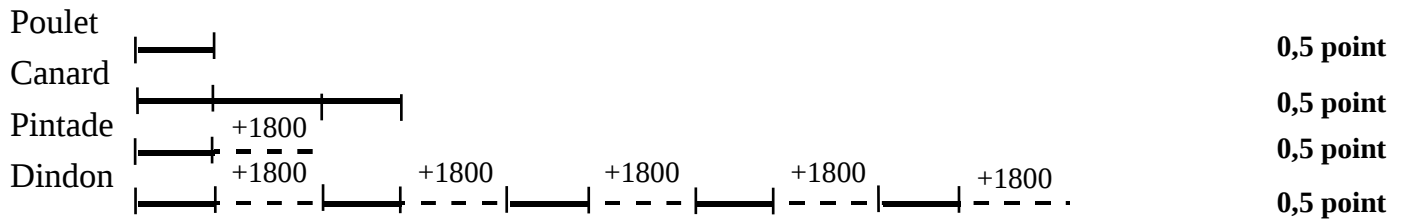
DUREE : 2h
Coefficient 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte une (01) page

EXERCICE N° 1

1. Représentation graphique des différents prix de chaque volaille.



2. Calcul du prix de chaque volaille

- Soit X le prix du poulet **0,5 point**
- Le prix du canard vaut : $3X$ **0,5 point**
- Le prix de la pintade vaut : $X + 1800$ **0,5 point**
- Le prix du dindon vaut : $5(X + 1800)$ **0,5 point**
- La vente ayant rapportée 46800 francs, on peut écrire :
- $X + (X + 1800) + 3X + 5(X + 1800) = 46800$
- C'est-à-dire $10X + 10800 = 46800$
- D'où , $X = 3600$
- Ainsi, Le prix du poulet est égal à 3.600 francs **0,5 point**
- Le prix du canard est égal à 10.800 francs **0,5 point**
- Le prix de la pintade est égal à 5.400 francs **0,5 point**
- Le prix du dindon est égal à 27.000 francs **0,5 point**

EXERCICE N° 2 (6/6)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = - \frac{\sqrt{3-2x}}{(x-1)^2}$$

1. a/b) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f

$f(x)$ existe si et seulement si $3-2x \geq 0$ et $x-1 \neq 0$ **0,5 point**

$x \leq 3/2$ et $x \neq 1$ **0,5 point**

$D_f =] \leftarrow ; 1[\cup] 1 ; \frac{3}{2}]$ **1 point**

2. Justifions que $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2(1\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}$ **1 point**

Détermine $f(\sqrt{2})$

$f(\sqrt{2}) = - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)^2} = - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{(\sqrt{2}-1)^2} = - \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2}$ car $\sqrt{2}-1 > 0$ **1 point**

$$= - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)} = - \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = -(\sqrt{2}+1)$$

Donc, $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)$ **1 point**

3. Encadrement de $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,414 + 1 < \sqrt{2} + 1 < 1,415 + 1$$

$$2,414 < \sqrt{2} + 1 < 2,415$$

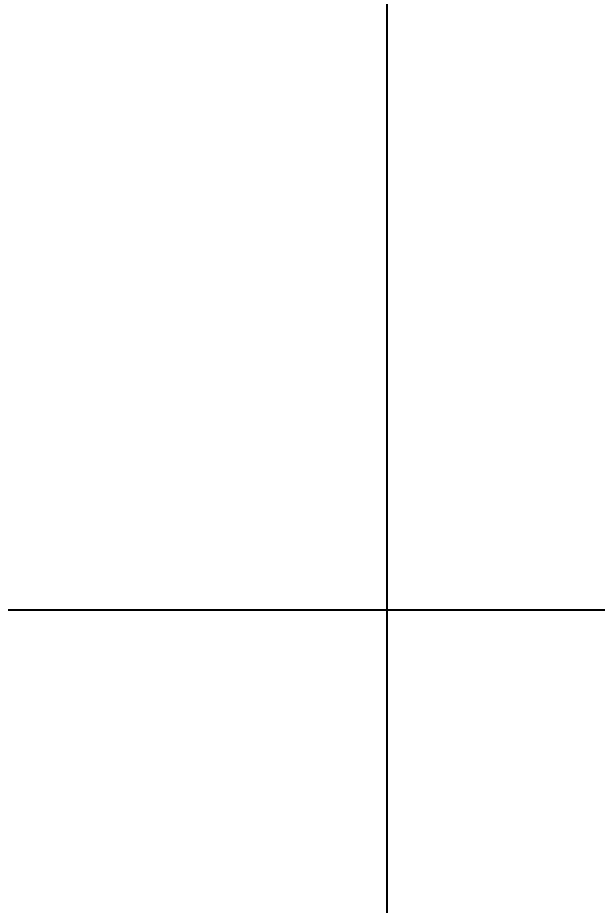
A l'ordre 2, on a $2,41 < \sqrt{2} + 1 < 2,42$ **0,5 point**

$$\text{Donc, } -2,42 < -(\sqrt{2} + 1) < -2,41$$

Conclusion : $-2,42 < f(\sqrt{2}) < -2,41$ **0,5 point**

EXERCICE N° 3 (8/8)

1. Plaçons les points : A(- 4 ; 5) , B(2 ; - 3) , C(- 1 ; 6).



-(0,5 point
 par point
 bien placé)x3
 = 1,5 point
 - Figure bien
 construite =
 1 point

2. Justifions que le triangle ABC est rectangle

$$AB = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$AC = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$BC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 + 3)^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

On constate que $10^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{90})^2$ 1 point
 D'où, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Ce résultat montre que le triangle ABC est rectangle en C.

3. Soit la fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ avec $f(- 4) = 5$ et $f(- 1) = 6$

a)

$$\begin{array}{l} f(- 4) = 5 \\ f(- 1) = 6 \end{array} \iff \begin{cases} -4a + b = 5 \\ - a + b = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a + b = 5 & (1) \dots\dots\dots \\ - a + b = 6 & (2) \dots\dots\dots \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0,5 \text{ point} \\ 0,5 \text{ point} \end{array}$$

En multipliant (1) par -1, on a :

$$\begin{cases} 4a - b = -5 \\ -a + b = 6 \end{cases} \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$3a = 1$$

On a $3a = \frac{1}{3}$ Et $b = 6 + \frac{1}{3}$

C'est-à-dire $a = \frac{1}{3}$ Et $b = \frac{19}{3} \dots\dots\dots 0,5 \text{ points x2}$

D'où, $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{19}{3} = 1 \text{ point}$

b) Construction correcte de la droite : 0,5 point

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT) SESSION 2018

Durée : 2h

Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

*Cette épreuve contient une (01) page.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.*

EXERCICE N°1

On donne les nombres réels A et B tels que $A = 2 - 3\sqrt{5}$ et $B = \frac{2-3\sqrt{5}}{49-12\sqrt{5}}$

1. Calcule A^2 .
2. Déduis-en que $B = \frac{1}{2-3\sqrt{5}}$
3. Ecris B sans radical au dénominateur.

EXERCICE N°2

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \text{ où } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 9 \text{ et } g(x) = \frac{3}{2}x + 9$$

1. Détermine la condition d'existence de $h(x)$
2. Justifie que pour tout x appartenant à la'ensemble de définition de $h(x)$, on a $h(x) = \frac{1}{6}x - 1$

EXERCICE N°3

L'uniné de longueur est le cm . On donne :

- BAC est un triangle rectanle en A ;
- H est le pied de la hauteur issue de A ;
- $HC = 2$; $BH = 6$; $AC = 4$

1. Construire le triangle BAC
2. Calcule l'aire de chacun des trois triangles obtenus après la construction.

CONCOURS DIRECT D'ENTRÉE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT) SESSION 2018

CORRECTION DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE N°1

On donne les nombres réels A et B tels que $A = 2 - 3\sqrt{5}$ et $B = \frac{2-3\sqrt{5}}{49-12\sqrt{5}}$

1. Calculons A^2 .

$$A^2 = (2 - 3\sqrt{5})^2 = 4 - 12\sqrt{5} + 45 = 49 - 12\sqrt{5} \dots\dots\dots$$

2. Dédisons-en que $B = \frac{1}{2-3\sqrt{5}}$

$$B = \frac{2 - 3\sqrt{5}}{(2 - 3\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2 - 3\sqrt{5}} \dots\dots\dots$$

3. Écrivons B sans radical au dénominateur.

$$B = \frac{1}{2 - 3\sqrt{5}} = \frac{2 + 3\sqrt{5}}{(2 - 3\sqrt{5})(2 + 3\sqrt{5})} = \frac{2 + 3\sqrt{5}}{4 - 45} = \frac{2 + 3\sqrt{5}}{-41}$$

$$B = - \frac{2 + 3\sqrt{5}}{41} \dots\dots\dots$$

EXERCICE N°2

1. Déterminons la condition d'existence de $h(x)$

h existe si et seulement si $\frac{3}{2}x + 9 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -6$

2. Justifions que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de $h(x)$, on a

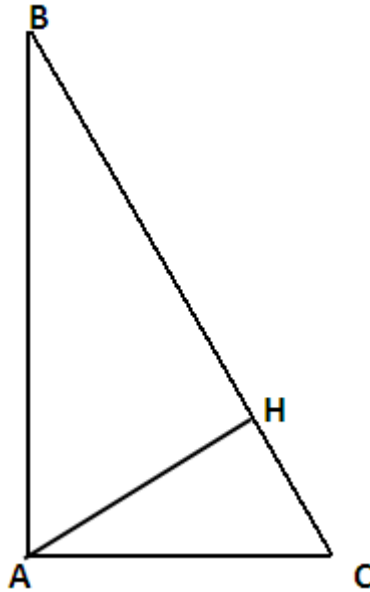
$$h(x) = \frac{1}{6}x - 1$$

$$h(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - 9}{\frac{3}{2}x + 9} = \frac{\frac{x^2 - 36}{4}}{\frac{3x + 18}{2}} = \frac{\frac{(x - 6)(x + 6)}{4}}{\frac{3(x + 6)}{2}} = \frac{2(x - 6)(x + 6)}{12(x + 6)} = \frac{2(x - 6)}{12} = \frac{1}{6}x - 1$$

EXERCICE N°3

- BAC est un triangle rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A ; HC = 2 ; BH = 6 ; AC = 4

1. Construction du triangle BAC



2. Calcul de l'aire de chacun des trois triangles obtenus après la construction.

Après construction, les trois triangles obtenus sont : ABC rectangle en A , AHC rectangle en H et AHB rectangle en H

Calculons la mesure de la longueur AH

Dans le triangle AHC rectangle en H, on a AC = 4cm , HC = 2cm

$$AC^2 = HC^2 + AH^2 \text{ donc, } AH^2 = AC^2 - HC^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\text{Donc, } AH = 2\sqrt{3}$$

Calculons la mesure de la longueur AB

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \text{ donc, } AB^2 = BC^2 - AC^2 = (6 + 2)^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$\text{Donc, } AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

- Aire de ABC = $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} = 8\sqrt{3} \approx 13,86 \text{ cm}^2$
- Aire de AHC = $\frac{AH \times HC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ cm}^2$
- Aire de AHB = $\frac{AH \times HB}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 6}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,4 \text{ cm}^2$

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)

Session 2019

Durée : 2h

Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (4 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule affirmation est vraie.

Ecris sur ta copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

Par exemple, pour la ligne 1, la réponse est : 1-B

		A	B	C
1	$\frac{7}{3} - \frac{6}{3} \times \frac{5}{6}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{10}$
2	$(2x + 3)(x + 1) - 8(x + 1)$ a pour forme factorisée	$(x + 1)(2x - 11)$	$(x + 1)(2x - 5)$	$(x + 1)(2x + 5)$
3	$(3x - 1)^2$ a pour forme développée	$9x^2 - 1$	$3x^2 - 6x + 1$	$9x^2 - 6x + 1$
4	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $3x - 4 < 5(x - 1)$ est	$] \frac{1}{2}; \rightarrow [$	$[\frac{1}{2}; \rightarrow [$	$] \leftarrow ; \frac{1}{2} [$
5	24×26 est égal à	2^{24}	4^{10}	2^{10}

EXERCICE 2 (6 points)

On pose $A = 2 + \sqrt{3}$; $B = \frac{1}{-2 + \sqrt{3}}$ et $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$

- 1) Justifie que A et B sont deux nombres opposés.
- 2) Montre que le produit $AB = -7 - 4\sqrt{3}$
- 3) Trouve la valeur de Q telle que Q et A soient inverses l'un de l'autre.
- 4) Encadre Q par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

EXERCICE 3 (6 points)

Dans le repère orthonormé (O, I, J), on donne :

- Trois points $A(-6 ; 1)$; $B(6 ; 6)$ et $C(24 ; 8)$
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix}$

- 1) Détermine les coordonnées du point I milieu du segment [BC].
- 2) Trouve les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- 3) Justifie que les droites (BD) et (AC) sont parallèles.

EXERCICE 4 (4 points)

L'unité est le centimètre. On ne te demande pas de reproduire la figure.

La figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, SABCD est une pyramide régulière de base ABCD et de centre O.

On coupe cette pyramide par un plan parallèle au plan de la base. Ce plan passe par le point I du segment [SO].

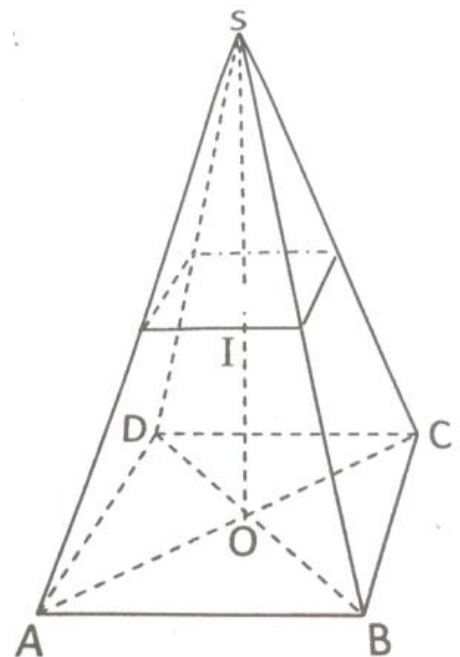
On donne :

- $SO = 4,5$ cm et $SI = 3$ cm
- Le volume V' de la pyramide SABCD est $V' = 20,25$ cm³.

- 1) Justifie que le coefficient de réduction de cette

pyramide est $k = \frac{2}{3}$

- 2) Calcule le volume V de la pyramide réduite.



CONCOURS DIRECT D'ENTREE DANS LES CAFOP - Session 2019

(INSTITUTEURS ADJOINTS)

CORRIGE ET BAREME MATHEMATIQUE

EXERCICE 1 (4 points)

- | | | |
|----|---|---------|
| 1. | B | 1 Point |
| 2. | B | 1 Point |
| 3. | C | 1 Point |
| 4. | A | 1 Point |
| 5. | C | 1 Point |

EXERCICE 2 (6 points)

$$A = 2 + \sqrt{3} ; B = \frac{1}{-2 + \sqrt{3}} \text{ et } 1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$$

1) A et B sont opposés si $A + B = 0$

$$B = \frac{1}{-2 + \sqrt{3}} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3}} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{(-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{1} = -2 - \sqrt{3}$$

$$A + B = (2 + \sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3}) = 0. \text{ Donc, } A + B = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

A et B sont donc opposés

2) Montre que le produit $A.B = -7 - 4\sqrt{3}$

$$A.B = (2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = -(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = -(2^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) \dots\dots 0,5 \text{ Point}$$

$$= -(4 + 4\sqrt{3} + 3) = -7 - 4\sqrt{3}$$

$$A.B = -7 - 4\sqrt{3} \dots\dots\dots 0,5 \text{ Point}$$

3) Q est l'inverse de A si $A \times Q = 1$ ou $Q = \frac{1}{A}$

$$Q = \frac{1}{A} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1}$$

$$Q = \frac{1}{A} = 2 - \sqrt{3} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

4) Encadrement de Q par deux décimaux consécutifs d'ordre 2

$$1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$$

$$-1,733 \leq -\sqrt{3} \leq -1,732 \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

$$2 - 1,733 \leq 2 - \sqrt{3} \leq 2 - 1,732$$

$$0,267 \leq 2 - \sqrt{3} \leq 0,268$$

$$0,267 \leq Q \leq 0,268 \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

EXERCICE 3 (6 points)

- $A(-6; 1)$; $B(6; 6)$ et $C(24; 8)$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix}$

1) Coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$

$$x_i = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ et } y_i = \frac{y_B + y_C}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

$$x_i = \frac{6+24}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ et } y_i = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7 .$$

$$\text{Donc, } I(15; 7) \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

2) Coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{AC}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 0,5 \text{ Point}$$

$$\text{C'est-à-dire } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 12+30 \\ 5+7 \end{pmatrix} \text{ ou } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 42 \\ 12 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 0,5 \text{ Point}$$

$$\text{soit } D(x; y) , \text{ on a } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x+6 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} x + 6 = 42 \\ y - 1 = 12 \end{cases} , \text{ soit } \begin{cases} x = 36 \\ y = 13 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } D(36; 13) \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

3) Justifie que les droites (BD) et (AC) sont parallèles

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 36-6 \\ 13-6 \end{pmatrix} . \text{ Donc, } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

$$\text{Donc, (BD) et (AC) sont parallèles } \dots\dots\dots 2 \text{ Points}$$

EXERCICE 4 (4 points)

- $SO = 4,5 \text{ cm}$ et $SI = 3 \text{ cm}$
- Volume de la pyramide $SABCD = v = 20,25 \text{ cm}^3$

1) Justifie que le coefficient de réduction de cette pyramide est $k = \frac{2}{3}$

$$k = \frac{SI}{SO} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

$$k = \frac{3}{4,5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

2) Calcule le volume de la pyramide

$$k^3 = \frac{V_r}{V} \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

$$\text{Donc, } V_r = k^3 . V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 . 20,25 = 6 \text{ cm}^3 \dots\dots\dots 1 \text{ Point}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EXCEPTIONNEL DES ENSEIGNANTS CONTRACTUELS DU SECONDAIRE (I.A.)

Session 2019

Durée : 2h

Coefficient : 1

MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris sur ta copie le numéro de l'affirmation puis, « *Vrai* » si l'affirmation est vraie et « *Faux* » si elle est fausse.

Par exemple : 1- Vrai

- 1) $\sqrt{169} = 13$
- 2) la factorisation de $9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$ est $(3x - \sqrt{3})^2$
- 3) $0 \leq x < 7$ signifie $x \in]0 ; 7]$
- 4) Pour tous les nombres réels non nuls a et b , on a $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- 5) On a $\sqrt{14} > \sqrt{13}$ alors $\frac{1}{\sqrt{14}} > \frac{1}{\sqrt{13}}$
- 6) Le développement de $(t-z)^2$ est égal à $t^2 - 2tz + z^2$

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on donne les applications affines f et g telles que :

- $f(2) = -1$, $f(3) = 2$
- $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

On appelle $\mathcal{D}_1$, la représentation graphique de f et $\mathcal{D}_2$, la représentation de g

- 1) Justifie que $f(x) = 3x - 7$
- 2) Calcule $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$, (On écrira le résultat sans radical au dénominateur)
- 3) Justifie que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.

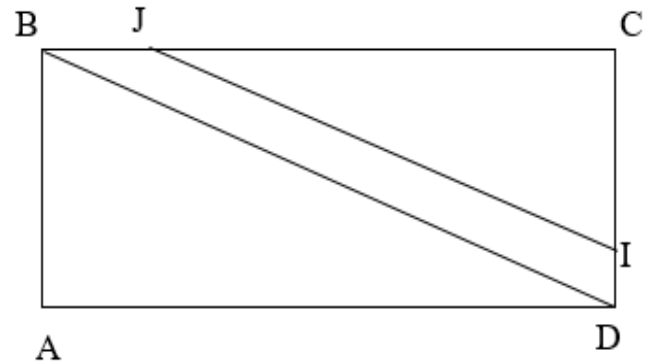
EXERCICE 3 (5 points)

L'unité de longueur est le centimètre

On ne demande pas de reproduire la figure ci-contre sur ta copie.

On donne :

- ABCD un rectangle tel que : $AB = 225$
et $AD = 375$.
- Le point $I \in [CD]$ tel que $DI = 81$;
- Le point $J \in [BC]$ tel que $JC = 240$.



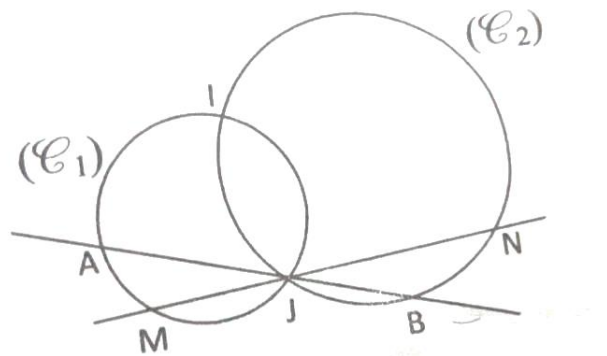
Justifie que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

EXERCICE 4 (6 points)

On ne te demande pas de construire la figure ci-contre sur la copie.

Sur la figure ci-contre, on a :

- (C_1) et (C_2) sont sécants en I et J
- Les droites (AB) et (MN) se coupent en J
- $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$



- 1) Démontrez que $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$
- 2) Démontrez que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$

CONCOURS DIRECT DE RECRUTEMENT EXCEPTIONNEL DES ENSEIGNANTS CONTRACTUELS DU PRESCOLAIRE ET DU PRIMAIRE

Session 2019

CORRIGE ET BAREME MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

 (3 points)

- | | | |
|----|------|-----------|
| 1) | Vrai | 0,5 point |
| 2) | Faux | 0,5 point |
| 3) | Faux | 0,5 point |
| 4) | Faux | 0,5 point |
| 5) | Faux | 1 point |
| 6) | Vrai | 0,5 point |

EXERCICE 2

 (6 points)

1) Justifions que $f(x) = 3x - 7$

f est une application affine. Elle est donc de la forme $f(x) = ax + b$

- $f(2) = -1$ alors $2a + b = -1$ 10,5 point
- $f(3) = 2$ alors $3a + b = 2$ 20,5 point

La soustraction membre à membre donne : $(3a - 2a) = 2 - (-1)$, soit $a = 3$ 0,5 point

En multipliant la première équation par (-3) et la deuxième par 2 et en faisant l'addition membre à membre, on a $(-6a - 3b + 6a + 2b) = 3 + 4$.

C'est à dire $(-b = 7)$, ou $b = -7$ 0,5 point

Donc, $f(x) = 3x - 7$ 1 point

2) Calculons $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3x\frac{1}{\sqrt{3}} - 7 \text{ 0,5 point}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}x\sqrt{3}} - 7 \text{ 0,5 point}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} - 7 \text{0,5 point}$$

3) Justifions que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires

$(D_1) : y = 3x - 7$ est sous la forme $y = ax + b$

$(D_2) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ est sous la forme $y = a'x + b$

Pour que (D_1) soit perpendiculaire à (D_2) $a \cdot a' = -1$

Or, $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-3}{3} = -1$ **1 point**

Donc, (D_1) perpendiculaire à (D_2) **0,5 point**

EXERCICE 3 (5 points)

Dans ce rectangle ABCD, $AB = DC = 225$

$DC = DI + IC$. Donc, $IC = 225 - 81 = 144$ car $DI = 81$

Dans ce rectangle ABCD, $DA = CB = 375$

$CB = CJ + JB$. Donc, $JB = CB - CJ = 375 - 240 = 135$

Considérons le triangle BCD **0,5 point**

Calculons $\frac{CJ}{CB}$ et $\frac{CI}{CD}$ **0,5 point**

• $\frac{CJ}{CB} = \frac{140}{375} = \frac{48 \times 5}{75 \times 5} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25}$ **1 point**

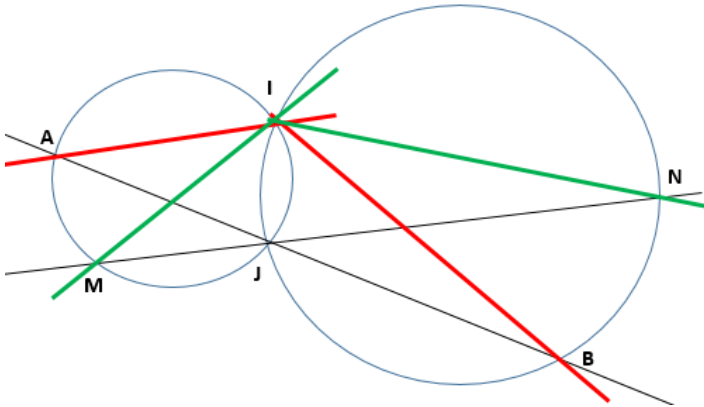
• $\frac{CI}{CD} = \frac{81}{225} = \frac{144}{225} = \frac{16}{25}$ **1 point**

On obtient alors $\frac{CJ}{CB} = \frac{CI}{CD} = \frac{16}{25}$ **1 point**

D'après la réciproque de la propriété de Thalès, $\frac{CJ}{CB} = \frac{CI}{CD}$.

Donc, les droites (IJ) et (BD) sont parallèles **1 point**

EXERCICE 4 (6 points)



1) Démontrez que $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$

- $\widehat{IAJ}$ intercepte l'arc $\widehat{IJ}$ 0,5 point
- $\widehat{IMJ}$ intercepte l'arc $\widehat{IJ}$ 0,5 point

Deux angles qui interceptent le même arc de cercle ont la même mesure.

Donc, $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$ 1 point

2) Démontrez que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$

- Dans le triangle AIB, on a $\widehat{AIB} + \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 180^\circ$

Puisque $\widehat{IBA} = \widehat{IBJ}$ et que $\widehat{IAB} = \widehat{IAJ}$, alors

$\widehat{AIB} + \widehat{IBJ} + \widehat{IAJ} = 180^\circ$ 1 point

- Dans le triangle MIN, on a $\widehat{MIN} + \widehat{IMN} + \widehat{INM} = 180^\circ$

Comme $\widehat{IMN} = \widehat{IMJ}$ et que $\widehat{INM} = \widehat{INJ}$, alors

$\widehat{MIN} + \widehat{IMJ} + \widehat{INJ} = 180^\circ$1 point

Or, dans l'énoncé, $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$ et $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$

Donc, $\widehat{IBJ} + \widehat{IAJ} = \widehat{IMJ} + \widehat{INJ}$ 1 point

Conclusion : $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$ 1 point

CONCOURS DIRECT D'ENTREE DANS LES CAFOP (INSTITUTEUR ADJONT)
SESSION 2020

Durée : 2h

Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (4 points)

Calcule les expressions suivantes et donne le résultat le plus simple possible :

• $A = -4\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + 2\sqrt{112}$

• $B = \frac{7,2 \times 10^{-6} \times 18 \times 10^7}{192 \times (10^{-10})^2}$

• $C = \frac{25}{13} - \frac{-2}{13} \times \frac{13}{5}$

EXERCICE 2 (6 points)

On donne le système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnus x et y

(S): $\begin{cases} x + y = 40 \\ 9x + 5y = 312 \end{cases}$

1) Résous le système (S)

2) Une communauté religieuse de 40 personnes décide d'organiser une sortie de recollection spirituelle. La participation d'un adulte coûte 900 FCFA alors qu'un adolescent paie 500 FCFA. Les organisateurs ont encaissé la somme de 31200 FCFA.

a. Ecris un système d'équations traduisant les énoncés du problème.

b. Détermine le nombre d'adultes et le nombre d'adolescents qui prendront le départ.

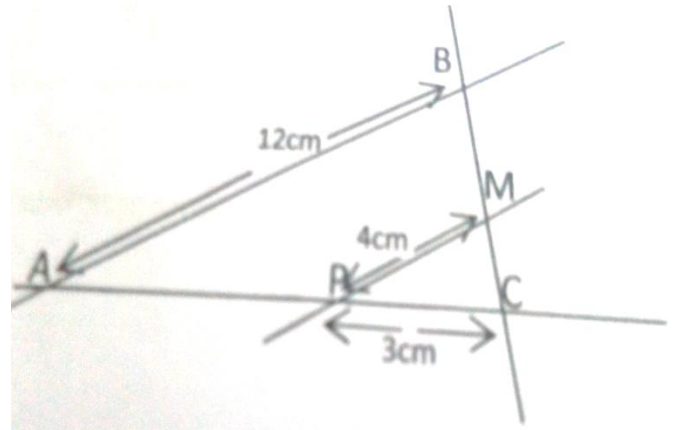
EXERCICE 3 (5 points)

L'unité de mesure est le centimètre.

On ne te demande pas de reproduire la figure ci-contre.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on donne :

- $PC = 3$, $MP = 4$ et $AB = 12$
- Les droites (MP) et (BA) sont parallèles.



1) Justifie que $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB}$

2) Justifie que $\frac{MP}{BA} = \frac{1}{3}$

3) Détermine la distance CA

4) Calcule la distance AP

EXERCICE 4 (5 points)

Le professeur de mathématiques d'une classe de terminale scientifique de 20 élèves, a relevé les notes sur 20 élèves à un devoir.

Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

12	12	11	14	15
12	12	11	13	15
13	12	12	11	12
14	11	12	12	14

- 1) Donne le tableau des effectifs.
- 2) Donne le mode de la série statistique.
- 3) Calcule la moyenne de la classe.
- 4) Construire le diagramme circulaire de cette série statistique. On prendra 5 cm pour la longueur du rayon.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE DANS LES CAFOP (INSTITUTEUR ADJONT)
SESSION 2020

Durée : 2h
Coefficient
: 1

CORRIGE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (4 points)

Calcule les expressions suivantes et donne le résultat le plus simple possible :

• $A = -4\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + 2\sqrt{112}$

$A = -4\sqrt{9 \times 7} - 2\sqrt{4 \times 7} + 2\sqrt{7 \times 16}$

$A = -4\sqrt{7} \times \sqrt{9} - 2\sqrt{7} \times \sqrt{4} + 2\sqrt{7} \times \sqrt{16}$

$A = \sqrt{7}(-4 \times \sqrt{9} - 2 \times \sqrt{4} + 2 \times \sqrt{16})$

Or, $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{16} = 4$

Donc, $A = \sqrt{7}(-4 \times 3 - 2 \times 2 + 2 \times 4)$

$A = \sqrt{7}(-12 - 4 + 8)$

$A = -8\sqrt{7}$ 1,5 point

• $B = \frac{7,2 \times 10^{-6} \times 18 \times 10^7}{192 \times (10^{-10})^2}$

$B = \frac{7,2 \times 18 \times 10^{-6+7}}{192 \times (10^{-10 \times 2})} = \frac{7,2 \times 18 \times 10^{-6+7}}{192 \times (10^{-10 \times 2})} = \frac{129,6 \times 10^1}{192 \times (10^{-20})}$

$B = \frac{129,6}{192} \times \frac{10}{10^{-20}} = 675 \times 10^{-3} \times 10^{21} = 675 \times 10^{18}$

$B = 675 \times 10^{18}$ Ou $B = 6,75 \times 10^{20}$ 1,5 point.

• $C = \frac{25}{13} - \frac{-2}{13} \times \frac{13}{5}$

$C = \frac{25}{13} - \frac{-2}{5} = \frac{25}{13} + \frac{2}{5} = \frac{(25 \times 5) + (13 \times 2)}{13 \times 5} = \frac{125 + 26}{65} = \frac{151}{65}$

$C = \frac{151}{65}$ 1 point

EXERCICE 2

(6 points)

1.

Résolution du système par la méthode de combinaison

$$(S): \begin{cases} x + y = 40 \dots\dots (x9) \\ 9x + 5y = 312 \text{ (x(-1))} \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} x + y = 40 & \left| \begin{smallmatrix} (x5) \\ (x(-1)) \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} (x9) \\ (x(-1)) \end{smallmatrix} \\ 9x + 5y = 312 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} 5x + 5y = 200 \\ -9x - 5y = -312 \\ -4x = -112 \\ x = 28 \end{cases} \quad \left| \quad (S): \begin{cases} 9x + 9y = 360 \\ -9x - 5y = 312 \\ 4y = 48 \\ y = 12 \end{cases} \right\} \quad \mathbf{1,5 \text{ point}}$$

$S = \{(25; 12)\}$

 **0,5 point**

2.

a. Système d'équations traduisant les énoncés du problème.

Soit X le nombre d'adultes

Y le nombre d'adolescents qui prendront le départ.

$$X + Y = 40$$

$$900X + 500Y = 31200$$

Le système d'équations traduisant les énoncés du problème est

$$S = \begin{cases} x + y = 40 \\ 900x + 500y = 31200 \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ point}}$$

En divisant la deuxième équation par 100, on à :

$$S = \begin{cases} x + y = 40 \\ 9x + 5y = 312 \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ point}}$$

b. Détermine le nombre d'adultes et le nombre d'adolescents qui prendront le départ.

Cette équation est équivalente à la précédente qui a pour solution

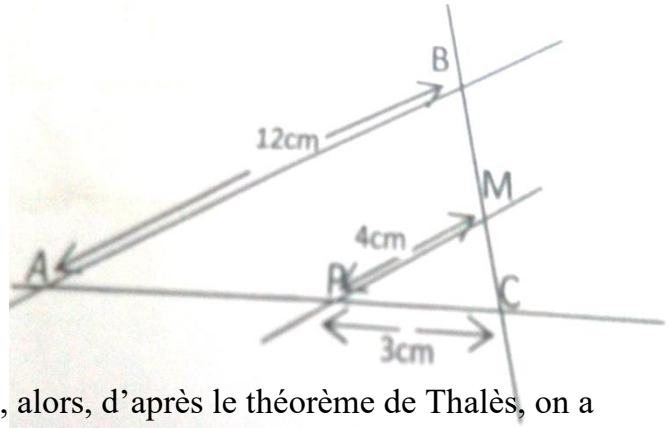
$$S = \{(28; 12)\}$$

Conclusion : le nombre d'adultes qui prendront le départ est : 25 } **2 points**
Le nombre d'adolescents qui prendront le départ est : 12

EXERCICE 3

(5 points)

- $PC = 3$, $MP = 4$ et $AB = 12$
- Les droites (MP) et (BA) sont parallèles.



- 1) Justifie que $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB}$

C, P et A sont alignés

De même, C, M et B sont alignés

Puisque les droites (MP) et (BA) sont parallèles, alors, d'après le théorème de Thalès, on a

$\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB}$ **1 point**

- 2) Justifie que $\frac{MP}{BA} = \frac{1}{3}$

D'après le théorème de Thalès, $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MP}{BA} = \frac{MP}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Donc, $\frac{MP}{BA} = \frac{1}{3}$ **1 point**

- 3) Détermine la distance CA

Donc, $\frac{CP}{CA} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $CA = 3CP = 3 \times 3 = 9$ cm. **1 point**

$CA = 3CP = 3 \times 3 = 9$ cm **1 point**

- 4) Calcule la distance AP

$AP + PC = AC$ **0,5 point**

Donc, $AP = AC - PC = 9 - 3$

$AP = 6$ cm **0,5 point**

EXERCICE 4 (5 points)

1. Tableau des effectifs

Modalités	11	12	13	14	15
Effectifs	4	9	2	3	2

..... 1,5 point

1) Donne le mode de la série statistique.

Le mode de la série statistique est 12 0,5 point

2) Moyenne de la classe.

$$M = \frac{(11 \times 4) + (12 \times 9) + (13 \times 2) + (14 \times 3) + (15 \times 2)}{20}$$

$$M = \frac{44 + 108 + 26 + 42 + 30}{20} = \frac{250}{20} = 12,5$$

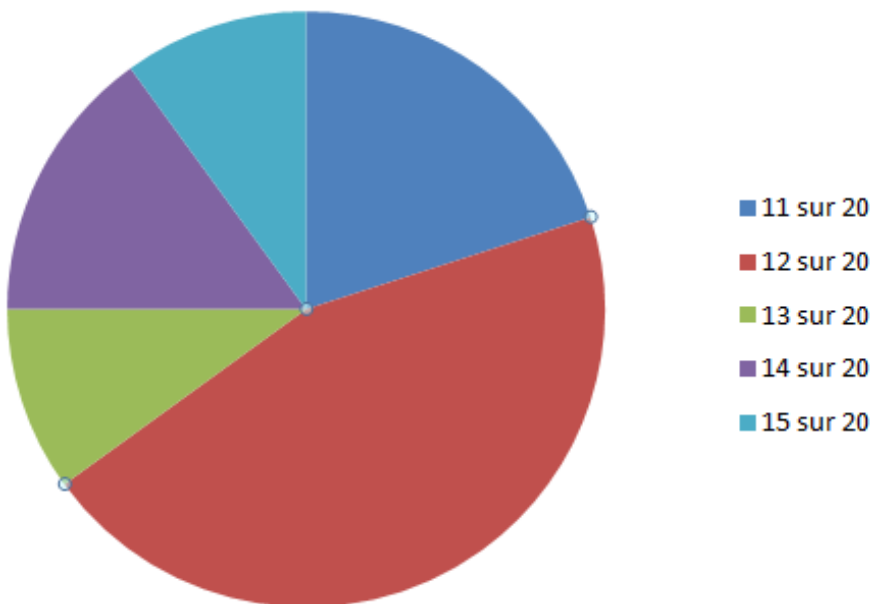
M = 12,5

..... 1 point

3) Construire le diagramme circulaire de cette série statistique. On prendra 5 cm pour la longueur du rayon.

Modalités		11	12	13	14	15
Effectifs	20	4	9	2	3	2
Angle (°)	360°	72°	162°	36°	54°	36°

..... 1 point



..... 1 point

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2021

Durée : 2H
Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.

Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (6 points)

On donne $A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $B = 3\sqrt{5} - 7$

1. Ecris A sans un dénominateur rationnel.
2.
 - a) Justifie que B est négatif
 - b) Justifie que $A = -B$
 - c) Encadre A par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
3. Sachant que $k = (A - B)^2$, justifie que $\sqrt{k} = 2A$

EXERCICE 2 (4 points)

Résous graphiquement le système (I) de deux inéquations d'inconnus x et y.

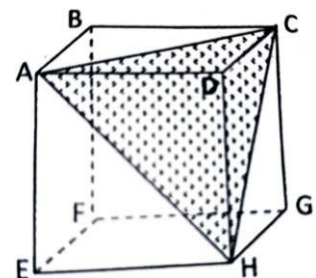
$$(I): \begin{cases} 3x + 7y > -7 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases}$$

EXERCICE 3 (4 points)

L'unité est le centimètre

On ne te demande pas de reproduire la figure
contre qui n'est pas en grandeurs réelles ; ABCDEFGH
représente un cube de 6cm d'arête

- 1) Justifie que ACH est un triangle équilatéral.
- 2) Calcule la distance AC.
- 3) Calcule l'aire du triangle ACH.



CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2021

CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES -

EXERCICE 1 (6 POINTS)

$$A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}} \text{ et } B = 3\sqrt{5} - 7$$

1. Ecris A sans un dénominateur rationnel

$$A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{4}$$

$$A = (7 - 3\sqrt{5}) \dots\dots\dots 1 \text{ point}$$

2. .

a) Justifie que B est négatif

$$B = 3\sqrt{5} - 7$$

$$(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45 \text{ et } 7^2 = 49$$

$$45 < 49 \text{ donc, } \sqrt{45} < \sqrt{49} \text{ c'est-à-dire } 3\sqrt{5} < 7$$

$$\text{Donc, } 3\sqrt{5} - 7 < 0$$

$$\text{Conclusion : } B < 0 \dots\dots\dots 1 \text{ point}$$

b) Justifie que A = -B

$$\text{Première méthode : } -B = -(B = 3\sqrt{5} - 7) = -3\sqrt{5} + 7 = (7 - 3\sqrt{5}) = A.$$

$$\text{Donc, } A = -B$$

$$\text{Première méthode : } A + B = (7 - 3\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} - 7) = (7 - 7) + (-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5})$$

$$A + B = 0 \text{ . Donc, } A = -B \dots\dots\dots 1 \text{ point}$$

c) Encadre A par deux nombres décimaux d'ordre 2

$$2,236 < \sqrt{5} < 2,237$$

$$3 \times 2,236 < 3\sqrt{5} < 3 \times 2,237 \text{ c'est-à-dire } 6,708 < 3\sqrt{5} < 6,711$$

$$-6,711 < -3\sqrt{5} < -6,708 \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$7 - 6,7083 < 7 - 3\sqrt{5} < 7 - 6,708$$

$$\text{c'est-à-dire } 0,289 < 7 - 3\sqrt{5} < 0,292 \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$0,29 < 7 - 3\sqrt{5} < 0,30. \text{ Donc, } 0,29 < A < 0,30 \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

3. Sachant que k = (A - B)²; justifie que √k = 2A

$$A - B = (7 - 3\sqrt{5}) - (3\sqrt{5} - 7) = 14 - 6\sqrt{5} = 2(7 - 3\sqrt{5}) \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$k = (A - B)^2 = 4(7 - 3\sqrt{5})^2 \text{ . Donc,}$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{4(7 - 3\sqrt{5})^2} = 2(7 - 3\sqrt{5}) = 2A \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

$$\text{Donc, } \sqrt{k} = 2A \dots\dots\dots 0,5 \text{ point}$$

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Résous graphiquement le système (I) de deux équations d'inconnus x et y

$$(I): \begin{cases} 3x + 7y > -7 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases}$$

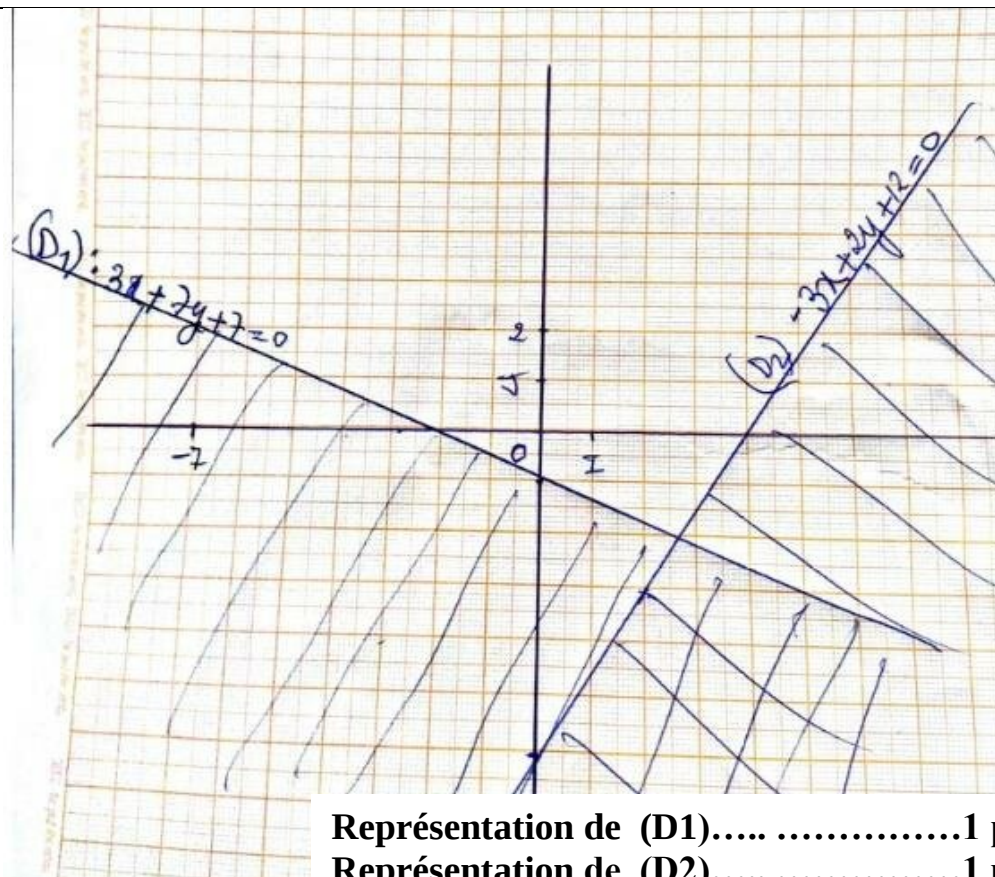
- Traçons la droite (D_1) d'équation $3x + 7y = -7$ et hachurons sur le dessin le demi-plan ne contenant le point $O(0 ; 0)$ car $3 \times 0 + 7 \times 0 = 0$ et $0 > -7$
- Traçons la droite (D_2) d'équation $-3x + 2y = -12$ et hachurons sur le dessin le demi-plan ne contenant le point $O(0 ; 0)$ car $-3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$ et $0 > -12$
- L'ensemble des solutions S est donc l'ensemble des couples $(x ; y)$ correspondant aux coordonnées des points M se trouvant dans la partie non-hachurée, c'est-à-dire le demi-plan contenant le point $O(0 ; 0)$

	X	Y		X	y
$(D_1) : 3x + 7y = -7$	0	-7	$(D_2) : -3x + 2y = -12$	0	2
	-1	2		-6	-3

(D_1) sera représenté par les points $A(0 ; -1)$ et $B(-7 ; -2)$

(D_2) sera représenté par les points $A'(0 ; -6)$ et $B'(2 ; -3)$

.....1 point



Représentation de (D_1)1 point

Représentation de (D_2)1 point

Identification correcte de S 1 point

EXERCICE 3 (4 POINTS)

1. ABCDEFGH est un cube à 6 faces carrées superposables.
 - Dans un carré, les diagonales ont la même mesure.
 - [AC] est une diagonale de ABCD. (1)
 - CGHD est une face de ce cube ; donc [CH] est une diagonale de CGHD. (2)
 - ADHE est une face de ce cube ; donc [HA] est une diagonale de ADHE. (3)

D'après (1) ; (2) et (3), [AC] ; [CH] et [HA] ont la même mesure.

Donc, ACH est un triangle équilatéral.1,5 point

2. Calcule la distance AC

ABCD est un carré dont la mesure en centimètre du côté est 6. Donc la mesure de sa diagonale AC est $AB\sqrt{2}$, c'est-à-dire $6\sqrt{2}$.

Donc, $AC = 6\sqrt{2}$ 1 point

3. Calcule de l'aire du triangle ACH

Soit P le pied de la hauteur issu de C. l'aire de ACH est $\frac{AH \times CP}{2}$

$CP^2 = AC^2 - AP^2 = (6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 72 - 18 = 54$0,5 point

Donc, $CP = 3\sqrt{6}$ 0,5 point

donc, Aire ACH = $\frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{2} = \frac{18\sqrt{12}}{2} = 18\sqrt{3}$ 0,5 point

EXERCICE 4 (6 POINTS)

A(2 ;5) B(2 ;1) D(-1 ; 5)

1) Démontre que le triangle ABD est rectangle en A.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1-2 \\ 5-5 \end{pmatrix} \text{ d'où, } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (0 \times (-3)) + (-4) \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ donc, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. D'où, ABD est rectangle en A. 1 point

2) Calcule les coordonnées du point E, centre du cercle (C)

ABD est rectangle en A. Donc, [DB] = diamètre de (C)

E étant le centre de (C), alors E = milieu de [DB]

- $X_E = \frac{1}{2}(2 - 1)$ c'est-à-dire $X_E = \frac{1}{2}$

- $Y_E = \frac{1}{2}(1 + 5)$ c'est-à-dire $Y_E = 3$

Donc, $E(\frac{1}{2} ; 3)$ 1 point

3) Détermine une équation de la droite (BD)

$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ C'est-à-dire $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 0,5 point

Soit $M(x ; y) \in (BD)$. Donc, $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$D'où, \det(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y-1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Donc, } 4(x-2) - (-3)(y-1) = 4x + 3y - 8 - 3 = 0$$

(BD) : $4x + 3y - 11 = 0$ est une équation de la droite (BD) 1 point

4) Détermine une équation de la tangente (T)

(T) est la tangente au cercle (C) au point B. Donc, (T) $\perp$ (DB) au point B.

Soit $N(x ; y) \in (T)$.

Donc, $\overrightarrow{NB} \perp \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{NB} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ 1 point

-

$$D'où, 3(x-2) + (-4)(y-1) = 0$$

**(T) : $3x - 4y - 2 = 0$ est une équation de la tangente au cercle (C) au point B
0,5 point**

5) Démontrons que F appartient à (C)

Le cercle (C) est circonscrit au triangle ABD rectangle en A.

Le centre E du cercle (C) est le milieu de [DB].

A est un point de (C).

(BD) est un axe de symétrie de (C)

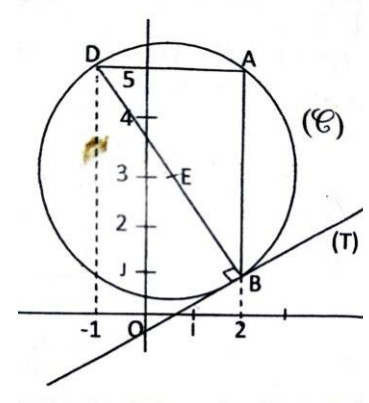
Le symétrique de A par rapport à (BD) est un point de (C).

Donc, F appartient à (C) 1 point

EXERCICE 4 (4 points)

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs ;

- (O, I, J) est un repère orthonormé ;
- On donne les points suivants : $A(2 ; 5)$ $B(2 ; 1)$ et $D(-1 ; 5)$
- Le point E est le centre du cercle $(\mathcal{C})$
- Le cercle $(\mathcal{C})$ est circonscrit au triangle ABD ;
- La droite (T) est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B .
- Le point F est le symétrique du point A par rapport à la droite (BD)



- 1) Démontre que le triangle ABD est rectangle en A .
- 2) Calcule les coordonnées du point E , centre du cercle $(\mathcal{C})$.
- 3) Détermine une équation de la droite (BD) .
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) .
- 5) Démontre que le point F appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE DANS LES CAFOP (INSTITUTEUR ADJONT)
SESSION 2021

Durée : 2h

Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.

(Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétrée)

EXERCICE 1

(4 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule affirmation est vraie.

Ecris sur ta copie le numéro de chaque ligne et de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

Par exemple : pour la ligne 1, la réponse est : 1 – B

		A	B	C
1	L'équation $5 - 3x = 0$ a pour solution	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
2	$\frac{7}{4} + \frac{2}{3}$ est égal à :	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{29}{12}$
3	Dans l'équation dans $\mathbb{R}$ suivante, la solution est :	- 2,4	2,4	-7
4	$3x - 5 = 0$ a pour solution	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
5	$2^3 \times 2^6$ est égal à :	2^{18}	2^9	2^3

EXERCICE 2

(4 points)

Monsieur Koné donne une somme de 355.500 francs aux ouvriers ayant travaillé respectivement 23, 27 et 29 jours sur son chantier. La rémunération est proportionnelle au nombre de jours de travail.

- 1) Calcule le salaire de chaque ouvrier.
- 2) Calcule le salaire d'un ouvrier qui aurait fait 6 jours.

EXERCICE 3

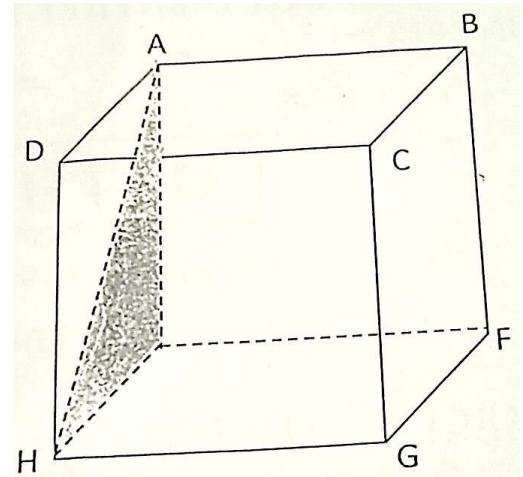
(6 points)

L'unité de longueur est le centimètre

On considère le cube ABCDEFHH ci-contre.

On donne : $AB = 3$

- 1) Calcule l'aire de la base EFGH.
- 2) Détermine AH.
- 3) Calcule le volume du cube ABCDEFHH



EXERCICE 4

(6 points)

L'unité de longueur est le centimètre

Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on donne :

- Les points $A(3 ; 2)$; $B(2 ; 5)$; $C(-3 ; 3)$ et la droite $(\mathcal{D}) : x - 3y + 12 = 0$
- Le point E tel que $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB}$

1. Place le point C dans le repère $(O ; I ; J)$.
2. Justifie que le point C appartient à la droite $(\mathcal{D})$.
3. Construire dans le repère $(O ; I ; J)$ la droite (D).
4. a- Justifie que le point E a pour coordonnées $(-1 ; -3)$
 b- Détermine une équation de la droite (CE).
5. Démontre que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont perpendiculaires

CONCOURS DIRECT D'ENTREE DANS LES CAFOP (INSTITUTEUR ADJONT)

SESSION 2021

Durée : 2h

Coefficient : 1

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

On accordera la totalité des points à toute autre réponse correcte

EXERCICE 1

(4 points)

- 2 – C.....
- 3 – A.....
- 4 – B.....
- 5 – B.....

EXERCICE 2

(4 points)

1. Calculons le salaire de chaque ouvrier

- Nombre total de jours de travail : $23 + 27 + 29 = 79$ jours
- Salaire journalier : $355.500 \text{ francs} : 79 = 4.500 \text{ francs}$
- Salaire de l'ouvrier ayant travaillé 23 jours = $23 \times 4.500 \text{ francs} = 103.500 \text{ francs}$
- Salaire de l'ouvrier ayant travaillé 27 jours = $27 \times 4.500 \text{ francs} = 121.500 \text{ francs}$
- Salaire de l'ouvrier ayant travaillé 29 jours = $29 \times 4.500 \text{ francs} = 130.500 \text{ francs}$

Vérification : $103.000 + 121.500 + 130.000 = 355.500 \text{ francs}$

2. Salaire d'un ouvrier qui aurait fait 6 jours de travail

- $4.500 \text{ francs} \times 6 = 27.000 \text{ francs}$

EXERCICE 3 (6 points)

1. Calculons l'aire de la base EFGH

ABCDEFGH est un cube. Donc, chaque face est un carré. D'où, EFGH est un carré.

Ainsi, $\text{Aire}_{(\text{EFGH})} = \text{EF} \times \text{GH} = 3 \times 3$

$\text{Aire}_{(\text{EFGH})} = 9 \text{ cm}^2$

2. Déterminons AH

La face AEHD est un carré et [AH] est une diagonale. D'où, AEH est un triangle rectangle en E

D'après la propriété de Pythagore,

$$\text{AH}^2 = \text{AE}^2 + \text{EH}^2$$

$$\text{AH} = \sqrt{\text{AE}^2 + \text{EH}^2}$$

$$\text{AH} = \sqrt{2\text{AE}^2} \text{ car } \text{AE} = \text{EH}$$

$$\text{AH} = \text{AE}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$\text{AH} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

3. Calculons le volume du cube ABCDEFGH

$$V = \text{AE} \times \text{Aire}_{(\text{EFGH})} = 3 \times 9$$

$V = 27 \text{ cm}^3$

EXERCICE 4 (6 points)

1. Voir construction sur la feuille de papier millimétré

2. Justifions que le point C appartient à la droite (D)

On a : C (-3 ; 3) et (D): $x - 3y + 12 = 0$

$$-3 - 3(3) + 12 = -3 - 9 + 12 = -12 + 12 = 0.$$

Donc, le point C (-3 ; 3) appartient à la droite (D)

3. Construction de la droite (D) dans le repère (O ; I ; J)

Soit P(0 ; y), un point appartenant à la droite (D)

On a : $0 - 3y + 12 = 0$

Donc, $y = 4$, c'est-à-dire le point P(0 ; 4) appartient à la droite (D)

Avec les points C (-3 ; 3) et P (0 ; 4), on peut construire la droite (D)

(Voir figure pour la construction)

4. a) Justifions que le point E a pour coordonnées (-1 ; -3)

Soit E(x ; y)

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} \quad \text{C'est-à-dire} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{CE} = -2 \overrightarrow{AB} \quad \text{C'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad \begin{cases} x+3 = 2 \\ y-3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{Donc, } E(-1 ; -3)$$

b) Déterminons une équation de la droite (CE)

Soit M(x ; y), un point appartenant à la droite (CE).

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad \overrightarrow{CE} = -2 \overrightarrow{AB} \quad \text{C'est-à-dire} \quad \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\text{Puisqu'ils sont colinéaires, alors} \quad \text{Dét}(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ y-3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{D'où, } -6(x+3) - (-2)(y-3) = 0, \text{ c'est-à-dire } -6x - 2y - 12 = 0$$

Après simplification par -2 , on trouve finalement

$$(CE) : 3x + y - 6 = 0$$

5. Démontrons que les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires

La droite (D) a pour vecteur-directeur $\vec{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) et (AB) sont perpendiculaires si et seulement si $XX' + YY' = 0$

$$\text{Ainsi, } 3x(-1) + 1x3 = -3 + 3 = 0$$

Les droites (D) et (AB) sont donc perpendiculaires.

Constructions sur la feuille de papier millimétré

