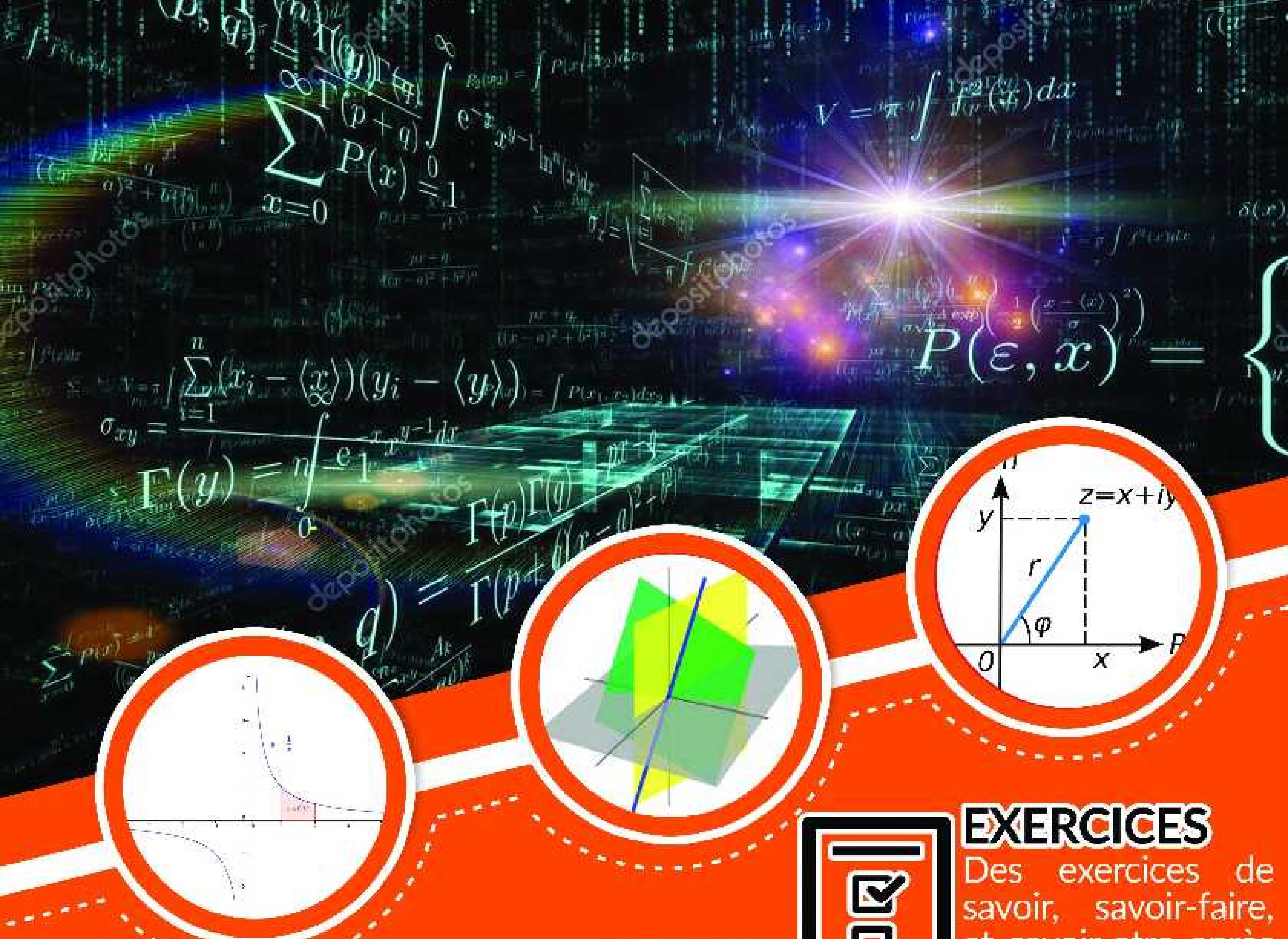
MATHEMATIQUES en 1ère C

100% GRATUIT



EXERCICES

Des exercices de savoir, savoir-faire, et savoir-etre après chaque leçon

COURS

Cours détaillés et illustrés selon l'Aproche Par Compétence (APC)

NOUVEAU PROGRAMME

Cours et exercices selon le nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp **Les grandprofs de Maths**

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est l'œuvre des enseignants du groupe WhatsApp dénommé « Grandprofs de maths(GPM) ». Ce groupe a vu le jour le 12-05-2017. Cette collection est la mise en pratique de l'un de ses objectifs majeurs. Rendu à sa deuxième édition, c'est le fruit de près de trois mois de travail organisé par les administrateurs dans des sous-groupes (13 ateliers).

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette collection n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, encore moins le cours de l'enseignant. Il vient juste en appuis à ces documents. Dans le fond et la forme, chaque chapitre de cette collection est conforme au nouveau programme et respecte la structure de l'APC pour les classes de la 6ème en première.

Cette deuxième édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner aux administrateurs qui ont travaillé inlassablement pour mener le projet à bon port. Il s'agit de : *M. Guela Kamdem Pierre* **,** *M. Pouokam Léopold Lucien* **,** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **et le fondateur du groupe** *M. Ntakendo Emmanuel.* **A ce dernier, nous devons toutes les couvertures de cette deuxième édition. Un coup de chapeau est à donner à certains enseignants qui ont fait de la réussite de ce projet, un objectif à atteindre pendant les vacances : ce sont les chefs d'ateliers. Nous avons** *M. Siyapdje Henri* **(6ème),** *M.Joseph Fogang* **(5ème),** *M.Ngongang Nivel* **(4ème),** *M.Jidas Tchouan* **(3ème),** *M. Simplice Dongmo* **(2ndeA_4),** *M. Guela Kamdem Pierre* **(2ndeC),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(1èreA_4),** *M.*

Nguefo Takongmo (1ère C), *M. Jidas Tchouan* (1ère D-TI), *M. Bayiha André Ghislain* (Tle A_4), *M. Ouafeu Tokam Guy Paulin* (Tle C) et *M. Nganmeni Konguep Hervé Battiston* (Tle D-TI). Nous ne saurons terminer sans féliciter tous les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet et y ont consacré leur précieux temps non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 164 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours réalisés.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que des éventuelles coquilles que pourrait contenir chacun des documents de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants voulant intégrer ce groupe WhatsApp ou désirant prendre part à la 3ème édition qui débutera en Mai 2020 sont priés bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre* (697 473 953 / 678 009 612), *M. Pouokam Léopold Lucien* (696 090 236/ 651 993 749), *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* (699 494 671) et *M. Ntakendo Emmanuel (*676 519 464).

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Projet Grandprofs de math(GPM)
2ème édition
Atelier 1ère C

CHAPITRE 1 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ℝ

MOTIVATION : Nous sommes confrontés dans notre vie quotidienne à résoudre des problèmes de partage, de répartitions de superficies, d'intérêts, de rabais ou de hausse, d'optimisation et bien d'autres. Le présent chapitre s'en va nous donner des outils mathématiques nécessaires pour mieux appréhender ce type de problèmes.

LEÇON1 : POLYNOMES

Pré requis

- Reconnaitre une expression littérale.
- Opérer des sommes algébriques sur des expressions littérales.
- Développer, réduire voire ordonner une expression littérale.
- Déterminer la condition d'existence d'un quotient.

Situation problème

Objectifs pédagogiques :

- **Savoir reconnaitre un polynôme**
- **Déterminer une racine évidente d'un polynôme et en reconnaitre une.**
- **Effectuer une identification des coefficients ou une division euclidienne**
- **Opérer des sommes, des produits et des quotients de polynômes.**

I. Notion de polynômes à coefficients réels.

1. Résumé

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Toute expression littérale de la forme ax^n est appelée monôme en x et de degré n.
- On appelle **polynôme**, une somme algébrique de plusieurs monômes.
- Le degré d'un polynôme correspond à celui de son monôme de plus haut degré.
- Un polynôme à une indéterminée et de degré n est donc toute expression de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ où x est l'indéterminée et $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0,..,n\}$ $(a_n \neq 0)$ sont les coefficients du polynôme.
  Les polynômes en x sont généralement notés $P(x), Q(x), A(x)$ …

2. Exemples

- $P(x) = x^3 - 7x^4 + 2x^2 - 1$ est un polynôme de degré 4.
- $-1, 2$ sont des polynômes de degré nul.

3. Remarques

- Un monôme est un polynôme.
- 0 est un polynôme appelé polynôme nul, il n'a pas de degré.
- Les coefficients d'un polynôme donné sont uniques.

4. Egalités de deux polynômes

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k$ deux polynômes. On dit que les polynômes P

et Q sont **égaux** lorsque pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = b_k$ c'est-à-dire $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_n = b_n \end{cases}$

a) Exercice d'application

On donne $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Déterminer les réels a et b tels que

$$P(x) = (x-1)(x^2 + ax + b).$$

b) Remarque

Cette méthode est appelée méthode par **indentification des coefficients.**

5. Division euclidienne

Résumé :

a) Racines d'un polynôme.

On appelle **racine** d'un polynôme P tout réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple :

En considérant le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$,
on a $P(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 = 0$. Donc -2 est une racine de P.

Exercice d'application :

Montrer dans chacun des cas suivants que α est racine de P

$a)\ P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \qquad \alpha = -\frac{2}{3} \qquad\qquad b)\ P(x) = \frac{3}{4}x^3 - 5x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{5}{4} \qquad \alpha = 1$

b) Division euclidienne.

Soit P un polynôme de degré $n (n \geq 2)$ admettant α comme racine. Il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout réel $x, P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

NB : le polynôme Q est généralement obtenu en divisant P(x) par x$-\alpha$ ou en effectuant une identification.

Exemple :

Le professeur choisira des exemples à sa convenance et insistera sur la méthode.

Exercice d'application :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b et c :

$a)\ P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 \qquad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

$b)\ P(x) = 3x^2 - 10x^2 + 9x - 2 \qquad P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

II. Opérations sur les polynômes

1) Somme algébrique

a) Résumé :

Faire la somme de deux polynômes revient à regrouper les coefficients de mêmes degrés. La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme, on le note P+Q.

b) Exemple

En Considérant $P(x) = \sqrt{5}x^3 + 6x^2 - 4$ et $Q(x) = 2\sqrt{125}x^3 - 11x^2 + 3x$, on a :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = 11\sqrt{5}x^3 - 5x^2 + 3x - 4$$

2) Produit de deux polynômes

a) Résumé :

Pour opérer le produit de deux polynômes, on utilise les techniques de développement et de réductions. Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme, on le note PQ.

b) Exemple

Soit $P(x) = (x^3 + x - 2)(x - 1)$ et $Q(x) = 5x(x^2 - 3x + 1)$

On a $PQ(x) = P(x) \times Q(x) = x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 2x + 2$.

c) Remarque

En général d°(P+Q) ≠ d°P + d°Q, de même d°PQ ≠ d°P×d°Q

3) Quotient de deux polynômes

a) Résumé :

Le quotient de deux polynômes P et Q noté $\frac{P}{Q}$ n'existe que lorsque Q est un polynôme non nul. En d'autres termes, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ existe si et seulement si $Q(x) \neq 0$. Le quotient de deux polynômes (lorsqu'il existe) est appelé **fraction rationnelle.**

b) Exemple

Soit $R(x) = \frac{2x^2-x-3}{x^2-1}$ une fraction rationnelle. R existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire, $x \neq -1$ et $x \neq 1$. De plus, pour $x \neq \pm 1$, $R(x) = \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{x-1}$: On dit qu'on a simplifié la fraction R.

c) Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants donner la condition d'existence de P et simplifier la.

$a)\ P(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-x-2}$ $\quad b)\ P(x) = \frac{3x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{15}{2}x+3}{2x^2+3x-2}$ (On pourra remarquer que 1 est racine du numérateur).

LEÇON2 : EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

Pré-requis :

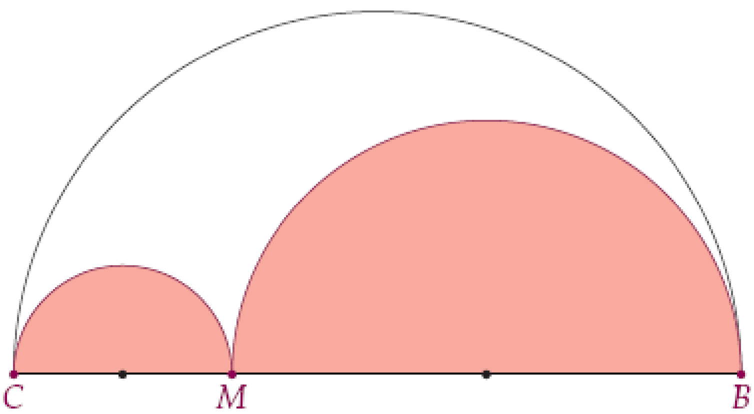
- Forme canonique.
- Résoudre des équations du premier degré dans $\mathbb{R}$.
- Factoriser/résoudre des équations en utilisant la forme canonique.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- **Résoudre une équation du second degré**
- **Résoudre un problème faisant intervenir une équation du second degré.**

Situation de vie :



Un designer désire réaliser un logo pour une entreprise. Ce logo a la forme de la partie blanche de la figure ci-dessus situé à l'intérieur du demi-disque de diamètre [BC] et à l'extérieur des demi-disques de diamètres [CM] et [MB]. M étant un point quelconque de [BC]. On donne BC = 10 et on pose x = CM. Le designer doit faire en sorte que l'aire de la partie blanche soit égale à la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre [BC].

Comment doit-il positionner le point M ?

I. TRINOMES DU SECOND DEGRE

Activité :

On considère le polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Discuter suivant les valeurs de a, b et c le degré du polynôme P.
2. On suppose pour la suite que P est de degré 2.
   a) Rappeler la formule donnant la forme canonique de P.
   b) On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Réécrire cette forme canonique.
   c) A quelles conditions sur Δ, P est il factorisable ? Dans chacun de ces cas donner si possible les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

1. Résumé :

a) On appelle **trinôme** du second degré ou polynôme du second degré tout polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.

2. Exemple

- $2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme du second degré (a=2, b=-3 et c=1).
- $5 - 4x^2$ est un trinôme du second degré (a=-4, b=0 et c=5).

3. Vocabulaire

- La courbe représentative d'un polynôme du second degré est appelée **parabole.**

b) La **forme canonique** de $ax^2 + bx + c$ est $a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. La forme canonique devient alors $a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$. On peut par la suite distinguer les cas suivants :

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$ Dans ce cas, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et par conséquent $a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ n'est pas factorisable (car somme de deux carrés).
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$ Dans ce cas, $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2]$. Il est donc factorisable comme différence de deux carrés.
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$ Dans ce cas, $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ qui est déjà sous la forme factorisée.

Conclusion le trinôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable si et seulement si $\boldsymbol{\Delta \geq 0}$.

II. RESOLUTION D'EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Activité :

On donne les trinômes du second degré suivants :

$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ $\qquad Q(x) = x^2 - 3x + 7$ $\qquad R(x) = 4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3$

1. Donner la forme canonique de chacun de ces polynômes.
2. Ces polynômes sont-ils factorisables ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ et $R(x) = 0$

Résumé:

1. Définition :

On appelle **équation** du second degré toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Le nombre réel $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

2. Vocabulaire :

On appelle **racine(s)** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions lorsqu'elles existent de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

3. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on procède comme suit :

- On calcule le discriminant Δ
- Trois cas sont alors à distinguer ($\Delta > 0,\ \Delta < 0,\ \Delta = 0$), que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous :

	$\boldsymbol{\Delta > 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta < 0}$
$ax^2 + bx + c$	Admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Admet une racine double x_0 $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	N'admet pas de racines
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	N'admet pas de factorisation

Remarque

Dans la factorisation du trinôme, ne pas oublier le "**a**"

Astuce

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on peut suivre les étapes suivantes :

- Lire a, b et c.
- Calculer Δ.
- Suivant le signe de Δ, déterminer les solutions.

Exemple

Soit à résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

On a, $a = 2$, $b = -5$ et $c = 3$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1$.

Δ étant strictement positif, l'équation admet donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(2)} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+1}{2(2)} = \frac{3}{2}$ Ainsi $S = \{1, \frac{3}{2}\}$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes et donner la forme factorisée des polynômes associés à chacune de ces équations :

$a)\ 3x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 0$ $\quad b)\ 5x^2 + 3x + 2 = 0$ $\quad c)\ 4x^2 + 4x + 1 = 0$

Remarques

R1 : Lorsqu'on vous demande résoudre une équation sans préciser l'ensemble de résolution alors faites le dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

R2 : Lorsque les réels a et c sont de signes contraires, l'équation possède toujours au moins une solution.

R3 : On n'est pas toujours obligé de calculer le discriminant lorsqu'on veut résoudre une équation du second degré, une simple factorisation suffit le plus souvent :

Exemples $x^2 - \frac{3}{2}x = 0$ $\qquad 4x^2 - 1 = 0$

R4 : Lorsque b est pair, on pose $b' = \frac{b}{2}$ et alors les résultats précédents deviennent :

	$\Delta' > 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' < 0$
$ax^2 + bx + c$	Admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. $x_1 = \frac{-b\prime-\sqrt{\Delta\prime}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b\prime+\sqrt{\Delta\prime}}{a}$	Admet une racine double x_0 $x_0 = -\frac{b'}{a}$	N'admet pas de racines
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	N'admet pas de factorisation

Δ' est appelé **discriminant réduit** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple $x^2 - 8x - 9 = 0$ $\Delta' = (-4)^2 - (1)(-9) = 5^2$ $x_1 = 4 - 5 = -1$ et $x_2 = 4 + 5 = 9$

Vous remarquerez la rapidité avec laquelle on obtient ces résultats.

III. AUTRES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Exercice d'application n°1

1) Vérifier que $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x^2 - (3 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

Exercice d'application n°2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$\boldsymbol{a)\ t - 5\sqrt{t} - 6 = 0}$ $\boldsymbol{b) - 2x^2 + 2|x| + 4 = 0}$ $\boldsymbol{c)\ (x - 2020)^2 - (x - 2020) - 2 = 0}$

IV. PROBLEMES CONDUISANT AUX EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Problème 1 :

Une marchandise qui coutait 51840 FCFA subit deux réductions de x% puis est vendue au prix de 36000 FCFA. Déterminer la valeur de x.

Problème 2 :

Un commerçant achète n actions dans une banque A à 600 000Fcfa. Dans une autre banque B il aurait pu acheter avec la même somme 100 actions en moins mais chaque action se verrait alors augmenter de 3000Fcfa. Déterminer le nombre d'actions vendues et le prix d'une action.

Pré-requis :

- **Résoudre une inéquation du premier degré**
- **Résoudre une équation du second degré**

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- **Résoudre une inéquation du second degré**
- **Résoudre un problème d'optimisation**

Situation de vie :

Un berger veut disposer de 200 m de grillage pour sa clôture en forme de rectangle. On note x la longueur en mètre de cette clôture. On désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire en fonction de x de cette clôture.

Quelle est la valeur maximale de cette aire pour que la clôture soit entièrement couverte ?

Activité :

On donne $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

1. Donner la forme factorisée de P.
2. Dresser le tableau de signe du polynôme P.
3. Déduire de ce tableau la solution de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

I. INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Résumé :

a) Définition

On appelle **inéquation du second degré** toute inéquation faisant intervenir un trinôme du second degré.

Exemple :

$5x^2 - x + 2 < 0$ est une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$..

b) Résolution

Pour résoudre une inéquation du second degré, on dresse le tableau de signe du trinôme associé puis on détermine l'ensemble des valeurs qui satisfont cette inéquation.

Signe de $ax^2 + bx + c$

1er cas $\Delta > 0$ (ici on suppose $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2ème cas $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

3ème cas $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

Astuce

Pour résoudre une inéquation du second degré, on peut suivre les étapes suivantes :

- Résoudre l'équation associée.
- Dresser le tableau de signe du trinôme et déduire l'ensemble solution.

Exemple

Soit à résoudre l'inéquation $-2x^2+2x+4 \geq 0$. L'équation associée possède deux racines -1 et 2. Le tableau de signes de ce polynôme est donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-2x^2+2x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

De ce tableau, on déduit que l'ensemble solution est $S = [-1,\ 2]$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$a)\ 2x^2-3x+1>0$ $\quad$ $b)\ -2x^2+3x-6<0$ $\quad$ $c)\ 3x^2-6x+3 \leq 0$

c) Autres inéquations du second degré

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $a)\ \frac{x^2+x-2}{2x-2} \leq x+3$ $\quad$ $b)\ \frac{x-1}{x-4} \leq \frac{x-5}{2x-5}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $3x^2-(3-\sqrt{2})x-\sqrt{2} \geq 0$ (On pourra se servir de l'exercice d'application sur les équations du second degré)

II. PROBLEMES D'OPTIMISATION

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction (ici polynôme) sur un ensemble. Donc ici il est question de trouver le maximum ou le minimum d'un polynôme du second degré modélisant un problème d'économie, d'informatique, d'ingénierie et bien d'autres.

Exercice d'application :

Résoudre la situation problème. (voir aussi CIAM Pre SM page 189)

Vous rencontrerez beaucoup de situations d'optimisation dans le chapitre sur les fonctions notamment celui sur la dérivation et un outil encore plus puissant vous sera donné.

LECON3 : SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN TRINOME DU SECOND DEGRE

Motivation :

Le prof dit : « je cherche deux nombres, dont la somme vaut 5 et le produit 6 » Tout de suite un élève répond : « 2 et 3 monsieur ». Un autre : « 3 et 2 monsieur ». Le maitre leur dit "bravo à vous". Puis il reprend en disant : « Et si la somme était 21 et le produit 90 ? » A ce moment la salle devient calme. Et toi aurais-tu pu trouver ces nombres ? Si oui comment aurais-tu procéder ?

Pré-requis :

- Savoir résoudre une équation du second degré c'est-a-dire déterminer les racines d'un polynôme du second degré.
- Savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Objectifs pédagogiques :

- **Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit**
- **Utiliser la somme ou le produit pour déterminer une racine connaissant l'autre**
- **Résoudre des systèmes voire des problèmes faisant intervenir la somme et le produit des racines**
- **Résoudre des équations paramétriques**

Situation problème :

Monsieur X dispose d'un champ en forme rectangulaire dont il ne se souvient plus des dimensions. Néanmoins ce dernier se rappelle que l'aire du terrain est de 24dam^2 et que l'une des diagonales mesure 10dam. Aidez Monsieur X à retrouver les dimensions de son champ.

Activité :

On considère le trinôme A donné par $A(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose de plus que A admet deux racines réelles.

1) Rappeler les valeurs de x_1 et de x_2 en fonction de a, b et Δ.
2) On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$
   a) Que représente S et P ?
   b) Déterminer les valeurs de S et de P en fonction de a, b et c.

I. SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Dans cette partie, on suppose que le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 et l'on s'intéresse aux propriétés sur la somme et le produit de ces racines.

Résumé :

1) Définition et propriété

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré admettant deux racines réelles x_1 et x_2. On note S et P respectivement la somme et le produit de ces racines. Alors :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple :

Le polynôme $-2x^2 - 2x + 4$ admet deux racines (a et c sont de signes contraires) et la somme $S = -\frac{b}{a} = -1$ et le produit $P = \frac{c}{a} = -2$.

2) Utilisation de la somme et du produit des racines

a) Trouver une racine connaissant l'autre

Exercice d'application : **(Extrait du probatoire C 2017)**

On donne $P(x) = 2\sqrt{2}x^2 + (2-\sqrt{2})x - 1$.

i) Calculer $P(\frac{1}{2})$

ii) Vérifier que P admet deux racines distinctes

iii) En utilisant la somme ou le produit des racines, déterminer l'autre racine.

b) Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Pour trouver deux nombres dont la somme S et le produit P sont donnés, il suffit de résoudre l'équation $X^2 - SX + P = 0$. Il vient donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces nombres existent est : $S^2 - 4P > 0$ (c'est le discriminant de l'équation précédente).

Exemple

Répondons à présent à la préoccupation du prof : « Peut-on trouver deux nombres dont la somme vaut 21 et le produit 90 ? »

On a $S = 21$ et $P = 90$ et donc, $S^2 - 4P = (21)^2 - 4 \times 90 = 81 > 0$. La réponse à la question du prof est donc oui. Mais alors quels sont ces nombres ?

On résout donc l'équation $X^2 - 21X + 90 = 0$ ce qui nous donne 15 et 6.

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ xy = -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Remarque

Les systèmes précédents sont appelés **système somme-produit**. On leur donne le surnom de **systèmes symétriques** car si (a, b) est solution de ce système, alors le couple (b, a) est aussi solution.

II. AUTRES UTILISATIONS DE LA SOMME ET DU PRODUIT

a) Un petit problème : (proposé par Newton)

Un triangle rectangle a pour périmètre 30 m et pour aire 30 m^2. Déterminer ses dimensions.

b) Equations paramétriques

Soit m un paramètre réel. On considère l'équation d'inconnue x :

$$E_m : (m+1)x^2 - (m+3)x - m = 0$$

Discuter suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de E_m.

Bon à savoir :

Une équation du second degré possède :

- Deux solutions de signes contraires lorsque $\boldsymbol{\Delta > 0}$ et $\boldsymbol{P < 0}$
- Deux solutions positives lorsque $\boldsymbol{\Delta > 0}$, $\boldsymbol{S > 0}$ et $\boldsymbol{P > 0}$
- Deux solutions négatives lorsque $\boldsymbol{\Delta > 0}$, $\boldsymbol{S < 0}$ et $\boldsymbol{P > 0}$

LECON5 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A TROIS

Pré-requis :

- Savoir résoudre une équation et une inéquation du premier et second degré.
- Savoir utiliser la méthode par identification ou par division euclidienne sur des polynômes.

Objectifs pédagogiques :

- **Résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des polynômes de degré supérieur ou égal à 3**
- **Résoudre une équation/inéquation bicarrée**

Situation problème :

Une entreprise produit des voitures qu'elle commercialise. Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de x voitures est modélisé par la fonction $c(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 2x^2 - 2{,}1x + 21$ pour $x \in [0, 10]$. Une voiture est vendue au prix de 10 000€ et toutes les voitures fabriquées sont vendues. On s'intéresse au bénéfice, c'est-à-dire à la différence entre la recette et le coût de fabrication. Lorsque le bénéfice de l'entreprise est positif, on dit que la production est rentable.

Déterminer la quantité de voitures à produire pour que la production soit rentable.

I. POLYNOMES DE DEGRE 3

Activité :

On considère l'inéquation (I) : $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 \leq 0$ et le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

1. Calculer P(-2). Que traduit ce résultat ?
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $P(x) = (x + 2)(x^2 + ax + b)$
3. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I).

a) Résumé :

Pour résoudre une équation faisant intervenir un polynôme P de degré 3, on peut utiliser le programme suivant :

- Déterminer une racine évidente α du polynôme P
- Trouver un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
- Résoudre les équations $x - \alpha = 0$ et $Q(x) = 0$ puis déduire les solutions.

b) Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$ et déduire la solution de l'inéquation $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 > 0$

On commence par chercher une racine évidente (généralement tester les entiers compris dans [-4, 4]). Dans ce cas, il s'agit de 1 (on peut aussi voir que 2 marche).

Par une division euclidienne, il vient que $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0 \leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 5x + 3) = 0$.

Et par la suite, l'équation admet comme solution $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $x = 2$. L'inéquation est donc équivalente à $(x - 2)(2x^2 - 5x + 3) > 0$. Une étude de signe nous donne comme ensemble solution $S =]1, \frac{3}{2}[U]2, +\infty[$ (N'oublions pas qu'on connait déjà donner le signe d'un trinôme de degré 2).

c) Généralisation

Pour résoudre une équation/une inéquation faisant intervenir un polynôme P de degré n $(n \geq 2)$ admettant une racine évidente α, on trouve le polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Astuce

Pour résoudre une équation faisant intervenir un polynôme de degré supérieur ou égal à trois, on peut :

- Chercher une racine évidente α de ce polynôme (essayer les entiers entre -4 et 4)
- Utiliser soit une identification soit une division pour réduire le degré du polynôme (réitérer le processus jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2)

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^4 + 9x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ (on pourra remarquer que -4 est une solution de cette équation).

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS BICARREES

Activité :

On considère l'équation $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$

1. Poser $X = x^2$ et résoudre l'équation d'inconnue$X$, puis déduire la résolution de l'équation de départ en x.
2. Donner la forme factorisée de $x^4 + 7x^2 - 18$ puis déduire la solution de l'inéquation $x^4 + 7x^2 - 18 < 0$

1) Résumé

On appelle équation (ou inéquation) **bicarrée**, toute équation (ou inéquation) de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ ou tout autre inéquation de ce type) avec $a \neq 0$.
Généralement, pour résoudre une équation/inéquation bicarrée, on effectue un changement de variable (par exemple poser X = x^2) pour se renvoyer à une équation/une inéquation du second degré (que l'on connait résoudre).

2) Exemple

Soit à résoudre l'équation $4x^4 + x^2 - 3 = 0$. On pose $X = x^2$, ce qui nous conduit à l'équation $4X^2 + X - 3 = 0$ qui admet pour solution $X = \frac{3}{4}$ ou $X = -1$. On revient ensuite à la variable initiale de la sorte

- Pour $X = \frac{3}{4}$, on a $x^2 = \frac{3}{4}$ et par la suite $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $X = -1$, on a $x^2 = -1$ ce qui est impossible. Donc $S = \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

3) Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations et inéquations suivantes :

$a)\ x^4 - 11x^2 - 9 = 0$ $\quad$ $b)\ 2x^4 + 5x^2 - 3 < 0$ $\quad$ $c)\ 2x^4 + x^2 - 3 = 0$

Pré-requis :

- Savoir résoudre une équation/une inéquation du premier et second degré.

Objectifs pédagogiques :

- **Résoudre une équation et inéquation irrationnelle.**

Situation problème :

I. EQUATIONS IRRATIONNELLES

Activité :

On considère l'équation (E) : $\sqrt{7-6x} = 2x+1$

1. Donner la contrainte de résolution sous cette équation.
2. Sous cette contrainte, résoudre alors l'équation (E).

1) Résumé :

- On appelle équation irrationnelle, toute équation possédant un radical (qui comporte le symbole √). Dans cette leçon, on se limitera aux équations de la forme $\sqrt{ax+b} = cx+d$ où a, b, c et d sont des réels.
- Pour résoudre une équation irrationnelle, on commence par déterminer la/les contrainte(s) et sous ces contraintes on détermine la (ou les) solution(s) qui satisfont la contrainte.
- Soit à résoudre l'équation $\sqrt{ax+b} = cx+d$, elle se réduit au système :
$\begin{cases} cx+d \geq 0 \ (contrainte) \\ ax+b = (cx+d)^2 \end{cases}$

2) Exemple :

Considérons l'équation $\sqrt{4-x} = x-2$. Cette équation nous conduit au système
$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-3x = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 3.$ D'où S = {3}.

3) Remarque :

La contrainte est indispensable lorsqu'il s'agit de résoudre une équation irrationnelle (s'il n y avait pas eu de contrainte on aurait pris 0 comme solution).

4) Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations : $a)\ \sqrt{7-2x} = x+4$ $\quad b)\ \sqrt{3-2x} = \sqrt{x}$ $\quad c)\ \sqrt{2-x} = x+10$

II. INEQUATIONS IRRATIONNELLES

Activité :

On considère l'inéquation (I) : $\sqrt{2-x} < x+10$

1. Donner la contrainte de résolution sous cette inéquation.
2. Sous cette contrainte, résoudre alors l'inéquation (I).

1) Résumé :

Les inéquations que nous allons résoudre dans cette partie sont du type $\sqrt{ax+b} \leq (<)\ cx+d$ où a, b, c et d sont des réels.

Résoudre l'inéquation $\sqrt{ax+b} \leq cx+d$, revient à résoudre le système : $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ ax+b \leq (cx+d)^2 \end{cases}$

1) <u>Exemple :</u>

Considérons l'inéquation $\sqrt{2-x} < x+10$. Résoudre cette inéquation revient à résoudre :

$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2-x < (x+10)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2+21x+98 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -14 \; ou \; x > -7 \end{cases} \leftrightarrow x \in]-7,2]$

2) <u>Exercice d'application :</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations : $a) \sqrt{x-1} \leq 3-x$ $\quad b) \sqrt{-x^2+5x+9} < \sqrt{x-3}$

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMMBRES REELS

CHAPITRE 3 : SYSTEMES D'EQUATIONS A DEUX OU TROIS INCONNUES

Intérêt : La rubrique d'aide qui suit s'attardera aux problèmes de résolution de systèmes d'équations linéaires. Les méthodes présentées seront essentielles dans le cadre des cours d'Analyse microéconomique, Economie managériale, ainsi que tous les cours de programmation linéaire et de recherche opérationnelle.

Motivation : Nous sommes souvent confrontés aux problèmes de vie, donc la résolution se trouve dans son interprétation et sa mise en équations.

Les prérequis conseillés sont :

- ✓ **Équations du second degré**
- ✓ **Inéquations du second degré**

Leçon 1 : SYSTEMES D'EQUATIONS ET INEQUATIONS A DEUX INCONNUES

Objectifs :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- **Résoudre un système d'équations à deux inconnues ;**
- **Résoudre un système d'inéquations à deux inconnues.**

1- Situation problème

Une fleuriste propose deux types de bouquets :

- L'un composé de 5 roses jaunes et 4 iris pour 16 FCFA.
- L'autre composé de 3 roses jaunes et 6 iris pour 15 FCFA.

Calculer le prix de chacun des types des bouquets.

2- Activité

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 5x + 4y = 16 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquation suivante :

$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 16 \\ 3x + 6y \leq 15 \end{cases}$$

3- Résumé

Soit (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'' \end{cases}$ un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

3-1- Déterminants de (S) et de ses inconnues.

- On appelle déterminant du système (**S**) le nombre réel ab' – a'b. On le note **D** et on convient de le disposer $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; ainsi on a : $D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.
- On appelle déterminant de l'inconnue x le nombre réel $cb' - c'b$. On le note D_x et on convient de le disposer $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; ainsi on a : $D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$.
- On appelle déterminant de l'inconnue y le nombre réel$ac' - a'c$. On le note D_y et on convient de le disposer $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$; ainsi on a : $D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.
  Ces formules de déterminant sont appelées aussi : formules de CRAMER

3-2- Résolution à l'aide des déterminants.

- Si $D \neq 0$, alors le système (S) a un seul couple de solution qui est : $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$;
- Si $D = 0$ et $(D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0)$, alors le système (S) n'a pas de solution ;
- Si $D = 0$ et $D_x = D_y = 0$, alors le système (S) a une infinité de solutions.

Soit (S) $\begin{cases} ax + by \leq c \\ a'x + b'y \leq c'' \end{cases}$ un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues.

Un système d'inéquations linéaire dans $\mathbb{R}^2$ se résout graphiquement. Son ensemble solution est l'ensemble des coordonnées des points appartenant à l'intersection de tous les demi-plans dont les coordonnées des ponts sont solutions de chacune des inéquations qui constituent le système.

La résolution des systèmes dans $\mathbb{R}^2$ permet de faire des prévisions dans certains problèmes concrets ; on dit en général qu'on fait de la programmation linéaire.

4- Exercice d'application (retour à la situation problème)

Leçon 2 : EQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES A TROIS INCONNUES

Objectifs :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- ✓ **Résoudre une équation à trois inconnues ;**
- ✓ **Résoudre un système d'équations linéaires à trois inconnues.**

1 – Situation problème

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent :

- 2 kg de bois et 3 h de travail, pour un camion.
- 500 g de bois et 4 h de travail, pour un patin.
- 800 g de bois et 3h30 de travail, pour un chien à trainer.

Déterminer le nombre de camions, de patins et de chiens fabriqués si on utilise exactement 91 kg de bois, si on travaille 313h et si on fabrique 89 objets au total.

2 – Activité

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 89 \\ 3x + 4y + 3.5z = 313 \\ 20x + 5y + 8z = 910 \end{cases}$$

3 – Résumé

1- On appelle équation linéaire dans $\mathbb{R}^3$ ou équation linéaire à trois inconnues, toute relation de la forme $ax + by + cz = d$ où a, b, c et d sont des nombres réels donnés, et x, y et z sont des inconnues.
   - Résoudre une telle équation revient à déterminer tous les triples dans l'ordre (α, β, γ) de nombres réels tels que $a\alpha + b\beta + c\gamma = d$.

2- On appelle système d'équations linéaire dans $\mathbb{R}^3$ ou système d'équations linéaire à trois inconnues, tout regroupement de plusieurs équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ dont on doit rechercher un seul ensemble solution.

3- METHODES DE RESOLUTION ET REMARQUES
Pour résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues, on peut utiliser deux méthodes :
   - ➢ La méthode de substitution.
   - ➢ La méthode du Pivot de Gauss.

4- Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 2y + 4z = 8. \\ 3x + 5y - z = -2 \end{cases}$

Résolution par substitution :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 2y + 4z = 8 \\ 3x + 5y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ -x + 2y + 4(4 - 2x - 3y) = 8 \\ 3x + 5y - (4 - 2x - 3y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ -9x - 10y = -8 \\ 5x + 8y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ y = -\frac{9}{10}x + \frac{8}{10} \\ 5x + 8\left(-\frac{9}{10}x + \frac{8}{10}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ y = -\frac{9}{10}x + \frac{8}{10} \\ -\frac{22}{10}x = -\frac{44}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2 \times 2 - 3 \times (-1) = 3 \\ y = -\frac{9}{10} \times 2 + \frac{8}{10} = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble solution de ce système est S = {(2, -1, 3)}

Méthode du pivot de Gauss

Donnons un nom à chacune des équations du système ; on obtient par exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 8 & L_2 \\ 3x + 5y - z = -2 & L_3 \end{cases}$$

Fixons une des équations par exemple L_1 et choisissons une des inconnues par exemple x que nous comptons éliminer dans les équations L_2 et L_3, en utilisant L_1. On a alors :

Disposition pratique de calcul

$$\begin{array}{ll} L_1 & 2x + 3y + \ y = 4 \\ 2L_2 & -2x + 4y + 8z = 16 \\ \hline L_1 + 2L_2 \Longrightarrow & 0 + 7y + 9z = 20 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 3L_1 & 6x + 9y + 3z = 12 \\ -2L_3 & -6x - 10y + 2z = 4 \\ \hline 3L_1 - 2L_3 & 0 - y + 5z = 16 \end{array}$$

Nouvelle écriture du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 & L_1 \\ 7y + 9z = 20 & L'_2 \\ -y + 5z = 16 & L'_3 \end{cases}$$

En gardant l'équation L_1 fixée, fixons par exemple l'équation L'_2, puis éliminons y dans l'équation L'_3.

$$\begin{array}{ll} L'_2 & 7x + 9z = 20 \\ 7L'_3 & -7y + 35z = 112 \\ \hline L'_2 + 7L'_3 & 0 + 44z = 132 \end{array} \quad on \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 & L_1 \\ 7y + 9z = 20 & L'_2 \\ 44z = 132 & L''_3 \end{cases}$$

Finalement on a : $\begin{cases} 2x + 3(-1) + 3 = 4 \\ 7y + 9 \times 3 = 20 \\ z = \frac{132}{44} = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

L'ensemble solution est donc $S = \{(2, -1, 3)\}$

Remarques

- L'utilisation de l'une ou l'autre des deux méthodes ci-dessus ne change pas l'ensemble solution.
- La méthode du pivot de Gauss transforme le système initial en un système final équivalent ayant la forme d'un triangle. On dit qu'on a triangularisé le système.

4 – Exercices d'applications

MODULE 23

CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

CHAPITRE 3

GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN

LECON 1 : DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Objectifs

- Déterminer la distance d'un point à une droite par la méthode analytique ;
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite en repère orthonormé.

Situation problème

Un cartographe s'intéresse à déterminer la plus courte distance qui sépare certaine villes du Cameroun au fleuve Sanaga, matérialise sur la carte par une droite.

Relativement à un repère orthonormé, le fleuve Sanaga est matérialisé par la droite d'équation : $2x+y = 4$, et une ville du Cameroun Buea pris au hasard a pour coordonnées relativement au même repère $(7, 5)$.

Comment pouvez-vous aider ce cartographe à déterminer la distance de Buea au fleuve Sanaga ?

Prérequis

- ✓ Reconnaitre l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ;
- ✓ Rappelle des notions de vecteur normal, vecteur directeur d'une droite dans le plan dont on connaît son équation cartésienne ;
- ✓ Rappelle des notions de produit scalaire, norme d'un vecteur, distance d'un point à une droite ;
- ✓ Rappelle de la notion de parallélisme et d'orthogonalité.

Activité

Dans un repère orthonormé (O, I, J), considérons la droite (D) : $2x+y-4=0$; A, B et C trois tels que : $A(7, 5)$, $B(1, 2)$ et $C(0, 4)$.

1) Vérifiez que B et C appartiennent à (D) et après avoir déterminé un vecteur directeur de la droite (D), justifiez que (AB) est perpendiculaire a (D).
2) Calculez les distances AB et AC et dites quelle des deux distances correspond à la distance de A à (D).

3) Sachant que $\vec{n}(2,1)$ est un vecteur normal de la droite (D), déterminez sa norme puis donnez la valeur de l'expression ; $\frac{|2x_A+y_A-4|}{\|\vec{n}\|}$, notons la d1 ; comparer d1 et AB. Quelle conclusion pouvez-vous faire ?
4) Justifiez également que $\vec{n}(2,1)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que pouvez-vous dire du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution

1. (D) : 2x+y-4=0 B(1, 2) et C(0, 4)
   2(**1**)+**2**-4=2+2-4=4-4=0 et 2(0)+4-4=0+4-4=0 donc B et C appartiennent a (D). Comme vecteur directeur de la droite (D) on a : $\vec{u}(-1,2)$; $\overrightarrow{AB}(-6,-3)$
   Etant donné que (-1)X(-6)+(2)x(-3)=6-6=0, alors (AB) est perpendiculaire à (D).
2. $AB = \sqrt{(1-7)^2+(2-5)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
   $AC = \sqrt{(0-7)^2+(4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$. La distance AB correspond à la distance de A à (D) car AB<AC.
3. $\|\vec{n}\| = \sqrt{(2)^2+(1)^2} = \sqrt{5}$; $\frac{|2x_A+y_A-4|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|2X7+5-4|}{\sqrt{5}} = \frac{|15|}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$. Donc d1=$3\sqrt{5}$. Et d1 = AB. Comme conclusion d1 représente aussi la distance de A à (D) ; nous avons ainsi une autre façon de calculer la distance d'un point à une droite sachant et l'équation de la droite et les coordonnées du point en question.
4. Justifions que $\vec{n}(2,1)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

   $\overrightarrow{AB}(-6,-3)$ et $\vec{n}(2,1)$ ainsi, (-6)X(1)-(-3)x(2)=-6+6=0 donc $\vec{n}(2,1)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Comme conclusion, nous pouvons dire que $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal de la droite (D).

Nous constatons que la distance de la ville de Buea ayant pour coordonnées (7, 5) au fleuve Sanaga, matérialisé par la droite (D) : 2x+y-4=0 peut être calculé comme étant: d1=$\frac{|2X7+5-4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}} = 3\sqrt{5}$.

Résumé

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan considérons, (D) : ax+by+c=0 et A(x_0, y_0), la distance de A à (D) notée d(A, (D)) = $\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2. Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan considérons deux droites (L) et (D) : ax+by+c=0 tels que (L) et (D) soient perpendiculaires et deux points B et

C appartenant à (L) alors $\vec{n}(a, b)$ et $\overrightarrow{BC}$ sont tous deux des vecteurs normaux à la droite (D).

3. $\vec{n}(a, b)$ étant un vecteur normal de (D) d'equation ax+by+c=0, (D) a donc pour equation normale la droite (d1) : $\frac{a}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}x+\frac{b}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}y+\frac{c}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}=0$

<u>Exercices d'applications</u>

1. Calculer la distance qui doit séparer un poteau électrique de la route dans une agglomération urbaine où on observe dans un repère choisi qu'un poteau pris au hasard a pour coordonnées (10, 5) à un endroit où la route est matérialisée par une droite d'équation 3x+4y=5.
2. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), déterminer de deux manières différentes deux vecteurs directeurs de droite (L) dans chacun des cas suivants.
   i. (L) :2x-y=3
   ii. (L) passe par A(1, -3) et B(4, 0).
3. Determiner l'equation normale de chacune des droites suivantes :
   (a) 2x-4y-7=0 (b) x+3y+1=0 (c) 2x+y = 3.

LECON 2 : EQUATIONS PARAMETRIQUES D'UN CERCLE DANS LE PLAN

Objectifs

- Déterminer le système d'équations paramétriques d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon.
- Déterminer le système d'équations paramétriques d'un cercle dont on connaît son équation cartésienne.

Situation problème

Un jeu d'enfants consiste à tirer le ballon sur les bordures d'un anneau.

Trois enfants ; **Pedro, Alex** et **Leo** se lancent a une partie ; l'anneau dans cette partie est matérialisée par le cercle d'équation **(C) :** $\boldsymbol{x^2+y^2-6x-8y-24=0}$, Dans un repère orthonormé choisi du plan. Ces trois enfants tirent chacun une fois et le point de contact avec le plan dans lequel se trouve l'anneau est noté tel que suit : **Pedro (5, 1) ; Alex (3, 11) et Leo (2, 0)**. Etant donné que réussit la partie consiste à placer le ballon sur l'anneau, quel(s) des trois enfants ont (a) réussi la partie ?

Prérequis

- ✓ Détermination des éléments caractéristiques d'un cercle.
- ✓ Résolution des équations trigonométriques de la forme aCosx=b ou aSinx=b.

Activité

Considérons le cercle (C) d'équation : $\boldsymbol{x^2+y^2-6x-8y-24=0}$, et E(x, y) un point du plan tels que $\begin{cases} x=3+7cos\theta \\ y=4+7sin\theta \end{cases}$ θ un paramètre réel.

1. Vérifier que $(x-3)^2+(x-4)^2=7^2$ (1)
2. Développer et réduire (1).
3. Que remarquer vous ?
4. Peut-on trouver θ, α et β tels que $\begin{cases} 3+7cos\alpha=5 \\ 4+7sin\alpha=1 \end{cases}$?
   $\begin{cases} 3+7cos\beta=3 \\ 4+7sin\beta=11 \end{cases}$? $\begin{cases} 3+7cos\theta=2 \\ 4+7sin\theta=0 \end{cases}$?
5. Le quel des trois enfants a gagné la partie ?
6. Que peut d'après vous représenter ce système d'équations pour le cercle (C) ?

   Solution

1. $\begin{matrix} x-3=7cos\theta \\ y-4=7sin\theta \end{matrix} \rightarrow (x-3)^2+(x-4)^2=7^2cos^2\theta+7^2sin^2\theta$

$\rightarrow (x-3)^2 + (x-4)^2 = 7^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = 7^2$.

2. En développant et réduisant (1) on obtient : $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0}$.
3. C/c il existe une équivalence entre le système et cercle (C).
4. $\begin{cases} 3+7cos\alpha = 5 \\ 4+7sin\alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cos\alpha = 2/7 \\ sin\alpha = -3/7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 73.4 \\ \alpha = -25.377 \end{cases} \rightarrow d'ou\ non\ pour\ \alpha.$

$$\begin{cases} 3+7cos\beta = 3 \\ 4+7sin\beta = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cos\beta = 0 \\ sin\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 90 \\ \beta = 90 \end{cases} \rightarrow d'ou\ oui\ pour\ \beta.$$

$$\begin{cases} 3+7cos\theta = 2 \\ 4+7sin\theta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cos\theta = -1/7 \\ sin\theta = -4/7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = 98.21 \\ \theta = -34.85 \end{cases} \rightarrow d'ou\ non\ pour\ \theta.$$

5. Alex a gagné la partie.
6. Le système d'équations paramétriques du cercle (C).

<u>Résumé</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Le système d'équations paramétriques d'un cercle de centre Ω(a, b) et de rayon R est donné par : $\begin{cases} x = a + Rcos\theta \\ y = b + Rsin\theta \end{cases}$ θ un paramètre réel.
2. Pour déterminer le système d'équations paramétriques d'un cercle dont on connait son équation cartésienne, on détermine d'abord ses éléments caractéristiques (son centre et son rayon) et on possède comme précédemment.

Exercice d'application.

Déterminer le système d'équations paramétriques des cercles définis comme suit :

a) Centre (3, -5) et rayon 5
b) Equation: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x + 8y - 24 = 0}$.

LECON 3 : TANGENTE EN UN POINT DU CERCLE

Objectifs

- Déterminer une équation cartésienne d'une tangente en un point d'un cercle
- Déterminer une équation cartésienne d'une tangente à un cercle, passant par un point extérieur à ce cercle.

Situation problème

Un bus de transport, dans son passage au tunnel, suscite en un élève de classe de première une interrogation après avoir observé et le plan du sol et celui du haut du tunnel, celle de savoir : la différence entre les deux plans par rapport aux roues du Bus étant donné que les roues sont en contacts avec le plan du sol et pas avec le plan du haut du tunnel et les deux plans vont dans la même direction que les roues.

Dans l'optique de proposer une réponse à cet élève de classe de première, matérialisons dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), une roue de ce Bus par le cercle (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ et les deux plans par les droites (D1) : 3x+4y+8 =0, pour le plan du sol et (D2) : 3x+4y+73 =0, pour le plan du haut du tunnel. L'interrogation de cet élève de classe de première deviendra : quelle différence existe-t-il entre les droites (D1) et (D2) pour le cercle (C) ?

Prérequis

- Etudier la position relative d'une droite par rapport à un cercle.
- Déterminer les éléments caractéristiques d'un cercle dont on connait son équation cartésienne.
- Résolution des équations du second dégrée.

Activité d'apprentissage

(O, I, J) est un repère orthonormé considérons le cercle (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ et les droites (D1) : 3x+4y+4 =0 et (D2) : 3x+4y+39 =0.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de (C), on notera A le centre du cercle et R son rayon.
2. Déterminer la distance d1 de A à (D1) et d2 de A à (D2).
3. Comparer d1 et R puis d2 et R.
4. Quel des deux droites touche (C) ? justifiez.
5. Déterminer les coordonnées du point B de rencontre de (D1) et (C) et vérifier que (AB) est perpendiculaire à (D1).
6. Sachant que (D1) est de même direction que (C), quel nom peut-on donner à (D1) par rapport à (C) ?

Solution

1. (C) est un Cercle de centre A(1, 2) et de rayon R=3.
2. Les distances : d1=3 et d2=12.
3. Comparons : d1=R et d2>R.
4. Des deux droites, (D1) est celle qui touche le cercle car d1=R.
5. (D1) : 3x+4y+4 =0 → $y=-\frac{3}{4}x-1$ d'où dans (C) on a : $x^2+(-\frac{3}{4}x-1)^2-2x-4\left(-\frac{3}{4}x-1\right)-4=0 \rightarrow 25x^2+40x+16=0$ d'où x=-4/5 et y=-2/5 ; $\overrightarrow{AB}(-\frac{9}{5},-\frac{12}{5})$ et un vecteur normal de (D1) est donné par : (3, 4) ; qui est un vecteur colinéaire au vecteur$\overrightarrow{AB}$, d'où (AB) est perpendiculaire à (D1).
6. Etant donné que (D1) est de même direction que (C), alors (D1) est tangente à (C).
   c/c le plan du sol est tangent aux roues du bus.

Résumé.

Etant donné (O, I, J) un repère orthonormé du plan et (C) : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ un cercle de centre Ω et de rayon R.

1. On appelle Tangente en un point **A** du cercle **(C)**, la droite passant par **A** uniquement et de même direction que **(C).**
2. L'équation de la tangente au cercle **(C)** passant en un point **A(x_0, y_0)** de (C) est donnée par (T): $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$.
3. L'équation de la tangente au cercle **(C)** passant en un point **B(x_1, y_1), B n'appartenant pas** à **(C)** est obtenue comme suit :
   Considérant L'équation de la tangente au cercle **(C)** passant en un point **A(x_0, y_0)** de (C) donnée par (T): $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$, on détermine les différents **A(x_0, y_0) ; (A1 et A2)** pour lesquelles cette tangente passe par B. et les droites (BA1) et (BA2) sont des tangentes à (C) passant par B.

Exemples d'applications

1. Déterminer l'équation de la tangente au cercle (C) : $x^2+y^2-3y-1=0$ et D(1, 3).
   i. vérifier que D appartient à (C).
   ii. puis déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) en D.

2. Soit (C) le cercle d'équation $x^2+y^2-10x+15=0$ et A(0 ; 5)
   i. Vérifier que A n'appartient pas à (C).
   ii. Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes au cercle (C) passant par A.

Solution

1. i. $1^2 + 3^2 - 3 * 3 - 1 = 1 + 9 - 9 - 1 = 10 - 10 = 0$ donc D appartient à (C).

ii. L'équation cartésienne de la tangente à (C) en D est donnee par :

$$1 * x + 3 * y - \frac{3}{2}(y + 3) - 1 = 0 \to 2x + 3y - 11 = 0.$$

2. i. $0^2 + 5^2 - 10 * 0 + 15 = 0 + 25 + 15 = 40 \neq 0$ donc A n'appartient pas à (C).

ii. L'équation cartésienne de la tangente à (C) en un point quelconque P($x_0;\ y_0$) est donnée par : (T) : $xx_0 + yy_0 - 5(x + x_0) + 15 = 0$; déterminons les P pour lesquelles (T) passe par A(0 ;5) (A n'appartenant pas à (C)) sachant que ces P appartiennent à (C).

(T) passe par A $\to$ $0 * x_0 + 5 * y_0 - 5(0 + x_0) + 15 = 0 \ \to 5y_0 - 5x_0 + 15 = 0$

$$\to y_0 = x_0 - 3.$$

P appartiennent à (C) $\to$ ${x_0}^2 + {y_0}^2 - 10x_0 + 15 = 0 \to {x_0}^2 + (x_0 - 3)^2 - 10x_0 + 15 = 0$

$$\to {x_0}^2 - 8x_0 + 12 = 0 \to x_0 = 2\ ou\ 6$$

Ainsi, on aura P1(2 ; -1) et P2(6 ; 3) et comme conclusion les droites (AP1) :3x+y-5=0 et (AP2) : x+3y-15=0 sont des tangentes à (C) passant par A. A étant extérieures à (C) et P1 et P2 appartiennent tous à (C).

<u>Exercices d'applications.</u>

CHAPITRE : BARYCENTRES ET LIGNES DE NIVEAUX

LECON 1 : BARYCENTRES DE DEUX POINTS PONDERES

OBJECTIFS :

- Reconnaitre le barycentre de deux points pondérés à partir d'une égalité vectorielle ;

Motivation : la notion de barycentre doit vous amener à mieux cerner la relation de CHASLES vu depuis la classe de 4ᵉ et de trouver le point d'équilibre d'un solide sur une balance.

SITUATION :

Sur les plateaux d'une balance sont déposé deux solides de masse différente. A quel niveau le petit TAMO doit-il tenir la barre de la balance pour que les deux solides soient en équilibre.

Pré-réquis :

- Ecrire un vecteur comme combinaison linéaire de plusieurs autres vecteurs sur une transformation linéaire.
- Ecrire les coordonnées d'un point connaissant son expression vectorielle.

Activité : soient A et B deux points du plan tels que AB=5cm et soient deux réels non nul a et b. on aimerait savoir si l'on peut trouver un point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{O}$.

1. Montrer $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB}$
2. En déduire que l'égalité $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{O}$ est encore équivalente a $(a + b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$.
3. On suppose dans cette question que (a+b) ≠0
   a. En déduire que le point G appartient a la droite (AB)
   b. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$
   c. Construire le point G lorsque a=2 et b=3
   d. Construire le point G lorsque a=-3 et b=5
4. Vérifier que lorsque a=b, alors G est milieu de [AB]
5. On suppose maintenant que a+b=0. Soit M un point ; montrer que le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas du point M.

Résume

- **Définition**
  - On appelle point pondéré tout couple (A, α) ou A est un point du plan et α un réel appelé coefficient.
  - On appelle barycentre de deux points pondérés (A, α) et (B, β) l'unique point G vérifiant l'égalité$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{O}$ ou (α+β) ≠0. On note G=

A	B
α	β

Ou G=bar {(A, α); (B, β)}

Exemple : $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{GB} = 0$ G=

A	B
-2	3

- **Construction du barycentre de deux points**

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Cette égalité permet la construction du point B ; notons que si les points A, B et G sont alignés alors G $\in (AB)$

BAS : - lorsque α=β, G est le milieu de [AB].

- Lorsque α et β sont de même signe, G est situé sur le segment [AB]. Il est plus proche du point donc le coefficient a la plus grande valeur absolue.
- Si α et β sont de signe contraire alors G est situé à l'extérieur du segment [AB].
  Exemple : construire le barycentre G des points (A, 3) et (B,-2) (en cours)

➢ **Réduction de $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}}$**

- Lorsque α+β≠0, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ or G=bar {(A, α); (B, β)}
- Lorsque α+β=0 et A≠B, alors $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de M.

<u>**Propriété**</u> : le barycentre de deux points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un même réel non nul **(propriété de l'homogénéité du barycentre)**

G=bar {(A, α); (B, β)} => G=bar {(A, kα); (B, kβ)} => G=bar {(A, α/k); (B, β/k)} avec k un réel.

Exemple : soit un segment [AB] de longueur 8cm, construire G=bar {(A, -3); (B, 2)}.

BAS : si A et B ont même coefficient, alors G est appelé l'isobarycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) ou G est le milieu du segment [AB].

➢ **Coordonnées du barycentre**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne A (x_A,y_A) et B (x_B, y_B) les coordonnées du barycentre sont donnés par : $G=(\frac{\alpha xA+\beta xB}{\alpha+\beta};\frac{\alpha yA+\beta yB}{\alpha+\beta})$.

EXEMPLE : déterminer les coordonnées du barycentre du système (A, 3); (B, -5)} lorsque A(-2,1) et B(4,-3) dans le plan.

<u>LECON 2</u> : BARYCENTRES DE PLUS DE DEUX POINTS PONDERES

OBJECTIFS :

➢ Traduire et reconnaitre le barycentre de trois points ou plus par des égalités vectorielles ;
➢ Construire le barycentre de trois points pondérés ;
➢ Utilisation du barycentre.
➢ Réduire l'expression $\sum_{i=1}^{n}\alpha i\overrightarrow{MAi}$

<u>**Situation**</u>

Monsieur TAMO possède un champ de forme triangulaire son ami lui apprend qu'au centre de gravité de ce champs il est caché un trésor. Monsieur TAMO n'a qu'une ficèle et vous fais appel pour l'aider à retrouver le trésor.

<u>**Résume**</u>

Soient trois points pondérés (A, a); (B, b) et (C, c) tel que a+b+c≠0. On appelle barycentre de ces points l'unique point G vérifiant $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ et on note G=bar {(A, a); (B, b) ;(C,c)}

Construction $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Exemple : ABC est un triangle construire G tel que G=bar {(A, 3); (B, -2) ;(C, 1)}.

- **Coordonnées du barycentre de plus de deux points pondérés**

Soit le plan muni du repère (O,I,J). Soient (A, a); (B, b) et (C, c) trois point pondérés tels que a+b+c≠0. soit G=bar {(A, a); (B, b) ;(C,c)} on a : $G = (\frac{axA+bxB+cxc}{a+b+c}; \frac{ayA+byB+cyc}{a+b+c})$. Cas général : G=bar {$(A_i, a_i)_{1<i<n}$}

BAS : - l'isobarycentre de trois points pondérés est le centre de gravité du triangle formé par ces points.

- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de gravité de ce parallélogramme.

Propriété (barycentre partiel)

Soit a+b+c≠0; G=bar {(A, a); (B, b) ;(C,c)} et a+b≠0 on pose I=bar {(A, a); (B, b)},alors

G=bar {(I, a+b); (C,c)}.

Le barycentre partiel permet de construire rapidement le barycentre de trois points pondérés. Exemple : soient ABC un triangle, construire G=bar {(A, -5); (B, 2) ;(C, 1)}.

- **Alignement des points**

On dit que trois points sont alignés si l'on peut écrire un comme barycentre des deux autres.

Exemple : soit ABC un triangles et I milieu de [AC].

a. Construire les points J et K tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CJ}$.
b. Démontrer que les points B, K, I sont alignés

- **Problème de concours des droites**

Les droites sont dites concourantes si elles se coupent en un seul point. Démontrer que les droites sont concourantes revient à vérifier qu'il existe un seul point appartenant a ces droites.

Exemples : ABC un triangle ; M,N,P sont trois points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $5\,\overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Démontrer que les droites (AP), (BN) et (CM) sont concourantes.

➢ Réduction de l'expression $\sum_{i=1}^{n} \alpha i\overrightarrow{MAi}$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha i\overrightarrow{MAi} = \alpha 1\overrightarrow{MA1} + \alpha 2\overrightarrow{MA2} + \cdots + \alpha n\overrightarrow{MAn}$

$(\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha n)\,\overrightarrow{MG}$ Si $\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha n \neq 0$

Exercices d'application : ABC est un triangle. G le barycentre des points pondérés (A, 4); (B, -1) ; (C,1) réduire l'expression $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

LECON 3 : lignes des niveaux

OBJECTIFS :

- Conjecturer et rechercher un ensemble de points;
- Déstabiliser les idées fausses sur les vecteurs;
- Déterminer et construire à partir de la notion des angles inscrits dans un cercles dont un côté est une demi tangente.

motivation

Soit deux points distincts du plan il est question de déterminer l'ensemble des points M du plan tel que f(M)=k (K est un réel ou K est un angle)

I. Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan et I milieu de [AB] ; pour tout point M du plan on a :

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
3. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

Démonstration soit I milieu de [AB]

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$
$\Leftrightarrow MI^2 + \quad MI(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB})$
$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2$ Car I milieu [AB] ie $IA = IB$
$\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ Car $IA = \frac{AB}{2}$

2. $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$
$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AB^2$
$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

3. $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\,\overrightarrow{MI}$ CAR I milieu de [AB] DONC $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$ D'où $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

II. Lignes de niveaux

On appelle ligne de niveau K de l'application f, l'ensemble des points M du plan tels que **f(M)=K**

a. Lignes de niveau $MA^2 + MB^2$=K

I milieu [AB] ; $MA^2 + MB^2$=K $\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = K$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 = K - \frac{AB^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{2K - AB^2}{4} = \alpha^2$$

- Si α<0 impossible
- Si α=0 M=I

- Si α>0 M appartient au cercle de centre I et de rayon α

b. Lignes de niveau $\boldsymbol{MA^2-MB^2}$=K

Soient A et B deux points distincts, I milieu [AB]. Soit M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB).

MA^2-MB^2=K⇔$2\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=K$

⇔$2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=K$

L'ensemble des points M du plan tel que MA^2-MB^2=K est la droite perpendiculaire a la droite(AB) au point H.

Exemple : soit AB=6cm ; déterminer et construire MA^2-MB^2=48

c. Lignes de niveau $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}$=K

I milieu [AB] ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$=K⇔$MI^2-\frac{AB^2}{4}=K$

⇔$MI^2=K+\frac{AB^2}{4}$

⇔$MI^2=\frac{4K+AB^2}{4}$=α^2

- Si α<0 impossible
- Si α=0 M=I
- Si α>0 M appartient au cercle de centre I et de rayon α

d. Lignes de niveau $\boldsymbol{\frac{MA}{MB}=K}$

Exemple : $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$ ⇔3MA=2MB⇔$3\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2=0$ ⇔(3$\overrightarrow{MA}$-2$\overrightarrow{MB}$). (3$\overrightarrow{MA}$+2$\overrightarrow{MB}$)=0

Soit I=bar{(A,3) ;(B,-2)} et J= bar{(A,3) ;(B,2)}.

$\overrightarrow{MI}.5\overrightarrow{MJ}=0$ ⇔$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$ M appartient au cercle de diamètre [IJ].

e. Lignes de niveau $\boldsymbol{\alpha MA^2+\beta MB^2}$=K

$\alpha MA^2+\beta MB^2$=K

- Si α+β=0 cf section b
- Si α+β≠0 alors $\alpha MA^2+\beta MB^2=(\alpha+\beta)MI^2+\alpha GA^2+\beta GB^2=K$

  ⇔$MI^2=\frac{1}{(\alpha+\beta)}(k-\alpha GA^2-\beta GB^2)=a^2$

  - Si a<o impossible
  - Si a=0 M=I
  - Si a>0 MϵC(I; a)

BAS : ceci est vrai avec plus de deux points. Exemple :

III. Arc capable

Soient A et B deux points distincts, θ un nombre réel 0< $\theta < 180$. Le lieu géométrique des points M tel que $\widehat{AMB} = \theta^0$ est la réunion de deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB).

a. Ensemble des points tels que $\widehat{AMB} = \theta^0$

1er cas : $\theta = 0$ alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$=0⇔$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de même sens ⇔M∈ (AB)-[AB]

2e cas : $\theta = \pi$; $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$= π⇔$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ *sont* colinéaires de sens opposés M∈ [AB]-{A,B}

3e cas : $\theta \in]-\pi;\pi[-\{0\}$ M est sur l'un des axes de cercles de cercles d'extrémités A et B.

b. Ensemble des points tels que $\widehat{AMB} = \theta$+2kπ

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$= $\theta[2\pi]$⇔M est un arc de cercle privé de A et B.

c. Ensemble des points tels que $\widehat{AMB} = \theta$+kπ

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$= $\theta[\pi]$⇔M est sur le cercle privé de A et B.

Exercice d'application :

Déterminer et construire l'ensemble des points suivants :

a. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$=0
b. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$= π
c. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$=$\frac{\pi}{3}$
d. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$= $\frac{2\pi}{3}$

Travaux diriges

EXERCICE :

ABC est un triangle isocèle de sommet principale A tel que AB = 2,5cm et BC = 4cm. Soient : I le milieu de [BC] et G le barycentre de$\{(A\,;\,-1),(B\,;1),(C\,;1)\}$.

1- a) Démontrer que les points A, I et G sont alignés.
   b)- Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$

2 a)- Démontrer que $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ *et que* $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AG}$

b)- Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

EXERCICE :

ABC est un triangle quelconque

1- Construire les points P, Q, R tel que $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$
2- Démontrer que les droites (AR), (BP), (CQ) sont concourantes
3- On a CD=2BA et I symétrique de D par rapport à A. Montrer que les points B, C et I sont alignés
4- a) Démontrer que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{CM} = 7\overrightarrow{MG}$ ou G est barycentre de A, B, C affectés des coefficients que l'on déterminera.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que
$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{CM}).\overrightarrow{MA} = 0$

EXERCICE :

I- Soit ABC un triangle.

1- simplifier le vecteur $-3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

2- Soit le point G du plan tel que $4\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Démontrer que le point G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on déterminera.

3- soient les points D, E et K tels que D est le milieu de [AC], $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que les droites (AK), (BD) et (CE) sont concourantes.

II- Soient A et B deux points du plan tels que AB = 8cm.

1-

a- Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ; 3) et (B ; -1).

b- Calculer AG^2 et BG^2.

c- Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $3MA^2 - MB^2 = 72$.

2- Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -40$

Exercice

1) ABC est un triangle isocèle tel que : AB = AC = 5 et BC = 6 .L'unité de mesure est le cm.
Soit G = bar {(A,2) ;(B,3) ;(C,3)}

a) Soit I le milieu du segment [BC]. Justifier que G= bar{(A,2) ;(I,6)}

b) En déduire la construction du point G.

c) Montrer que AI = 4.

d) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, puis montrer que AG = 3 et $IG = 1$

e) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + 6MI^2=36$

2) Soit l'application g, qui à tout point M du plan, associe le vecteur g(M) =$2\overrightarrow{MA}+ 3\overrightarrow{MB} +3\overrightarrow{MC}$

a) Montrer que g(M)=8 $\overrightarrow{MG}$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que g(M) = $\vec{O}$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). A, B et C sont trois points tels que $A\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Soit I le milieu de [AB] et G_m le barycentre du système {(A,m) ;(B,2) ;(C,4)}.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles G_m existe.

2) Déterminer la valeur de m pour que G_m soit le milieu du segment [IC].

3) On pose $\vec{u} = m\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et m=2

a) Montrer que $\vec{u} = 8\overrightarrow{MG_2}$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M tels que $\|\vec{u}\| = 24$.

b) Soit (F) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que $\vec{u}.\overrightarrow{MC} = 0$

i) Montrer que G_2 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ii) Déterminer une équation cartésienne de (F).

iii) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (F).

Table des matières

MODULE 23 (C-E) : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

Chapitre 5 : ESPACES VECTORIELS RÉELS

Introduction

Nous avons vu en 2nde ce que c'est qu'un groupe abélien. L'écriture d'un groupe $(E\,;\,*\,)$ c'est une structure algébrique (ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne $*$ associative, admettant un élément neutre dans lequel tout élément admet un symétrique). Dans ce chapitre, nous parlerons d'une structure algébrique particulière appelée espace vectoriel réel. Mais comment s'écrit-elle ? quels en sont des exemples ? quelles sont ses propriétés ?

Intérêt :

Les espaces vectoriels permettent de caractériser **tous** les éléments de certains ensembles (même infinis) à partir d'un **petit échantillon** (fini) dudit ensemble.

Ils trouvent leur utilisation dans les démonstrations d'autres propriétés mathématiques, notamment les solutions d'une équation différentielle permettant de donner l'équation horaire d'un mobile en physique, la résolution des systèmes linéaires ayant plusieurs inconnues, l'expression analytique de certaines suites récurrentes

Motivation :

- Formaliser et généraliser certains aspects de la géométrie classique.
- S'outiller des prérequis nécessaires à la compréhension des signaux et la cryptographie

1 Leçon 1: NOTION D'ESPACES VECTORIELS RÉELS

Objectifs :

- Montrer qu'un ensemble est stable pour une loi.
- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sur *IR*.

Pré-requis: groupes

1.1 Loi de composition externe

1.1.1 Définition

Soient $(E;\,+\,)$ un groupe abélien. On dira qu'une opération '' ¤ '' est une **loi de composition externe (**ou **opération externe)** dans E lorsque $\forall\, a \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\lambda} \text{ ¤ } \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}$.

1.1.2 Exemple

Dans le groupe ($\mathbb{R}$; $+$), la multiplication $''.''$ est une loi de composition externe. En effet :

$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.a \in \mathbb{R}$

1.2 Espaces vectoriels

1.2.1 Activité d'apprentissage

Soient $(E;+)$ est un groupe abélien et '.' une loi de composition externe dans E. $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$; $\forall\, x,y \in E$ et à partir des propriétés connues de $\mathbb{R}$, faites une conjecture pour donner d'autres expressions de $\alpha.(\beta.x)$; $(\alpha+\beta).x$; $\alpha.(x+y)$ et $1_{\mathbb{R}}.x$.

Solution :

$\alpha.(\beta.x) = (\alpha \times \beta).x$; $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$; $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$ et $1_{\mathbb{R}}.x = x$.

1.2.2 Définition

On dit qu'un ensemble E muni d'une loi de composition interne " $+$ " et d'une loi de composition externe "$.$" [qu'on note $(E;+;.)$] est un **espace vectoriel réel** ou **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$- **espace vectoriel** lorsque :

i. $(E;+)$ est un **groupe commutatif.** *Son élément neutre est noté* $\overrightarrow{0_E}$ *ou* O_E et est aussi appelé vecteur nul de E.

ii. $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E,\ \ \alpha.(\beta.x) = (\alpha \times \beta).x$ **(associativité mixte)**

iii. $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E,\ \ (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$.

(distributivité de la multiplication externe **.** sur l'addition **+** dans $\mathbb{R}$**)**

iv. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x,y \in E,\ \ \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

(distributivité de la multiplication externe **.** sur l'addition **+** dans E**)**

v. $\forall\, x \in E,\ \ 1_{\mathbb{R}}.x = x$ **(**$1_{\mathbb{R}}$ étant l'élément neutre pour $\times$ dans $\mathbb{R}$**)**

1.2.3 Vocabulaire et notation

- Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés **vecteurs** et sont parfois écrits sans **flèche**, tandis que les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires.**
- $\lambda.\vec{u}$ est souvent noté tout simplement $\lambda\vec{u}$ ou $\lambda.u$ ou λu

1.2.4 <u>Exercice d'application:</u> vérifier clairement que $(\mathbb{R}\,;+;.)$ est un espace vectoriel réel

Exercice 1 :

on définit dans $\mathbb{R}$ une opération " $*$ " par $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $a* b = a+b+2$.

Justifier que $(\mathbb{R};*)$ est un groupe abélien.

Exercice 2 : on définit dans $\mathbb{R}^2$ une opération " $+$ " par $\forall (a;b),(c;d) \in \mathbb{R}^2$,

$(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$. Soit l'opération "$.$" définie par $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda.(a;b)=(\lambda.a;\lambda.b)$.

Justifier que $(\mathbb{R}^2;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : faire de même pour $(\mathbb{R}^3;+;.)$

1.3 Propriétés d'un espace vectoriel réel

Si $(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel, alors on a $\forall\ u,v,w \in E$, $\forall \lambda,\alpha \in \mathbb{R}$

- $\lambda.\overrightarrow{0_E}=\overrightarrow{0_E}$ et $O.\vec{u}=\overrightarrow{0_E}$
- $(\lambda.\vec{u}=\overrightarrow{0_E}) \iff (\lambda=0 \text{ ou } \vec{u}=\overrightarrow{0_E})$
- $\lambda(-\vec{u})=(-\lambda)\vec{u}=-(\lambda\vec{u})$
- $\lambda(\vec{u}-\vec{v})=\lambda\vec{u}-\lambda\vec{u}$
- $(\lambda-\alpha)\vec{u}=\lambda\vec{u}-\alpha\vec{u}$

  $(\lambda.\vec{u}=\alpha.\vec{u}) \iff (\lambda=\alpha \text{ ou } \vec{u}=\overrightarrow{0_E})$

(preuve en exercice)

2 Leçon 2: FAMILLE LIBRE, FAMILLE GENERATRICE, BASE

Objectifs :

- Montrer qu'une famille finie est une famille génératrice ; libre ; liée d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille finie est une base d'un espace vectoriel.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Pré-requis:

- Coordonnées des vecteurs du plan.
- Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2.1 Définitions

Soient E un espace vectoriel et $\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n$ des vecteurs de E.

- Toute écriture de la forme $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i$ (ou encore $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\,\vec{e}_3+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n$) est appelée **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3; \dots;\ \alpha_n$.

- On dit que la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ est **libre** ou **linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire nulle de tous ces vecteurs est celle dont les coefficients sont **tous nuls.** En d'autres termes, la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ est libre lorsque $\forall\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\dots;\ \alpha_n\in\mathbb{R}$,

  $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\,\vec{e}_3+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=0.$
- On dit que la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ est **liée** ou **linéairement dépendante** si elle n'est pas libre c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle de tous ces vecteurs avec des coefficients **non tous nuls** (sans que tous les coefficients ne soient nuls).
- On dit que la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ est une **famille génératrice** de E ou encore que la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ **engendre** E et on note $E=<\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n>$ si tout vecteur $\vec{u}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs $\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n$ avec des coefficients à déterminer (en fonction de $\vec{u}$). En d'autres termes, la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ engendre E lorsque

$\forall\vec{u}\in E,\ \exists\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\dots;\ \alpha_n\in\mathbb{R}\ :\ \vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\,\vec{e}_3+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n.$

- On dit que la famille $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3;\dots;\ \vec{e}_n)$ est une **base** de E si cette famille est à la fois **libre** et **génératrice.** Dans ce cas, tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. $(\forall\vec{u}\in E,\ \exists!\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\dots;\ \alpha_n\in\mathbb{R}\ :\ \vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\,\vec{e}_3+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n)$.

2.2 Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\vec{e}_1=(-1;2)$; $\vec{e}_2=(1;1)$ et $\vec{e}_3=(3;-6)$

- <u>**Montrons que la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ est libre**</u>

Soient α_1 et $\alpha_2\in\mathbb{R}$: $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2=\vec{0}_{\mathbb{R}^2}$. Montrons que $\alpha_1=\alpha_2=0$.

$\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2=\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\Longrightarrow\alpha_1(-1;2)+\alpha_2(1;1)=(0;0)$ $\quad\Rightarrow(-\alpha_1;2\alpha_1)+(\alpha_2;\alpha_2)=(0;0)$

$\Rightarrow(-\alpha_1+\alpha_2;2\alpha_1+\alpha_2)=(0;0)$ $\quad\Rightarrow\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2=\alpha_1\\2\alpha_1+\alpha_1=0\end{cases}$ $\quad\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2=\alpha_1\\3\alpha_1=0\end{cases}$ $\quad\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2=\alpha_1\\\alpha_1=0\end{cases}$ $\quad\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$

Ainsi, la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ est libre.

- <u>**Montrons que la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$**</u>

Soit $\vec{u}=(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Cherchons $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\ :\ \vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$.

$\vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2\Leftrightarrow(x;y)=\alpha_1(-1;2)+\alpha_2(1;1)$ $\quad\Leftrightarrow(x;y)=(-\alpha_1;2\alpha_1)+(\alpha_2;\alpha_2)$

$$\Leftrightarrow (x;y) = (-\alpha_1+\alpha_2; 2\alpha_1+\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1+\alpha_2 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 + x \\ 2\alpha_1+\alpha_1+x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 + x \\ 3\alpha_1 = y - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{y-x}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{y-x}{3} \\ \alpha_2 = \frac{y-x}{3} + x = \frac{y-x+3x}{3} = \frac{y+2x}{3} \end{cases}$$

ainsi, la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

- **<u>Montrons que la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_3)$ est liée</u>**

Il s'agit de chercher α_1 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$ avec $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$.

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \alpha_1(-1;2) + \alpha_3(3;-6) = (0;0) \quad \Leftrightarrow (-\alpha_1; 2\alpha_1) + (3\alpha_3; -6\alpha_3) = (0;0)$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha_1+3\alpha_3; 2\alpha_1-6\alpha_3) = (0;0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1+3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1-6\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 = 6\alpha_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3\alpha_3 \\ \alpha_1 = 3\alpha_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \alpha_1 = 3\alpha_3.$$

En choisissant $\alpha_3 = 1$, on a $\alpha_1 = 3$. Ainsi, la famille $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_3)$ est liée car $3\vec{e}_1 + 1\vec{e}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$

2.3 Propriétés

Soit E un espace vectoriel et $\vec{u}$ un vecteur de E

- Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.
- $\{\vec{u}\}$ est libre si et seulement si $\vec{u} \neq \vec{0}$
- Toute sous-famille d'une famille libre de E est encore une famille libre de E et toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

2.4 Dimension d'un espace vectoriel

2.4.1 Propriété et définition

Si un espace vectoriel E a une base composée de $\boldsymbol{n}$ vecteurs, alors toutes les autres bases de E auront aussi $\boldsymbol{n}$ vecteurs et dans ce cas, on dira que l'espace vectoriel E est de dimension $\boldsymbol{n}$ et on note $\boldsymbol{dim\ E = n}$.

<u>Cas particuliers</u>

- $\dim \{\vec{0}\} = 0$
- Si $\dim E = 1$, alors E est appelé une droite vectorielle. Dans le plan, elle a une équation de la forme $ax + by = 0$, avec $(a;b) \neq (0;0)$.
- Si $\dim E = 2$, alors E est appelé un plan vectoriel. Dans l'espace, elle a une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.

2.4.2 Exemples :

$\dim\ \mathbb{R} = 1$; $\dim\ \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim\ \mathbb{R}^3 = 3$ et plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dim\ \mathbb{R}^n = n$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}})$ telle que $\vec{e}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0)$; $\vec{e}_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$; … ;

$\vec{e}_i = (0; 0; 0; \dots; 0; 1; 0; 0; \dots; 0)$ avec 1 à la colonne i; … ; $\vec{e}_n = (0; 0; 0; \dots; 1)$

2.4.3 Propriétés

Soit E un espace vectoriel de **dimension $\boldsymbol{n}$** et $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs de E

- $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ est libre si et seulement si $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ est une base de E.
- $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ engendre E si et seulement si $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ est une base de E.
- $dét(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n) \neq 0$ si et seulement si $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2;\ \vec{e}_3; \dots;\ \vec{e}_n)$ est une base de E.

En particulier, si $n = 2$, alors [$dét(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2) \neq 0$ si et seulement si $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2)$ est une base de E].

si $n = 3$, alors [$(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2; \vec{e}_3)$ libre si et seulement si $(\vec{e}_{1;}\vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E].

2.4.4 Exercice d'application

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on pose $\vec{e}_1 = (-1; 2)$; $\vec{e}_2 = (1; 1)$
   a- Justifier que $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   b- On considère $\vec{u} = (3; -2)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$
2) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{e}_1 = (-1; 2; 1)$; $\vec{e}_2 = (1; -1; 1)$ et $\vec{e}_3 = (2; -3; 2)$
   a- Justifier que $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   b- On considère $\vec{u} = (2; 3; -2)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2; \vec{e}_3)$
3) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{e}_1 = (-1; 2; 1)$; $\vec{e}_2 = (1; -1; 1)$ et $\vec{e}_3 = (2; -3; 0)$. Justifier que $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$

3 Leçon 3: SOUS-ESPACES VECTORIELS

Objectifs :

- Démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous espace vectoriel.
- Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel.
- Justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Pré-requis:

- Coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs.
- Déterminant de deux vecteurs du plan.
- Coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Activité d'apprentissage

Dans une base, $\vec{u}(x; y)$; $\vec{v}(x'; y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$

3.1.2 Définition

Soit $(E; +; .)$ un espace vectoriel réel et F **une partie** de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E; +; .)$ lorsque $(F; +; .)$ [muni des mêmes loi $+$ et . que E] est un espace vectoriel.

3.1.3 Propriété

Soient $(E; +; .)$ un espace vectoriel réel et F **une partie** de E.

F est un sous-espace vectoriel de $(E; +; .)$ lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- $F \neq \emptyset$
- F est **stable** pour $+$ c'est-à-dire $\forall\, u, v \in F,\ u + v \in F$
- F est **stable** pour la multiplication externe c'est-à-dire $\forall\, u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda. u \in F$

Ces trois conditions sont équivalentes aux deux conditions suivantes :

- $F \neq \emptyset$
- F est **stable par combinaison linéaire** c'est-à-dire $\forall\, u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha u + \beta v \in F$

3.1.4 Remarques

- Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel et par conséquent, les propriétés des espaces vectoriels restent valables pour les sous-espaces vectoriels.
- Si $(E; +; .)$ est un espace vectoriel réel, alors E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. (à vérifier)
- $\{0_E\}$ est appelé sous-espace vectoriel nul de E.
- E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels **triviaux de** E et les autres seront des sous-espaces vectoriels **propres de** E.

3.1.5 Exemple

On sait que $(\mathbb{R}^2\ ; +\ ; .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On pose $F = \{(x\ ; y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x - 3y = 0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^2$

Solution :

Les éléments de F sont par définition dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, F est une partie de $\mathbb{R}^2$

- **Montrons que $F \neq \emptyset$**

$0 \in \mathbb{R}$ donc $(0; 0) \in \mathbb{R}^2$. De plus $2(0) - 3(0) = 0$. Ainsi, $(0; 0) \in F$ et par conséquent, $F \neq \emptyset$.

- **Montrons que F est stable pour $+$**

Soient $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$. Montrons que $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) \in F$.

$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

$(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$ donc $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $x_1; y_1; x_2; y_2 \in \mathbb{R}$ et puisque $+$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$, alors $x_1 + x_2; y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$ d'où $(x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$.

En outre : $2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 2x_1 + 2x_2 - 3y_1 - 3y_2 = 2x_1 - 3y_1 + 2x_2 - 3y_2$. Or $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$. Donc $2x_1 - 3y_1 = 0 = 2x_2 - 3y_2$. D'où $2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0$. Ainsi, $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) \in F$. Donc F est stable pour $+$.

- **Montrons que F est stable pour la multiplication externe .**

Soient $(x ; y) \in F$et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda.(x ; y) \in F$.

$\lambda.(x ; y) = (\lambda.x \; ; \; \lambda.y)$.

$(x; y) \in F$ donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $x; y \in \mathbb{R}$. De plus, $\lambda \in \mathbb{R}$ et puisque . est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$, alors $\lambda.x; \lambda.y \in \mathbb{R}$ d'où $(\lambda.x; \lambda.y) \in \mathbb{R}^2$. En outre : $2(\lambda.x) - 3(\lambda.y) = 2\lambda.x - 3\lambda.y = \lambda.(2x - 3y)$. Or $(x; y) \in F$ donc $2x - 3y = 0$. D'où $2(\lambda.x) - 3(\lambda.y) = \lambda.0 = 0$. Ainsi, $\lambda.(x ; y) \in F$ donc F est stable pour la multiplication externe . et par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^2$

Deuxième méthode :

Les éléments de F sont par définition dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, F est une partie de $\mathbb{R}^2$

- **Montrons que $F \neq \emptyset$**

$0 \in \mathbb{R}$ donc $(0; 0) \in \mathbb{R}^2$. De plus $2(0) - 3(0) = 0$. Ainsi, $(0; 0) \in F$ et par conséquent, $F \neq \emptyset$.

- **Montrons que F est stable par combinaison linéaire**

Soient $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$ et $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha.(x_1; y_1) + \beta.(x_2; y_2) \in F$.

$\alpha.(x_1; y_1) + \beta.(x_2; y_2) = (\alpha.x_1; \alpha.y_1) + (\beta.x_2; \beta.y_2) = (\alpha.x_1 + \beta.x_2; \alpha.y_1 + \beta.y_2)$.

$(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$ donc $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $x_1; y_1; x_2; y_2 \in \mathbb{R}$. De plus, $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$. Puisque . est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$, alors $\alpha.x_1;\ \beta.x_2;\ \alpha.y_1;\ \beta.y_2 \in \mathbb{R}$. De même, + est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$, donc $\alpha.x_1 + \beta.x_2;\ \alpha.y_1 + \ \beta.y_2 \in \mathbb{R}$ d'où $(\alpha.x_1 + \beta.x_2; \alpha.y_1 + \beta.y_2) \in \mathbb{R}^2$

En outre : $2(\ \alpha.x_1 + \beta.x_2) - 3(\alpha.y_1 + \beta.y_2) = 2\alpha.x_1 + 2\beta.x_2 - 3\alpha.y_1 - 3\beta.y_2$

$= \alpha.(2x_1 - 3y_1) + \beta.(2x_2 - 3y_2)$. Or $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \in F$ donc $2x_1 - 3y_1 = 0 = 2x_2 - 3y_2$.

D'où $2(\ \alpha.x_1 + \beta.x_2) - 3(\alpha.y_1 + \beta.y_2) = \alpha.(0) + \beta.(0) = 0 + 0 = 0$.

Ainsi, $\alpha.(x_1; y_1) + \beta.(x_2; y_2) \in F$ donc F est stable par combinaison linéaire et par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice

1- Montrer que $F = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 : -4x + 5y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^2$
2- Montrer que $G = \{(x ; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 4z = 0\}$ est un espace vectoriel réel
3- Montrer que $H = \{(x ; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0 \; et \; y - 2z = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

3.2 Intersection et somme de deux sous espaces vectoriels

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. On pose

$F \cap G = \{\vec{u} \in E : \vec{u} \in F \; et \; \vec{u} \in G\}$ et $F + G = \{\vec{w} \in E \; : \; \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G \quad : \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\}$

3.2.1 Propriété et définition

- $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E appelé intersection des sous espaces vectoriels F et G.
- $F + G$ est un sous espace vectoriel de E appelé somme des sous espaces vectoriels F et G
- On dit que E est la **somme directe de** F et G ou encore que F et G sont **supplémentaires** dans E et on note $E = F \oplus G$, lorsque $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Dans ce cas, tout vecteur de E se décompose **de manière unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

3.2.2 Propriétés

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E (E de dimension finie).

- F; $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi de dimensions finies.
- $\dim F \leq \dim E$. Si de plus $\dim F = \dim E$, alors $E = F$
- $\dim(F + G) = \dim F + dimG - \dim(F \cap G)$ (formule de **Grassmann)**
- $[E = F \oplus G] \Leftrightarrow [\; F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim \; F + \dim \; G = \dim \; E \;]$
- $[E = F \oplus G]$ si et seulement s'il existe une base de E formée des vecteurs de F et de G.

3.2.3 Exercice d'application

1) $F = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\}$ et G $= \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$
   a- Justifier que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer une base de chacune d'elles.
   b- Déterminer $F \cap G$
   c- Déduire que $\mathbb{R}^2$ est la somme directe de F et de G. (plusieurs méthodes)
2) $F = \{(x ; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x ; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x - y = 0 \; et \; x + z = 0\}$.

Vérifier si tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

3.3 Réunion de deux sous espaces vectoriels

3.3.1 Remarque

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, alors $F \cup G$ n'est pas forcément un sous espace vectoriel de E

3.3.2 Contre-exemple :

$F = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\}$ et G $= \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

$3 \in \mathbb{R}$ d'où $(3;3) \in \mathbb{R}^2$ et de plus, $-3 + 3 = 0$. Ainsi, $(3\,;3) \in F$ donc $(3\,;3) \in F \cup G$.

$-2; 1 \in \mathbb{R}$ d'où $(-2\,;1) \in \mathbb{R}^2$ et de plus, $-2 + 2(1) = 0$. Ainsi, $(-2\,;1) \in G$ donc $(-2\,;1) \in F \cup G$.

$(3\,;3); (-2\,;1) \in F \cup G$ et $(3\,;3) + (-2\,;1) = (1\,;4) \in \mathbb{R}^2$.

$-1 + 4 = 3 \neq 0$ donc $(3;3) + (-2\,;1) \notin F$. $1 + 2(4) = 9 \neq 0$ donc $(3;3) + (-2\,;1) \notin G$.

Ainsi, $(3;3) + (-2\,;1) \notin F \cup G$ donc $F \cup G$ n'est pas un groupe et par conséquent, $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel.

3.3.3 Propriété

Plus généralement, si F et G sont deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, alors les seuls cas où $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E sont les deux cas suivants :

- $F \subset G$ et dans ce cas, $F \cup G = G$ qui est déjà un sous espace vectoriel de E.
- $G \subset F$ et dans ce cas, $F \cup G = F$ qui est déjà un sous espace vectoriel de E.

En effet :

Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors $\exists x \in F : x \notin G$ et $\exists y \in G : y \notin F$.

$x \in F$ donc $x \in F \cup G$. $y \in G$ donc $y \in F \cup G$.

Supposons que $x + y \in F \cup G$. Donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.

Si $x + y \in F$, puisque $-x \in F$ alors $(x + y) - x \in F$. Ainsi, $y \in F$ ce qui contredit le fait que $y \notin F$.

Si $x + y \in G$, puisque $-y \in G$ alors $(x + y) - y = x \in G$, ce qui contredit le fait que $x \notin G$.

En conclusion, si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.

Exercice

Soient E un espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$. Montrer que $F = \{a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \in E;\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est appelé sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On note souvent $F = < \vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w} >$

Chapitre 6 : APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES

LECON 1 : APPLICATIONS LINEAIRES

1. **Applications linéaires entre deux espaces vectoriels**

(a) Définition.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=f\left(\vec{u}\right)+f\left(\vec{v}\right)$

(ii) $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f\left(\lambda \vec{u}\right)=\lambda f\left(\vec{u}\right)$;

Autrement dit, f est une application linéaire si :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f\left(\alpha \vec{u}+\beta \vec{v}\right)=\alpha f\left(\vec{u}\right)+\beta f\left(\vec{v}\right).$$

Notation : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Exemples :

- L'application identique Id_E est une application linéaire.
- Montrer que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (-2x, y+3z) \end{array}$ est linéaire.

* Soient $\vec{u}(x,y,z), \vec{v}(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha(x,y,z)+\beta(a,b,c)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta a,\beta b,\beta c)$

$$=(\alpha x+\beta a, \alpha y+\beta b, \alpha z+\beta c)$$

Il s'en suit : $f\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right)=f\left(\alpha x+\beta a,\alpha y+\beta b,\alpha z+\beta c\right)$

$$\begin{aligned}
&=\left(-2\left(\alpha x+\beta a\right),\alpha y+\beta b+3\left(\alpha z+\beta c\right)\right)\\
&=\left(-2\alpha x-2\beta a,\alpha y+\beta b+3\alpha z+3\beta c\right)\\
&=\left(-2\alpha x,\alpha y+3\alpha z\right)+\left(-2\beta a,\beta b+3\beta c\right)\\
&=\alpha\left(-2x,y+3z\right)+\beta\left(-2a,b+3c\right)\\
&=\alpha f\left(\vec{u}\right)+\beta f\left(\vec{v}\right).
\end{aligned}$$

- L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ n'est pas linéaire. En effet : $f(1)=1$ et $f(2)=4$, mais $f(2)\neq 2\cdot f(1)$

(b) Vocabulaire et exemples

Soient E et F deux $\mathbb{R}$- espaces vectoriels.

- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée morphisme ou homomorphisme.
- Une application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme.
- Un morphisme bijectif est un isomorphisme
- Un endomorphisme bijectif est un automorphisme.

(c) Quelques propriétés sur les applications linéaires

Activité

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. $\overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{0_F}$ les vecteurs nuls respectifs de E et F. f une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que $\forall \vec{u} \in E, f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ et $f\left(\overrightarrow{-u}\right) = -f\left(\vec{u}\right)$.

2. En déduire que $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) - f\left(\vec{v}\right)$.

Clé 1 Soit $\vec{u} \in E$, on a : $\vec{u} + \overrightarrow{0_E} = \vec{u}$ et $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \overrightarrow{0_E}$

f étant une application linéaire, $f\left(\vec{u}\right) + f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = f\left(\vec{u}\right)$

donc, $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = -f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{u}\right) = \overrightarrow{0_F}$

De même, $f\left(\vec{u}\right) + f\left(-\vec{u}\right) = f\left(\overrightarrow{0_E}\right)$ et comme $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$, alors

$f\left(\vec{u}\right) + f\left(-\vec{u}\right) = \overrightarrow{0_F}$, par conséquent, $f\left(-\vec{u}\right) = -f\left(\vec{u}\right)$.

Clé 2 Par linéarité, le résultat en découle !

Moralité : Si f est une application linéaire de E dans F, alors $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E, f\left(-\vec{u}\right) = -f\left(\vec{u}\right)$ et $f\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) - f\left(\vec{v}\right)$.

Propriétés (admises)

Par une application linéaire f de E dans F:

- ✓ L'image de toute base de E est une base de F Lorsque f est bijective.
- ✓ L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
- ✓ L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sev de E.

(d) Caractérisation d'une application linéaire entre espaces vectoriels

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ –espaces vectoriels de dimensions finies.

Une application linéaire f de F vers F est entièrement déterminée par l'image des vecteur d'une base de E. Autrement dit, lorsqu'on connait les images par f des éléments d'une base de E, on dit que l'application linéaire f existe et est unique.

Exemple : Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

On pose $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$. Existe-t-il une application linéaire g telle que $g\left(\vec{u}\right)=\vec{i}$ et $g\left(\vec{v}\right)=-\vec{j}$?

Réponse : Oui, car $g\left(\vec{i}\right)=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ et $g\left(\vec{j}\right)=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

Exercice résolu

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'application $f:E\to E$ qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ associe le vecteur $f\left(\vec{u}\right)=(2x-y)\vec{i}+(-4x+2y)\vec{j}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $f\left(\vec{i}\right)$, $f\left(\vec{j}\right)$ et $f\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$.
3. Déterminer l'expression analytique de f.
4. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a}(-1;2)$ par f.

Une solution

1. Il suffit de montrer que f est linéaire.
2. On a : $\vec{i}(1,0)$ et $\vec{j}(0,1)$, donc $f\left(\vec{i}\right)=2\vec{i}-4\vec{j}$ et $f\left(\vec{j}\right)=-\vec{i}+2\vec{j}$.
   On en déduit que $f\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)=\vec{0}$.
3. Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}\in E$ et $\vec{u}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ un vecteur de E tel que $\vec{u}'=f\left(\vec{u}\right)$.
   $$\vec{u}'=f\left(\vec{u}\right)\Leftrightarrow x'\vec{i}+y'\vec{j}=(2x-y)\vec{i}+(-4x+2y)\vec{j}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2x-y\\y'=-4x+2y\end{cases}$$
4. Le vecteur $f\left(\vec{a}\right)$ a pour couple de coordonnées $(-4;8)$.

2. Noyau et image d'une application linéaire

(a) Présentation

Activité

On considère l'application
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$\vec{u}(x,y)\mapsto\vec{u}'(x',y')/\begin{cases}x'=2x-y\\y'=-4x+2y\end{cases}$$

1. Déterminer et caractériser l'ensemble $E_1=\left\{\vec{u}(x,y)\in\mathbb{R}^2/f\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\right\}$.
2. Déterminer et caractériser l'ensemble $E_2=\left\{f\left(\vec{u}\right)/\vec{u}(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Une solution

1. Soit $\vec{u}(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=0\\-4x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow 2x-y=0$

   E_1 est la droite vectorielle d'équation $2x-y=0.$

   $2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$, ceci étant, $(x,y)=(x,2x)=x(1,2)$

   Une base de E_1 est $\vec{e_1}=\vec{i}+2\vec{j}.$

2. Soit $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

   $f(\vec{u})=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=2x-y\\y'=-4x+2y\end{cases} \Leftrightarrow y'=-2x'$

   E_2 est la droite vectorielle d'équation $2x+y=0$; une base de E_2 est $\vec{e_2}=-\vec{i}+2\vec{j}.$

(b) Définitions, détermination d'une base et équation caractéristique.

Soient E et F deux espaces vectoriels ; f une application linéaire de E dans F.

- On appelle noyau de f, noté $\ker f$ ou N_f, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image par f est $\overrightarrow{0_F}$.

  $$\ker f=\left\{\vec{u}\in E\,/\,f(\vec{u})=\overrightarrow{0_F}\right\}.$$

- On appelle image de f, notée $\operatorname{Im} f$ le sous-ensemble $f(E)$ de F, image de E par f.

  $$\operatorname{Im} f=f(E)=\left\{\vec{v}\in F\,/\,\exists\vec{u}\in E,\ f(\vec{u})=\vec{v}\right\}.$$

Exercice résolu

E est un espace vectoriel dont une base est $(\vec{i},\vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{i})=\vec{i}-2\vec{j}$ et $f(\vec{j}+2\vec{i})=\overrightarrow{0_E}$.

1. Déterminer $\ker f$. En donner une base.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$. En donner une base.

(c) Propriétés

Soit $f:E\to F$ une application linéaire :

P1) $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels respectifs de E et F.

P2) f est injective $\Leftrightarrow$ $\ker f=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

P3) f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f=F$.

P4) Si f est injective, alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

P5) Si f est surjective, alors l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Démonstration : (bon exercice)

LECON 2 : MATRICES

2.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f\left(\vec{i}\right)=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $f\left(\vec{j}\right)=c\vec{i}+d\vec{j}$ où a,b,c et d sont quatre réels.
On appelle matrice de f dans la base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ le tableau noté M_f tel que

$$M_f=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Remarque : Toute matrice est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base disposées en colonnes.

2.2

A) Soit φ un endomorphisme de E rapporté à la base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ qui, à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}'=(x-2y)\vec{i}+(-3x+2y)\vec{j}$. On pose $\vec{e_1}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{e_2}=-3\vec{i}+4\vec{j}$.

1. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit g l'endomorphisme de E déterminé par $g\left(\vec{e_1}\right)=\vec{e_1}$ et $g\left(\vec{e_2}\right)=-\vec{e_2}$.
   (a) Montrer que $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ est une base de E.
   (b) Ecrire la matrice de g dans la base $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.
   (c) Déterminer la matrice de g dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

EXERCICE 4

E est un plan vectoriel de base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère deux réels a et b et φ l'endomorphisme de E défini par : $\varphi\left(\vec{i}\right)=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $\varphi\left(\vec{j}\right)=(1-a)\vec{i}+(1-b)\vec{j}$.

1. Donner la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. A quelle condition sur les réels a et b a-t-on φ bijective ?
3. On suppose que $a=b=\frac{1}{2}$. Déterminer $\ker\varphi$ et $Im\varphi$. En préciser les bases.
4. Calculer la matrice de $\varphi\circ\varphi-2\varphi+id$.

(b) Définitions, détermination d'une base et équation caractéristique.

Soient E et F deux espaces vectoriels ; f une application linéaire de E dans F.

- On appelle noyau de f, noté $\ker f$ ou N_f, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image par f est $\overrightarrow{0_F}$.

$$\ker f = \left\{\vec{u} \in E / f\left(\vec{u}\right) = \overrightarrow{0_F}\right\}.$$

- On appelle image de f, notée $\operatorname{Im} f$ le sous-ensemble $f\left(E\right)$ de F, image de E par f.

$$\operatorname{Im} f = \left\{\vec{v} \in F / \exists \vec{u} \in E, f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}\right\}.$$

Exercice résolu

E est un espace vectoriel dont une base est $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f\left(\vec{i}\right) = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $f\left(\vec{j} + 2\vec{i}\right) = \overrightarrow{0_E}$.

1. Déterminer $\ker f$. En donner une base.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$. En donner une base.

(c) Propriétés

Soit $f : E \to F$ une application linéaire :

P1) $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels respectifs de E et F.

P2) f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

P3) f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Démonstration : (bon exercice)

Remarque : f est bijective $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ker\ f = \{\vec{0}_E\}}$ et $\boldsymbol{Im\ f = F}$

(e) Relation entre les dimensions de $\boldsymbol{Kerf}$ et de $\boldsymbol{Im\ f}$

Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F tous de dimensions finies, alors $Ker\ f$ et $Im\ f$ sont aussi de dimensions finies et on a

$$\dim Ker\ f + \dim Im\ f = \dim E$$

Application :

f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F. On suppose que E et F sont de même dimension finie E.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Supposons que f est injective et montrons qu'elle est surjective.

f étant injective, alors $Ker\ f = \{\vec{0}\}$. Puisque $\dim Ker\ f + \dim Im\ f = \dim E$, alors $0 + \dim Imf = dim\ E$. Donc $\dim Im\ f = \dim F$ et puisque $Im\ f$ est un sous-espace vectoriel de F, alors $Im\ f = F$ et par suite, f est surjective.

Supposons que f est surjective et montrons qu'elle est injective.

f étant surjective, alors $Im\, f = F$. Puisque $\dim Ker\, f + \dim Im\, f = \dim E$, alors $\dim Ker\, f + \dim F = \dim E$ Donc $\dim Ker\, f = 0$. Ainsi, $Ker\, f = \{\vec{0}\}$ et par suite, $f$est injective.

LECON 2 : MATRICES

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E tel que

$f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ où $a; b; c$ et d sont quatre réels. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ le tableau noté $M_{(f;\mathcal{B})}$ ou M_f tel que $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$(a \quad c)$ est la première ligne et $(b \quad d)$ est la deuxième

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la première colonne et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est la deuxième.

Le tableau $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comporte donc deux lignes et deux colonnes. Une matrice est dite **carrée** si elle comporte autant de lignes que de colonnes. Dans ce cas, ce nombre de ligne est appelé **ordre** de la matrice.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : Toute matrice est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base disposées en colonnes.

Exemple : f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

- Si $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ alors $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
- Si $M_g = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, alors $g(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ et g$(\vec{\jmath}) = 8\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
- $id(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$ et $id(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$. Donc $M_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: cette matrice comporte les 1 sur la diagonale principale et les 0 ailleurs.

Exercice d'application : changement de base

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ de E, $\vec{e_1}(-1; 2)$, $\vec{e_2}(1; -1)$ et $M_{(f;\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est une base de E
2) Ecrire $\vec{\imath}$ puis $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$
3) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

Solution

1) Vérifions que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est une base de E
   $\text{dét}(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}) = (-1)(-1) - 2(1) = -1 \neq 0$. Donc $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est une base de E.
2) Ecrivons $\vec{\imath}$ puis $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ $\vec{e_1}(-1; 2)$et $\vec{e_2}(1; -1)$. Donc $\begin{cases} \vec{e_1} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ \vec{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$.

Donc $\vec{\jmath} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{\imath} = \vec{e_2} + \vec{\jmath} = \vec{e_2} + \vec{e_1} + \vec{e_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$

3) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

Il suffit de déterminer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$

$M_{(f;\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$f(\overrightarrow{e_1}) = f(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = -f(\vec{\imath}) + 2f(\vec{\jmath})$ car f est linéaire. $f(\overrightarrow{e_2}) = f(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath})$ Ainsi,

$f(\overrightarrow{e_1}) = -(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) + 2(-3\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -8\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = -8(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) - 2(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = -10\overrightarrow{e_1} - 18\overrightarrow{e_2}$

$f(\overrightarrow{e_2}) = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - (-3\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = 5(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) + 3(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = 8\overrightarrow{e_1} + 13\overrightarrow{e_2}$.

$f(\overrightarrow{e_1}) = -10\overrightarrow{e_1} - 18\overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = 8\overrightarrow{e_1} + 13\overrightarrow{e_2}$. Donc $M_{(f;\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices, et k un nombre réel.

a) Somme de deux matrices

La somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par $A + B = \begin{pmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix}$

La commutativité de + dans $\mathbb{R}$ implique la commutativité de + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La somme de deux matrices est possible si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

b) Produit d'une matrice par un réel

Le produit de la matrice A par le nombre réel k est la matrice notée kA définie par $kA = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$

c) Produit de deux matrices

Le produit de la matrice B par la matrice A est la matrice notée $A \times B$ définie par

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

1ère ligne 1ère colonne : $aa' + cb'$ 1ère ligne 2ième colonne : $ac' + cd'$

2ième ligne 1ère colonne : $ba' + db'$ 2ième ligne 2ième colonne : $bc' + dd'$

Le produit de deux matrices est possible si le nombre de lignes de la première est égal au nombre de colonnes de la deuxième.

d) Déterminant d'une matrice carrée d'ordre deux.

Le déterminant de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est le nombre réel noté $dét(A)$ défini par

$$dét(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+6 & -3-6 \\ -1+8 & 4+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

- $4\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4(1) & 4(-2)\\ 4(3) & 4(5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -8\\ 12 & 20\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6 & -6\\ 8 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 6 - 3\times 8 & 2(-6) - 3\times 5\\ -1\times 6 + 4\times 8 & -1\times -6 + 4\times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12 & -27\\ 26 & 26\end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix}6 & -6\\ 8 & 5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12+6 & -18-24\\ 16-5 & -24+20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18 & -42\\ 11 & -4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6 & -6\\ 8 & 5\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}6 & -6\\ 8 & 5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$: le produit des matrices n'est pas commutatif.

- $dét\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{vmatrix} = 2(4) - (-1)(-3) = 8 - 3 = 5$

Remarques :

- $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$: la matrice $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour l'addition des matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: elle est appelée matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $1 \times \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$: la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la multiplication des matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: elle est appelée matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et est souvent notée I_2.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un espace vectoriel réel.

1.3 Inverse d'une matrice carrée d'ordre deux

a) Activité d'apprentissage

1) Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$ avec $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Que constatez-vous ?

2) maintenant, on pose $A = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ et on suppose que $dét(A) \neq 0$. Calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$ avec $B = \frac{1}{dét(A)}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$. Que constatez-vous ?

Solution

1) Calculons et $A \times B$ et $B \times A$

$$A \times B = \begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 4\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-3 & 6-6\\ -2+2 & -3+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B \times A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-3 & -12+12\\ 1-1 & -3+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On constate que $A \times B = B \times A = I_2$.

2) Calculons et $A \times B$ et $B \times A$

$dét(A) = \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$. Donc $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc}\\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$.

Ainsi, $A \times B = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc}\\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ac+ac}{ad-bc}\\ \frac{bd-bd}{ad-bc} & \frac{-bc+da}{ad-bc}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$B\times A=\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc}\\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{da-cb}{ad-bc} & \frac{dc-cd}{ad-bc}\\ \frac{-ba+ba}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On constate que $A\times B=B\times A=I_2$

b) Définition

on dit qu'une matrice A carrée d'ordre deux est inversible lorsqu'il existe une autre matrice B telle que $A\times B$ et $B\times A=I_2$. Dans ce cas, la matrice B est appelée inverse de A est est notée A^{-1}

c) Propriétés

- Une matrice carrée $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ d'ordre deux est inversible si et seulement si $d\acute{e}t(A)\neq 0$ et dans ce cas, l'inverse A^{-1} de A est définie par

$$A^{-1}=\frac{1}{d\acute{e}t(A)}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$

Exemples

$A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ On a : $d\acute{e}t(A)=\begin{vmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6-6=0$. Donc A n'est pas inversible.

$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ On a : $d\acute{e}t(A)=\begin{vmatrix}3 & -5\\ -2 & 4\end{vmatrix}=12-10=2$. $d\acute{e}t(A)\neq 0$ donc A est inversible et

$A^{-1}=\frac{1}{d\acute{e}t(A)}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2}\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Vérification : $\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2}\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5 & \frac{15}{2}-\frac{15}{2}\\ -4+4 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2}\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.4 Matrices et systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Considérons le système linéaire suivant : (S): $\begin{cases}ax+by=e\\ cx+dy=f\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ est vu comme une matrice ayant deux lignes et une colonne (matrice colonne).

En utilisant le procédé de la multiplication de deux matrices, on a $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$.

Ainsi, $(S)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$ ou encore $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$

Si A est inversible, alors $(S)\Leftrightarrow AX=B$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$\Leftrightarrow I_2X = A^{-1}B$ car $A^{-1}A = I_2$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$ car $I_2X = X$

Exercice d'application 1

1) Résoudre par combinaison linéaire le système suivant (S):$\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$
2) Retrouver les solutions précédentes en utilisant les matrices.

Solution :

1) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10y = 22 \\ -6x + 12y = -24 \end{cases}$. Ainsi, $2y = -2$ et $y = -1$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 20y = 44 \\ -10x + 20y = -40 \end{cases}$. Ainsi, $2x = 4$ et $x = 2$. L'ensemble solution est $\{(2; -1)\}$
2) (S):$\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$.

   On a vu précédemment que $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

   $(S) \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(11) + \frac{5}{2}(-8) \\ 1(11) + \frac{3}{2}(-8) \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow x = 2$ et $y = -1$. On retrouve l'ensemble solution $\{(2; -1)\}$

Exercice d'application 2

1) Résoudre par combinaison linéaire le système suivant dans $\mathbb{R}^2$ (S):$\begin{cases} 3x - 5y = \alpha \\ -2x + 4y = \beta \end{cases}$
2) Déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

solution

1) Résolution du système :
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10y = 2\alpha \\ -6x + 12y = 3\beta \end{cases}$. Ainsi, $2y = 2\alpha + 3\beta$ et $y = \alpha + \frac{3}{2}\beta$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 20y = 4\alpha \\ -10x + 20y = 5\beta \end{cases}$. Ainsi, $2x = 4\alpha + 5\beta$ et $x = 2\alpha + \frac{5}{2}\beta$.
   L'ensemble solution est $\{\left(2\alpha + \frac{5}{2}\beta; \alpha + \frac{3}{2}\beta\right)\}$
2) Déduction de l'inverse.

(S):$\begin{cases} 3x - 5y = \alpha \\ -2x + 4y = \beta \end{cases}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$(S) \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Or $\begin{pmatrix} 2\alpha + \frac{5}{2}\beta \\ 1\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Exercice

1) En utilisant les matrices, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 5x - 8y = 4 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$

2) En utilisant une résolution d'un système, déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

1.5 Opérations sur les applications linéaires et matrices

a) Activité d'apprentissage

1) Soient f et g deux applications linéaires d'un même espace vectoriel E vers un même espace vectoriel F et k un nombre réel.
   On pose $(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$ et $(k.f)(\vec{u}) = k.f(\vec{u})$ pour $\vec{u}$ dans E
   Justifier que $f+g$ et $k.f$ sont des applications linéaires.
2) On suppose maintenant que g est définie de F vers un espace vectoriel G.
   On pose $[g \circ f](\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$ pour $\vec{u}$ dans E. Justifier que $g \circ f$ une application linéaire.

Solution

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E;\ a, b \in \mathbb{R}$

- $(f+g)(a\vec{u}+b\vec{v}) = f(a\vec{u}+b\vec{v}) + g(a\vec{u}+b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) + ag(\vec{u}) + bg(\vec{v})$
  $= a[f(\vec{u}) + g(\vec{u})] + b[f(\vec{v}) + g(\vec{v})] = a[f+g](\vec{u}) + b[f+g](\vec{v})$

- $(k.f)(a\vec{u}+b\vec{v}) = k.f(a\vec{u}+b\vec{v}) = k.[af(\vec{u}) + bf(\vec{v})] = (ka).f(\vec{u}) + (kb).f(\vec{v}) = a[k.f(\vec{u})] + b[k.f(\vec{v})]$
- $[g \circ f](a\vec{u}+b\vec{v}) = g[f(a\vec{u}+b\vec{v})] = g[af(\vec{u}) + bf(\vec{v})]$ car f est linéaire
  $= ag[f(\vec{u})] + bg[f(\vec{v})]$ car g est linéaire
  $= a[g \circ f](\vec{u}) + b[g \circ f](\vec{v})$

b) Définition

Soient f et g deux applications linéaires d'un même espace vectoriel E vers un même espace vectoriel F et k un nombre réel.

- On appelle somme de f et g l'application linéaire notée $f+g$ définie pour $\vec{u}$ dans E par $(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$.
- On appelle produit de f par k l'application linéaire notée $k.f$ définie pour $\vec{u}$ dans E Par $(k.f)(\vec{u}) = k.f(\vec{u})$.

- Si g est définie de F vers un espace vectoriel G, alors on appelle composée de f par g l'application linéaire notée $g \circ f$ définie pour $\vec{u}$ dans E par $[g \circ f](\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$.

c) Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit d'une application linéaire par un réel et de la composée de deux applications linéaires

Activité d'apprentissage

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soient $f$et g deux endomorphismes de E et k un réel tels que $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

1) Déterminer $[f+g](\vec{\imath})$ et $[f+g](\vec{\jmath})$ puis écrire une relation entre M_{f+g}; M_f et M_g
2) Chercher $M_{(k.f)}$
3) Calculer $M_g \times M_f$ et déterminer $M_{g \circ f}$

Propriétés

Soient E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}; \vec{\jmath})$; $f$et g deux endomorphismes de E et k un réel.

$M_{f+g} = M_f + M_g$; $M_{(k.f)} = k.M_f$ et $M_{g\circ f} = M_g \times M_f$

Exemples :

Si $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$, alors :

- $M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $M_{(5.f)} = 5.M_f = 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$
- $M_{g\circ f} = M_g \times M_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) Matrice de la réciproque d'un automorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 2.

f est un automorphisme si et seulement si elle est bijective, ce qui équivaut à dire qu'il existe une application g telle que $g \circ f = f \circ g = id_E$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

$g \circ f = id_E \Leftrightarrow M_{g\circ f} = M_{id_E}$

$\Leftrightarrow M_g \times M_f = I_2$

$\Leftrightarrow M_f$ est inversible et $(M_f)^{-1} = M_g = M_{f^{-1}}$

Propriété

Soient E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f.

f est un automorphisme si et seulement si $dét(M_f) \neq 0$ et dans ce cas, $M_{f^{-1}} = \frac{1}{dét(M_f)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Exemple :

Un endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a : $dét\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

Donc f est bijective et $M_{f^{-1}} = \frac{1}{dét(M_f)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1

$\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est une base d'un espace vectoriel E, $\vec{e_1}(1;-2)$; $\vec{e_2}(-2;1)$ et $M_{(f;\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f.

1) Déterminer $Ker\ f$ et $Im\ f$ puis une base de chacune d'elles.
2) f est-elle un isomorphisme ?
3) Vérifier que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de E
4) Justifier que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Ker\ f$ et d'un vecteur de $Im\ f$.
5) Déterminer $M_{(f;\mathcal{B}')}$

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$

1) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Déduire que $Ker\ f$, $Inv\ f$ et $Opp\ f$ sont des sous espaces-vectoriels de E avec $Inv\ f = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $Opp\ f = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
3) Maintenant, $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est une base de E et $M_{(f;\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
   4) Démontrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$
   5) Chercher deux vecteurs tous non nuls $\overrightarrow{e_1}$ de E_{λ_1} et $\overrightarrow{e_2}$ de E_{λ_2} ayant pour abscisse 1.
   6) Vérifier que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$ est une base de E
   7) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
   8) Comparer $dét\ M_{(f;\mathcal{B})}$ et $dét\ M_{(f;\mathcal{B}')}$

MODULE 21 : RELATION ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE 4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES.

Motivation :

Prérequis :

Leçon 1 : ENSEMBLE DE DEFINITION, RESTRICTION ET PROLONGEMENT D'UNE FONCTION.

Objectifs : A la fin de cette leçon, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ;
- ✓ Déterminer la restriction d'une fonction numérique sur un intervalle ;
- ✓ Déterminer le prolongement d'une fonction numérique.

I. Situation de vie :

II. Activité d'apprentissage :

Soit (C) un cercle de centre O et (D) une droite ne passant pas par O. A tout point M de (C), on associe, lorsqu'il existe, le point M'de (D) tel que O, M et M' soient alignés.

On désigne par A et B les points d'intersection de (C) avec la droite parallèle à (D) passant par O.

Soit les correspondances $\begin{array}{c} f:(C)\to(D) \\ M\mapsto M' \end{array}$ et $\begin{array}{c} g:(C)\setminus\{A,B\}\to(D) \\ M\mapsto M' \end{array}$.

Déterminer pour chacune des correspondances ci-dessus, l'ensemble des points qui ont une image par f, par g.

III. Résumé

1- Ensemble de définition

Soit E et F deux ensembles non vides de ℝ.

Définition 1 :

- ✓ **Une fonction de E vers F** est une correspondance de E dans F telle qu'à chaque élément de E, on associe au plus un élément de F.
- ✓ **Une application de E vers F** est une correspondance de E dans F telle qu'à chaque élément de E, on associe exactement un élément de F.

Exemple : De l'activité ci-dessus présentée, identifier laquelle des correspondances est une fonction, une application.

NB : Toute application est une fonction, mais la réciproque est fausse.

Définition 2 :

L'ensemble de définition d'une fonction f de E vers F est l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f dans F. On le note D_f. $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\,existe\}$.

Méthode :

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f, on peut suivre le procédé suivant :

- Si f est une fonction polynôme, alors $D_f = \mathbb{R}$;
- Si f est une fonction contenant un quotient, on doit exclure de $\mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs qui annulent le dénominateur de ce quotient ;
- Si f est une fonction contenant un radical racine carrée, alors D_f est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la quantité sous la racine carrée est positive ou nulle ;

<u>Exemples :</u> Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

(a) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x-2} \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{|x|-2} \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{4x^2+x+1} \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} i:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\dfrac{x^4-1}{x^2-1} \end{array}$ (e) $\begin{array}{l} j:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\dfrac{x-1}{7x^2+1} \end{array}$ (f) $\begin{array}{l} k:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 4x^2+x-1 \end{array}$.

2- Restriction, prolongement d'une fonction

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Alors, $D_f =]-\infty;1]\cup[1;+\infty[$.

On pose $I=]-\infty;1]$ et on considère la fonction $\begin{array}{l} g:I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\sqrt{x^2-1} \end{array}$.

g est la restriction de f à I et f est le prolongement de g à D_f.

<u>Définition :</u>

Soit f une fonction définie de E vers F et E' une partie de E $(E'\subset E)$.

✓ On appelle **<u>restriction de f à E'</u>** la fonction $\begin{array}{l} g:E'\to F \\ x\mapsto f(x) \end{array}$;

✓ f est alors appelé <u>prolongement de g à E</u>.

3- <u>Composition de fonctions.</u>

f et g sont définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$. On a $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$g[f(x)]$ existe ssi $f(x)\in D_g$

ssi $x^2+1 \neq 3$

ssi $x^2 \neq 2$

ssi $x^2 \neq \pm\sqrt{2}$

Donc $D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$. $g[f(x)]$ **est l'image de $f(x)$ par g.**

$\forall x\in D_{g\circ f}$, $g\circ f(x)=g[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)-3}=\dfrac{1}{x^2-2}$.

On note $\begin{array}{l} E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G \\ x\mapsto f(x)\mapsto g[f(x)] \end{array}$

$\boxed{g\circ f}$

<u>NB</u> : En général, $g\circ f \neq f\circ g$.

4- Exercices d'application

<u>Application 1</u> : Parmi les fonctions ci-dessous, préciser celles qui sont des applications.

(a) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |x| \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-\sqrt{x} \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} h:[2;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \sqrt{x-2} \end{array}$ (d) $\begin{array}{l} k:[0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{1}{x-1} \end{array}$.

<u>Application 2</u> : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=|x-1|+2|3-x|$. Déterminer l'application affine qui a même restriction que f sur $[1;3]$.

<u>Application 3</u> : On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

(a) Déterminer D_f et D_g.

(b) Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

<u>Application 4</u> : Soit a et b deux nombres réels. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=-2x+3$ et $g(x)=ax+b$.

(a) Pour tout nombre réel x, calculer $g\circ f(x)$ et $f\circ g(x)$.

(b) Déterminer un couple $(a;b)$ de nombres réels tels que $g\circ f = f\circ g$.

5- Jeu bilingue :

<u>Homework</u> : At home, you will do the exercises .... pages ...... to .....

<u>Leçon 2</u> : OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

<u>Objectifs</u> : A la fin de cette leçon, l'apprenant devra être capable à partir de deux fonctions f et g données, de:

- ✓ Définir chacune des fonctions $f+g; f\times g; \dfrac{f}{g}; \dfrac{1}{f}; \sqrt{f}; f^n$.

I- Situation de vie :

II- Activité d'apprentissage :

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$.

- ✓ Déterminer D_f et D_g.
- ✓ Pour tout élément $x\in\mathbb{R}$, on considère la fonction s définie par $s(x)=f(x)+g(x)$. Quels sont les réels x appartenant à la fois à D_f et à D_g ?

III- Résumé

1- Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et sur D_g. On retiendra les résultats consignés dans le tableau suivant :

Fonction	Ensemble de définition	Expression

$f+g$	$D_f \cap D_g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$f\times g$	$D_f \cap D_g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
$\frac{f}{g}$	$D_f \cap D_g \setminus \{x\in\mathbb{R}, g(x)=0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Remarques : Soit f une fonction numérique et k un nombre réel. On a :

- ✓ $D_{kf}=D_f$ et $(kf)(x)=k\times f(x)$;
- ✓ $D_{f^n}=D_f$ et $(f^n)(x)=[f(x)]^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;
- ✓ $D_{\frac{1}{f}}=D_f\setminus\{x\in\mathbb{R}/ f(x)=0\}$ et $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$;
- ✓ $D_{\sqrt{f}}=D_f\setminus\{x\in\mathbb{R}/ f(x)\prec 0\}$ et $(\sqrt{f})(x)=\sqrt{f(x)}$.

2- **Exercice d'application et jeu bilingue :**

Either the numerical functions f and g defined on $\mathbb{R}$ by : $f(x)=x+\sqrt{x}$ and $g(x)=x-\sqrt{|x|}$.

(a) Determine D_f and D_g.

(b) Determine D_{f+g} and give a simple expression of $(f+g)(x)$.

3- **Homework :** Faire les exercices .... des pages .... à ....

Leçon 3 : FONCTIONS ASSOCIEES A UNE FONCTION DONNEE

Objectifs : A la fin de cette leçon, l'apprenant devra être capable à partir de la courbe d'une fonction f de représenter les fonctions: $x\mapsto f(x-a)$, $x\mapsto f(x)+b$, $x\mapsto f(x-a)+b$, $x\mapsto f(-x)$, $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto |f(x)|$ et $x\mapsto f(|x|)$

IV- Situation de vie :

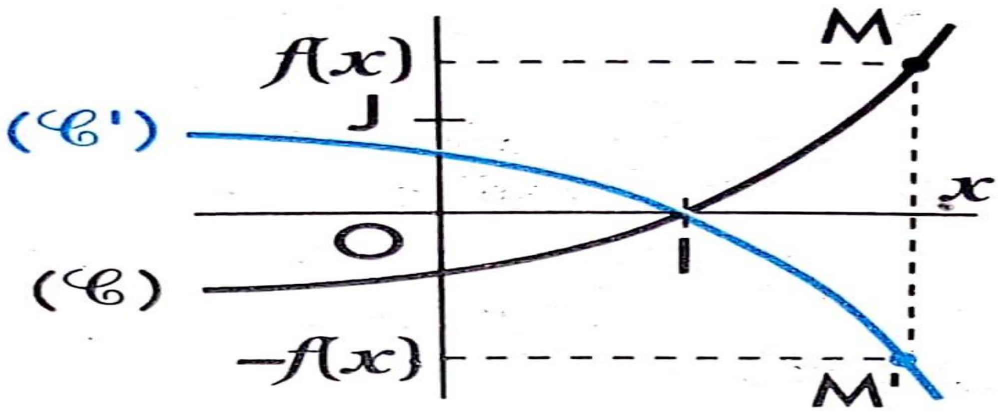
V- Activité d'apprentissage :

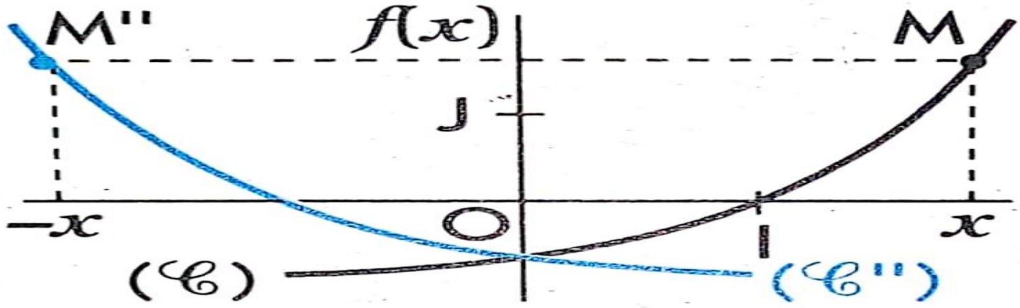
VI- Résumé

1- Fonctions $x\mapsto f(-x)$ et $x\mapsto -f(x)$

Soit x un élément de D_f et M le point de (C) d'abscisse x.

- ✓ Le point $M'\binom{x}{-f(x)}$ est le symétrique de $M\binom{x}{f(x)}$ par rapport à (OI). Donc, la courbe représentative (C') de la fonction $x\mapsto -f(x)$ se déduit de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
- ✓ Le point $M''\binom{-x}{f(x)}$ est le symétrique de $M\binom{x}{f(x)}$ par rapport à (OJ). Or $f(-(-x))=f(x)$; donc M'' appartient à la courbe représentative (C'') de la fonction. Donc, (C'') se déduit de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).





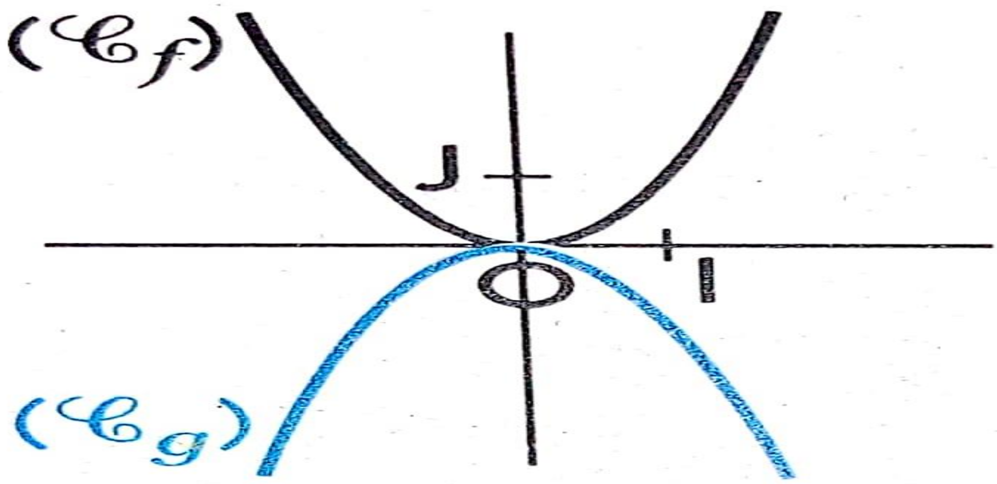
<u>Propriétés :</u>

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

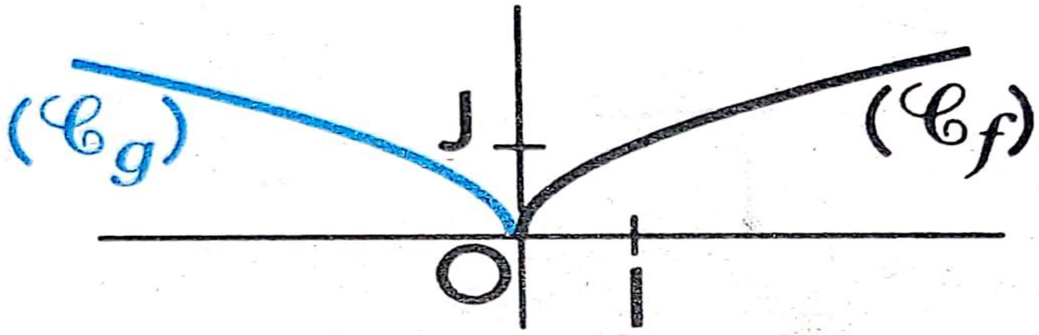
- ✓ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
- ✓ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

<u>Exemples :</u>

- Soit à tracer la courbe représentative (C_g) de la fonction g définie par $g(x) = -x^2$.
  On trace d'abord la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
  (C_g) se déduit de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).



- Soit à tracer la courbe représentative (C_g) de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{-x}$.
  On trace d'abord la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
  (C_g) se déduit de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



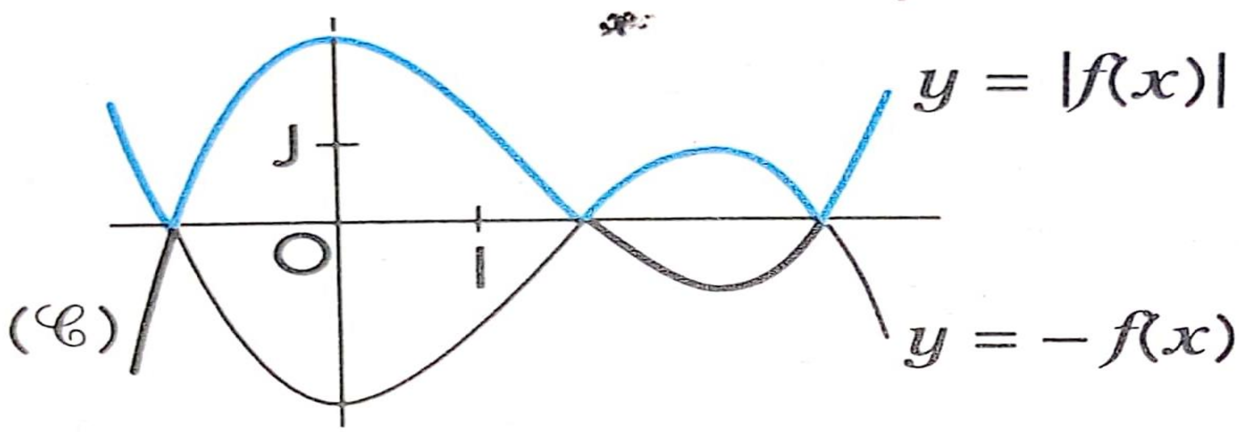
<u>Remarque :</u>

Si (C_g) est la courbe représentative de $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$ alors $(C_g) = S_O\left((C_f)\right)$, où S_O est la symétrie de centre O.

2- Fonction $x \mapsto |f(x)|$

Pour tout x un élément de D_f, on a :$|f(x)| = \begin{cases} f(x), si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$.

Donc, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est la réunion des parties des courbes d'équation respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI).

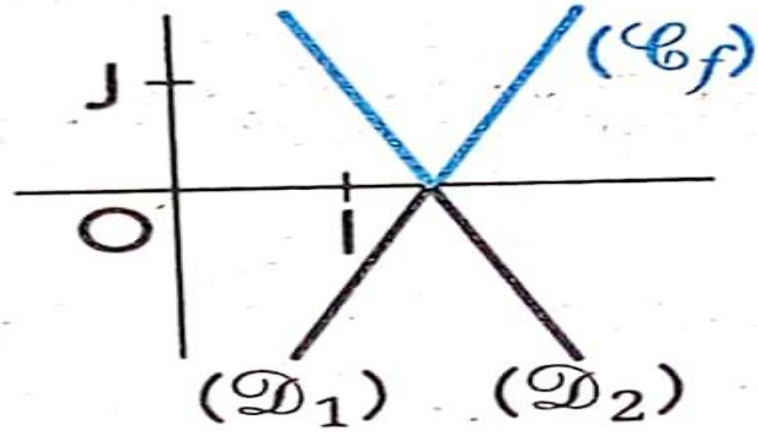


<u>Exemple :</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = |2x - 3|$.

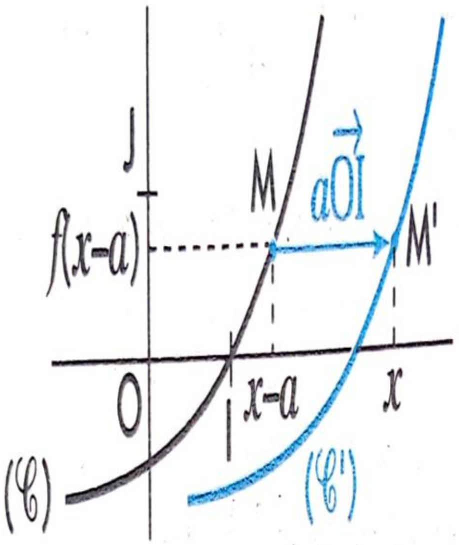
On trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x - 3$ et $y = -2x + 3$.

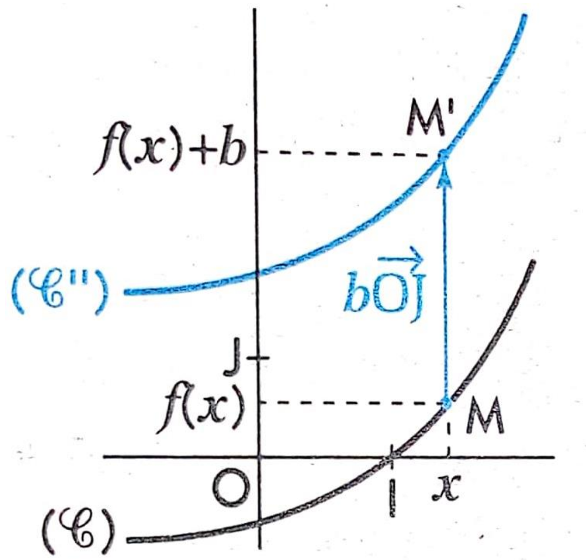
La représentation graphique (C_f) de la fonction f est la réuniondes deux demi-droites situées au-dessus de (OI).



3- Fonctions $x \mapsto f(x-a)$ et $x \mapsto f(x)+b$

- ✓ Soit x un nombre réel, tel que $x-a$ appartient à D_f et M le point de (C) d'abscisse $x-a$.
  Le point $M'\begin{pmatrix} x \\ f(x-a) \end{pmatrix}$ est l'image de $M\begin{pmatrix} x-a \\ f(x-a) \end{pmatrix}$ par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.
  Donc, la courbe représentative (C') de la fonction $x \mapsto f(x-a)$ se déduit de (C) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.
- ✓ Soit x unélément de D_f et M le point de (C) d'abscisse x.
  Le point $M''\begin{pmatrix} x \\ f(x)+b \end{pmatrix}$ est l'image de $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.
  Donc, la courbe représentative (C'') de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ se déduit de (C) par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.



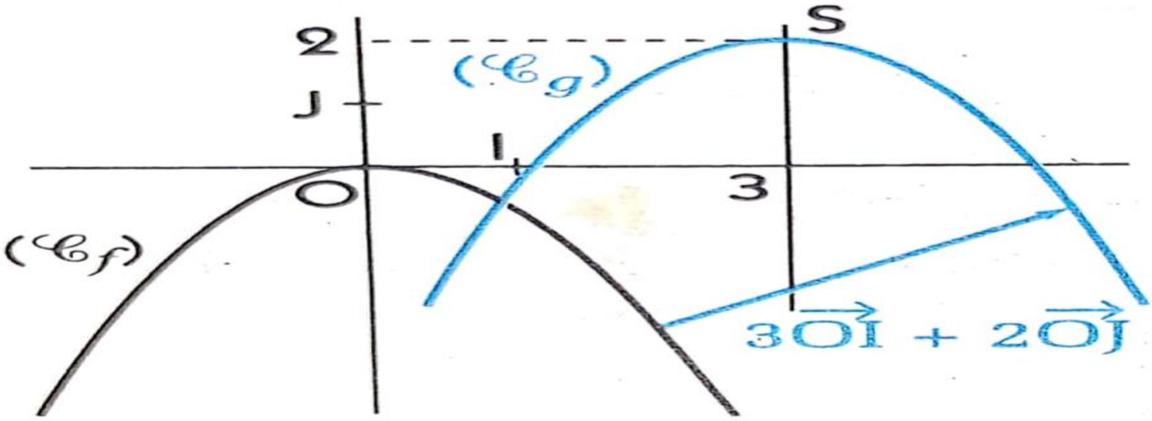


__Propriétés :__

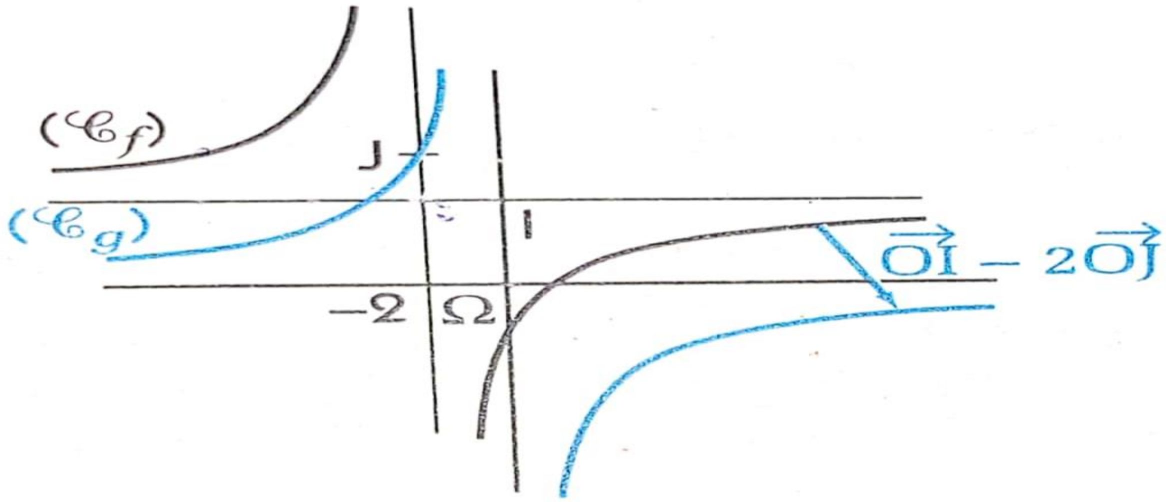
> La courbe de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ se déduit de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$.

__Exemples :__

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 4$.
  On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -\frac{2}{3}(x-3)^2 + 2$.
  On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$.
  On désigne par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.
  $(C_g) = t_{\vec{u}}\left((C_f)\right)$, où $\vec{u}\binom{3}{2}$. (C_g) est la parabole de sommet $S\binom{3}{2}$ et d'axe la droite d'équation $x = 2$.



- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{-x+1}$.
  On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, g(x) = -2 + \frac{-3}{x-1}$.
  On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{3}{x}$.
  On désigne par (C_f) et (C_g) les courbes representatives respectives des fonctions f et g.
  $(C_g) = t_{\vec{v}}\left((C_f)\right)$, où $\vec{v}\binom{1}{-2}$. (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\binom{1}{-2}$.



Leçon 4 : PARITE, PERIODICITE ET ELEMENTS DE SYMETRIE

Objectifs : A la fin de cette leçon, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Justifier qu'un point est centre de symétrie d'une courbe ;
- ✓ Justifier qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie d'une courbe ;
- ✓ Justifier qu'une fonction est paire, impaire ou périodique.

VII- Situation de vie :

VIII- Activité d'apprentissage :

IX- Résumé

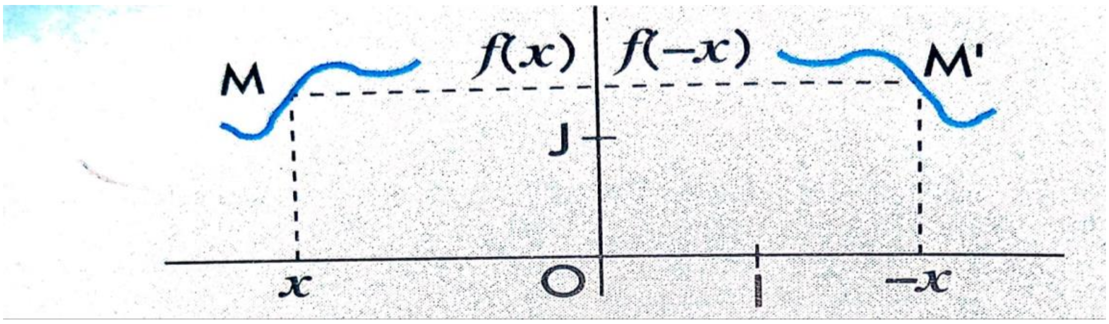
1- Parité et périodicité

(a) Fonctions paires

Définition :

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.



Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto k\ (k \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions paires.
- La fonction f, définie par $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$, est une fonction paire.

En effet, son ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$$

$\mathbb{R}$, on a : $= 3x^4 - 2x^2 + 1$

$= f(x)$

- La fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$, n'est pas une fonction paire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R} \backslash \{-3; 1\}$ n'est pas symétrique à zéro.

Remarque :

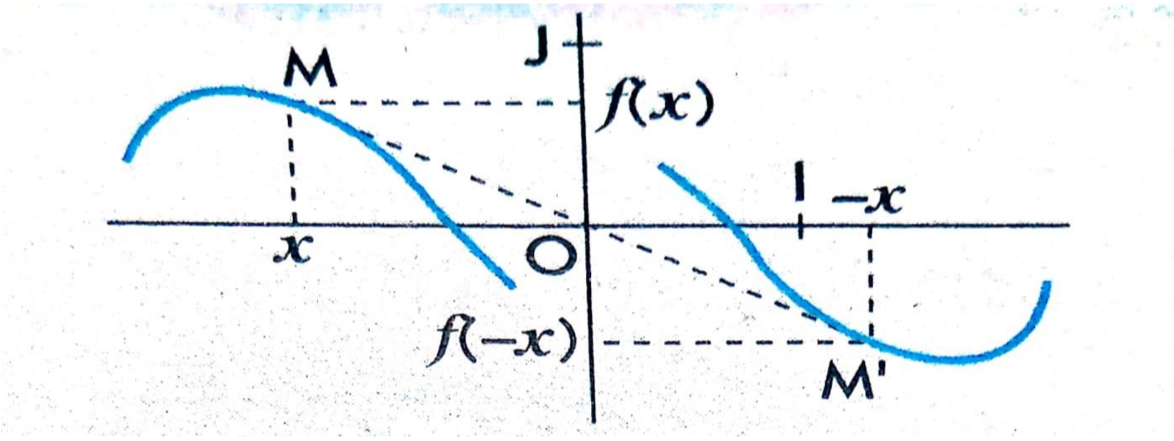
Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(b) Fonctions impaires

Définition :

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$.



Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \tan x$ sont des fonctions impaires.
- La fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+3)}$, est une fonction paire.

En effet, son ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x-3)(-x+3)}$$

$\mathbb{R}$, on a : $= -\dfrac{x}{(x-3)(x+3)}$

$= -f(x)$

- La fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$, n'est pas une fonction impaire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R} \backslash \{-3; 1\}$ n'est pas symétrique à zéro.

Remarque :

Lorsqu'une fonction $\boldsymbol{f}$, d'ensemble de définition $\boldsymbol{D_f}$, est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $\boldsymbol{D_f} \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine du repère.

(c) Fonction périodiques

<u>Définition :</u>

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et p un nombre réel non nul.

On dit que f est périodique, de période p, si pour tout x element de D_f, $x+p$ et $x-p$ appartiennent à D_f et $f(x+p)=f(x)$.

<u>Exemples :</u>

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π.
- La fonction tangente est périodique, de période π. Car pour tout x appartenant à l'ensemble de définition $D=\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ de la fonction tangente, $x-\pi$ et $x+\pi$ appartiennent à D et on a : $\tan(x+\pi)=tanx$.
- La fonction f définie par $f(x)=sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)$ est périodique, de période $\frac{2\pi}{3}$. Car pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x-\frac{2\pi}{3}$ et $x+\frac{2\pi}{3}$ appartiennet à $\mathbb{R}$ et $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{5}\right)=sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=f(x)$.

<u>Remarque :</u>

- ✓ *Si $\boldsymbol{p}$ est une période de $\boldsymbol{f}$, alors $\boldsymbol{kp}$ $(k \in \mathbb{Z}^*)$ est aussi une péride de f.*
- ✓ *Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition $\boldsymbol{D_f}$ est pérodique de période p, il suffit de l'étudier sur un enseble de la forme $\boldsymbol{D_f} \cap [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}[$. La courbe obtenue est ensuite complétée en utilisant les translations de vecteurs $\boldsymbol{p}\overrightarrow{\boldsymbol{OI}}$ et $-\boldsymbol{p}\overrightarrow{\boldsymbol{OI}}$.*

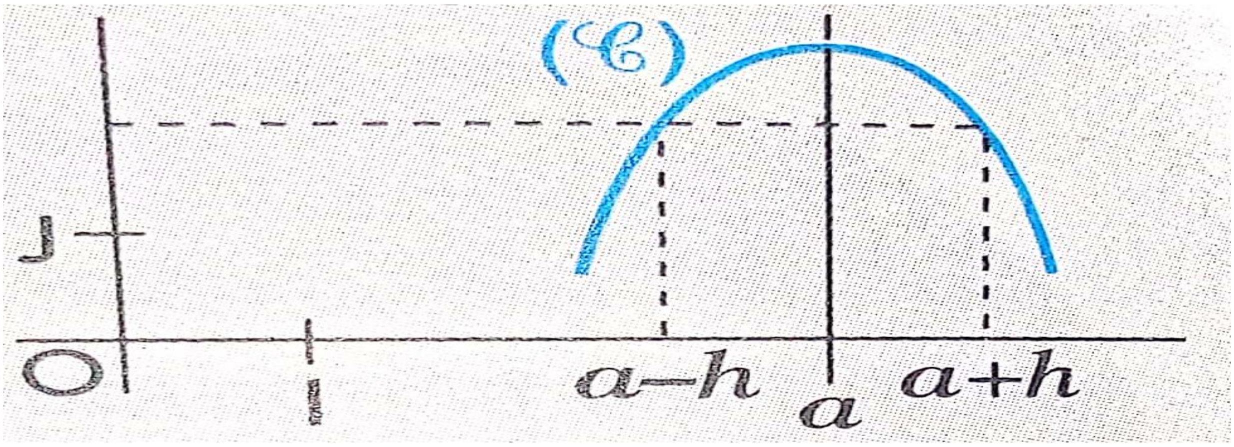
2- Eléments de symétrie

(a) Axe de symétrie

Méthode :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J). Pour de montrer que la droite $(\Delta): x=a$ est un axe de symétrie de (C), on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- ✓ Démontrer que dans le repère $(O',\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ avec $O'\binom{a}{0}$, (C) est la représentation graphique d'une fonction paire.
- ✓ Démontrer que pour tout nombre réel x tel que $a+x \in D_f$, on a : $a-x \in D_f$ et $f(a-x)=f(a+x)$.

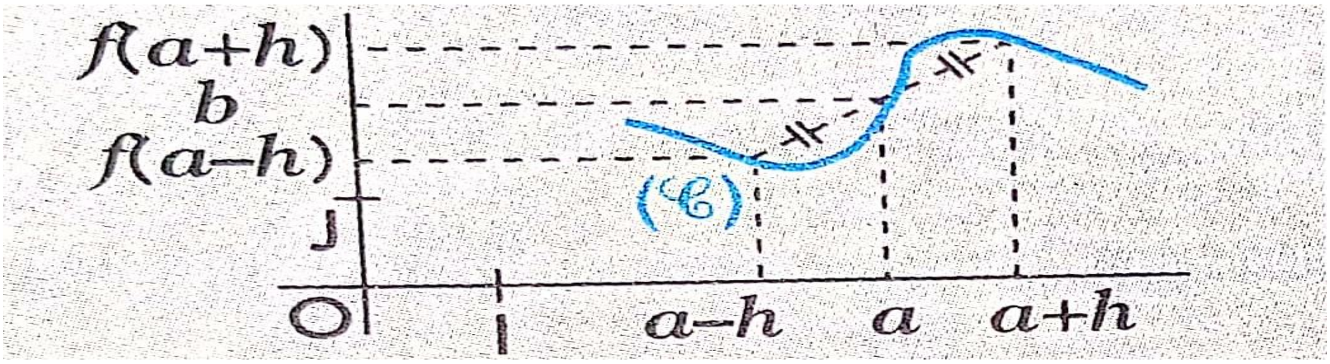


(b) Centre de symétrie

Méthode :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J). Pour de montrer que la droite $O'\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie de (C), on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- ✓ Démontrer que dans le repère $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, (C) est la représentation graphique d'une fonction impaire.
- ✓ Démontrer que pour tout nombre réel x tel que $a + x \in D_f$, on a : $a - x \in D_f$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.



MODULE 21 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Chapitre 8 : APPLICATIONS

Motivation : Une bonne partie des mathématiques concerne l'étude des relations. Celles-ci peuvent exister au sein d'un même ensemble mais plus souvent entre deux ensembles q'ils soient numériques ou non. sous condition, ces dernières peuvent être des applications. Elles servent dans une quantité innombrable de domaines et de circonstances.

Objectifs : A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

- Reconnaitre une application.
- Justifier qu'une application est injective, surjective, bijective.
- Déterminer la composée de deux applications.

0.1 Définition

Activité 1 : *Une classe de première C compte 8 élèves* $(E_1, E_2, ..., E_8)$ *dont les âges varient entre 17 et 20. Au derniers contrôle les élèves* E_2, E_5 *n'ont pas été évalués et on a obtenu les notes suivantes 2 4,8,9, 12 et 14. on note E l'ensemble des élèves de cette classes, F l'ensemble de leurs âges et G l'ensemble des notes obtenues par les élèves évalués.*

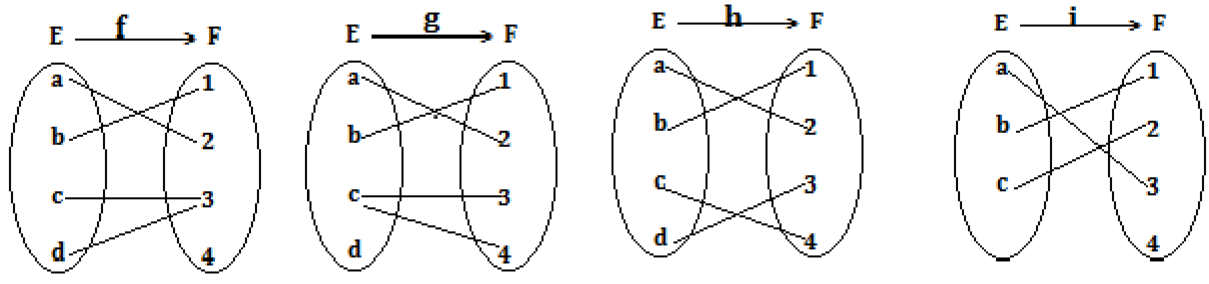
1. *Établir à l'aide des flèches une répartition possible f des ages de ces élèves.*
2. *Établir à l'aide des flèches une répartition possible g des notes de ces élèves*

E	F	E	G
E_1		E_1	
E_2		E_2	2
E_3	17	E_3	4
E_4	18	E_4	8
E_5	19	E_5	9
E_6	20	E_6	12
E_7		E_7	14
E_8		E_8	

Résumé 2 : *Soit E et F deux ensembles. On appelle application de E vers F toute correspondance f définie de E vers F et notée* $f : E \longrightarrow F$ *qui à tout élément x de l'ensemble de départ E associe un seul élément y de l'ensemble d'arrivé F. y est appelé l'image de x par f et se note* $f(x)$ *et x est un antécédent y par f.*

Exemple 3 : *la correspondance f ci-dessus obtenue est une application tandis que g ne l'est pas.*

Exercice d'application 4 : *Parmi les relations suivantes, identifier celles qui sont des applications.*



$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - 4,\ g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{2x^2-4}{x^2-1},\ h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{3x^2-9}.$

Définition 5 (Prolongement et restriction) : *Soit E et E′ deux parties de* $\mathbb{R}$ *telles que* $E' \subseteq E$. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *et* $g : E' \longrightarrow F$. *deux applications Si pour tout* $x \in E'$, *on a* $f(x) = g(x)$, *on dit que f prolonge (ou f est un prolongement de) g à E ou que g restreint (ou g est la restriction de) f à E′.*

Exemple 6 : *l'application f définie de* $\mathbb{R}_+$ *vers* $\mathbb{R}$ *par f(x)=2x est la restriction de l'application g définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par g(x)=|2x|.*

Exercice d'application 7 : *On considère l'application f définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = |x-2| - 4|x+3|$

1. *Écrire F sans le symbole valeur absolue.*
2. *Déterminer les applications g, h et u restriction de f sur* $]-\infty;-3]$, *[-3,2] et sur* $]2;+\infty[$.

0.2 Composition d'applications

Activité 8 : *on considère les applications f et g définies de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$ *et* $g(x) = 2x^3 + 1$

1. *calculer f(1), f(2), g(1),g(2), g(f(1)), f(f(2)), f(g(1)), f(g(2)).*
2. *Exprimer f(g(x)) et g(f(x)) en fonction de x. Que remarque tu ?*

Résumé 9 :

Définition 10 : *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$ deux applications. On appelle composition de f par g l'application notée $g \circ f$ définie de E vers H pour tout xE tel que $f(x) \in G$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Exemple 11 : *On considère les applications f, g et h définies par : $f(x) = x - 3$, $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$.*

1. *Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ puis les comparer.*
2. *Déterminer $g \circ (f \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ puis les comparer.*

Remarque 12 :
1. *La composition d'applications n'est pas commutative.(voir activité)*
2. *Si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ sont trois applications. Alors on a $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. On dit que la composée des applications est associative et on note $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$.*

Exercice d'application 13 : *On considère les applications f et g définies de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$.*

1. *Déterminer trois applications u, v et w telles que $f(x) = u \circ v \circ w(x)$.*
2. *Déterminer trois applications h, t et s telles que $g(x) = h \circ t \circ s(x)$.*

0.3 Applications injectives, surjectives, bijectives

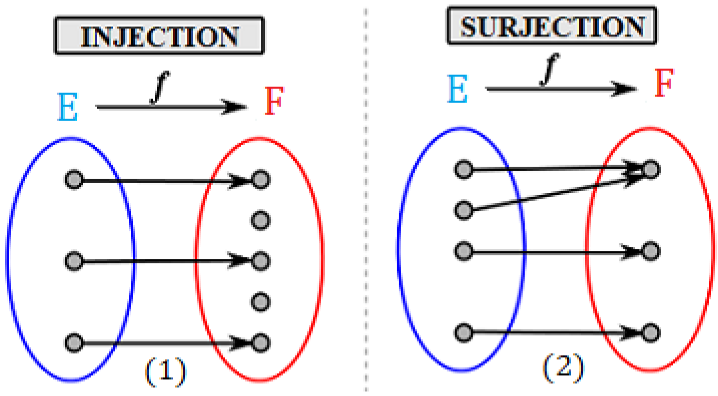
Activité 14 : *On considère les applications f et h définies par $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-4; +\infty[, x \longmapsto x^2 - 4$, $g : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{2x - 4}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x - 1$.*

1. *calculer f(2), f(-2), g(2), h(1). existe-t-il deux éléments distincts ayant même image par f ? par g ? par h ?*
2. *Déterminer des nombres réels ayant pour image $\sqrt{3}$ par f. Soit un nombre réel $y \in [-4; +\infty[$. Existe-t-il des réels ayant pour image y par f ? Même question pour g et h et $y \in \mathbb{R}$*

Résumé 15 :

Définition 16 : *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *On dit que f est injective si et seulement tout élément de F a au plus un antécédent par f; c'est-à-dire pour tous $x_1, x_2 \in E$ si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.* ***(voit (1))***
2. *On dit que f est surjective si et seulement tout élément de F a au moins un antécédent par f c'est-à-dire pour tout $y \in F$ il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$.* ***(voir (2))***
3. *On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) tout élément de F admet exactement un antécédent par f. pour tout $y \in F$ il existe* ***un unique*** *$x \in F$ tel que $y = f(x)$.* ***(voir (3))***



Exemple 17 : *On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. 2 n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective. Par contre pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ son antécédent est $x = \frac{y-1}{y-2}$, donc f est injective. f n'est donc pas bijective mais l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ est une bijection.*

Remarque 18 : *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

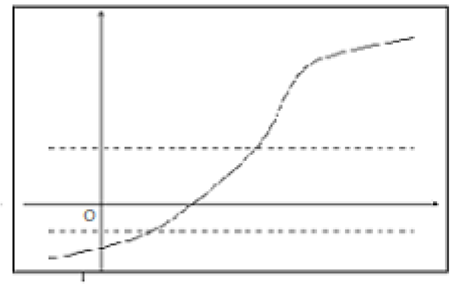
i) *f est injective si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *f est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E.* ***(voir courbe 1 et 2)***

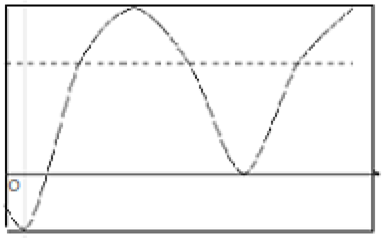
iii) *f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E.* ***(voir courbe 2 et courbe 3)***

iv) *f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

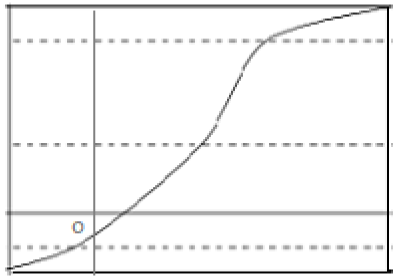
v) *f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans E.* ***(voir courbe 3)***



courbe 1



courbe 2



courbe 3

Proposition 19 : *Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont bijective, alors $g \circ f$ est aussi bijective.*

Démonstration :

Injection : Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, montrons que $x_1 = x_2$. g étant injective on a $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)t \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, et comme f est injective $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$.

Surjection : Soit $y \in G$. Cherchons $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. g étant est surjective alors $\exists t \in F$ tel que $y = g(t)$ et comme f surjective alors $\exists x \in E$ tel que $t = f(x)$; d'où $y = g(t) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Remarque 20 : *Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Soit $y \in F$, alors il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ceci permet de définir une nouvelle application, cette fois de F dans E.*

Définition 21 : *Soit E un ensemble. On définit l'application identique $Id_E : E \longrightarrow E$ définie pour $x \in E$ par $Id_E(x) = x$ encore appelée identité de E.*

Définition 22 (Bijection réciproque) : *Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$, associe l'unique antécédent de y par f.*

Exemple 23 : *L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ est une bijection et admet pour bijection réciproque l'application $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-2}$.*

Proposition 24 : *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections, alors*

1. *$f^{-1} \circ f = Id_E$; c'est-à-dire $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$.$(f^{-1})^{-1} = f$.*
2. *$f \circ f^{-1} = Id_F$; c'est-à-dire $f \circ f^{-1}(x) = x$ pour tout $x \in F$.*

3. $(f^{-1})^{-1} = f$.

4. $g \circ f$ *est une bijection de bijection réciproque* $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

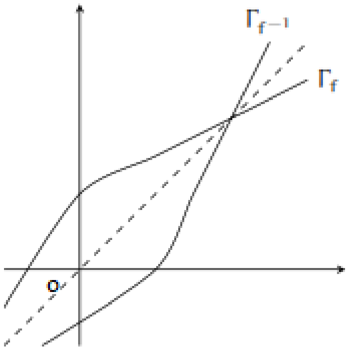
5. *SI il existe une application* $h : F \longrightarrow E$ *telle que* $f \circ h = Id_F$ *et* $h \circ f = Id_E$ *alors* h *est bijective de bijection réciproque* f.

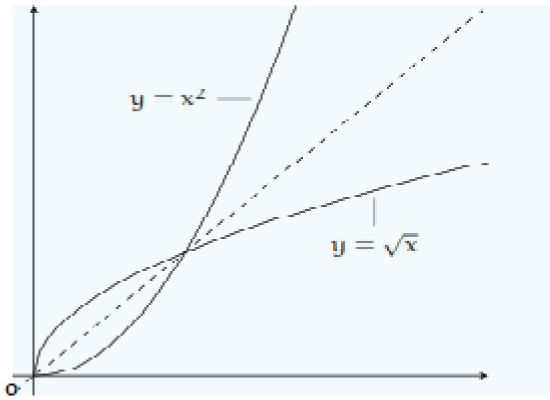
Exercice d'application 25 : *on considère l'application* $f : [-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par* $f(x) = \sqrt{x+1}$ *et l'application* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1; +\infty[$ *définie par* $f(x) = x^2 - 1$.

1. *Montrer que* f *et* g *sont des bijections.*

2. *Calculer* $f \circ g$ *et* $g \circ f$ *puis conclure.*

Remarque 26 : *Si* E *et* F *sont des partie de* $\mathbb{R}$. *Alors les graphes des applications* f *et* f^{-1} *sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.*





Classe : P_C	Date :	Durée : 50 min

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS ET OPERATIONS	
Chapitre 09	**Leçon 1**
LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION	**APPROCHE INTUITIVE DE LA NOTION DE LIMITE**

Compétences exigées :

- Conjecturer graphiquement la limite d'une fonction en l'infini,
- Déterminer la limite d'une fonction en l'infini.
- Déterminer la limite d'une fonction en un réel x_0.

Motivation : certains phénomènes qui impactent directement sur la vie de l'Homme tels que : l'évolution d'une population donnée, les épidémies, l'évolution de l'économie d'un pays…etc peuvent être modélisés ou interprétés par des fonctions ; il est donc important la plupart du temps de faire des projections dans le futur pour avoir une idée du comportement du phénomène étudié lorsqu'on s'approche d'une date précise, d'où l'importance de la notion de limites d'une fonction.

Prérequis :

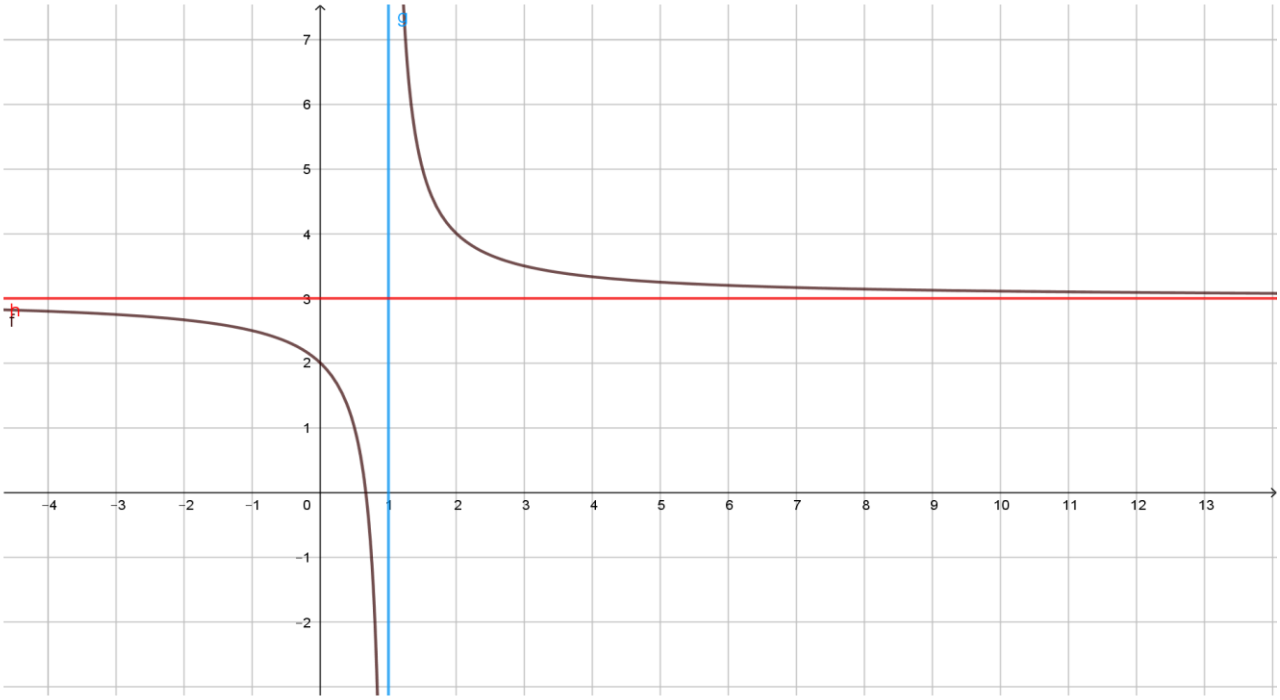
- La lecture du graphe d'une fonction,
- Représentation de fonctions à partir de fonctions élémentaires,
- Effectuer des calculs élémentaires d'addition, division et multiplication.

Situation problème : Kevin un élève de P_C s'adressant à son ami Joël absent pour raison de maladie au dernier cours de mathématiques lui dit : « Le prof a dit que nous verrons demain la notion de limites d'une fonction ! ». Christian le grand frère de Joël qui écoutait la conversation dit : « Après votre cours de demain je verrais si vous êtes capables de me montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|-1}{x-x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ n'admet pas de limites infinies en l'infiniment grand et en l'infiniment petit et qu'elle admet une unique asymptote verticale »

Après avoir donné en langage mathématiques la signification du défi lancé par Christian, aider Kevin et Joël à relever ce défi !

Activité d'Apprentissage :

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=3+\frac{1}{x-1}$, sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

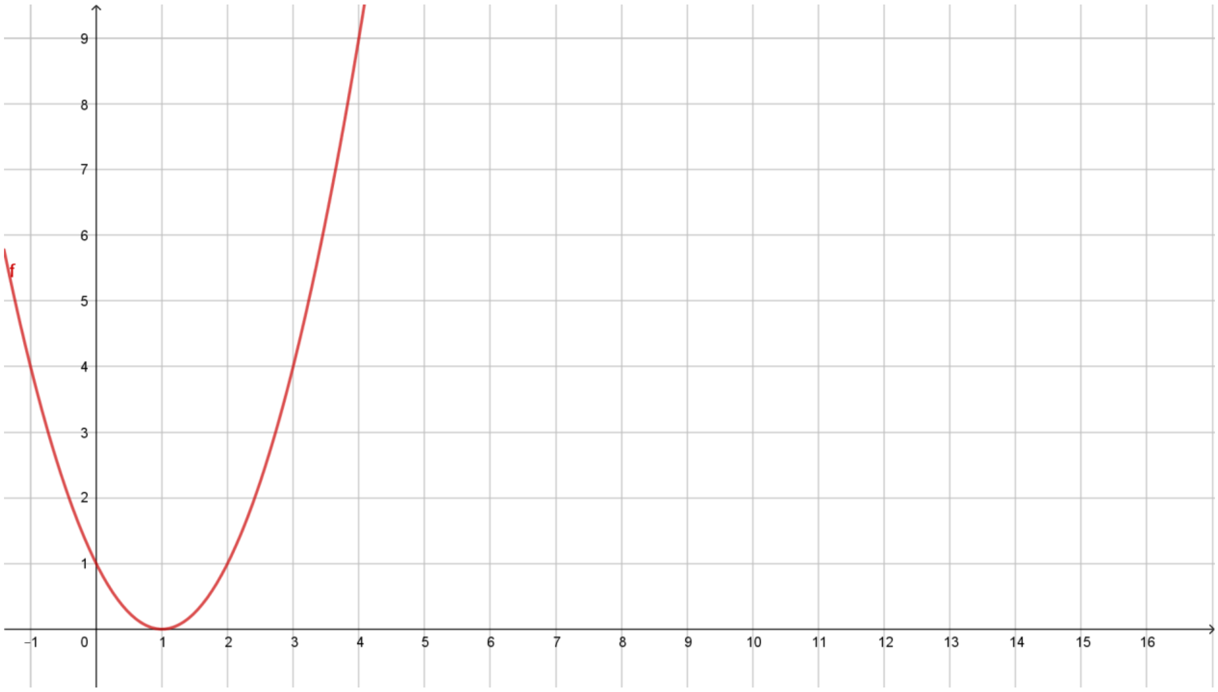
x	2	4	100	1000	10 000	100 000	150 000	500 000
$f(x)$								

2. Quel constat fait-on ? Et comment peut-on le justifier en observant le graphe de la fonction ?
3. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001	1,0000001	1,00000001	1,000000001
$f(x)$								

4. Quel constat fait-on ? Et comment peut-on le justifier en observant le graphe de la fonction ?

II. On considère cette fois la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-1)^2$ sa courbe représentative est donnée sou dessous :



1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	2	4	10	50	100	200	500	1 000
$g(x)$								

2. Quel constat fait-on ? Et comment peut-on le justifier en observant le graphe de la fonction ?

<u>Résumé</u> :

- On dit que la fonction f admet une limite finie l en $+\infty$, si tout intervalle contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, on lit **« limite de $f(x)$ lorsque x tend vers plus l'infini est égal à l. »** . Dans ce cas la droite (D) d'équation $y = l$ est appelée asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.
- On dit que la fonction f, définie sur l'intervalle $]a, b]$ **tend vers** $+\infty$ quand **x tend vers a** à droite, et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a_>} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut pour x suffisamment proche de a. On dit dans ce cas que la droite Δ, d'équation $x = a$ est **asymptote verticale**.
- On dit que la fonction f, définie sur un intervalle $[A, +\infty[$ **tend vers** $+\infty$ quand **x tend vers** $+\infty$, si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, pour x suffisamment grand ; et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On dit dans ce cas que la courbe représentative de la fonction f admet une **branche infinie** en $+\infty$.

<u>Propriétés</u> : (Limites en l'infini de fonctions élémentaires)

Les résultats suivants sont admis :

$\lim_{x\to+/-\infty} k = k$	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty\ si\ n\ est\ pair \\ -\infty\ si\ n\ est\ impair \end{cases}$
$\lim_{x\to+\infty} ax = \begin{cases} +\infty\ si\ a > 0 \\ -\infty\ si\ a < 0 \end{cases}$	$\lim_{x\to+/-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x\to+/-\infty} \lvert x\rvert = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} ax = \begin{cases} +\infty\ si\ a < 0 \\ -\infty\ si\ a > 0 \end{cases}$

Remarque :

- Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite en l'infini
- Si f est une fonction et Δ une droite d'équation $y = ax + b$ si $\lim_{x\to+/-\infty} f(x) - y = 0$ alors la droite Δ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice d'application :

1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions f et g ci-dessus et des tables de valeurs convenablement choisis calculer les limites suivantes :
   a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
   b. $\lim_{x\to1^-} f(x)$,
   c. $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. En utilisant la courbe représentative et si possible une calculatrice donner les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction h définie par $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$
3. Revenir sur la situation problème.
4. Donner des exercices à faire à la maison

Classe : P_C	Date :	Durée : 50 min

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS ET OPERATIONS	
Chapitre 09	**Leçon 2**
LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION	**OPERATIONS SUR LES LIMITES**

Compétences exigées :

- Déterminer la limite de la somme, du produit, du quotient et de la composée de deux fonctions,
- Utiliser des techniques appropriées pour lever l'indétermination
- Utiliser les techniques de comparaison pour calculer les limites

Motivation : certains phénomènes qui impactent directement sur la vie de l'Homme tels que : l'évolution d'une population donnée, les épidémies, l'évolution de l'économie d'un pays…etc peuvent être modélisés ou interprétés par des fonctions ; il est donc important la plupart du temps de faire des projections dans le futur pour avoir une idée du comportement du phénomène étudié lorsqu'on s'approche d'une date précise, d'où l'importance de la notion de limites d'une fonction.

Prérequis :

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction,
- Calculer de manière intuitive la limite d'une fonction,

Situation problème : Après le cours de mathématiques Kevin et Joël s'empressent d'expliquer à Christian comment résoudre la question qu'il leur a posée. Celui-ci écoute attentivement et leur dit : « Trouver moi donc le domaine de définition et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|-1}{x-x^2} \; si \; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} »$$

Aider Kevin et Joël à relever ce deuxième défi lancé par Christian !

Activité d'Apprentissage :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|-1}{x-x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$:

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Ecrire $f(x)$ sans barre de valeur absolue, et lister toutes les limites qui existent aux bords du domaine de définition.
3. Les techniques de la leçon précédente sont elles suffisantes pour calculer toutes les limites aux bornes du domaine de définition ? Si non que manquent-ils ?

Résumé :

1. **OPERATIONS SUR LES LIMITES**

a. Sommes de deux fonctions

l et l' sont deux réels, on admet le tableau suivant :

f a pour limite :	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite :	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F I

b. Produit de deux fonctions

l et l' sont deux réels, on admet le tableau suivant :

f a pour limite :	l	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite :	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
fg a pour limite :	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F I

c. Quotients de deux fonctions

d. l et l' sont deux réels, on admet le tableau suivant :

f a pour limite :	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
g a pour limite :	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	l'	l'	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite :	$\frac{l}{l'}$	0	$\begin{cases} +\infty\ si\ l'>0 \\ -\infty\ si\ l'<0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty\ si\ l'>0 \\ +\infty\ si\ l'<0 \end{cases}$	$+\infty$	FI	F I

Exemple d'application :

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+5}{-x+1}$:

- Dresser le tableau de signe de $-x+1$, puis en déduire $\lim_{x\to 1^-} -x+1$, puis $\lim_{x\to 1^+} -x+1$.
- En déduire $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

e. Composée de deux fonctions

Propriété : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie sur I telle que $\forall\, x \in I, f(x) \in J$; soit g une fonction définie sur J :

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g[f(x)] = c$.

f. **Théorème :**

- La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son terme le plus haut degré
- La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré

Exemple d'application : Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 + 2x^2 + x + 2$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{x-x^2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 2}$

Remarque : Les formes indéterminées indiquées dans les différents tableaux ci-dessus se contournent facilement par des techniques de conjugaison de factorisation :

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$
- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2+3x-10}$

2. Limites et inégalités

Les résultats suivants sont admis :

- **Propriété 1** : Soient f et g définies sur un intervalle I, soit a un réel ou un infini que $a \in I$ ou tel que a est une borne de I, l et l' deux réels.
  Si $\forall\, x \in I, f(x) \leq g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ Alors $l \leq l'$
- **Propriété 2** : Soient f et g définies sur un intervalle I, soit a un réel ou un infini que $a \in I$ ou tel que a est une borne de I, l et l' deux réels.
  i. Si $\forall\, x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
  ii. Si $\forall\, x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- **Propriété 3 : Théorème de gendarmes**
  Soient f, g et h définies sur un intervalle I, soit a un réel ou un infini que $a \in I$ ou tel que a est une borne de I, l un réel.
  Si $\forall\, x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$

Exercice d'application :

1. Revenir sur la situation problème.
2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\cos x}{x-\sin x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \sin x$
3. Donner des exercices à faire à la maison

Classe : P_C	Date :	Durée : 50 min

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS ET OPERATIONS	
Chapitre 09	**Leçon 3**
LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION	**CONTINUITE**

Compétences exigées :

- Etudier la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle,
- Monter qu'une fonction admet un prolongement par continuité et le définir

Motivation:

Prérequis :

- Calculer les limites d'une fonction,
- Représenter le graphe d'une fonction à partir de celle d'une fonction élémentaire convenablement choisie

Situation problème : Etonné par la brillante réponse de Kevin et Joël, Christian leur félicite pour avoir bien suivi le cours puis leur demande : « Dites-moi cette fonction admet-elle des trous aux points d'abscisse $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$?» . A cette dernière question Kevin et Joël s'interrogent si la notion de limite d'une fonction peut leur être utile et si c'est le cas comment ?

Aider Kevin et Joël à relever ce troisième et dernier défi lancé par Christian !

Activité d'Apprentissage :

On considère les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4}$

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions f et g.
2. Calculer les limites des fonctions f et g aux bornes de leurs domaines de définition.

3. En vous servant de la courbe d'une fonction élémentaire convenablement choisie tracer la courbe représentative de la fonction f.
4. Quelle différence y-a-t-il à votre avis entre la fonction g et la fonction f ? Et comment peut-on faire ressortir cette différence entre leurs courbes représentatives ?

Résumé :

Définitions :

i. On dit que la fonction f est continue en x_0 si :
   - $x_0 \in D_f$
   - $\lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$

ii. On dit que la fonction f est continue sur un intervalle I, si elle est continue en tout point de I.

Opérations sur les continuités :

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors $f + g$ est continue sur I.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors fg est continue sur I.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et $\forall\, x \in I\ g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f une fonction continue en a et g continues en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Remarque :

Si f n'est pas définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors **le prolongement par continuité de la fonction f en a** est la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} \boldsymbol{f(x)\ si\ x \neq a} \\ \boldsymbol{l\ si\ x = a} \end{cases}$

Exercice d'application :

1. Revenir sur la situation problème$x$
2. Donner des exercices à faire à la maison

MODULE 21

RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Chapitre 10 : DERIVATION

Intérêt : Découvrir les propriétés du nombre dérivé, de la fonction dérivée…

Motivation : De nombreux objets dans la vie sont très souvent en mouvement rectiligne, circulaire… La détermination de la pente d'une courbe en un point, de la vitesse instantanée, l'accélération d'un objet, les variations d'une fonction, l'esquisse de la courbe représentative d'une fonction,… sont quelques fois préoccupant. En classe de seconde C nous avons utilisé le taux de variation pour déterminer le sens de variation, puis le tableau de variation d'une fonction. Ce chapitre donne des outils pour pouvoir le faire aisément.

Prérequis

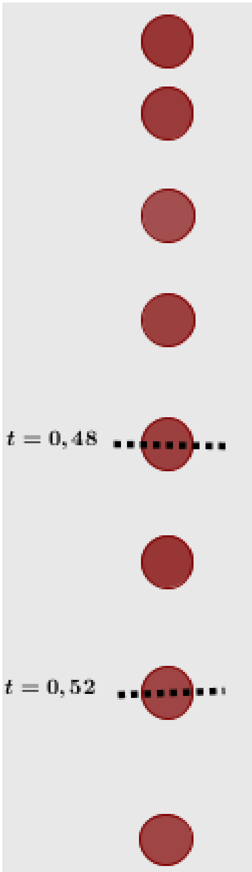
- Rappelé le calcul de la limite d'une fonction au voisinage d'un nombre réel.
- Rappelé la notion de calcul de la limite d'un taux de variation au voisinage du réel annulant le dénominateur du taux de variation.

LEÇON 1 : FONCTION DERIVABLE EN UN POINT.

1. Nombre dérivé d'une fonction en un point.

Activité 1 :

On a photographié à intervalles réguliers la chute d'une balle de tennis de table. La durée entre deux prises de vue consécutives est $0{,}002\ s$. On a obtenu le document ci-contre dont l'échelle est $1/10$. On aimerait connaitre la vitesse instantanée de la balle à l'instant $t = 0{,}5s$.



1. Pour cela le physicien calcul la vitesse moyenne entre deux instants très proches encadrant $0{,}5s$. Calculer ainsi la vitesse instantanée à l'instant $t = 0{,}5s$ en utilisant la photographie.
2. Les mathématiciens cherchent à exprimer la distance $f(t)$ parcourue par la balle en fonction du temps écoulé depuis le lâcher. On admet que $f(t) = 5t^2$ (t en seconde et $f(t)$ en mètre).

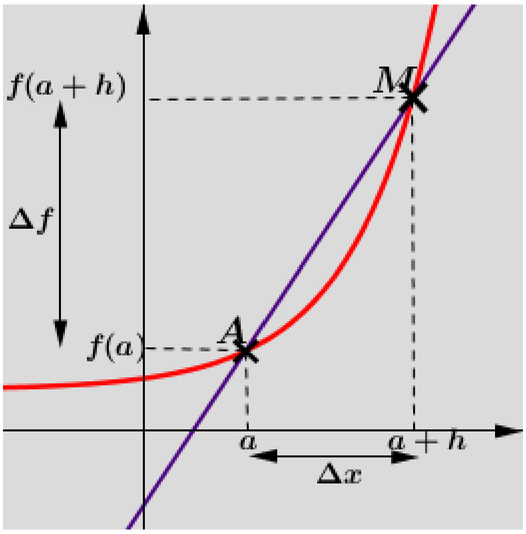
a) Calculer la vitesse moyenne de la balle entre l'instant $t = 0;5$ et $t = 0{,}5 + \Delta t$, c'est-à-dire $v_m = \frac{f(0{,}5+\Delta t)-f(0{,}5)}{\Delta t}$.

b) Recopie et complète le tableau suivant :

Δt	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$	$0{,}00001$
v_m					

Nous constatons que la vitesse moyenne s'approche de plus en plus de 5, lorsque Δt s'approche de 0. C'est cette valeur limite qui est la vitesse instantanée de la balle, à l'instant $t = 0{,}5$.

Résumé 1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soit a un nombre réel de l'intervalle I et A le point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse a.
Soit h un réel tel que $a+h \in I$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le rapport : $r(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec a et $a+h$ appartenant à I. Sur le graphique $r(h)$ est le coefficient directeur d'une sécante (AM) à $(\mathcal{C}_f)$.



Définition 1 : Dérivabilité en un point.
Si $r(h)$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** et on appelle ce nombre **le nombre dérivé de f en a.** Ce nombre est noté $f'(a)$.

Notation : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$.

Remarque 1 : En posant $x=h+a$, x tend vers a lorsque h tend vers 0 et alors $\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$. Ainsi f est dérivable en a si la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.

Exemple 1 : Déterminons le nombre dérivé de chacune des fonctions f, g et h pour la valeur de a indiqué : $f(x)=x^2+x$ en $a=-1$, $g(x)=\sqrt{x}$ en $a=1$ et $h(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ en $a=3$.

- Soit $f(x)=x^2+x$ une fonction polynôme, définie sur $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;\ +\infty[$ déterminons le nombre dérivé de f en -1.

  Soit $x\in]-\infty;\ +\infty[$; $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{(x^2+x)-(0)}{x+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$ et $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}x=-1$

  Ainsi, f est dérivable en -1 et le nombre dérivé de f en -1 est $f'(-1)=-1$.
- Soit $g(x)=\sqrt{x}$ la fonction définie sur $D_g=[0;\ +\infty[$, déterminons le nombre dérivé de g en 1.

Soit $x\in[0\,;\ +\infty[$, $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

Ainsi, g est dérivable en 1 et le nombre dérivé de g en 1 est $g'(1)=\frac{1}{2}$.

- Soit $h(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;\ +\infty[$, déterminons le nombre dérivé de h en 3. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;\ +\infty[$

$$\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\frac{\frac{2x+1}{x-2}-7}{x-3}=\frac{\frac{-5x+15}{x-2}}{x-3}=\frac{-5x+15}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}\text{ et }\lim_{x\to3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=-5.$$

Ainsi, h est dérivable en 3 et le nombre dérivé de h en 3 est $h'(3)=-5$.

Définition 2 : Tangente en un point à une courbe.

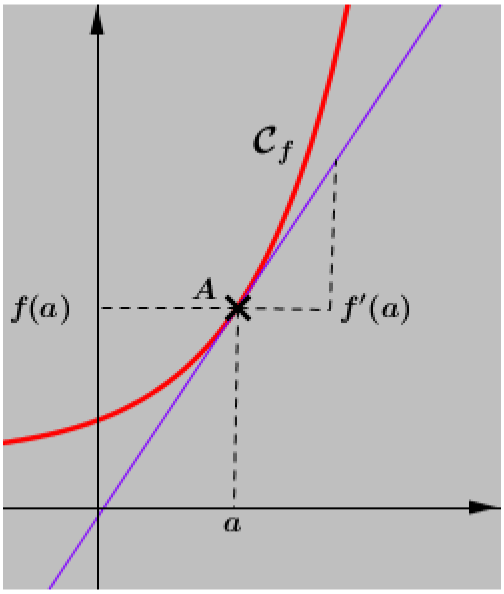
Si f est dérivable en a, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet, au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente : c'est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de cette tangente s'écrit :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

En effet, pour tout point $M(x; y)$ de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point M_0 $(x_0; f(x_0))$, on peut écrire :

$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, soit $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.



Remarque 2:

- Si $f'(a) = 0$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$.
- La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ lorsqu'elle existe est unique.

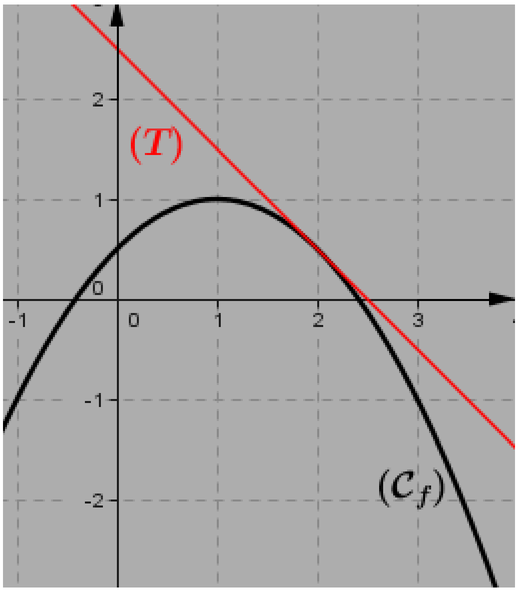
Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$.

Déterminons l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

On a : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x-2} = -1$ et $f(2) = \frac{1}{2}$

Ainsi une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ est donc $y = -1(x-2) + \frac{1}{2}$. $\boldsymbol{(T): y = -x + \frac{5}{2}}$.



Exercice d'application 1 :

1) Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition
   - Le nombre dérivé de la fonction f en x_0.
   - L' équation de la tangente en x_0.

a) $f(x) = -3x^4 + x + \frac{2}{3}$, pour $x_0 = -2$

b) $f(x) = \frac{2-5x}{2x+3}$ pour $x_0 = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = \sqrt{3x+5}$ pour $x_0 = \frac{-2}{3}$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sin(\pi x)$.

a) Démontrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}^*\{1\}$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}$.

b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé.

2. Dérivabilité et continuité en un point.

Activité 2:

Soit une fonction définie sur un intervalle ouvert K. Soit $a \in K$.

1) Pour tout $x \in K\backslash\{a\}$, vérifier que $h(x) = h(a) + (x-a)\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$.

2) On suppose que h est dérivable en a. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = h(a)$.

3) h est-elle continue en a ?

Résumé 2 :

Propriété :

P1 : Si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

P2 : une fonction continue en x_0 n'est pas toujours dérivable en x_0

Exemple 2:

La fonction $f : x \mapsto |x-1|x^2$ est continue en 1 et n'est pas dérivable en 1.

En effet, $\begin{cases} f(x) = (x-1)x^2 & si\ x \in [1; +\infty[\\ f(x) = (1-x)x^2 & si\ x \in]-\infty; 1] \end{cases}$ comme $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ alors f est continue en 1.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$ alors f est n'est pas dérivable en 1.

Ainsi la fonction est continue en 1 et n'est pas dérivable en 1.

Exercice d'application 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = |x^2 - 1|$.

1) Ecrire f sans symbole de valeur absolue.
2) Montrer que f est continue en 1.
3) Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$
4) La fonction f est dérivable en 1 ?

3. Demi-tangente à droite et à gauche en un point x_0 d'une courbe.

Activité 3 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$, par $f(x) = \frac{|x+1|}{x+3}$.

1. Ecrire f sans symbole de valeur absolue.
2. Calculer la limite à gauche et à droite en -1, de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. La fonction g admet-elle une limite en -1 ? justifier.
3. La fonction f est-elle dérivable en -1 ? justifier.
4. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle une tangente en -1 ?

Résumé 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit x_0 un élément de I.

Définition : **dérivabilité à gauche.**

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$, et si la fonction : $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et noté $f'_g(x_0)$. La courbe de f admet alors une demi-tangente à gauche au point d'abscisse x_0 qu'équation : $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, pour tout x de $]a;\ x_0]$.

Définition : **dérivabilité à droite.**

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; a[$, et si la fonction : $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et noté $f'_d(x_0)$. La courbe de f admet alors une demi-tangente à droite au point d'abscisse x_0 qu'équation : $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, pour tout x de $]a;\ x_0]$.

Remarque 3:

R1 : Si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ à une limite nulle à gauche ou à droite de x_0 alors la fonction f admet une tangente horizontale.

R2 : Si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ à une limite infinie à gauche ou à droite de x_0 alors la fonction f admet une tangente verticale.

R3 : Une fonction est dérivable en x_0 si le nombre dérivé à gauche est égal au nombre dérivé à droite : $f'_d(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

R4 : Si en $M_0(x_0; f(x_0))$ le nombre dérivé à gauche est différent du nombre à droite ($f'_d(x_0) \neq f'_d(x_0)$) alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$la courbe $(\mathcal{C}_f)$ appelé **point anguleux**.

Exemple 3 :

1) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 & si\ \ x < 1 \\ g(x) = \frac{x-1}{x+1} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$. Etudions la dérivabilité de f en 1.

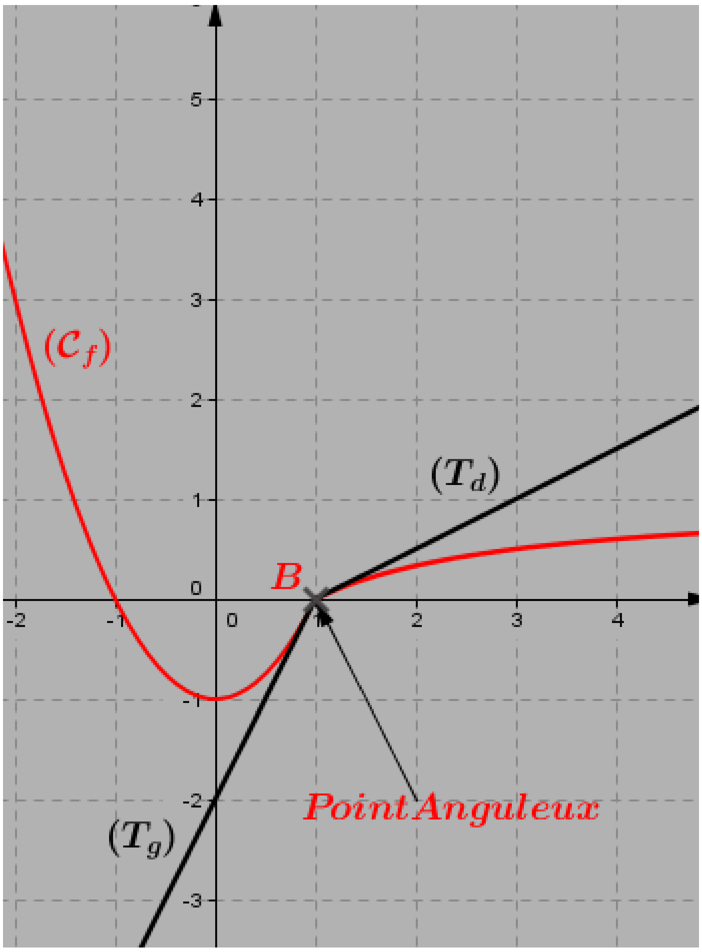
- **Dérivabilité de f à gauche de $B(1;0)$.**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1-(0)}{x-1} = 2$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = 2$ et f est dérivable à gauche de 1. La demi-tangente (T_g) à $(\mathcal{C}_f)$ à gauche au point $B(1;0)$ à pour équation : $(T_g): y = 2x - 2$

- **Dérivabilité de f à droite de $B(1;0)$.**

On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{x-1}{x+1}-(0)}{x-1} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ et f est dérivable à droite de 1. La demi-tangente (T_g) à $(\mathcal{C}_f)$ à droite au point $B(1;0)$ à pour équation :

$(T_d): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



2) Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = 2 - \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$. Etudions la dérivabilité de f en 1.

- **Dérivabilité de f à gauche $A(1;0)$.**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1-(0)}{x-1} = 2$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = 2$ et f est dérivable à gauche de 1.

- **Dérivabilité de f à droite $A(1;0)$.**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2-\frac{2}{x}-(0)}{x-1} = 2$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = 2$ et f est dérivable à droite de 1.

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = 2$, la fonction f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$. $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(1;0)$ une tangente d'équation : (T): $y = 2x - 2$.

Exercice d'application 2:

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 3 - 2x & si\ x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.
3) Déterminer une équation de chacune de ces demi-tangentes.

LEÇON 2 : FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION, CALCUL DES DERIVEES.

1. Fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle.

Activité 1:

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1) Soit x_0 un nombre réel.
   a) Montrer que pour tout $x \neq x_0$, on a : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3(x+x_0) + 5$.
   b) En déduire la limite de $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0.
2) Soit x_0 un nombre réel choisie dans le domaine de définition de g.
   a) Montrer que pour tout $x \neq x_0$, on a : $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2}}$
   b) En déduire la limite de $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0.

Résumé 1:

Soit une fonction définie sur un intervalle I.

- **L'ensemble de dérivabilité de f** est l'ensemble des nombres réels x_0 de D_f en lesquels f est dérivable.
- La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** ou **dérivé de f**.

Exemple 1:

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Déterminons le nombre dérivée en réel x_0 de $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ +\infty[$, puis déduire la fonction dérivée de f.

Pour tout x et x_0 de $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ +\infty[$ on a :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{2x-3}{x+2}-\frac{2x_0-3}{x_0+2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(2x-3)(x_0+2)-(x+2)(2x_0-3)}{(x-x_0)(x+2)(x_0+2)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+2)(x_0+2)}=\frac{1}{(x_0+2)^2}$$

Le nombre dérivée de f en x_0 est $\frac{1}{(x_0+2)^2}$. Pour tout réel x de $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ +\infty[$,

$$f':x\mapsto\frac{1}{(x+2)^2}$$

Exercice d'application 1:

Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$

2. Fonctions dérivée usuelles.

Activité 5:

1) Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

a) Pour tout réel x $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. $g(x) = x$. $h(x) = x^2$.

b) Pour tout réel $x \in [0;\ +\infty[$, $p(x) = \sqrt{x}$.

c) Pour tout réel $x \in]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$, $q(x) = \frac{1}{x}$.

2) Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x différent de x_0.

a) Montrer que $\sin x - \sin x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$ et $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$

b) En déduire que $\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$ et $\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0} = -\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$.

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0}=-\sin(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\cos(x_0)$

d) En déduire la fonction dérivée des fonctions suivantes : $x\mapsto\sin(x)$ et $x\mapsto\cos(x)$.

Résumé 5:

Le tableau ci-dessous donne un récapitulatif des fonctions dérivées élémentaires et leur domaine de dérivabilité.

Fonctions	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité.
$x\mapsto k$	$x\mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x}$	$x\mapsto-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;\ +\infty[$
$x\mapsto\sin(x)$	$x\mapsto\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\cos(x)$	$x\mapsto-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque 5 :

R1 : La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable pour tout réel de $\mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\left(\sin(x)\right)'(0)=1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

R2 : La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable pour tout réel de $\mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\left(\cos(x)\right)'(0)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$.

3. Fonctions dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Fonction dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction donnée.

Activité 6:

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle K. On note u' la dérivée de u sur$K$ et v' la dérivée de v sur K.

1. Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à K.
   a) Monter que $\frac{(ku)(x)-(ku)(x_0)}{x-x_0}=k\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$
   b) En déduire que $(ku)'(x_0)=ku'(x_0)$
2. Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à K.
   a) Monter que $\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0}=\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$
   b) En déduire que $(u+v)'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$
3. Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à K.
   a) Monter que $\frac{(uv)(x)-(uv)(x_0)}{x-x_0}=\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}u(x_0)$
   b) En déduire que $(uv)'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$
4. Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à K et tel que $v'(x_0)\neq 0$
   a) Monter que $\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\times\frac{1}{v(x)v(x_0)}$
   b) En déduire que $\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0)=-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$
5. Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à K et tel que $v(x_0)>0$
   a) Monter que $\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0}=\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}$
   b) En déduire que $\left(\sqrt{u}\right)'(x_0)=\frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$
6. Soient a et b deux nombre réels tels que $a\neq 0$ et $ax_0+b\in K$. On pose $X=ax+b$ et $f(x)=u(ax+b)$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to X_0}\frac{u(X)-u(X_0)}{X-X_0}\times a=a\times u'(ax_0+b)$
   b) En déduire que $f'(x_0)=a\times u'(ax_0+b)$

Résumé 6:
Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle K. On note u' la dérivée de u sur$K$ et v' la dérivée de v sur K.

Propriété :

P1 : Dérivée du produit d'une fonction de par un réel.
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto k \times u'(x)$.

P2 : Dérivée de la somme de deux fonctions.
La fonction $x \mapsto (u+v)(x)$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto u'(x) + v'(x)$

P3 : Dérivée du produit de deux fonctions.
La fonction $x \mapsto (u \times v)(x)$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

P4 : Dérivée de l'inverse et du quotient de deux fonctions.
On suppose que pour tout x de K, $v(x) \neq 0$,

- La fonction **inverse** $x \mapsto \left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$.
- La fonction **quotient** $x \mapsto \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$

P5 : Dérivée d'une fonction racine.
Pour tout $x \in K$, on a $u(x) > 0$, la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

P6 : Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax+b)$ avec $a \neq 0$
La fonction $x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur K, et a pour dérivée sur K, la fonction $x \mapsto a \times u'(ax+b)$

Remarque 6:
Pour tout réel x, dérivons les fonctions suivantes : $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^4$.

- $f'(x) = (x^3)' = (x \times x^2)' = (x)' \times (x^2) + x \times (x^2)' = 1 \times x^2 + x \times 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$.

Donc : $\boldsymbol{f'(x) = (x^3)' = 3x^2 = 3x^{3-1}}$.

- $g'(x) = (x^4)' = (x \times x^3)' = (x)' \times (x^3) + x \times (x^3)' = 1 \times x^3 + x \times 3x^3 = x^3 + 3x^3 = 4x^3$

Donc : $\boldsymbol{g'(x) = (x^4)' = 4x^3 = 4x^{4-1}}$.

R1 : Pour tout réel x et tout entier naturel n tel que $n \geq 1$. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto n \times x^{n-1}$.

R2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K, pour tout entier naturel n. La dérivée de la fonction $x \mapsto u^n(x)$ est la fonction $x \mapsto n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$.

Exemple 6 : Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes ci-dessous définies, sur les ensembles indiqués :

- $f(x) = \frac{7}{3}\sqrt{x}$. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{7}{3} \times \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc pour tout $x \in [0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $g(x) = -5x^3 + 3x^2 - 45x + \frac{3}{4}$. Pour tout nombre réel x.

$$g'(x) = (-5x^3)' + (3x^2)' - (45x)' + \left(\frac{3}{4}\right)' = -5 \times (x^3)' + 3 \times (x^2)' - 45(x)' + 0$$
$$= -5 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 45$$
$$= -15x^2 + 6x - 45$$

Donc pour tout nombre réel x $g'(x) = -15x^2 + 6x - 45$

- $p(x) = \frac{1}{2x+3}$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};\ +\infty[$;

$$p'(x) = \left(\frac{1}{2x+3}\right)' = -\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2}.$$

Donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};\ +\infty[$ $p'(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2}$.

- $h(x) = \frac{x^2-9x+24}{x-5}$, pour tout x de l'intervalle $]-\infty;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$.

$$h'(x) = \left(\frac{x^2-9x+24}{x-5}\right)' = \frac{(x^2-9x+24)' \times (x-5) - (x^2-9x+24) \times (x-5)'}{(x-5)^2} = \frac{(2x-9)(x-5) - (x^2-9x+24) \times 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}.$$

Donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$ $h'(x) = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}$.

- $q(x) = \sqrt{3-2x}$, pour tout $x \in]-\infty;\ \frac{3}{2}]$

$$q'(x) = \left(\sqrt{3-2x}\right)' = \frac{(3-2x)'}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}.$$

Donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty;\ \frac{3}{2}]$ $q'(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$

- $t(x) = cos\,(3x-4)$, pour tout réel.

$$t'(x) = \left(cos\,(3x-4)\right)' = (3x-4)' \times -\sin(3x-4) = -3 \times \sin(3x-4)$$

Donc pour tout réel $t'(x) = -3\sin(3x-4)$.

- $s(x) = \sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$, pour tout réel.

$$s'(x) = \left(\sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)\right)' = \left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)' \times \cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) = 5 \times \cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Donc pour tout réel $s'(x) = 5\cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Remarque 6:

Voici ci-dessous les tableaux récapitulatifs de la dérivée des fonctions auxiliaires et les opérations sur les fonctions.

Fonctions	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité.
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$	$x \mapsto n \times x^n$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;\ +\infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku\ \ (k \in \mathbb{R})$	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$u^n\ \ (n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$

Exercice d'application 3 :

1. Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

   $f\ (x) = -\frac{5x+2}{3x+4}$. $\qquad g(x) = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$. $\qquad h(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$ $\qquad q(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que : $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.
3. Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$.
   a) Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$.
   b) Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de f.

LEÇON 3 : APPLICATIONS DE LA DERIVATION.

1. Sens de variation d'une fonction.

Activité 1 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle K, x_0 élément de K. Pour tout $x \in K\{x_0\}$ on pose $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

1. On suppose que la fonction f est croissante sur K. Justifier que $x \in K\backslash\{x_0\}$ $\quad g(x)\ \geq 0$.
2. On suppose que la fonction f est décroissante sur K. Justifier que $x \in K\backslash\{x_0\}$ $\quad g(x)\ \leq 0$.

Résumé 1 :

Sens de variation.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K $(x \in K, f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K. $(x \in K, f'(x) \leq 0$
- f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K. $(x \in K, f'(x) = 0$

Monotonie d'une fonction.

- On dit qu'une fonction f est monotone sur K, si f' garde un signe constant sur K, donc f est monotone si f est soit croissante soit décroissante sur K.
- Si f' a un signe constant sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d'élément de K, alors on dit que f est strictement monotone.

Exemple 1 :

Etudions les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est la fonction définie sur par :

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

Ainsi le tableau de signe de $f'(x)$ est la suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a :

- f est croissante sur $]-\infty; -1[$.
- f est décroissante sur $]-1; 1[$.
- f est croissante sur $]1; +\infty[$.

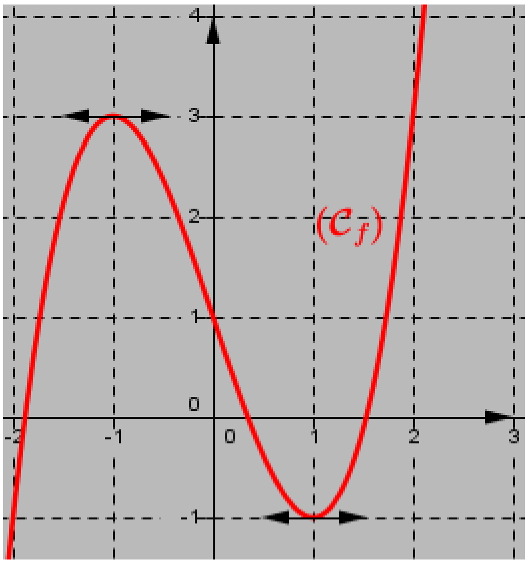
Exercice d'application 1 :

3. Extrema d'une fonction sur un intervalle. Tableau de variations d'une fonction numérique sur un ensemble donné.

Activité 2 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Donner les variations de f et déduire le signe de f' (dérivée de f).
2. Quelle est l'abscisse du point de $(\mathcal{C}_f)$, de l'intervalle $[0; 2]$ d'ordonnée minimale ?
3. Dresser le tableau de variation de f.



Résumé 2:

Soit f une fonction dérivable dans l'intervalle K. Soit x_0 appartenant à K.

1) Extremum relatif en x_0.

- On dit que f admet **un maximum relatif en x_0** s'il existe un intervalle ouvert I, inclus dans K et contenant x_0 tel que pour tout x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
- On dit que f admet **un minimum relatif en x_0** s'il existe un intervalle ouvert I, inclus dans K et contenant x_0 tel que pour tout x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.
- On dit que f admet **un extremum relatif en x_0 si f admet un maximum ou un minimum relatif en x_0.**

2) Extremum relatif en x_0 et dérivation.

Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	M	↘	

***f* admet un maximum relatif M en x_0**

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	m	↗	

***f* admet un minimum relatif m en x_0**

Exemple 2 :

Dressons le tableau de variation de la fonction f définie dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ par : $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$.

- $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
- **Pour tout réel $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, f est continue et dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.**

  On a : $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+2}{x-2}\right)' = \frac{(x^2-x+2)'\times(x-2)-(x^2-x+2)\times(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x+2)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

  Pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

- **Variations de f sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.**
  - Pour tout $\in]-\infty;0[$, $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante.
  - Pour tout $x\in]0;2[$, $f'(x)<0$, donc f est strictement décroissante.
  - Pour tout $\in]2;4[$, $f'(x)<0$, donc f est strictement décroissante.
  - Pour tout $\in]4;+\infty[$, $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- **Tableau de variation de f sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$**

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice d'application 2 :

1) Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

   Déterminer a et b pour que la représentation graphique de f :

- Passe par $A(0;3)$.
- admette en A une tangente d'équation $y=4x+3$

2) Soit a un nombre réel. On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x^3+ax^2+3$.

   a) Déterminer a pour que la représentation graphique de f admette au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   b) Etudier les variations de la fonction ainsi obtenue et préciser ses extremums.

Chapitre 11

ETUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

Plan du Chapitre :

Dans les chapitres qui ont précédé celui-ci, nous avons mis en place les outils essentiels nous permettant d'y arriver : limites, asymptotes, continuités, dérivées. Aussi, proposons-nous de compléter ces outils en étudiant et en représentant quelques fonctions.

- **Motivations :**

  – Mettre en évidence la dépendance entre des quantités ;
  – Décrire la dépendance entre des quantités ;
  – Déterminer une quantité à partir d'une autre ;
  – Comparer plusieurs quantités ;
  – Modéliser afin d'interpoler et d'extrapoler.

- **Objectifs pédagogiques :**

  Etudier et tracer la courbe représentative d'une fonction :

  ❶ Polynômiale ; Homographique ; Rationnelle.

  Exploiter la courbe représentative d'une fonction pour déterminer :

  ❷ L'ensemble de définition ; le sens de variation et le tableau de variation ;

  ❸ Les asymptotes éventuelles et les éléments de symétrie.

1.1 Plan d'étude d'une fonction.

- **Pré-requis**

1. Calculer les limites des fonctions suivantes :
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2};\ \lim_{x\to+\infty}\left[-x+2+\frac{1}{x}-(-x+2)\right];\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+3}.$$
2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$$f(x)=\frac{x^2-x-8}{x+3};\qquad g(x)=x-4+\frac{4}{x+3}.$$

a- Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. g est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x)=\dfrac{x^2-x-8}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. Calculer les limites de g aux bornes de D_g.
2. Montrer que $\forall x\in D_g,\ g(x)=x-4+\dfrac{4}{x+3}$. En déduire $y=x-4$ est asymptote oblique à (C).
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $h(x)=g(x)-y$. En déduire la position relative de g par rapport à l'asymptote oblique.
4. Calculer g', dérivé de la fonction g puis étudier suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$.
5. Compléter le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		‖	$-$	0		
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘	‖		-3	↗	$+\infty$

6. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
7. Soit I le point d'intersection des asymptotes. Déterminer les coordonnées de I et montrer que I est centre de symétrie à la courbe de f.
8. Représenter (C) et (T).

b- Méthode : Plan d'étude d'une fonction

De manière générale, étudier une fonction consiste à :

- Préciser l'ensemble de définition de la fonction lorsqu'il n'est pas précisé dans l'énoncé ;
- Etudier éventuellement la parité ou la périodicité de la fonction surtout lorsque la réponse à cette question paraît être positive et évidente à obtenir ; dans ce cas :
  - Réduire l'intervalle d'étude,
  - Préciser les éléments de symétrie à la courbe de la fonction.
- Calculer la dérivée de la fonction et en déduire le sens de variation de la fonction ; préciser éventuellement les asymptotes à la courbe.
- Consigner tous les résultats précédents dans le tableau de variation de la fonction.
- Rechercher éventuellement les points remarquables à la courbe de la fonction (points d'intersection avec les axes de coordonnées, points anguleux, ...).
- Compléter ces points avec d'autres points judicieusement choisis suivant l'ensemble de définition ou le domaine d'étude pour bien tracer la courbe.
- Tracer les tangentes et asymptotes éventuelles, puis construire la courbe de la fonction en mettant éventuellement en évidence les éléments de symétrie.

c- Exercice d'application

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes : *a*) $f : x \mapsto -x^2$ *b*) $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$.

1.2 Etude d'une fonction polynôme

• Pré-requis

1. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$:
   a. $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ **b.** $f : x \mapsto -2x^2 + 4x - 1$
   c. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ **d.** $f : x \mapsto -x^4 + 2x + 4$
2. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f :
   a. $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ **b.** $f : x \mapsto -2x^2 + 4x - 1$
   c. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ **d.** $f : x \mapsto -x^4 + 2x + 4$

a-Activité

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $(C)_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Calculer f', dérivée de la fonction f puis étudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f.
4. Construire $(C)_f$.

Résolution

- **Ensemble de définition.**
  La fonction f est une fonction polynôme ; elle est définie et continue en tout point de $\mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.
- **Dérivée et sens de variation.**
  f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3x$. On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$. Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau ci-après.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

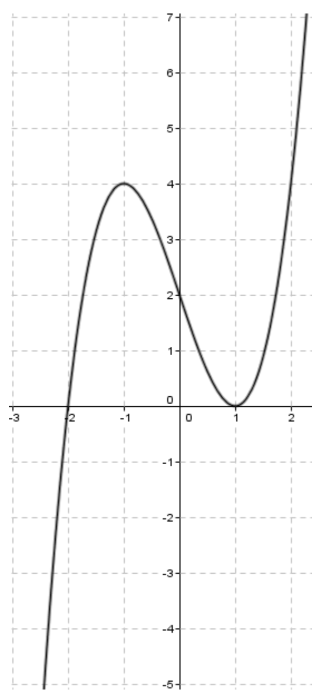
  Ainsi, d'après le théorème sur le sens de variation et la dérivée, on en déduit :
  f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-1; 1[$.
- **Limites aux bornes de l'ensemble de définition.**
  On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = +\infty$
- **Tableau de variation.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **Table des valeurs**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	4	2	0	3

- **Courbe représentative**



T.A.F

1. Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$
   b. $g : x \mapsto -2x^3 - x + 2$
   c. $h : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
   d. $i : x \mapsto -x^4 + 2x + 4$
2. En déduire la construction de la courbe (C') représentative de la fonction :
   a. $|f(x)|$
   b. $g(x-1) + 2$
   c. $h(-x)$
   d. $-i(x)$

1.3 Etude d'une fonction homographique

• Pré-requis

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2 - x - 8}{x+3}$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2 - x - 8}{x+3}$

a-Activité

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et $(C)_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Préciser éventuellement les asymptotes à $(C)_f$.
3. Calculer f', dérivée de la fonction f puis étudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f.
5. Construire $(C)_f$.

Résolution

– **Ensemble de définition.**
Le calcul du réel $f(x)$ n'est pas possible quand $x - 1 = 0$, c'est-à-dire quand $x = 1$.
L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} - \{1\}$, c'est-à-dire $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty.[$
La fonction f est une fonction rationnelle, donc elle est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

– **Dérivée et sens de variation.**
La fonction f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction définie par :

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
Limites aux bornes du D_f.
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
On a : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Donc, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

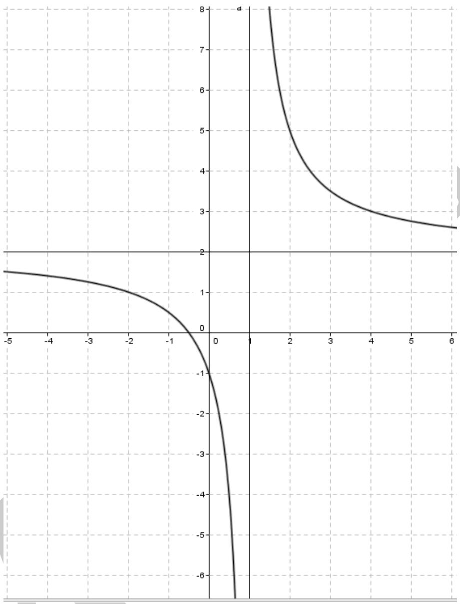
– **Tableau de variation.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

– **Table des valeurs**

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0

– **Courbe représentative**



T.A.F

1. Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto \dfrac{x-3}{x-2}$ **b.** $g : x \mapsto \dfrac{x+3}{x-1}$
2. En déduire la construction de la courbe (C') représentative de la fonction :
   a. $|f(x)|$ **b.** $g(x-1)+2$

1.4 Etude d'une fonction rationnelle

• Pré-requis

a-Activité

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x-1}$ et $(C)_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Préciser éventuellement les asymptotes à $(C)_f$.

3. Calculer f', dérivée de la fonction f puis étudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f.
5. Construire $(C)_f$.

Résolution

- **Ensemble de définition.**
  Le calcul du rée $f(x)$ n'est pas possible quand $2x-1=0$, c'est-à-dire quand $x=\dfrac{1}{2}$.
  L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}-\{\dfrac{1}{2}\}$, c'est-à-dire $]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty.[$
  La fonction f est une fonction rationnelle, donc elle est continue sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.
- **Dérivée et sens de variation.**
  La fonction f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ et sa dérivée est la fonction définie par :

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

  On a : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.
  Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau ci-après

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

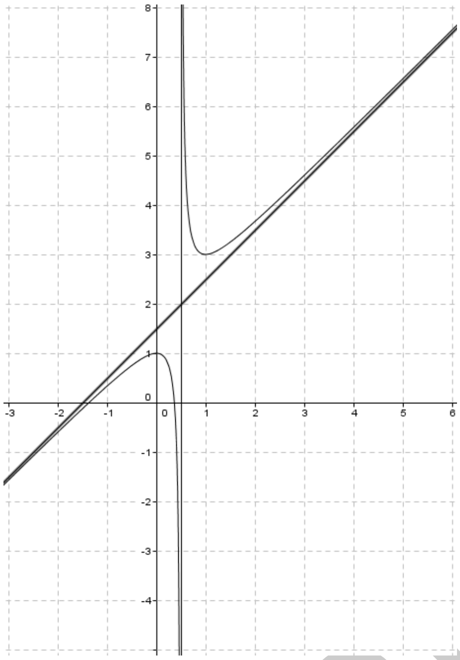
  Ainsi, d'après le théorème sur le sens de variation et la dérivée, on en déduit : f est strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2};1[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.
  Limites aux bornes du D_f.
  On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2x-1}\right]=0$.
  et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2x-1}\right]=0$.
  Donc la droite d'équation $y=x+\dfrac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.
  On a : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$.
  Donc, la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
- **Tableau de variation.**

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- **Table des valeurs**

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{23}{5}$

– **Courbe représentative**



T.A.F

Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x - 2 + \frac{1}{x-1}; \qquad g : x \mapsto -x + 2 + \frac{1}{x}.$$

1.5 Exploitation d'un tableau de variation : Travaux dirigés

Soit f la fonction numérique dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$			2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$		$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

On appelle (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et donner les limites aux bornes de D_f.
2. Donner l'équation cartésienne d'une asymptote (d) à (C).
3. Déterminer les réels $f(1)$, $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ où f' est la dérivée de f.
4. En déduire les réels a, b et c tels que

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x - 3}$$

pour tout $x \in D_f$.

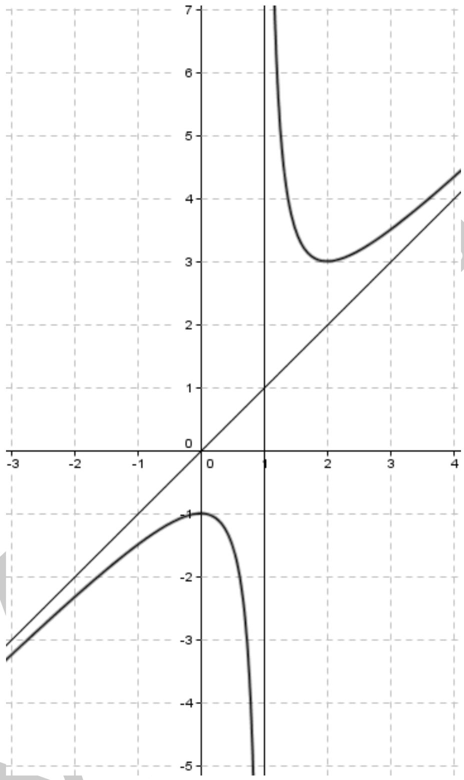
On admet par la suite que

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 2}{2x - 3}.$$

5. Montrer que la droite (d') d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) et (d').
6. Tracer $(d), (d')$ et (C).
7. Montrer que le point $I\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ est centre de symétrie de (C).

1.6 Exploitation d'une courbe représentativé : Travaux dirigés

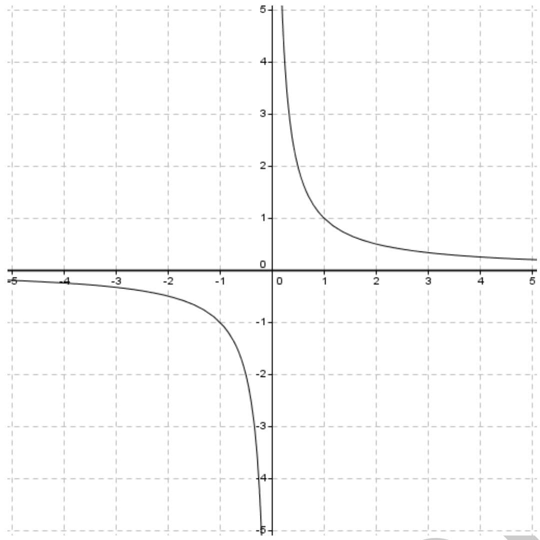
La courbe (C_f) ci-dessous représente une fonction numérique f dans le repère orthonormé (O, I, J).



1. Déterminer par conjecture, l'ensemble D_f de définition de f.
2. Déterminer par conjecture les limites de f aux bornes de D_f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation cartésienne de chacune des asymptotes à (C_f).
5. Récopier et compléter le tableau ci-dessous :

Equation ou inéquation	$f(x) < 1$	$f(x) = 0$	$f(x) \geq 0$
Ensemble des solutions	$S_1 =$	$S_2 =$	$S_3 =$

1.7 Etude de la représentation graphique de la fonction dérivée d'une fonction : Travaux dirigés



La courbe (Γ) ci-dessous est la représentation graphique est la représentation graphique de la fonction dérivée d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.

1. Donner le sens de variation de f.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x}$.

1.8 Etude d'une fonction paramétrique : Travaux dirigés

Soit f_m la famille de fonctions de la variable réelle x définies par :

$$f_m(x) = \frac{4mx^2 - 10x - 1}{2mx - 5}$$

On note par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m.
   (b) Calculer les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par le point $A\left(0; \dfrac{1}{5}\right)$.
   (b) Déterminer les valeurs de m pour laquelle (C_m) est une droite.
3. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C_m).
4. Calculer $f'_m(x)$.
5. Etudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.
6. (a) resser les tableaux de variation de f_1 et f_{-1}.
   (b) Tracer (C_1) et (C_{-1}).

1.9 Etude d'une fonction trigonométrique (facultatif) : Travaux dirigés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \cos x + \cos 2x$.

1. Justifier qu'il est suffisant d'étudier f sur $[0; \pi]$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire la résolution dans $[0; \pi]$ de l'équation $f'(x) = 0$, puis de l'inéquation $f'(x) > 0$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
4. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f aux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Tracer $(\mathcal{C})$ sur $[-3\pi; 3\pi]$.

COURS SUR LE DÉNOMBREMENT

EFOUBA EKASSI Rucène, PLEG MATHS

Aout 2019

Chapter 1

DÉNOMBREMENT

- **Intérêt:** utiliser les outils mathématiques conventionnels pour mieux déterminer le nombre de possibilités dans une expérience de dénombrement.
- **Motivation:** être bien préparer pour des expériences de jeu de hasard pour éviter de se faire tromper ou escroquer par des promoteurs de ces jeux.

On considère les ensembles suivants: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$ et $C = \{0, 1, 6, 67, 54\}$. A est un ensemble infini non dénombrable, B est un ensemble infini et dénombrable et C est un ensemble fini. Un ensemble fini est donc un ensemble dont on connait le nombre d'éléments et le nombre d'éléments d'un ensemble est encore appelé **cardinal** de cet ensemble. Par exemple $card(C) = 5$. Il est question dans ce chapitre de déterminer les cardinaux d'ensemble finis (dénombrer) en utilisant des outils adéquats.

Dénombrer c'est donc énoncer pour en avoir un compte exact les personnes ou les choses qui forment un ensemble fini.

1.1 Leçon 1: Premiers outils de dénombrement

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de dénombrer avec

- relation entre les parties d'un ensemble fini
- les arbres de choix, les tableaux à double entrée
- les produits cartésiens

Situation problème 1.1.1 *:*
L'enseignant de Njoya lui propose le problème suivant: "dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun des deux sports. Combien de personnes pratiquent-elles à la fois le tennis et la natation?". En cas de solution juste, l'enseignant promet à Njoya un menu dans un restaurant où on propose les plats suivants:

- *Entrées: une salade (S), une purée d'avocats (P) comme entrées*
- *Résistance: koki (K), pilé (Pi) et Njapche (N)*
- *Desserts: Ananas (A), Orange (O) et Mangue (M).*

1. *Quelle solution doit proposer Njoya pour avoir cette récompense?*
2. *Quel est le nombre de menus possibles en cas de solution juste pour Njoya?*

1.1.1 Relation entre les parties d'un ensemble fini

Activité 1.1.1 *:*
On donne les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 5, 9, 8\}$ *et* $B = \{2, 5, 8, 0, 4\}$.

1. *Quels sont les cardinaux de chacun de ces ensembles? Que représentent les ensembles A et B pour l'ensemble E.*
2. *Déterminer l'ensemble $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B.*
3. *Déterminer l'ensemble $A \cap B$ des éléments qui sont dans A et dans B.*
4. *Comparer $card(A \cup B)$ avec $card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.*

5. *Déterminer l'ensemble $\bar{A}$ des éléments qui ne sont pas dans A et l'ensemble $A - B$ des éléments de A qui ne sont pas dans B.*

6. *Comparer $card(\bar{A})$ et $card(E) - card(A)$, puis $card(A - B)$ et $card(A) - card(A \cap B)$.*

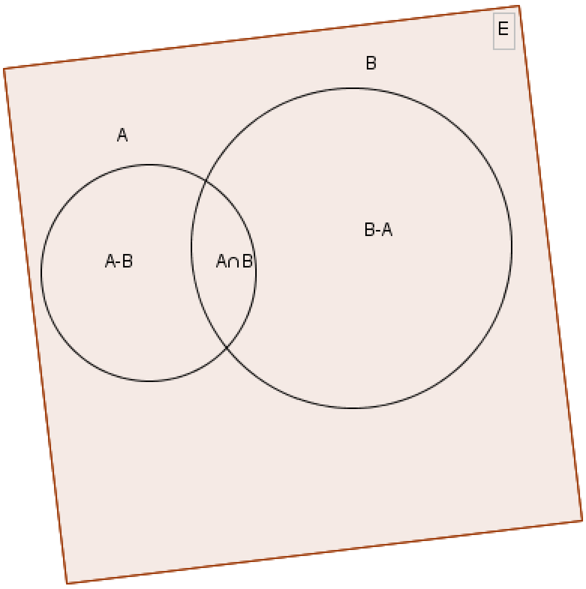
Résumé 1.1.1 *:*
Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E.

- *A est une partie de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E et dans ce cas $card(A) \leq card(E)$.*
- *$A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.*
- *$A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B.*
- *$\bar{A}$ ou complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.*
- *$A - B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.*

Propriété 1.1.1 *:*
On a les propriétés suivantes sur les parties d'un ensemble fini:

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- $car(\bar{A}) = card(E) - card(A)$
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$.

Ces propriétés peuvent se représenter par le diagramme suivant appelé: **diagramme de Venn**



Application 1.1.1 *:*

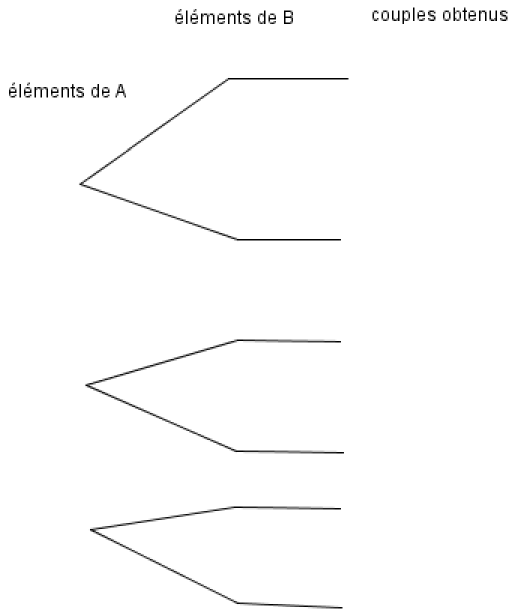
1. *Dans une classe de 3e, Tous les élèves étudient au moins l'espagnol et l'allemand. 30 étudient l'espagnol, 20 étudient l'allemand et 15 étudient l'espagnol et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de cette classe?*

2. *dans une classe 3 langues sont pratiquées, On sait que 20 élèves font l'anglais, 15 l'allemand, 18 l'espagnol, 7 l'anglais et l'allemand, 9 l'allemand et l'espagnol, 8 l'anglais et l'espagnol et enfin 5 pratiquent les trois langues. Quel est le nombre d'élèves de la classe sachant que chacun fait au moins une langue?*

1.1.2 Produit cartésien

Activité 1.1.2 *:*
On donne les ensembles A et B suivants: $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$.

1. *Complète en colonnes (sur chaque croisement de segment) l'arbre de choix suivant:*



2. *Déterminer l'ensemble $A \times B$ de tous les couples $(x; y)$ tels que $x \in A$ et $y \in B$.*

3. *Comparer $card(A \times B)$ et $card(A) \times card(B)$.*

Résumé 1.1.2 *:*

Definition 1.1.1 *:*
Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis. On appelle $E_1 \times E_2$ (produit cartésien de E_1 et E_2) l'ensemble des couples $(x_1; x_2)$ tels que $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
Le nombre d'éléments de $E_1 \times E_2$ est $card(E_1 \times E_2) = card(E_1) \times card(E_2)$.
De manière générale, soient E_1, E_2,...,E_n,n ensembles finis. On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times .... \times E_n$ l'ensemble des éléments sous la forme $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,..., $x_n \in E_n$. Et on a:
$card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_n)$.

Remarque 1.1.1 *:*
Les éléments d'un produit cartésien peuvent s'obtenir, lorsque les cardinaux sont faibles, en établissant un arbre de choix.

Application 1.1.2 *:*

1. *Une femme a dans sa garde robe: 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle ainsi s'habiller?*

2. *Deux groupes de 12 et de 15 décide de faire la paix en échangeant des poignées de mains. Chaque membre d'un groupe serre la main de tous les membres de l'autre groupe. Combien de poignées de mains seront-elles échangées?*

1.1.3 Tableau à double entrée

Activité 1.1.3 *:*
dans une classe de 50 élèves: 24 ont 16 ans, 14 ont 17 ans et les autres ont plus de 17 ans. 23 élèves ont opté pour l'espagnol comme deuxième langue et les autres ont opté pour l'allemand. 13 élèves de 16 ans font l'espagnol, 10% des élèves de plus de 17 ans font l'allemand.

1. *Complète le tableau suivant:*

Ages/2e langue				*Total*
Total				*50*

2. *Comment appelle t-on ce type de tableau?*

3. *Combien d'élèves n'ont pas 16 ans et ne font pas l'espagnol?*

Résumé 1.1.3 *:*
Dans certains cas pour facilement dénombrer, on peut utiliser un tableau à double entrée.

Application 1.1.3 *:*
une tentative d'homicide a eu lieu au cours d'un bal. La police a arrêté 18 suspects et leur a demandé de répondre par oui ou par non à chacune des questions suivantes:
"Avez vous entendu une détonation?" et "Avez vous vu quelqu'un s'enfuir?".
10 personnes ont répondu "oui" à la première question, 5 personnes ont répondu non à la deuxième question et 6 personnes ont répondu "non" aux deux questions. Quel est le nombre de personnes ayant répondu "oui" aux deux questions?

1.2 Leçon 2: P-uplets avec ou sans répétition

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaître un p-uplet ou un p-arrangement
- dénombrer avec les p-uplets et les p-arrangements
- reconnaitre une permutation et dénombrer avec les permutations

Situation problème 1.2.1 *:*
Pour ouvrir un coffre fort urgemment, Pemboura doit utiliser un code de 4 chiffres en se servant de 3 indices qui lui arrivent avant chaque tentative ratée:

- *indice 1: les chiffres peuvent se répéter dans le code*
- *indice 2: les chiffres ne peuvent pas se répéter dans le code*
- *indice 3: les chiffres qui composent le code sont 1;4; 7 et 9.*

1. *Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 1?*
2. *Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 2?*
3. *Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 3?*

1.2.1 P-uplets avec répétition

Activité 1.2.1 *:*
Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. *Détermine tous les couples* $(x; y)$ *tels que* $x, y \in E$. *Quel est le nombre total de couples obtenu?*
2. *Dans ces couples: l'ordre importe t-il? Peut-il avoir répétition?*
3. (a) *Combien de possibilités y a t-il pour le choix de* x*?*
   (b) *Combien de possibilités y a t-il pour le choix de* y*?*
   (c) *En déduire une astuce pour déterminer le nombre de couples* $(x; y)$.

Résumé 1.2.1 *:*

Definition 1.2.1 *:*
Soit E *un ensemble à* n *éléments et soit* $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. *On appelle* ***p-uplet*** *de* E *tout élément sous la forme* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *tels que* $x_1, x_2, ..., x_p \in E$. *Le nombre de p-uplets de* E *est donc* n^p.

Remarque 1.2.1 *:*

- *Un p-uplet de* E *est aussi un élément du produit cartésien* $E \times E \times \times ... \times E$ p *fois qui se note encore* E^p.
- *Dans ce type de p-uplet:*
  - *l'ordre importe*
  - *il peut avoir répétition*

Application 1.2.1 *:*

1. *Soit* E *un ensemble à* n *éléments. Quel est le nombre possible d'applications de* E *vers* E*?*
2. *Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10 indiscernables au toucher. on tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles?*
3. *les numéros d'immatriculation d'une compagnie sont composés de deux lettres suivies de 4 chiffres non nuls. les lettres sont prises dans l'ensemble des lettres A, B, C et D. Quel est le nombre de numéros d'immatriculations possibles?*

1.2.2 P-arrangement ou p-uplets sans répétition

Activité 1.2.2 *:*
Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. *Détermine tous les couples* $(x; y)$ *tels que* $x, y \in E$ *et* $x \neq y$. *Quel est le nombre total de couples obtenu?*
2. *Dans ces couples: l'ordre importe t-il? Peut-il avoir répétition?*
3. (a) *Combien de possibilités y a t-il pour le choix de* x*?*
   (b) *Combien de possibilités y a t-il pour le choix de* y*?*
   (c) *En déduire une astuce pour déterminer le nombre de couples* $(x; y)$.

Résumé 1.2.2 *:*

Definition 1.2.2 *:*
Soit E *un ensemble à* n *éléments et soit* $p \leq n$. *On appelle p-arrangement de* E *ou* $p-$*uplet sans répétition, tout* $p-$*uplet de* E *à éléments deux à deux distincts c'est à dire les éléments sous la forme* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *tels que* $x_i \in E$ *et* $x_i \neq x_j$ *pour* $i \neq j$ *et* $1 \leq i, j \leq p$.
Le nombre de $p-$*arrangements de* E *est noté* A_n^p *et on a:* $A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$. *(On retranche 1 jusqu'à atteindre* p *facteurs).*

Exemple 1.2.1 *:*

- $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$
- $A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9$

Remarque 1.2.2 *:*
Dans le cas des arrangements:

- *l'ordre importe*
- *Il n' y a pas de répétition possible*

Application 1.2.2 *:*

1. *Soit* E *un ensemble à* n *éléments. Quel est le nombre d'applications injectives de* E *vers* E*?*
2. *Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire au hasard, successivement et sans remise 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles?*
3. *Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On veut constituer un bureau de 5 personnes à 5 fonctions (président, vice président, secrétaire, trésorier et censeur) différentes dans cumul de fonctions.*
   (a) *Quel est le nombre de bureaux possibles à former?*
   (b) *Quel est le nombre de bureaux possibles:*
      i. *Où Christian est présent?*
      ii. *Où Christian est Trésorier?*
      iii. *Où Christian et Claude ne sont pas présents?*
      iv. *Où Claude et Claude ne se retrouvent pas ensemble?*

1.2.3 Permutations

Activité 1.2.3 *:*
Soit $E = \{1, 2, 3\}$.

1. *Détermine toutes les permutations des éléments de* E. *Quel est le nombre de permutations obtenu?*
2. (a) *Combien de possibilités y a t-il pour le choix du premier élément d'une permutation?*
   (b) *combien de possibilités y a t-il pour le choix du deuxième élément d'une permutation?*
   (c) *combien de possibilités y a t-il pour le choix du troisième élément d'une permutation?*
   (d) *En déduire une astuce pour avoir le nombre de permutations de* E.

Résumé 1.2.3 *:*

Definition 1.2.3 *:*
Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout $n-$ arrangement de E.
Le nombre de permutations de E est noté $n! = n(n-1)(n-2)...2 \times 1$.

Propriété 1.2.1 *:*

- *Par convention:* $0! = 1$ *et* $1! = 1$
- $n! = n(n-1)!$
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 1.2.2 *:*

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3!$ *ou* $7! = 7 \times 6 \times 5!$ *selon qu'on veut simplifier.*
- $A_7^2 = \dfrac{7!}{(7-2)!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$.

Application 1.2.3 *:*

1. *Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{N}$: $A_n^3 = 72n$; $A_n^4 = 42A_n^2$.*
2. *Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombres d'applications bijectives de E vers E?*
3. *Quel est le nombres d'anagrammes du mot: PRISÉE? (On distinguera les cas où on tient compte de l'accent et le cas où on n'en tient pas compte).*
4. *12 présidents doivent s'assoir sur 12 chaises dans un restaurant.*
   (a) *Quel est le nombre de dispositions possibles?*
   (b) *Quel est le nombre de dispositions si l'un des présidents a sa chaise réservée?*

1.3 Leçon 3: p-combinaison et binôme de Newton

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaitre une combinaison d'un ensemble
- dénombrer avec des combinaisons
- utiliser le triangle de Pascal pour développer et réduire

Situation problème 1.3.1 *:*
Dans une soirée rassemblant 10 personnes, chaque invité échange une poignée de mains avec chacun de ses convives. Après ces échanges, ils décident de faire un jeu de cache-cache en se séparant en plusieurs groupes.

1. *Combien cela fait-il de poignées de mains?*
2. *Combien cela fait-il de groupes possibles?*

1.3.1 p-combinaison

Activité 1.3.1 *:*
Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. *Détermine toutes les parties de E à 2 éléments. Combien y en a t-il au total?*
2. *Dans ces parties l'ordre importe-il? y a t-il répétition d'éléments?*
3. *Calcule $\dfrac{A_4^2}{2!}$ en utilisant les simplifications factorielles vues aux arrangements.*
4. *Quelle remarque faites vous?*

Résumé 1.3.1 *:*
Soit E un ensemble à n éléments et soit $p \leq n$. On appelle ***p-combinaison*** *de E toute partie de E ayant p élément(s). Le nombre de p-combinaisons de E est noté C_n^p et on a: $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.*

Propriété 1.3.1 *:*
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$.

- $C_n^0 = 1$ *et* $C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Exemple 1.3.1 *:*

- $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35.$
- $C_{12}^4 = \dfrac{12!}{4!8!}$

Remarque 1.3.1 *:*
Dans le cas des combinaisons:

- *L'ordre n'importe pas*
- *Les éléments sont deux à deux distincts (pas de répétition)*

Application 1.3.1 *:*

1. *Résoudre les équations suivantes: $C_n^2 = 190$; $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$*
2. *On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On obtient ainsi une main de 5 cartes.*
   (a) *Dénombrer les mains possibles*
   (b) *Dénombrer les mains contenant:*
      i. *exactement deux as*
      ii. *au moins un as*
      iii. *l'as de pique et au moins deux trèfles*
      iv. *3 cartes d'une couleur et deux autres d'une autre.*

1.3.2 Binôme de Newton

Activité 1.3.2 *:*

1. *Développer $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$*
2. *Calculer $\sum_{p=0}^{2} C_2^p a^p b^{2-p}$ et $\sum_{p=0}^{3} C_3^p a^p b^{3-p}$.*
3. *Quelles remarques faites vous?*

Résumé 1.3.2 *:*
Pour développer $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$,on peut utiliser le binôme de Newton qui stipule que: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ les coefficients du développement étant les C_n^p.
On peut résumer ces coefficients à l'aide du triangle de Pascal suivant:
0 1
1 1 1
2 1 2 1
3 1 3 3 1
4 1 4 6 4 1

Remarque 1.3.2 *:*
Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de partie de E à 0 élément est: C_n^0
Le nombre de parties de E à 1 élément est: C_n^1
Le nombre de parties de E à 2 éléments est: C_n^2
Le nombre de parties de E à $n-1$ éléments est: C_n^{n-1}
Le nombre de parties de E à n éléments est: C_n^n.
Ainsi, le nombre de parties de E est: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (1)^p (1)^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$.

Application 1.3.2 *:*

1. *Quel est le nombre de parties de l'ensemble* $A = \{0, 1, 6, 8, 89, 45\}$*?*
2. *Développer et réduire* $(a-1)^5$ *et* $(1-\sqrt{3})^6$.

<u>Module 23</u> : Configuration et transformations élémentaires du plan

<u>CHAPITRE 13</u> : *TRIGONOMETRIE*

<u>Motivation</u> :

La trigonométrie nous donne les outils nécessaires pour le calcul des longueurs dans les triangles rectangles. Mais plus encore elle a des applications dans plusieurs domaines de la vie tels que la cartographie, la construction, la topographie, la physique, etc…

Leçon 1 : *Angles orientés*

<u>Objectifs</u> :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

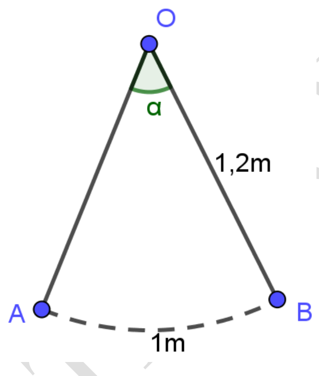
- Déterminer une mesure d'un angle orienté.
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté.
- Utiliser les propriétés des angles orientés.
- Caractériser un cercle à l'aide des mesures d'angles orientés.

<u>Situation de problème</u> :

Le délégué du gouvernement de l'Ouest décide de construire un grand pendule au cœur de sa ville pour l'embellir un peu plus. Le balancier de ce pendule mesure $1,2m$ et oscille de gauche à droite suivant un arc de $1m$.

Calculer l'angle (en degrés) parcouru par le balancier durant une oscillation.

<u>Activité d'apprentissage</u> :



Soit la figure ci-contre.

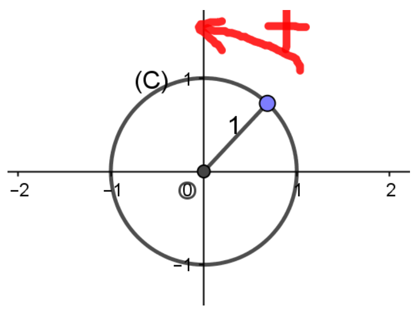
Calculer la valeur de α

<u>Résumé</u> :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On rappelle que :

- Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.
- Le **sens positif de rotation** est celui contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre.



Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non nuls du plan. On appelle **mesure principale de** $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'unique réel $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

On note encore $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ et on lit « mesure $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ congru à α modulo 2π.

Exemple : Déterminons la mesure principale de chacun des angles suivants :

$\frac{59\pi}{3}$; $\frac{87\pi}{5}$; $-\frac{1961\pi}{8}$; $-\frac{110\pi}{9}$

Déterminons la mesure principale de $\frac{59\pi}{3}$

1ère méthode : par encadrement

Soit α la mesure principale de $\frac{59\pi}{3}$, alors $\alpha = \frac{59\pi}{3} + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

De plus, $\alpha \in]-\pi; \pi] \Leftrightarrow -\pi < \alpha \leq \pi$

$$\Leftrightarrow -\pi < \frac{59\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \frac{59\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{59\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{62\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{56\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{62}{6} < k \leq -\frac{56}{6}$$

$$\Leftrightarrow k = -10$$

D'où $\alpha = \frac{59\pi}{3} + 2(-10)\pi = -\frac{\pi}{3}$

2e méthode : par division

$\frac{87\pi}{5} = \frac{100\pi - 3\pi}{5} = 20\pi - \frac{3\pi}{5} = 2(10)\pi - \frac{3\pi}{5}$

Donc la mesure principale de $\frac{87\pi}{5}$ est $-\frac{3\pi}{5}$

Attention : $\frac{87\pi}{5} = \frac{85\pi+2\pi}{5} = 17\pi + \frac{2\pi}{5}$. Mais 17π ne peut se mettre sous la forme $2k\pi$

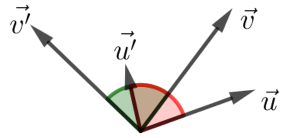
Propriétés des angles orientés

P_1 / Deux angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.

P_2 / **Relation de Chasles**

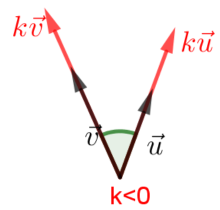
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs non nuls. On a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

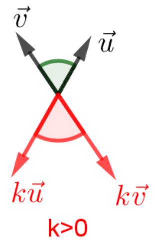
P$_3$ / Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ 4 vecteurs non nuls. On a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'},\vec{v'}}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{u'}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{v'}})$.



P$_4$ / Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs du plan ; k un nombre réel. On a :

- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$
- Si $k > 0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- Si $k < 0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$
- $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$





Exemple : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non nuls du plan. On pose $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \alpha$.

Exprimons en fonction de α les angles suivants :

1) $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}})$; 2) $(\widehat{-\vec{u},\vec{v}})$; 3) $(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}})$; 4) $(\widehat{2\vec{u},3\,\vec{v}})$

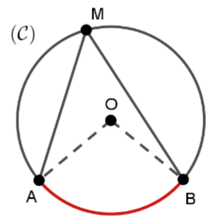
P$_5$ / **Angles orientés et cercle**

Soient $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A, B, C et D 4 points distincts du plan.

- **Caractérisation d'un cercle**

Soit A et B 2 points de $(\mathcal{C})$. Soit M un point du plan distinct de A et B.

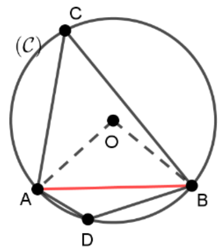
$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$$



- **Points cocycliques**

Soient A, B, C et D 4 points distincts du plan dont 3 quelconque d'entre eux ne soient pas alignés.

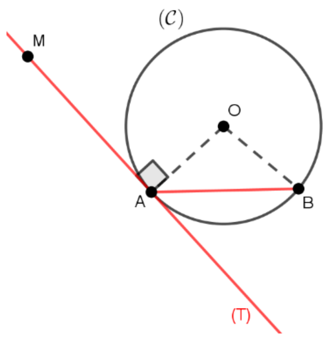
A, B, C et D sont cocycliques ssi $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$



- **Caractérisation d'une tangente à un cercle**

Soient A et B 2 points de $(\mathcal{C})$. Soit (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ en A. Soit T un point quelconque du plan.

$$T \in (T) \Leftrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right).$$



Preuve : à faire en exercice

<u>Exercices d'application</u> :

Leçon 2 : *Trigonométrie*

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique.

<u>Objectifs</u> :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Déterminer par lecture graphique le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle.

- Maitriser les angles associés.
- Exprimer $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $cosa$, $cosb$, $sina$ et $sinb$.
- Ecrire $acosx + bsinx$ sous la forme $Acos(x+\varphi) = Asin\left(\frac{\pi}{2} - x - \varphi\right)$
- Exprimer $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ en fonction de $tana$ et $tanb$

Situation de vie :

Un moniteur de sport pour tous emmène ses adhérents faire un jogging en pleine nature. Au pied d'une colline il leur dit : « si nous parcourons cette colline horizontalement sur 1km, nous passerons de l'altitude actuelle qui est de $230m$ à une altitude de $340m$. »

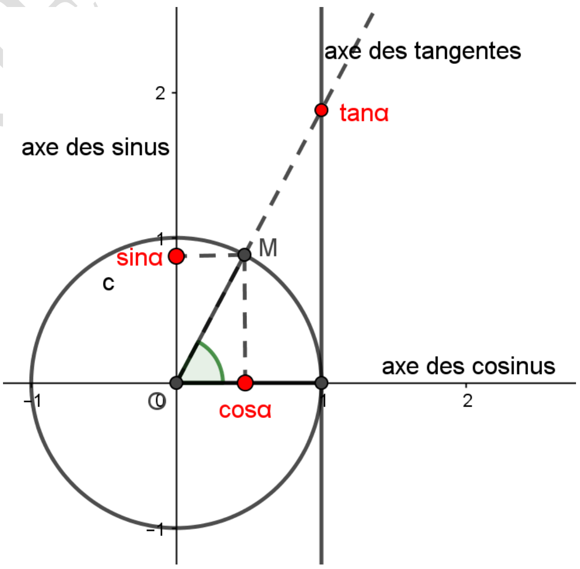
Calculer la distance réelle parcourue par ces joggeurs.

Activité d'apprentissage :

1- Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, placer les points $A(100;\ 230)$, $B(1100, 340)$ et $C(1100, 230)$ (unité sur les axes $1cm$ pour 100 axe des abscisses et $1cm$ pour 50 axe des ordonnées)
2- Calculer la distance AB.

Résumé :

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur $(\mathcal{C})$.



- On appelle **cosinus de l'angle** $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α noté $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $cos\alpha$ **l'abscisse du point M.**
- On appelle **sinus de l'angle** $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α noté $sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $sin\alpha$ **l'ordonnée du point M.**
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ n'est pas un angle droit, on appelle **tangente de** $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou α noté $tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $tan\alpha$ le réel défini par $\boldsymbol{tan\alpha} = \frac{\boldsymbol{sin\alpha}}{\boldsymbol{cos\alpha}}$

Question : pourquoi α doit-il être different de $\frac{\pi}{2} + k\pi$?

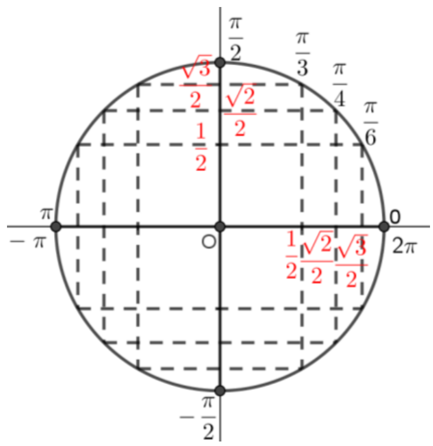
Remarque :

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif k, on a :

(1) $tan(\alpha + k\pi) = tan\alpha$ (2) $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

Rappel : lignes trigonométriques de quelques angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$



Lignes trigonométriques d'angles associés

Activité 1 :

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$ un réel, M son image sur $(\mathcal{C})$. (On note $M(\alpha)$)

1- Donner en fonction de α les coordonnées de M.
2- Comparer : - $cos(\alpha + 2k\pi)$ et $cos\alpha$
   - $sin(\alpha + 2k\pi)$ et $sin\alpha$
3- Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : - $-1 \leq cosx \leq 1$
   - $-1 \leq sinx \leq 1$
   - $cos^2x + sin^2x = 1$

Activité 2 : soit α un réel et M son image sur $(\mathcal{C})$.

- Construire les points M_1, M_2 et M_3 images respectives de M par symétrie d'axes (OI), (OJ) et symétrie centrale de centre O.
- Exprimer les coordonnées de chacun de ces points en fonction de α.
- Quel sont les angles associés à chacun de ses points ?

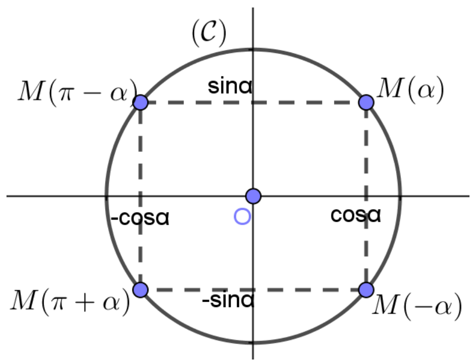
Propriétés :

Pour tout réel α, on a :

(1) $cos(-\alpha) = cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -sin\alpha$
(2) $cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$ $sin(\pi - \alpha) = sin\alpha$
(3) $cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$ $sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha$
(4) $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$ $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\alpha$

En remarquant que $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, on a :

(5) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha$ $sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\alpha$



Formules trigonométriques

- **Formules d'additions**

Soient a et b deux nombres réels, on a :

$cos(a + b) = cosacosb - sinasinb$ $cos(a - b) = cosacosb + sinasinb$

$sin(a + b) = sinacosb + cosasinb$ $sin(a - b) = sinacosb - cosasinb$

- **Formules de duplications**

Pour tout nombre réel a, on a :

$cos2a = cos^2a - sin^2a$ $sin2a = 2sinacosa$

Et par suite, on obtient **les formules de linéarisations** suivantes :

$cos^2a = \frac{1+cos2a}{2}$ $sin^2a = \frac{1-cos2a}{2}$

Exemple : Utilisons les formules de linéarisation pour calculer $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

$$cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 + cos2\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1 + cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

D'où $cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ car $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

De même, $sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-cos2\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1-cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$

D'où $sin\frac{\pi}{12} = -\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ car $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

<u>Propriété</u> :

Soit a un nombre réel different de $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Posons $t = tan\frac{a}{2}$ alors on a :

$cosa = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad$ $sina = \frac{2t}{1+t^2}$

Si de plus $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ alors $tana = \frac{2t}{1-t^2}$

<u>Exercices d'applications</u>

<u>Exercice 1</u> :

Soient a et b deux nombres réels.

Exprimer $tan(a + b)$ et $tan(a - b)$ en fonction de $tana$ et $tanb$.

<u>Exercice 2</u> :

Soient a et b deux nombres réels. Démontrer que :

1- $2cosacosb = cos(a + b) + cos(a - b)$
2- $2sinacosb = sin(a + b) + sin(a - b)$
3- On pose $a + b = x$ et $a - b = y$
   a) Exprimer a et b en fonction de x et y.
   b) Déduire que :

- $cosx + cosy = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $sinx + siny = 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Leçon 3 : *Equations et inéquations trigonométriques*

<u>Objectifs</u> :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Résoudre les équations du type $cosx = a$, $sinx = b$ et $tanx = c$; où a, b et c sont des réels.
- Résoudre les équations du type $acosx + bsinx = c$; où a, b et c sont des réels
- Résoudre les inéquations dans lesquelles $cosx$, $sinx$ ou $tanx$ sont comparés à un réel a.

<u>Activité d'apprentissage</u> :

Soit à résoudre l'équation (e): $cosx = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1- Démontrer que (e) admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Dans la suite, on notera t_0 cette solution.
2- Calculer $cos(2t_0)$; puis démontrer que $cos(4t_0) = -cos(t_0)$.
   En déduire t_0.
3- Résoudre (e)

<u>Résumé</u> :

Equations trigonométriques

- Equations du type $cosx = a\,; a \in \mathbb{R}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cosx = a, (a \in \mathbb{R})$

Si $a < -1$ ou $a > 1$, alors cette équation n'a pas de solution. $S = \emptyset$

Si $a \in [-1, 1]$, alors il existe un réel α tel que $cos\alpha = a$

On a donc $cosx = a \quad \Leftrightarrow cosx = cos\alpha$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$. On note encore $\begin{cases} x \equiv \alpha[2\pi] \\ \quad ou \\ x \equiv -\alpha[2\pi] \end{cases}$

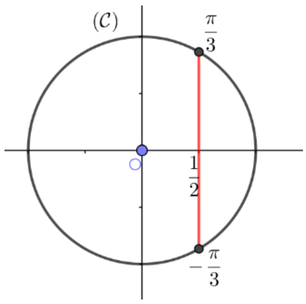
$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $cosx = \frac{1}{2}$

$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$



$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2)$cos2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos2x = cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$S = \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, -\frac{3\pi}{8} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Equations du type $sinx = b\,; b \in \mathbb{R}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $sinx = b\,; b \in \mathbb{R}$.

Si $b < -1$ ou $b > 1$, alors cette équation n'a pas de solution. $S = \emptyset$

Si $b \in [-1,1]$, alors il existe un réel β tel que $cos\beta = b$

On a donc $sinx = b \quad \Leftrightarrow sinx = sin\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \text{ On note encore } \begin{cases} x \equiv \alpha[2\pi] \\ ou \\ x \equiv \pi - \alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$S = \{\beta + 2k\pi, \pi - \beta + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : Résolvons dans $[0, 2\pi]$ l'équation $sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\pi \\ ou \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$x \in [0,2\pi] \quad \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{24} \leq k\pi \leq 2\pi - \frac{\pi}{24}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{24} \leq k \leq \frac{47}{24}$

Donc $k = \{0, 1\}$

Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{24}$

Pour $k = 1$, $x = \frac{25\pi}{24}$

De même, $0 \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{24} \leq k\pi \leq 2\pi - \frac{7\pi}{24}$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{41}{24}$

Donc $k = \{0, 1\}$

Pour $k = 0$, $x = \frac{7\pi}{24}$

Pour $k = 1$, $x = \frac{31\pi}{24}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}\right\}$$

- Equations du type $tanx = c\,; c \in \mathbb{R}$

Pour tout nombre réel c, il existe toujours un réel γ tel que $tan\gamma = c$.

$$tanx = c \iff tanx = tan\gamma$$

$$\iff \begin{cases} x = \gamma + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \gamma + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = \gamma + k\pi$$

$S = \{\gamma + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Exemple</u> : Résolvons dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $tan3x = \sqrt{3}$

$$tan3x = \sqrt{3} \iff tan3x = tan\frac{\pi}{3}$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in]-\pi, \pi] \iff -\pi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi$$

$$\iff -\pi - \frac{\pi}{9} \leq \frac{k\pi}{3} \leq \pi - \frac{\pi}{9}$$

$$\iff -\frac{30}{9} \leq k \leq \frac{24}{9}$$

Donc $k = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Pour $k = -3$, $x = -\frac{8\pi}{9}$

Pour $k = -2$, $x = -\frac{5\pi}{9}$

Pour $k = -1$, $x = -\frac{2\pi}{9}$

Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{9}$

Pour $k = 1$, $x = \frac{4\pi}{9}$

Pour $k = 2$, $x = \frac{7\pi}{9}$

$S = \left\{-\frac{8\pi}{9}, -\frac{5\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$

- Equations du type $acosx + bsinx = c$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $(E): acosx + bsinx = c$.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors on se retrouve avec l'une des équations précédentes.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$.

On a donc $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right)$

De plus, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel θ tel que $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

On a donc $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(cos\theta cosx + sin\theta sinx)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}cos(x-\theta)$$

Ainsi, (E) devient $\sqrt{a^2+b^2}cos(x-\theta) = c \iff cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Equation que nous savons comment résoudre.

<u>Exemple</u> : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(1): cosx + \sqrt{3}sinx = \sqrt{2}$

On a $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Ainsi, $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{3}cosx + sin\frac{\pi}{3}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

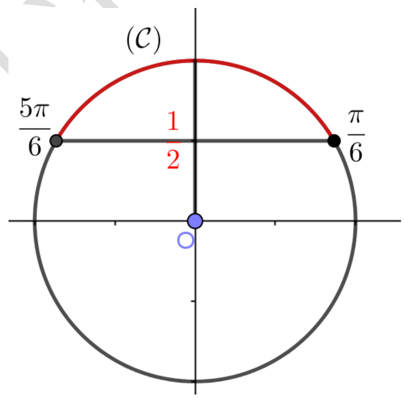
$S = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Inéquations trigonométriques

Cette partie se fera essentiellement sous forme d'exercice.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

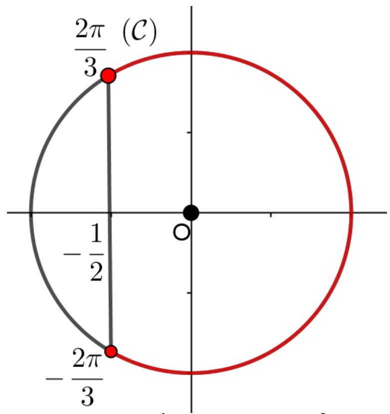
$(1): sinx > \frac{1}{2}$



$S = \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[;\ k \in \mathbb{Z}$

$(2): cos2x \geq -\frac{1}{2}$

Posons $X = 2x$



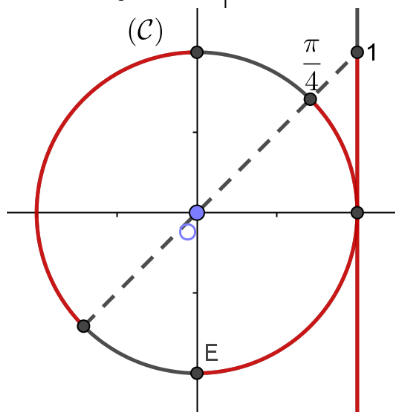
(2) devient donc $cosX \geq -\frac{1}{2}$

On a donc $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$S = \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right];\ k \in \mathbb{Z}$



$(3): tanx < 1$

$S = \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[;\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Exercice d'application</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$(1): cosx = sin\frac{\pi}{7}$,

$(2): cos2x = cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$(3): sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$(4): tan2x + tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$

$(5): cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq sin\left(\frac{x}{3}\right)$

$(6): cos^2x \geq cos2x$

$(7): 2cos^2x - 9cosx + 4 \geq 0$

CHAPITRE 14 : NOMBRES COMPLEXES

Intérêt : Ce chapitre sur les nombres complexe prépare les élèves aux applications techniques des nombres complexes, notamment en électronique et en électricité où les nombres complexes servent à exprimer les impédances complexes des condensateurs et des bobines, en optique où ils permettent d'exprimer l'indice de réfraction de la lumière. Mais aussi permettent la résolution de certaines équations différentielles que vous ferez en classe de terminale.

Motivation : Tous les nombres positifs ont une racine carrée, par exemple, 9 a pour racine 3 et 4 a pour racine 2. Par contre, aucun réel négatif n'a de racine (réelle). C'est pour pallier à cette discrimination que furent créer les nombres complexes (Dans cet ensemble, la racine carrée d'un nombre n'est pas unique comme dans $\mathbb{R}$.). Par ailleurs, nous sommes souvent amenés à résoudre des équations du second degré quand le discriminant Δ est positif, cependant lorsqu'une équation du second degré a un discriminant négatif, on a l'habitude de dire que « l'équation n'admet pas de solution » . L'ensemble des nombres complexes nous permet de résoudre de telle équations et nous donne aussi la possibilité de représenter les solutions obtenues dans un repère du plan ; en outre, à l'aide des nombres complexes, il est possible de calculer la valeur du cosinus et du sinus d'un angle orienté quelconque…

Les prérequis conseillés sont :

- ✓ Fonction racine carrée, valeur absolue
- ✓ Équations du second degré
- ✓ Trigonométrie
- ✓ Vecteur, distance

Lecon1 : Ecriture algébrique, opérations sur les nombres complexes et Représentation graphique

Durée : 2 périodes

Objectifs pédagogiques opérationnels :

A la fin de cette leçon, l'élève de première C sera capable de :

- Donner la partie réelle et la partir imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique ou cartésienne ;
- Reconnaître un nombre complexe réel et un nombre complexe imaginaire pur ;
- Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes ;
- Ecrire le quotient z/z' sous la forme z''/c où c est un réel.
- Représenter le point et le vecteur image d'un nombre complexe dans le plan.

1- Situation problème

Cardan, élève en classe de première S se propose de résoudre l'équation $x^3 + x = 0$. Son frère Bombelli lui dit que cette équation a trois solution. Cardan semble ne pas le comprendre.

A votre avis comment Bombelli a-t-il fait pour obtenir les trois solutions ?

(Question que l'élève devrait se poser : Dans quel ensemble Bombelli s'est-il placé pour résoudre cette équation ? S : il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ dans lequel cette équation admet des solutions)

Prérequis : soit x un nombre réel, pour quelle valeur de x $\sqrt{x}$ à un sens ? Que vaut $\sqrt{x^2}$? …Résourdre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4 = 2$. Construire dans un repère orthonormé du plan, le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$…

2- *Activité de d'apprentissage* (A faire en groupe d'au moins deux élèves)

Pour cette activité, nous supposons que pour tout réel positif a, lorsqu'on écrit $\sqrt{-a}$, on a $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \times \sqrt{a}$.

a) Ecrire plus simplement :

$$\sqrt{-4} = \cdots;\ \sqrt{-5} = \cdots;\ 3 - \sqrt{-4} = \cdots;\ -6 + \sqrt{-5} = \cdots;\ 7 + \sqrt{-9} = \cdots;$$

b) L'écriture $\sqrt{-1}$ étant impossible, on désigne par i, un nombre tel que $i = \sqrt{-1}$ avec $i^2 = -1$.
-Quel nom peut-on donner au nombre « i » ? (S : nombre imaginaire)
(Verbalement [Facultative] : pourquoi la notation « i » ? S : car initial du mot imaginaire, A quel mathématicien devons-nous cette notation ? S : Au mathématicien Suisse Leonhard Euler :1777)

c) Exprimer les résultats obtenus en a) en fonction du nombre i.

S : $2i$; $i\sqrt{5}$; $3 - 2i$; $-6 + i\sqrt{5}$ … Les nombres écrits sous cette forme sont appelés des nombres complexes
-Sous quelle forme s'écrit un nombre complexe ?
S : Tout nombre écrit sous la forme a+ib est appelé nombre complexe, et appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
-Peut-on les placer sur une droite graduée ? Peut-on les placer dans un repère du plan ? (Le faire avec : $2i$; $3 - 2i$; 5, 0… par exemple)

3- *Résumé*

3-1- Ecriture algébrique et opération sur les nombres complexes.

Définition

On appelle nombre complexe tout nombre qui peut s'écrire sous la forme a+ib, où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

Exemple : 7+3i, 2i, 12, 3-2i, -6+5i sont des nombres complexes.

Notation : On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans toute la suite du cours, a et b désignent des nombres réels sauf mention du contraire.

Propriétés

P1 : Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$.

- $a + ib$ est appelée écriture cartésienne ou forme algébrique de z.
- a est la partie réelle de z. On note $Re(z)$

- b est la partie imaginaire de z. On note $Im(z)$.
- Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel ; tout nombre réel est un nombre complexe.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; z est dit imaginaire pur , on désigne par $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple : -10 est un nombre complexe réel ; -6i est un nombre complexe imaginaire pur.

Attention ! Si z = 2 + 3i, la partie réelle est 2, la partie imaginaire est 3, et non 3i !! Dans la partie imaginaire il n'y a pas le i, le i ne sert qu'à indiquer qui est la partie imaginaire.

P2 :Soient $a + ib$ et $a' + ib'$ deux nombres complexes on a :

- $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
- $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Attention ! 0 est appelé nombre complexe nul.

P3 : soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- ✓ $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- ✓ $Opp(z) = -a - ib$
- ✓ $z - z' = (a - a') + i(b - b')$
- ✓ $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- ✓ $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$
- ✓ Si $z' \neq 0, \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Attention ! l'expression de l'inverse d'un nombre complexe $a + ib$ n'est pas à retenir par cœur, on la retrouve facilement en remarquant que $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

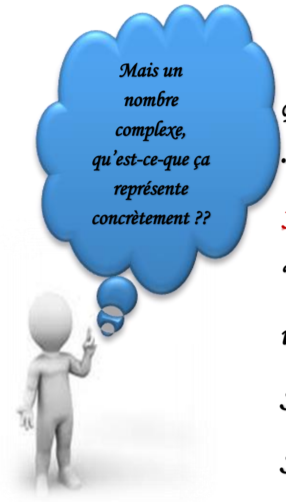
Exemple:

- $(-1 + 7i) + (3 - 2i) = -1 + 3 + (7 - 2)i = 2 + 5i$
- $(4 - 5i)(3 + 2i) = (12 + 10) + (8 - 15)i = 22 - 7i$
- $\frac{3+i}{5-4i} = (3 + i) \times \frac{1}{5-4i} = (3 + i)\left(\frac{5+4i}{25+16}\right) = \frac{(3+i)(5+4i)}{41} = \frac{(15-4)+(5+12)i}{41} = \frac{11+22i}{41}$.
- $\frac{1+i}{\sqrt{3}+2i} = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i + \frac{\sqrt{3}}{7}i + \frac{2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}\right)$

Remarque :

R1 :la place de i n'est pas obligatoirement devant ou derrière une expression, mais nous plaçons i devant le radical comme nous le faisons pour des inconnues quelconques : $4 + i\sqrt{3}$;

R2 : le plus souvent (uniquement parce que la prononciation est plus simple), nous plaçons $\boldsymbol{i}$ après les nombres mais avant les inconnues : $x + iy$;



R3 : par convention, $\boldsymbol{i}$ n'est jamais écrit sous la racine carrée ; très souvent, il est placé au numérateur d'une fraction .

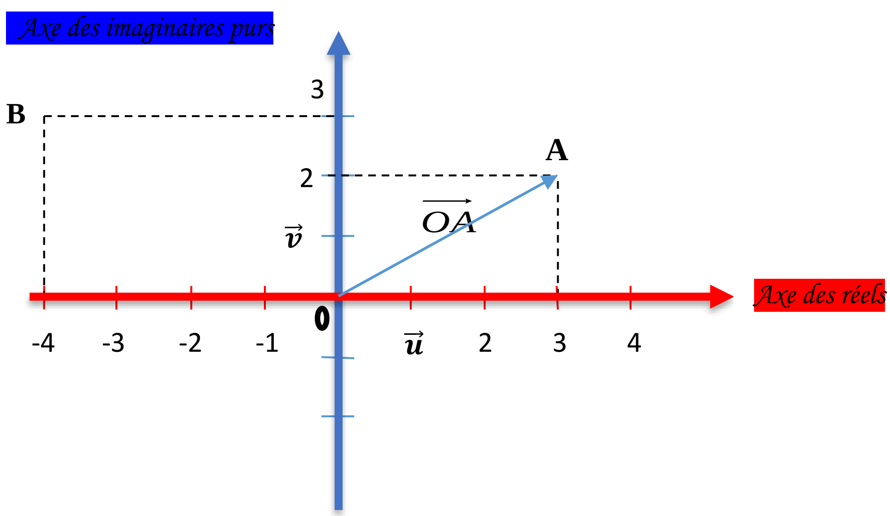
3-2-Représentation géométrique des nombres complexes : Représentation d'Argand.

Un nombre complexe a+ib est en fait un point dans le plan. La partie réelle « a » correspond aux abscisses, la partie imaginaire « b » correspond aux ordonnées.

Si on note $z_A = 3 + 2i$, cela signifie que les coordonnées de A sont 3 en abscisse et 2 en ordonnée.

Si on note $z_B = -4 + 3i$, cela signifie que les coordonnées de B sont -4 en abscisse et 3 en ordonnée :

Le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe.



Tout point sur l'axe des abscisses est l'image d'un nombre complexe de la forme $x + i \times 0 = x$. L'axe des abscisses $(o, \vec{u})$ est l'axe réel.

Tout point sur l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre complexe de la forme $0 + i \times y = iy$. L'axe des ordonnées $(o, \vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.

- L'image d'un nombre complexe $x + iy$ est le point du plan de cordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$;

Exemple : L'image du nombre complexe $-4 + 3i$ est le point B du plan de cordonnées $(-4, 3)$ ou $B(-4, 3)$.

- l'affixe du point $M(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ est le nombre complexe $z = x + iy$ que l'on note z_M et on écrit $M(z_M)$;
- $\vec{w}\binom{a}{b}$ est appelé vecteur image du nombre complexe $z = a\vec{u} + b\vec{v}$;
- l'affixe du vecteur $\vec{w}$ dans le plan complexe est le nombre complexe $a + ib$ que l'on note $z_{\vec{w}} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Exemple : le vecteur $\overrightarrow{OA}\binom{3}{2}$ est appelé vecteur image du nombre complexe $3 + 2i$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est $z_{\overrightarrow{OA}} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Remarque : *À tout nombre complexe, on peut faire correspondre un unique point du plan et réciproquement à tout point du plan, on peut faire correspondre un unique complexe. Cette représentation est due au mathématicien français Jean Robert Argand* $(1766 - 1822)$.

Propriétés :

P1 : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{w}+\vec{t}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{t}}$; $z_{k\vec{w}} = kz_{\vec{w}}$;

P2 : Si I est le milieu de [AB] alors $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$;

P3 : Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ *alors* $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

Exemple : *On donne :* $z_E = 2 + 3i$; $z_F = -6 + 7i$ *Calculons l'affixe* z_K *du milieu du segment* $[EF]$.

$z_K = \frac{(2+3i)+(-6+7i)}{2} = \frac{-4+10i}{2} = -2 + 5i$; ...

$z_{\overrightarrow{EF}} = (-6 + 7i) - (2 + 3i) = -8 + 4i$ *(! détailler en cours, faire les autres cas.)*

4- *Exercice d'application*

Application 1

Soit $z = 2 + 3i$; $z' = -5 + i$.

Calculer et écrire sous la forme algébrique : $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; zz' ; z^2 et $\frac{z'}{z}$.

Résolution :

$Z + Z' = -3 + 4i$; $Z - Z' = 7 + 2i$; $2Z - 3Z' = 19 + 3i$; $ZZ' = (2 + 3i)(i - 5) = -13 - 13i$;
$z^2 = (2 + 3i)^2 = -5 + 12i$

Application 2

1. *Calculer (3 + 2i) (3 -2i). En déduire la forme algébrique de* $\frac{1}{3+2i}$.
2. *Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :*
   $\frac{1}{3+i}$; $\frac{5-4i}{3-i}$; $\frac{3+i\sqrt{7}}{i}$ $\frac{1}{2+7i}$; $\frac{4}{\sqrt{3}-i}$; $\frac{2-i}{5+3i}$; $\frac{i}{1-3i}$; $\frac{2+i}{i}$

Application 3

1. *Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :*

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$; $z_5 = 5$; $z_6 = -i$; $z_7 = -4$; $z_8 = -i - 3$;
$z_9 = 2z_2 - 3z_1$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$ *et* $z_{11} = z_6^2$.

2. *Représenter les vecteurs images des points* z_6 ; z_5; z_8 ; z_2 ...
3. *Parmi les nombres cités ci- dessus, citer ceux qui sont réels et ceux qui sont imaginaires pures.*

Homework :

Lecon2 : *Nombre complexe conjugué- module d'un nombre complexe*

Durée : *2 périodes*

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- *Utiliser l'effet de la conjugaison sur une somme, un produit, un quotient de deux nombres complexes.*
- *Déterminer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue ;*
- *Utiliser la relation $AB = |Z_B - Z_A|$ pour :*
- *Calculer des distances ;*
- *Montrer qu'un triangle est rectangle ;*
- *Montrer qu'un triangle est isocèle.*
- *Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixes Z_M tel que $|Z_M - a| \leq k$;*
- *Utiliser l'effet du module sur un produit et un quotient de deux nombres complexes ;*

Prérequis : *Soit x un nombre réel, que vaut $|x|$? Dans un repère orthonormé du plan, quel est le symétrique du point $A(3,-2)$ par rapport l'axe des abscisses ? que vaut la distance de A à l'origine de cde repère ?*

1- *Activité d'apprentissage*

Le Plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$. Soient M un point d'affixe $z = a + ib$ et M' le symétrique de M par rapport à la droite de repère $(o;\vec{u})$.

a) *Montrer que l'affixe z' du point M' est le nombre complexe $z' = a - ib$. Dans la suite, z' sera noté $\overline{z}$.*

Ainsi, $\overline{z} = a - ib$.

b) *Calculer $z + \overline{z}$ et $z - \overline{z}$.*

c) *Comparer $\overline{\overline{z}}$ et z.*

d) *i- Montrer que $z = -\overline{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur.*

ii- Montrer que z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

e) *Comparer $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'}$ et $\overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$ et $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.*

f) *Calculer la distance OM puis OM^2 et comparez le résultat obtenu à $z \times \overline{z}$.*

g) *Construis dans le repère $(o;\vec{u};\vec{v})$ tous les points situés à 2 cm de l'origine, donne une écriture algébrique de cette représentation.*

2- Résumé

2-1- Conjugaison

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle complexe conjugué de z que l'on note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$.

Exemple : Le conjugué de i est –i , celui de $2 + 2i$ est $2 - 2i, \ldots$

Remarque : Deux nombres complexes conjugués ont leurs images respectives symétrique par rapport à l'axe des réels (axe des abscisses)

Propriété :

Pour tout complexe z , on a :

$P_1 : z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$; $P_3 : z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$; $P_2 : \bar{\bar{z}} = z$

Opération sur les nombres complexes conjugués.

Pour tous complexes z et z'.

$i)\ \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $ii)\ \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$; $iii)\ (\bar{z})^n = \overline{(z^n)}, n \in \mathbb{N}$; $iv)\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$.

Exemple : $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{2-i}} = \frac{1-i}{2+i} \ldots; \overline{(-1+i)(5-3i)} = \left(\overline{-1+i}\right)\left(\overline{5-3i}\right) = (-1-i)(5+3i); \ldots$

2-2. Module d'un nombre complexe, inégalités triangulaires

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

On appelle module de z le réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$. On note $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dans le plan complexe, le module du nombre complexe z est égale à la distance OM ; on écrit $|z| = OM$.

Exemple : $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Propriété :

Pour tout nombre complexe z,on a :

$P_1 : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $P_2 : |z| = |\bar{z}|$; $P_3 : Si\ z = a, a \in \mathbb{R}, |Z| = |a|$; $P_4 : Si\ z = ib, b \in \mathbb{R}, |Z| = |b|$

Opération sur le module

Pour tous nombres complexes z et z'

$i)\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ avec $z \neq 0$; $2)\ |z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$; $3) |zz'| = |z||z'|$

$4)\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$; $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : $|4| = 4; |-3| = 3; |-7i| = |-7| = 7; |i| = |1| = 1; |-7i \times (3 - 4i)| = |-7i| \times |3 - 4i| = 7 \times 5$

$\left|\frac{7-i}{-3-4i}\right| = \frac{|7-i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{7^2+(-1)^2}}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{49+1}}{\sqrt{9+16}} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$; $|(2 - 3i)^2| = (|2 - 3i|)^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

2-3- Distance

Dans ce paragraphe, a et b sont des nombres complexes.

Définition :

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et Z_B, La distance de A à B est donnée par $AB = |z_B - z_A|$.

Remarque : Pour démontrer qu'un triangle est équilatéral, isocèle ou rectangle, on peut donc calculer les longueurs

Des côtés du triangle et utiliser les définitions ou propriétés géométriques courantes pour conclure.

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A le point d'affixe a. L'ensemble des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant :

- $|z-a| = r$ *est le cercle de centre A et de rayon r.*
- $|z-a| \leq r$ *est le disque fermé de centre A et de rayon r.*
- $|z-a| < r$ *est le disque ouvert de centre A et de rayon r.*

Exemples : Soit E le point d'affixe $-3i$,

L'ensemble des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z+3i| = 2$ est le cercle de centre E et de rayon 2.

La distance de E à $F(\sqrt{7}-6i)$ est $EF = |\sqrt{7}-6i+3i| = |\sqrt{7}-3i| = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$.

3- *Exercices d'application*

Application 1

1) *Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 3+4i$; $z_2 = 1-i$; $z_3 = -5i$; $z_4 = -9$*
2) *Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a=2-3i et b=5-i.*
   Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

Application 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

a) *Calculer le module des nombres complexes suivants : (7 +35i) (3+2i) , $\frac{7-35i}{3-2i}$; $\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}$*
b) *Déterminer tous les points M d'affixe z tels que $z\bar{z} = 4$.*
c) *On considère le point A d'affixe 2 + 3i.*
   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-(2+3i)| = 5$
   $|\bar{z}-(2+3i)| = 5$; $|z-(2+3i)| < 5$; ….

Homework :

1) *Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $Z = |z|^2 + 2z - 3$ soit imaginaire pur.*
2) *Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $\frac{2z-4}{z-i}$ soit réel.*

Lecon3 : *Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul*

Durée : *2 périodes*

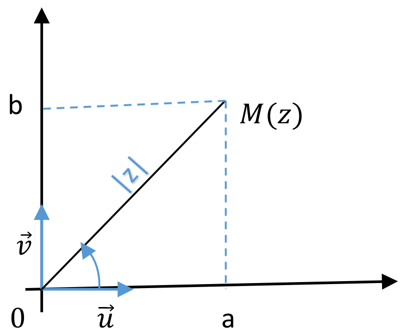
Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- *Déterminer des arguments des nombres complexes à partir de leurs points images*
- *Utiliser les relations* $\cos\left(arg(z)\right) = \frac{Re(Z)}{|Z|}$ *et* $\sin\left(arg(z)\right) = \frac{Im(Z)}{|Z|}$ $(z \neq 0)$ *pour déterminer un argument et l'argument principal d'un nombre complexe donné,*
- *Ecrire un nombre complexe sous la forme algébrique connaissant son module et un de ses arguments ;*
- *Déterminer un argument d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes connaissant leurs arguments respectifs.*

Prérequis : *Définir cercle trigonométrique, construire le cercle trigonométrique et y placer le point A image du nombre réel* $\frac{\pi}{6}$,…

1- *Activité d'apprentissage*



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit $M(a; b)$ *un point du plan d'affixe z non nul et.* M' *le point d'affixe* $z' = \frac{z}{|z|}$, *où* $|z|$ *est le module de* z.

Soit θ *une mesure en radian de l'angle* $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. .

a) *Montrer que M' est situé sur le cercle trigonométrique et est le point image du réel* θ.

(*s :* $|z'|^2 = \left(\frac{Re(Z)}{|Z|}\right)^2 + \left(\frac{Im(Z)}{|Z|}\right)^2 = 1$, *donc* M' *est situé sur le cercle trigonométrique ; par conséquent, il existe un réel α dont M' est image. Or M , M' et O sont alignés (voir écriture de* z' *) donc M' est le point image de* θ.)

b) *En déduire que* $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.

(*Puisque* $|z'| = 1$, *alors d'après a)* $z' = \cos\theta + i\sin\theta$ *c'est-à- dire* $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.)

$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$ *peut s'écrire* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, *cette expression est appelée forme trigonométrique du nombre complexe* z. θ *est appelé un argument de* Z , $|z|$ *son module.*

2- *Résumé*

Définition 1:

Le plan complexe est muni d'un repere orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

Soit M un point du plan d'affixe non nul z.

On appelle argument du nombre complexe z *une mesure en radians de l'angle orienté* $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)$, *on le note arg(z).*

On note Arg(z) pour designer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)$.

Exemple : Mes $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right)=\frac{\pi}{3}+6\pi=\frac{17\pi}{3}$ *est un argument du nombre complexe* $z_A=1+i\sqrt{3}$, *on écrit* $arg(z_A)=\frac{17\pi}{3}$ *; mais* $Arg(z_A)=\frac{\pi}{3}$ *est l'argument principal de* z_A.

Remarque : Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A *et* z_B *alors l'argument du nombre complexe* z_B-z_A *est égale à la mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)$.

Définition 2:

Soit $z=a+ib$ *(où a et b sont des réels non tous nuls) un nombre complexe non nul de module* $|z|$.

On appelle argument du nombre complexe z, *le nombre réel* θ *défini par :*

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\frac{b}{|z|}.\end{cases}$$

Exemple : Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants. $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=2+2i$

$$|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$$

Soit θ_1 *un argument de* z_1.

$$\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}\quad \text{Donc } \theta_1=\frac{-\pi}{3}\text{, d'où } arg(z_1)=\frac{-\pi}{3}$$

Conséquence :

De la définition 2, $z=a+ib=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ *est appelée trigonométrique du nombre complexe* z.

On note $[r;\theta]$ *où* $r=|z|$, *l'écriture polaire de* z.

Exemple : Détermine la forme trigonométrique des nombres complexes suivants. $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=2+2i$

D'après l'exemple précédent, $z_1=[2;\frac{-\pi}{3}]$, *donc sa forme trigonométrique est* $z_1=2[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)]$.

Remarque : Le nombre complexe nul n'a pas d'argument !

Si θ *désigne un argument d'un nombre complexe non nul z alors tout autre argument de z est de la forme* $\theta+2k\pi$, *on écrit :* $arg(z)=\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. *(Un nombre complexe non nul admet plusieurs arguments.)*

z *est un nombre réel non nul si et seulement si* $z=0$ *ou* $arg(z)=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

z *est un nombre complexe imaginaire pure si et seulement si* $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Propriété :

Soient z et z' *deux nombres complexes non nuls. On a :*

$P_1 : arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$P_2 : arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

$P_3 : arg(\bar{z}) = arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$P_4 : \forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*, arg(z^n) = n\, arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$P_5 : arg(-z) = \pi + arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemples : *On considère les nombres complexes suivants :*

$A(-2i)$; $B(3)$; $C(2+2i)$.

$|z_A| = |-2i| = 2$; $|z_B| = |3| = 3$; $|z_C| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\arg(z_A \times z_B) = \arg(-2i) + \arg 3 = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;$ $\arg z_C = \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$

$\arg \frac{z_C}{z_A} = \arg(2+2i) - \arg(-2i) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$ $, k \in \mathbb{Z}.$

3- Applications

Application1

1) *Donne l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :*
   a) $z_1 = [5; \frac{\pi}{3}]$ b) $z_2 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}]$ c) $z_3 = [2\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}]$ d) $z_1 = [16; \frac{-\pi}{4}]$
2) *Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :*

$z_1 = 1 + i$ $\quad z_2 = \sqrt{3} + i$ $\quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad z_4 = i$

3) *soit* $z_1 = 2 + 2i$ *et* $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. *Ecrire* z_1 *et* z_2 *sous forme trigonométrique, puis en déduire les formules trigonométriques de :* $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\overline{z_1}$; $-z_2$; $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.
3) *Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes :*

$a = 3 + \sqrt{3}i$ $\quad b = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ $\quad c = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ $\quad d = -2(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6})$.

Application2

1) *Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :* $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ *et* $z_2 = 1 - i$.
2) *Donner un argument et le module du nombre complexe* $z = \frac{z_1}{z_2}$.
3) *Déduire les valeurs exactes de* $\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4) *On donne* $z = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)$.
   a) *Ecrire z sous la forme algébrique.*
   b) *Ecrire 1+i et* $1 + i\sqrt{3}$ *sous la forme trigonométrique.*
   c) *Déterminer les valeurs exactes de* $\cos\frac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Homework :

COURS SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

EFOUBA EKASSI Rucène, PLEG MATHS

Aout 2019

Chapter 1

TRANSFORMATIONS DU PLAN

- **Intérêt:** maîtriser les différentes transformations du plan, raisonner logiquement avec ces transformations en les composant ou en les décomposant.
- **Motivation:** Nous devons pouvoir expliquer les transformations qui lient deux objets semblables (de même dimension, l'un réduit ou agrandi par rapport à l'autre) et ainsi mieux comprendre des phénomènes physiques qui se produisent dans les miroirs, les loupes, les lunettes astronomiques....

1.1 Leçon 1: Présentation des isométries du plan

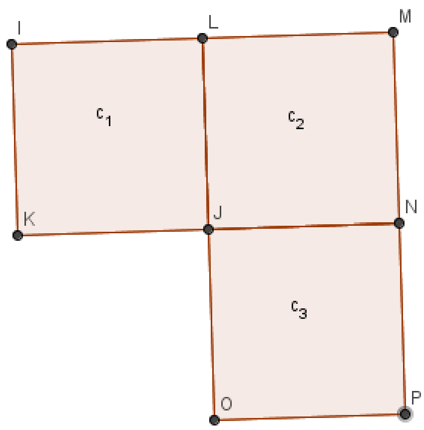
Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaitre une isométrie
- construire l'image d'une figure par une isométrie
- caractériser une isométrie
- déterminer les expressions analytiques des isométries

Pré-requis 1.1.1 *:*

1. *Qu'est ce qu'un mouvement de rotation? Que faut t-il pour qu'il y ait rotation?*
2. *Qu'est ce qu'un mouvement de translation? Que faut-il pour qu'il y ait translation?*
3. *Comment construis tu l'image d'un objet à travers un miroir plan?*

Situation problème 1.1.1 *:*
Sur la figure suivante, c_1, c_2 et c_3 sont des carrés de même côté.

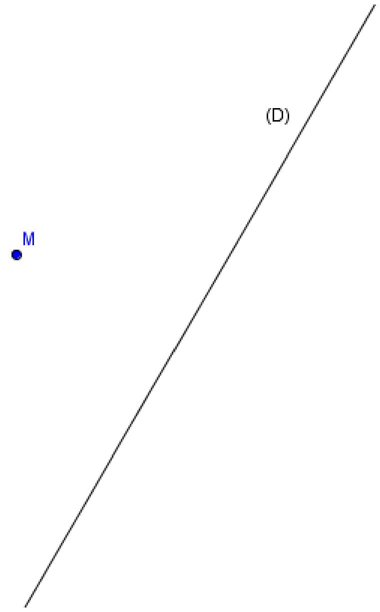


1. *Où doit-on placer un miroir pour que c_1 ait pour image c_3 par ce miroir?*
2. *Comment doit faire glisser c_1 pour se retrouver à c_3?*
3. *A partir de quel point et de quel angle doit-on tourner c_2 pour avoir c_1?*

1.1.1 Symétrie orthogonale

Activité 1.1.1 *:*

1. *Voici un point M et une droite (D).*

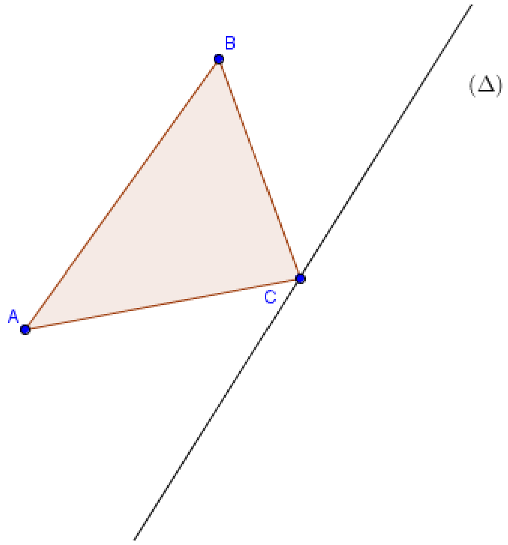


   (a) *Construis un point M' tel que (D) soit la médiatrice de $[MM']$*

   (b) *Comment sont les points M et M' par rapport à la droite (D)?*

   (c) *Soit I le milieu de $[MM']$. Caractérise le fait que (D) soit la médiatrice de $[MM']$ par deux propriétés.*

2. *Soit le triangle ABC suivant:*



   (a) *Construis les symétriques A', B' et C' respectifs des points A, B et C par la symétrie par rapport à (Δ).*

   (b) *Compare les propriétés géométriques des deux figures (nature, distances, aires, sens des angles orientés).*

Résumé 1.1.1 *:*

Definition 1.1.1 *:*
Soit (D) une droite du plan. On appelle symétrique orthogonale d'axe (D) (notée $S_{(D)}$ l'application du plan dans lui même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que (D) soit la médiatrice de $[MM']$. (D) est l'axe de symétrie, c'est aussi l'ensemble des points invariants par la symétrie.

On a l'écriture suivante:

$$S_{(D)}(M) = M' \text{ signifie } \begin{cases} (MM') \perp (D) \\ I \in (D) \end{cases} \quad \text{avec } I \text{ milieu de } [MM'].$$

Propriété 1.1.1 *:*
Les symétries orthogonales:

- ***conserve:*** *les distances, la nature des figures, le barycentre, les aires et volumes.*
- ***inverse:*** *le sens des angles orientés.*

Remarque 1.1.1 *Soit $M(x : y)$ et $M'(x'; y')$ deux points symétriques par rapport à une droite (D). Il est possible de déterminer x' et y' en fonction de x et y (expression analytique) en utilisant la caractérisation d'une symétrie orthogonale*

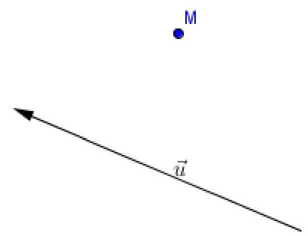
Application 1.1.1 *:*

1. *Déterminer les expressions analytiques de la symétrie d'axe (D) avec:*
   (a) $(D) : -x + 2y + 3 = 0$
   (b) *(D) passant par $A(2 : -1)$ et dirigée par $\vec{u}(4; 7)$.*
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui a pour expression analytique:* $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

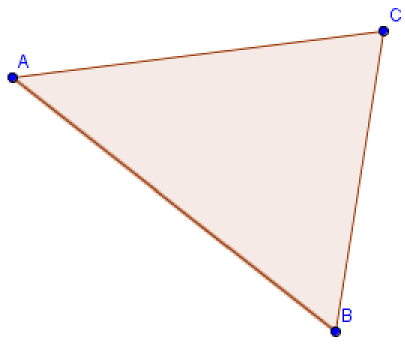
1.1.2 Translations

Activité 1.1.2 *:*

1. *Voici un point M et un vecteur $\vec{u}$.*



   (a) *Construis un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$*
   (b) *Quelle application dépendant de $\vec{u}$ transforme M en M'?*
2. *Voici un triangle ABC.*



   (a) *Construis les images A', B' et C' respectivement des point A, B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.*
   (b) *Compare les propriétés géométriques de ces deux figures (la nature, les distances, les aires, le sens des angles orientés).*

Résumé 1.1.2 *:*

Definition 1.1.2 *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ (notée $t_{\vec{u}}$) tout application du plan dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*

Propriété 1.1.2

- *La translation de vecteur nul est l'application identité Id (qui transforme tout point en lui même)*
- *les translations conservent: les distances, le sens des angles orientés, les aires, les barycentres...*

Remarque 1.1.2 *Soient $\vec{u}(a;b)$, $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ tels que: $t_{\vec{u}}(M) = M'$. Alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et de ce fait:*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \text{qui est l'expression analytique de } t_{\vec{u}}.$$

Propriété 1.1.3 *:* ***Caractérisation d'une translation***

- ***par un point et son image:*** *Soient A et B deux points distincts du plan. Il existe une unique translation qui transforme A en B. Son vecteur de translation est $\overrightarrow{AB}$.*
- ***Par deux points et leurs images:*** *Soient A, B, A' et B' quatre points du plan. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors il existe une unique translation qui transforme A en A' et B en B'. Le vecteur de cette translation est le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{BB'}$.*

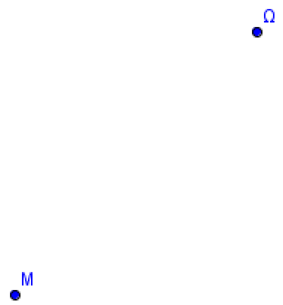
Application 1.1.2 *:*

1. *Soit $\vec{u}(-1;5)$ un vecteur du plan*
   (a) *Écrire l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$*
   (b) *Quelles sont les coordonnées de l'image N' du point $N(\sqrt{2};4)$ par cette translation?*
2. *Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui a pour expression analytique:* $\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y - 8 \end{cases}$

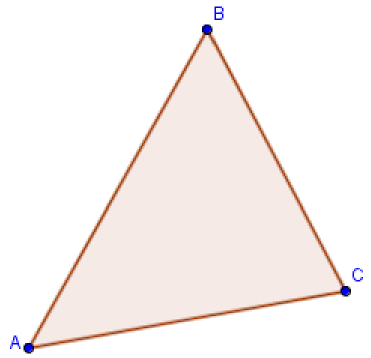
1.1.3 Rotations

Activité 1.1.3 *:*

1. *Voici deux points M et Ω.*



   (a) *Construis un point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $mes(\widehat{\Omega M;\Omega M'}) = \theta = \frac{\pi}{2}$.*
   (b) *Quelle application dépendant de θ et Ω transforme M en M'?*
2. *Voici un triangle ABC.*



(a) *Construis le triangle image de ABC par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$

(b) *Compare les propriétés géométriques des deux triangles (distances, sens des angles orientés, aires)*

Résumé 1.1.3 *:*

Definition 1.1.3 *Soit* Ω *un point du plan et* $\theta \in \mathbb{R}$. *On appelle rotation de centre* Ω *et d'angle* θ *(qu'on va noter* $r(\Omega;\theta)$*) tout application du plan dans lui même qui à tout point* M *associe le point* M' *tel que* $\Omega M = \Omega M'$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta$. Ω *est ici le seul point invariant.*

Propriété 1.1.4

- *Une rotation d'angle nul est l'application identité.*
- *Une rotation d'angle* π *ou* $-\pi$ *est encore une symétrie centrale ou un demi tour*
- *Les rotations conservent: les distances, le sens des angles orientés, le barycentre, la nature des figures, les aires...*

Propriété 1.1.5 *Soient* $r = r(\Omega;\theta)$, $\Omega(a;b)$, $M(x;y)$ *et* $M'(x';y')$ *tels que* $r(M) = M'$. *Alors on a:*

$$\begin{cases} x' - a = (x-a)cos\theta - (y-b)sin\theta \\ y' - b = (x-a)sin\theta + (y-b)cos\theta \end{cases} \quad \text{c'est son expression analytique.}$$

Propriété 1.1.6 Caractérisation d'une rotation
Soient A, A', B et B' quatre points du plan tels que $AB = A'B'$ *et* (AB) *et* $(A'B')$ *sécantes. Alors il existe une unique rotation qui transforme A en A' et B en B'. L'angle de cette rotation est l'angle* $\theta = mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}})$ *et son centre est le point* Ω *de rencontre des médiatrices de* $[AA']$ *et* $[BB']$.

Application 1.1.3 *:*

1. *Soit* r *la rotation de centre* $A(-1;4)$ *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.
   (a) *Déterminer son expression analytique*
   (b) *Soit* $E = r(F)$ *avec* $E(\sqrt{3};2)$. *Déterminer les coordonnées de* F.
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'expressions analytiques suivantes:*
   (a) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

1.1.4 Isométries du plan

Definition 1.1.4 *:*
On appelle isométrie du plan toute transformation du plan qui conserve les distances. Comme isométrie on peut citer: les symétries orthogonales, les translations, les rotations, l'application identité.

Il existe deux types d'isométries:

- **Les déplacements:** qui sont des isométries qui conserve le sens des angles orientés. Il s'agit de Id, des translations et des rotations.
- **Les antidéplacements:** qui sont des isométries qui inverse le sens des angles orientés. On peut citer les symétries orthogonales.

1.2 Leçon 2: Composition d'isométries

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- composer deux symétries orthogonales
- composer des rotations, des translations...
- décomposer des rotations et des translations en symétries orthogonales

Pré-requis 1.2.1 *:*
Répondre par vrai ou faux.
Étant données deux applications f et g.

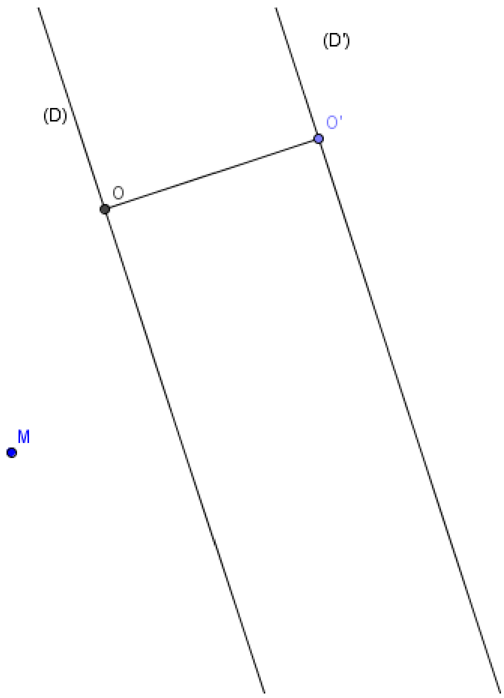
1. *$f \circ g$ est la composée de f par g.*
2. *$f \circ g$ est la composée de g par f.*
3. *$f \circ g$ et $g \circ f$ c'est la même chose.*
4. *Pour calculer $f \circ g(x)$ on commence par trouver $g(x)$ ensuite on trouve $f(g(x))$*
5. *Pour calculer $f \circ g(x)$ on commence par trouver $f(x)$ ensuite on trouve $g(f(x))$*

Situation problème 1.2.1 *:*
Deux droites (D) et (D') sont perpendiculaires en un point O. Nsangou, un élève de première C, fait la symétrie d'un objet M par rapport à (D), puis la symétrie de l'image M_1 obtenue par rapport à (D'), il obtient une image finale M'. Un de ses camarades lui dit qu'il aurait dû juste faire la symétrie de M par rapport à O pour obtenir M'. A t-il raison? Si oui, aide Nsangou à se convaincre de l'idée de son camarade.

1.2.1 Composée de symétries orthogonales

Cas des axes parallèles

Activité 1.2.1 *:*
Soient (D) et (D') deux axes parallèles, O un point de (D) et O' un point de (D') tels que $(OO') \perp (D)$.



1. *Construis* $M_1 = S_{(D)}(M)$ *et* $M' = S_{(D')}(M_1)$.
2. *Donne une relation entre* $S_{(D)}$, $S_{(D')}$, M *et* M'.
3. *Exprime le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OO'}$
4. *Quelle transformation (non composée) fait passer* M *à* M'
5. *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de* $S_{(D')} \circ S_{(D)}$

Résumé 1.2.1 *:*
Soient (D) *et* (D') *deux axes parallèles et* $O \in (D)$, $O' \in (D')$ *tels que* $OO' \perp (D)$. *Alors la composée* $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ *est la translation de vecteur* $2\overrightarrow{OO'}$.

Remarque 1.2.1 *:*

- *Il faut tenir compte du sens de la composée. En effet,* $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ *mais* $S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$.
- *Le vecteur de translation obtenu est orthogonal aux deux axes de départ.*
- *Si les deux axes sont confondues alors* $S_{(D)} \circ S_{(D)} = Id$.

Propriété 1.2.1 *:*
Soient $\vec{u}$ *un vecteur normal à une droite* (D). *Il est possible de décomposer la translation de vecteur* $\vec{u}$ *en la composée de deux symétries d'axes parallèles.*

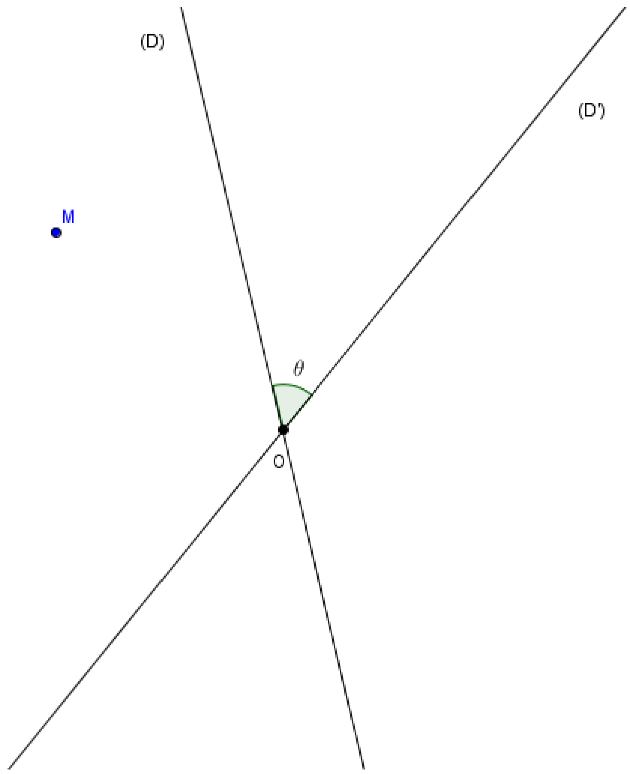
- *La droite* (D') *telle que* $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{\vec{u}}$ *est la droite obtenue en faisant glisser* (D) *suivant le vecteur* $\frac{1}{2}\vec{u}$.
- *La droite* (D') *telle que* $S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{\vec{u}}$ *est la droite obtenue en faisant glisser* (D) *suivant le vecteur* $-\frac{1}{2}\vec{u}$.

Application 1.2.1 *:*
Soit $ABCD$ *un carré direct de centre* O. I, J, K *et* L *sont les milieux respectifs des côtés* $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ *et* $[AD]$.

1. *Déterminer:* $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$
2. *Déterminer et construire les droites* (Δ) *et* (Δ') *telles que:* $S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BA}}$; $S_{(LJ)} \circ S_{(\Delta')} = t_{\overrightarrow{BC}}$.

Cas de deux axes sécants

Activité 1.2.2 *:*
Soient (D) et (D') deux axes sécants en O tels que l'angle aigu entre (D) et (D') est θ.



1. *Construis $M_1 = S_{(D)}(M)$ et $M' = S_{(D')}(M_1)$*
2. *Quelle est la relation entre M, M', $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$*
3. *Exprime OM en fonction de OM' et mes$(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})$ en fonction de θ.*
4. *Quelle transformation fait passer M à M' ?*
5. *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.*

Résumé 1.2.2 *:*
Soient (D) et (D') deux axes sécants en O tels que $(\widehat{D, D'}) = \theta$. Alors la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la rotation de centre O et d'angle 2θ.

Remarque 1.2.2 *:*

- *Il faut tenir compte du sens de la composée. En effet $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(O, 2\theta)$ mais $S_{(D)} \circ S_{(D')} = r(O, -2\theta)$.*
- *Le centre de la rotation est le point de rencontre des deux axes.*

Propriété 1.2.2 *:*
Soit r la rotation de centre O et d'angle α et soit (D) une droite passant par O. On peut décomposer r en la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en O.

- *La droite (D') telle que $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r$ est obtenue en faisant tourner la droite par rapport au point O d'un angle de mesure $\dfrac{\alpha}{2}$.*
- *La droite (D') telle que $S_{(D)} \circ S_{(D')} = r$ est obtenue en faisant tourner la droite (D) par rapport à O d'un angle de mesure $-\dfrac{\alpha}{2}$.*

Application 1.2.2 *:*
Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O.

1. *Déterminer: $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$; $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$*
2. *Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telles que: $S_{(AB} \circ S_{(\Delta)} = r(A; -\dfrac{\pi}{2})$ et $S_{(\Delta')} \circ S_{(OC)} = r(C; \dfrac{\pi}{2})$.*

1.2.2 Composée de translation

Cas de deux translations

Propriété 1.2.3 *:*
Soient $t_{\vec{u}}$ *et* $t_{\vec{v}}$ *deux translations de vecteurs respectifs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*. Alors* $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

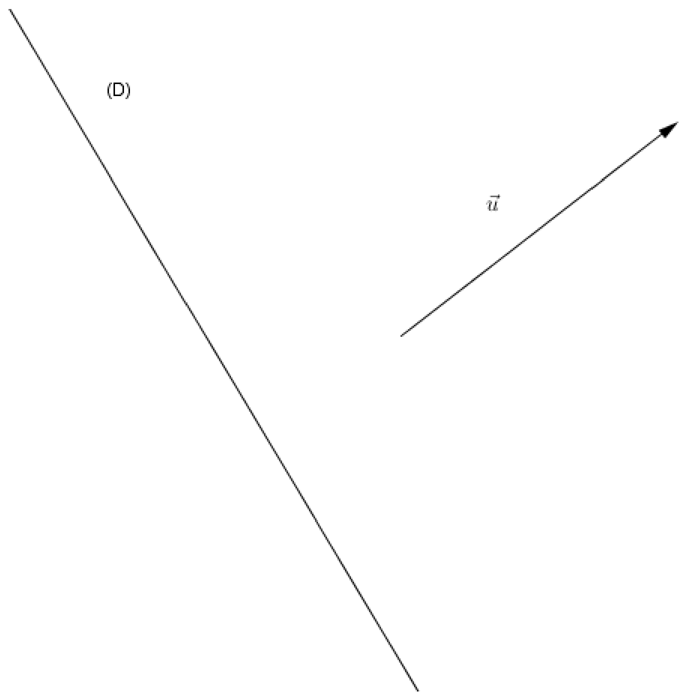
Definition 1.2.1 *:*
Soit $t_{\vec{u}}$ *une translation de vecteur* $\vec{u}$*. Il existe une translation et une seule notée* $t_{\vec{u}}^{-1}$ *telle que* $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}^{-1} = Id$*. On a* $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$ *et* $t_{\vec{u}}^{-1}$ *est appelée* ***réciproque*** *de la translation* $t_{\vec{u}}$.

Application 1.2.3 *:*
Soit ABCD un carré de sens direct. Déterminer:

1. $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$
2. $t_{\overrightarrow{BC}}^{-1} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$

Cas d'une translation et d'une symétrie orthogonale

Activité 1.2.3 *:*
Soient (D) *une droite et* $\vec{u}$ *un vecteur normal à* (D).



1. *Construis une droite* (D') *telle que* $t_{\vec{u}} = S_{(D)} \circ S_{D')}$
2. *Montre que* $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(D')}$
3. *Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de* $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$.

Résumé 1.2.3 *:*
la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale, dans le cas où le vecteur de translation est normal à l'axe de la symétrie, est une symétrie orthogonale. L'axe de cette symétrie est obtenu en décomposant convenablement la translation en symétries orthogonales.

Application 1.2.4 *:*
Soit ABCD un carré direct de centre O. déterminer la nature et les éléments caractéristiques de:

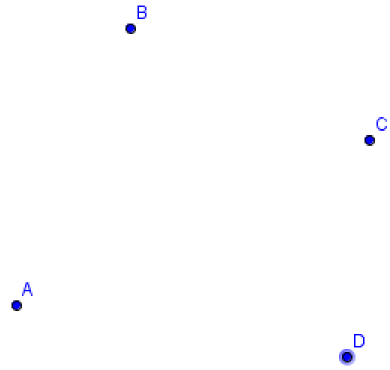
1. $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$
2. $t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{(BD)}$

1.2.3 Composée de rotations

Cas de deux rotations

Activité 1.2.4 *:*
Soient A, B, C et D quatre points du plan.

1. *On considère les rotations $r = r(A; \frac{\pi}{2})$ et $r' = r(B; -\frac{\pi}{2})$*



   (a) *Calcule la somme des angles de r et r' et dire si cette somme est sous la forme $2k\pi$.*
   (b) *Construis les images C' et D' des points C et D respectivement par $r \circ r'$.*
   (c) *Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{C'D'}$?*
   (d) *Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ r'$*

2. *On suppose $r = r(A; \frac{\pi}{6})$ et $r' = r(A; \frac{\pi}{3})$*

   (a) *Calcule la somme des angles de r et r' et dis si cette somme est sous la forme $2k\pi$*
   (b) *Construis l'image C' du point C par $r \circ r'$.*
   (c) *Montre que $AC = AC'$ et calcule $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC'}})$*
   (d) *Donne la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ r'$.*

Résumé 1.2.4 *:*
Soient r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ'.

- *Si $\theta + \theta' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $r \circ r'$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ tel que $r \circ r'(A) = A'$.*
- *Si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$ alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + theta'$ et de centre Ω tel que Ω soit le point de rencontre des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$ avec $r \circ r(A) = A'$ et $r \circ r'(B) = B'$.*

Remarque 1.2.3
- *Si $r \circ r'$ est une translation et que r et r' ont le même centre alors $r \circ r'$ est encore l'application identité.*
- *Si $r \circ r'$ est une rotation et que r et r' ont le même centre alors $r \circ r'$ conserve ce centre.*

Application 1.2.5 *:*
Soit $ABCD$ un carré de sens indirect et de centre O. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de:

1. $r(A; \frac{\pi}{2}) \circ r(B; \frac{\pi}{2})$
2. $r(B; \frac{\pi}{2}) \circ r(C; -\frac{\pi}{2})$
3. $r(O; \frac{\pi}{4}) \circ r(O; \frac{\pi}{4})$

Cas d'une translation et d'une rotation

Propriété 1.2.4 *:*
Soit r une rotation d'angle Ω et t une translation. La composée de r et t est une rotation d'angle θ.

Remarque 1.2.4 *:*
Le centre de cette rotation est obtenu:

- *Soit en décomposant convenablement la rotation et la translation en symétries orthogonales*
- *Soit en déterminant deux points et leurs images.*

Application 1.2.6 *:*
Soit $ABCD$ un carré de centre O et de sens direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de:

1. $f = t_{\overrightarrow{AO}} \circ r(O; \frac{\pi}{2})$
2. $g = r(O; \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

1.3 Leçon 3: Homothéties

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- caractériser une homothétie
- construire l'image d'une figure par une homothétie
- déterminer l'expression analytique d'une homothétie
- composer deux homothéties
- composer des homothéties et des translations

Pré-requis 1.3.1 *:*

1. *Connais-tu des instruments qui agrandissent ou réduisent une image? Cite en certains.*
2. *Quelles transformations géométriques permettent de réduire ou d'agrandir des figures?*

Situation problème 1.3.1 *:*
Mimche et Pemboura disposent respectivement de loupes de grandissement 2 et 4. Ils accolent les deux loupes pour observer un objet. Mimche dit alors que l'objet a grandi de $2 + 4 = 6$ fois sa taille alors que Pemboura propose que l'objet a grandi de $2 \times 4 = 8$ fois sa taille. L'un des deux élèves a raison. Dis lequel et explique géométriquement pourquoi pour convaincre celui qui a tort.

1.3.1 Définition et propriétés des homothéties

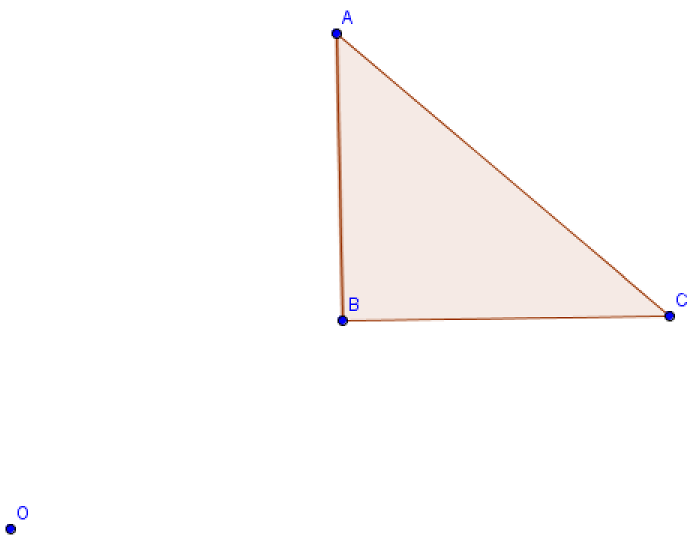
Activité 1.3.1 *:*

1. *Voici u point M et un point O.*

   (a) *Construis un point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}$*

   (b) *Quelle application dépendant de O et $\dfrac{1}{2}$ transforme M en M' ?*

2. *Voici un triangle rectangle ABC et un point O*



   (a) *Construis les images A', B' et C' des points A, B et C par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.*

   (b) *Compare la nature des deux triangles et leurs angles*

   (c) *Complète avec $\dfrac{1}{2}$ ou $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$: $A'B' = ...AB$; $\mathcal{A}_{A'B'C'} = ...\mathcal{A}_{ABC}$*

Résumé 1.3.1 *:*

Definition 1.3.1 *:*
Soient Ω et $k \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application du plan dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Ω est le seul point invariant et c'est le centre de l'homothétie.

Remarque 1.3.1 *:*

- *Les points M, M' et Ω sont alignés lorsque M' est l'image de M par une homothétie de centre Ω.*

- *Dans un plan muni d'un repère (O, I, J). Si $\Omega(a; b)$, $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ alors l'homothétie h de centre Ω et de rapport k telle que $h(M) = M'$ a pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$$

- *De façon générale, lorsqu'on a une transformation f d'expression analytique sous la forme:* $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$ *avec $k \neq 0$, alors:*
  - *Si $k = 1$ f est une translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$*
  - *Si $k = -1$ f est une symétrie centrale de centre $\Omega(\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$*
  - *Si $k \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$, f est une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\frac{a}{1-k}; \frac{b}{1-k}\right)$.*
- *Soit h une homothétie de rapport k.*
  - *Si $|k| < 1$ alors h réduit les figures*
  - *Si $|k| > 1$ alors h agrandit les figures*

***Propriété 1.3.1** :*
Soit h une homothétie de rapport k.

- *h **conserve:** la nature des figures, le sens des angles orientés et leurs mesures, les barycentres.*
- *h **multiplie:** les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.*

***Propriété 1.3.2** (caractérisation d'une homothétie) :*
Soient A, B, A' et B' quatre points du plan. Si $(AB) \parallel (A'B')$ et $A'B' \neq AB$ alors il existe une existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B'. Le rapport de cette homothétie est $k = \frac{A'B'}{AB}$ et son centre est le point de rencontre de (AA') et (BB').

Application 1.3.1 *:*

1. *Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).*
   (a) *Déterminer l'expression analytique de l'homothétie de centre $G(-2; 4)$ et de rapport $-\frac{3}{5}$*
   (b) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'expressions analytiques suivantes:*
      i. $\begin{cases} x' = \frac{4}{3}x + 4 \\ y' = \frac{4}{3}y - 3 \end{cases}$
      ii. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{5}x - 7 \\ y' = -\frac{1}{5}y + 3 \end{cases}$
2. *Soit ABC un triangle, (C) le cercle circonscrit et O le centre de (C). Soit H le milieu de [BC] et D le point diamétralement opposé à A. B' est le symétrique de A par rapport à B et C' est le symétrique de A par rapport à C. D se projette orthogonalement en K sur [B'C']. Soit h l'homothétie qui transforme B en B' et de centre A.*
   (a) *Quel est le rapport de h?*
   (b) *Déterminer les images de O, C par h, puis l'image du segment [BC].*
   (c) *Soit (C') l'image de (C) par h. Quel est le centre de (C')? Montrer que (C') passe par B' et C'.*
   (d) *Montrer que (DK) est la médiatrice de $[B'C']$ et déduire que $K = h(H)$ puis que les points A,H et K sont alignés.*

1.3.2 Composées d'homothéties

Cas de deux homothéties

Activité 1.3.2 *:*
Soient h, h' et h'' trois homothéties d'expressions analytiques respectives:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8 \\ y' = 2x - 4 \end{cases}, \begin{cases} x' = 4x - 1 \\ y' = 4x - 7 \end{cases} \quad et \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 5 \\ y' = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$$

1. *Détermine les rapports respectifs k, k' et k'' de h, h' et h''*
2. (a) *Calcule $k \times k'$*
   (b) *Détermine l'expression analytique de $h \circ h'$*
   (c) *Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ h'$?*
3. (a) *Calcule $k \times k''$*
   (b) *Détermine l'expression analytique de $h \circ h''$*
   (c) *Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ h''$?*

Résumé 1.3.2 *:*
Soient h et h' deux homothéties de rapports respectifs k et k'.

- *Si $kk' = 1$ alors $h \circ h'$ est une translation*
- *Si $kk' \neq 1$ alors $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk'*

Remarque 1.3.2 *Si h et h' ont le même centre alors:*

- *Si $kk' = 1$, $h \circ h'$ est l'application identité.*
- *Si $kk' \neq 1$, $h \circ h'$ est l'homothétie de même centre et de rapport kk'.*

Application 1.3.2 *:*
A et B sont deux points distincts du plan. h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$; h' est l'homothétie de centre B et de rapport k. On pose $f = h \circ h'$.

1. *Pour quelles valeurs de k f est-elle une homothétie?*
2. *Pour quelle valeur de k f est-elle une translation? Déterminer dans ce cas son vecteur de translation.*

Cas d'une homothétie et d'une translation

Propriété 1.3.3 *:*
Soit h une homothétie de rapport k et t une translation. $h \circ t$ est une homothétie de rapport k. Mais $h \circ t \neq t \circ h$; on dit que h et t ne commutent pas.

Application 1.3.3 *:*
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et soit A un point du plan. h est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{5}{3}$; t est la translation de vecteur $\vec{u}$.

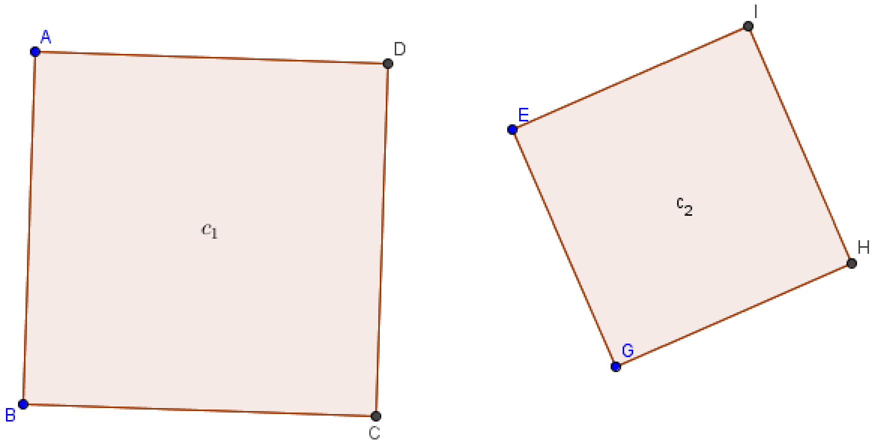
1. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = h \circ t$*
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = t \circ h$.*

1.4 Leçon 4: Similitudes planes

Objectifs: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- caractériser une similitude
- composer une homothétie et une rotation de même centre

Situation problème 1.4.1 *:*
On considère les deux carrés c_1 et c_2 suivants:



Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui fait passer c_1 à c_2?

Activité 1.4.1 :
ABCD est un carré direct de centre O.
On considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. *Construis l'image $A'B'C'D'$ de ce carré $ABCD$ par $h \circ r$.*
2. *Compare les propriétés géométriques des deux figures (distances, angles, aires...)*
3. *$h \circ r$ est-elle une rotation? Une homothétie?*
4. *Donne la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ r$.*

Résumé 1.4.1 :

Definition 1.4.1 :
*On appelle **similitude** du plan de rapport $k > 0$, toute transformation du plan dans lui même qui à tous point M, N associe les points M' et N', respectivement, tels que $M'N' = kMN$*

Exemple 1.4.1 • *Toute homothétie est une similitude du plan*

- *Toute isométrie est une similitude de rapport 1*

Propriété 1.4.1 :

- *Toute similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie*
- *Toute similitude de rapport k multiplie les distances par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.*

Definition 1.4.2 :
On appelle:

- ***similitude indirecte**, la composée d'un antidéplacement et d'une homothétie*
- ***similitude directe**, la composée d'un déplacement et d'une homothétie. Ainsi la composée d'une rotation r de centre O et d'angle θ et d'une homothétie de rapport k et de centre O est:*
  - *une similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport k si $k > 0$*
  - *une similitude directe de centre O, d'angle $\pi + \theta$ ou $\theta - \pi$ et de rapport $|k|$*

Exemple 1.4.2 :

- *La composée d'une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de rapport $\frac{3}{5}$ et de centre A est la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{3}{5}$.*
- *La composée d'une rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de centre B et de rapport $-\frac{2}{7}$ est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{2}{7}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.*

Orthogonalité dans l'espace

Classe : PC

Titre du module : géométrie dans l'espace **Chapitre** : Orthogonalité dans l'espace

Leçon 1 : Droites orthogonales de l'espace.

Objectifs : sur des solides de l'espace bien connus,

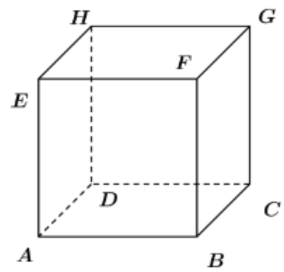
- Montrer que deux droites sont coplanaires ou non
- Montrer que deux droites sont perpendiculaires ou orthogonales.

Motivation : L'espace est généralement mieux indiqué pour représenter les objets du monde réel. La leçon suivante donne des outils nécessaires à la compréhension de l'orthogonalité dans l'espace.

a) Définitions et exemples

Activité **:**

Sur la figure suivante, les droites (AE) et (BF) sont parallèles. La droite (BC) est perpendiculaire à (BF). Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ?



Définitions

- Deux **droites** (D) et (D') sont **orthogonales** si leurs parallèles respectives (L) et (L') passant par un même point sont perpendiculaires. On note (D)⊥(D').

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ; A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Les **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un au moins des deux est nul ou si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exemples :

Sur la figure 1, les droites suivantes sont orthogonales : (AE) et (BC) ; (BF) et (AD) ; (BF) et (EH) ; (AB) et (AE) ;…….

Remarque **:**

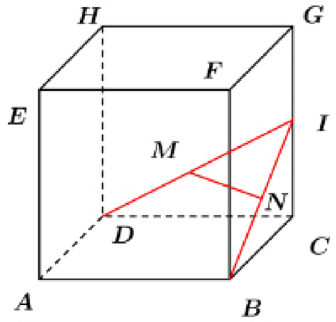
- Deux droites orthogonales ne sont pas forcement sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et la réciproque n'est toujours vraie.

b) Propriétés

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. C'est-à-dire que si **(D)⊥(D') et (L)** // **(D)** alors **(L)** ⊥**(D')**.

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. C'est-à-dire que si **(D)** // **(D') et (L)** ⊥ **(D)** alors **(L)** ⊥**(D')**.

Exercice d'application :



Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube. I est un point de l'arête [GC]. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments [ID] et [IB].

Montrer que les droites suivantes sont orthogonales : (MN) et (AC) ; (MN) et (EG).

Solution :

Les points M et N étant milieux respectifs des segments [ID] et [IB], la droite (MN) est parallèle à (BD). De plus les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré ABCD. Ainsi, les droites (MN) et (AC) sont orthogonales.

Comme les droites (MN) et (AC) sont orthogonales et (EG) // (AC) alors les droites (MN) et (EG) sont également orthogonales.

Leçon 2 : Droites et plans orthogonaux.

Objectifs : sur des solides de l'espace bien connus,

- Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.
- Monter que deux plans sont orthogonaux.

1. Définition

Une droite (D) est orthogonale ou perpendiculaire à un plan $(\mathcal{P})$ si elle est orthogonale à toutes droites du plan $(\mathcal{P})$. On dit alors que la droite (D) et le plan $(\mathcal{P})$sont orthogonaux et on note $(\mathrm{D}) \perp (\mathcal{P})$.

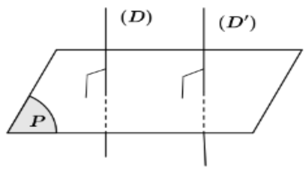
Nous admettons le théorème suivant :

Théorème :

Une droite (D) est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

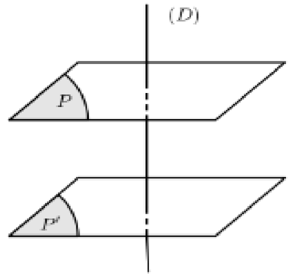
2. Propriétés

- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles. C'est-à-dire que si (D)⊥ $(\mathcal{P})$ et (D')⊥ $(\mathcal{P})$ alors (D) // (D').



- Si deux droites sont parallèles et l'une est orthogonale à un plan, alors l'autre l'est aussi. C'est-à-dire que si (D) // (D') et (D)⊥ $(\mathcal{P})$ alors (D')⊥ $(\mathcal{P})$.

- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles. C'est-à-dire que si $(\mathcal{P}) \perp (\mathrm{D})$ et $(\mathcal{P}') \perp (\mathrm{D})$ alors $(\mathcal{P})$ // $(\mathcal{P}')$.



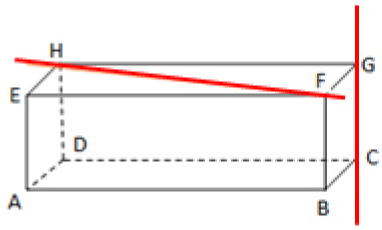
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Par un point A de l'espace, Il passe une unique droite orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$ donné.
- Par un point A de l'espace, Il passe un unique plan orthogonale à une droite (D) donnée .
- Si (D) est une droite orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, toute droite orthogonale à (D) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

<u>Remarque:</u>

- Pour montrer que deux droites sont orthogonales dans l'espace, il suffit de montrer que l'une d'elle est orthogonale à un plan contenant l'autre.
- Pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de montrer qu'elles sont orthogonales à un même plan.
- Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que ces deux plans sont orthogonaux à une même droite.

<u>Exercice d'application</u> :

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un pave droit.



$i)$ Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (FGH).

$ii)$ En déduire que les droites (HF) et (CG) sont orthogonales.

<u>Solution</u> :

$i)$ Comme (CG) est orthogonale aux droites sécantes (FG) et (GH), alors (CG) est orthogonale au plan (FGH).

$ii)$ De ce qui précède, (CG) est orthogonale à toute droite du plan (FGH). (FH) étant une droite de (FGH), on en déduit donc que (CG) est orthogonale à (FH).

3. Plans perpendiculaires.

<u>Définition</u> :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans. On dit que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont **perpendiculaires** et on note $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$ si l'un de ces plans contient une droite orthogonale à l'autre.

<u>Propriété</u> :

P1) Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

P2) Si un plan $(\mathcal{P})$ est orthogonal à une droite (D) et est perpendiculaire à un plan $(\mathcal{P}')$, alors (D) et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

P3) Si une droite (D) est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

P4) Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

P5) Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

P6) Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s' il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

MODULE 24 : GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Chapitre II : GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Motivation : *L'apprentissage de la géométrie en général et de la géométrie dans l'espace en particulier concourt à la construction du raisonnement à la familiarisation avec des techniques calculatoires telles que les calculs d'aires et des volumes. De plus la géométrie dans l'espace participe à la conception, à la représentation, et à la réalisation des chefs d'œuvres architecturaux et de tous les objets technologiques qui nous entourent*

Leçon 1 : VECTEURS DE L'ESPACE

Pré-requis : Orthogonalité dans l'espace, vecteur du plan

Activité d'apprentissage :

Considérons un cube ABCDEFGH. I milieu de $[AB]$, J milieu de $[BC]$ et K milieu de $[BF]$. On pose : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{k}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont-ils dans le même plan ?
2. Exprime en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ les vecteurs $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, et $\overrightarrow{DH}$.
3. Considérons le point O tel que $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Justifie que O est le centre du cube ABCDEFGH

.

I. Notion de vecteurs de l'espace

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace.

1. **Opération sur les vecteurs.**
   Les notions sur les vecteurs vues dans le plan reste vraies dans l'espace . En particulier la relation de Chasles : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
2. **Vecteurs colinéaires**
   Définition I.1 Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires si et seulement si il existe un réel α tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$
   Remarque I.1 Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Tout vecteur de la forme $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

   Exemple 2.1 Le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

   Si $\overrightarrow{k} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$ alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{k}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

   Exemple 2.2 $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Ainsi $\overrightarrow{BO}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$
3. **Vecteurs coplanaires**
   Définition I.2 Trois vecteurs sont dits coplanaires lorsque l'un d'eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si et seulement si les point A, B, C et D sont coplanaires.
   Exemple 2.3
   (a) Dans l'activité précédente, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont ils coplanaires ?

   Théorème I.1 : Trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non coplanaires s'il existe un triplet de réels non tous nuls (α, β, γ) tel que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

II. Bases et repères

On appelle base de l'espace tout triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteur non coplanaires et cette base est orthogonale lorsqu'elle est constitué de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

Comme le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut définir un repère dans l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant non coplanaires). Le point O est appelé le centre et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ vecteurs de base. Cette base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont pour longueur 1 et sont deux à deux orthogonaux.

Définition II.1 Tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale est appelé repère orthonormé de l'espace. Tout point A de l'espace sera alors repéré par un triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{i}$. (x, y, z) sont les coordonnées du point A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la cote.

Exemple II.1 Considérons le cube ABCDEFGH de l'activité précédente. Montre que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base et détermine les coordonnées des points A, C, G et H dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. ***Représentation d'un point M dans un repère de l'espace***

   Soit $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $M \in \mathcal{E}$. On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Pour placer le point M, on peut utiliser les constructions suivantes :
   Place d'abord :
   (a) Le point P_1 sur $(O, \vec{i})/\ (\overrightarrow{OP_1} = x\vec{i})$;
   (b) Le point P_2 sur $(O, \vec{j})/\ (\overrightarrow{OP_2} = y\vec{j})$;
   (c) Le point P_3 sur $(O, \vec{k})/\ (\overrightarrow{OP_3} = z\vec{k})$.

   . Ensuite place le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Enfin place le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

   Exemple : Place le point $M(-2, 3, 1)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. ***Calcul dans un repère***

   Soient A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ trois points de l'espace dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Soient $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$.

   Le barycentre de $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \lambda)\}$ a pour coordonnées G $\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \lambda} \end{pmatrix}$

   La distance $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

   Exemple II.2
   Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(-1; 3; 4)$.
   Le barycentre G du système pondéré $\{(A; 2), (B; -1), (C; 3)\}$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times 1 - 1\times 0 + 3\times(-1)}{2-1+3} = \dfrac{1}{4} \\ y_G = \dfrac{2\times 2 - 1\times 1 + 3\times 3}{2-1+3} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ z_G = \dfrac{2\times 3 - 1\times 2 + 3\times 4}{2-1+3} = \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ainsi que leurs distances.

Leçon 2 : ÉQUATION CARTÉSIENNE ET REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Dans toute cette leçon, nous travaillerons dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Pré-requis :Vecteur de l'espace, vecteur du plan et géométrie vectorielle.

Activité d'apprentissage

Considérons les points A $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. Place les points A, B et C dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?
3. Posons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
   (a) Soit M $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace. Donne un système de trois equations traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) En éliminant α et β dans le système d'équation précédent, donne une équation en fonction de x, y et z.

Résumé

1. **Équation cartésienne et paramétrique d'un plan dans l'espace**

   (a) **Plan dans l'espace et équation paramétrique**
   Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ deux vecteurs non colinéaires. Le plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ noté $\mathcal{P}_{(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$ et défini par $\mathcal{P}_{(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \left\{M/\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ est le plan de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ainsi le point $M(x, y; z) \in \mathcal{P}_{(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \iff \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}x - x_0\\y - y_0\\z - z_0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$
   Le système précédent est l'équation paramétrique d'un plan dans l'espace.
   Exemple 2.1 : Déterminons l'équation paramétrique du plan $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$: $O(0, 0, 0)$, $\overrightarrow{i}(1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j}(0, 1, 0)$.
   Alors $\mathcal{P}_1$: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Détermine aussi l'équation paramétrique des plans $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})}$ et $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_{(O,\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}$.

   (b) **Équation cartésienne du plan dans l'espace**
   Pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$, il suffit d'éliminer les paramètres α et β dans l'équation paramétrique. Ainsi l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace sera de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont non tous nuls.
   Exemple 2.2 Le plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine du repère et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v}(2, 0, 1)$

à pour équation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha \\ z = \beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

En éliminant les paramètres entre les équations nous obtenons l'équation $x = -y + 2z \iff x + y - 2z = 0$ qui est l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

(c) **Vecteur normal à un plan de l'espace**

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteurs directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On appelle vecteur normal à $\mathcal{P}$ tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ainsi soit $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$ et $M(x, y, z)$ un point de l'espace et supposons $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$; $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + (\underbrace{-ax_0 - by_0 - cz_0}_{=d}) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$.

Remarque 1.1 Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet toujours une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

Exemple 2.3 Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(2, 1, -1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -1, 1)$.

Solution : Soit $M(x, y, z)$. $M \in (\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(x-2) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \iff 2x - y + z - 2 = 0$.

$(\mathcal{P}) : 2x - y + z - 2 = 0$

(d) **Plan contenant trois points donnés.**

Considérons trois points distincts A, B et C et le plan défini par ces trois points. On se ramène facilement au cas d'un plan dont on connait un point A et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Il suffit en effet de prendre ces vecteurs directeurs respectivement égaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont bien non nuls et non parallèle puisque A, B et C sont distincts.

Exemple 1.3 Soit A(0,1,1) ; B(1,0,1) et C(1,1,0). L'équation paramétrique du plan

$\mathcal{P}$=$\mathcal{P}_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ est $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\alpha + 1 \\ z = -\beta + 1 \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

En éliminant les paramètres entre ces équations, nous obtenons par la seconde et la troisième équation : $\alpha = 1 - y$ et $\beta = 1 - z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x = 1 - y + 1 - z$. Ainsi l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$=$\mathcal{P}_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ est $x + y + z - 2 = 0$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, 1, 1)$

(e) **Distance d'un point à un plan**

La distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $(\mathcal{P})$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est notée $d(M, \mathcal{P})$ et égale à $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemple :

La distance du point $A(2, 1, 3)$ au plan $(\mathcal{P})$ d'équation $3x - y - z - 5 = 0$ est :

$d(A, \mathcal{P}) = \dfrac{| 3 \times 2 - 1 - 3 - 5 |}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{| -3 |}{\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

2. **Système d'équation cartésienne et paramétrique d'une droite dans l'espace**

(a) ***Droite de l'espace et représentation paramétrique.***

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. La droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ (droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$) notée $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ est définie par : $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) = \{M / \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} ; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi si $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ alors $M(x, y, z) \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ ssi $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u}$.

$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x - x_0 = \alpha a \\ y - y_0 = \alpha b \\ z - z_0 = \alpha c \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases}$ qui est l'équation paramétrique de $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$

(b) **Équation cartésienne d'une droite**

L'équation cartésienne d'une droite se détermine en éliminant le paramètre entre les équations paramétriques et nous obtenons alors à nouveau deux équations linéaires en x, y et z qui sont les équations cartésienne se deux plan dont l'intersection est une droite.

(c) **Droite déterminée par deux points distincts A et B**
L'équation d'une droite comprenant deux points A et B se ramène à la recherche des équations d'une droite connaissant un point (par exemple A) et un vecteur directeur (par exemple $\overrightarrow{AB}$)
Exemple 2.1 : Soit $A(1,4,-3)$ et $B(2,5,1)$; $\overrightarrow{AB}(1,1,4)$. L'équation paramétrique de $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{AB})$ est $\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=\alpha+4 \\ z=4\alpha-3 \end{cases}$.
Par la première équation, on a $\alpha = x-1 \Longrightarrow \begin{cases} y = x-1+4 \\ z=4(x-1)-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y+3=0 \\ 4x-z-7=0 \end{cases}$.
Ce dernier système est une équation cartésienne de $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{AB})$

3. **Exercice**

(a) ***(Détermination d'une représentation paramétrique d'un plan connaissant son équation cartésienne)***. Détermine une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P}) : 2x-y+3z+1=0$
En posant $x=\alpha$ et $z=\lambda$ on obtient $y=2\alpha+3\lambda+1$.
Donc une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$ est : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=1+2\alpha+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad (\alpha,\lambda\in\mathbb{R})$

(b) ***(Détermination d'un vecteur directeur d'une droite de l'espace connaissant son équation cartésienne)*** Détermine le vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne $\begin{cases} 2x+3y-z+1=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$
Le système est composé des équations de deux plans de vecteurs normaux : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$.
On pose $z=\alpha$ et on exprime x et y en fonction de α.
On obtient : $\begin{cases} 2x+3y=\alpha-1 \\ x+y=-\alpha+5 \\ z=\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-4\alpha+16 \\ y=3\alpha-11 \\ z=\alpha \end{cases}$.
Ainsi un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$

Leçon 3 : POSITIONS RELATIVES DES DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

Activité d'apprentissage :
Soient $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation $2x+y+z=1$, $(\mathcal{P}_2)$ le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+2\alpha+\lambda \\ y=2-\alpha+\lambda \\ z=-\alpha-5\lambda \end{cases} \quad (\alpha,\lambda\in\mathbb{R})$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$

1. Détermine un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ de $(\mathcal{P}_2)$ et $\overrightarrow{n_1}$ de $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie s'ils sont colinéaires.
2. Résous le système de trois équations à trois inconnues formé par les équations de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P}_1)$.
3. Détermine une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.
4. En remplaçant les valeurs de la coordonnée d'un point de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $(\mathcal{P}_1)$, on trouve une équation de premier degré. Détermine cette équation et résous là.

1. **Positions relatives de deux plans**
Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plan ayant pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont :
(a) **parallèles** ssi $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{n'}=\alpha\overrightarrow{n}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$).

(b) **sécantes** ssi $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires.

(c) **perpendiculaire** ssi $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux ($\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$).

Exercice d'application : Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans d'équations cartésiennes respective

$(\mathcal{P})$: $2x + y + 2z - 6 = 0$

$(\mathcal{P}')$: $2x - 2y - z + 3 = 0$

(a) i. Démontre que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants et détermine une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d') des deux plans.

ii. Démontre que $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}$

(b) Détermine une équation paramétrique et cartésienne du plan (π) passant par $A(0, 2, 1)$ et parallèle à $(\mathcal{P})$.

Solution : **a.i)** Les vecteurs normaux de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont respectivement $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Peut on trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{n'}$? $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha = 1\\ \alpha = -\dfrac{1}{2}\\ \alpha = -2\end{cases}$ ce qui est impossible d'où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires par conséquent les deux plans sont sécantes et définissent une droite (d') dans l'espace de système d'équation $\begin{cases}2x + y + 2z - 6 = 0\\ 2x - 2y - z + 3 = 0\end{cases}$. Posons $z = \lambda$. En le remplaçant dans le système d'équations précédent on obtient : $\begin{cases}2x + y = 6 - 2\lambda\\ 2x - 2y = -3 + \lambda\end{cases}$. En résolvant ce système en fonction de λ on obtient : $\begin{cases}x = -\dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{3}{2}\\ y = -\lambda + 3\\ z = \lambda\end{cases}$.

Ce dernier système est une représentation paramétrique de la droite (d') passant par $A\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$

a.ii) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = 0$ d'où $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$

b. $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (\pi) \iff \exists\alpha,\beta \in \mathbb{R}/\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}x\\y-2\\z-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x = \alpha\\ y = -2\alpha - 2\beta + 2\\ z = \beta + 1\end{cases}$. Ce dernier système est une représentation paramétrique de (π). La troisième équation nous donne $\beta = z - 1$. En remplaçant α par x et β par sa valeur dans la deuxième équation on obtient $y = -2x - 2(z-1) + 2$. Ainsi $(\pi) : 2x + y + 2z - 4 = 0$

2. <u>**Position relative de deux droites**</u>

Soient (D_1) et (D_2) deux droites distinctes de vecteur directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. (D_1) et (D_2) sont :

(a) **Parallèles** si et seulement $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

(b) **Sécantes** si et seulement si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont non colinéaires.

(c) **Perpendiculaires** si et seulement $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$

Remarques 2.1

(a) Deux droites sont coplanaires si et seulement elles sont parallèles ou sécantes.

(b) Si deux droites ont leur vecteur directeur non colinéaires alors ces deux droites sont non coplanaires ou sécantes

(c) Pour démontrer que deux droites sont non coplanaires, il suffit de monter qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Exemple 2.1 Soient $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ les droites de représentations paramétriques et cartésienne respectives :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\gamma \\ z = -1 + 4\gamma \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

(a) Démontre que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$ sont strictement parallèles.

(b) Démontre que les droites $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ sont sécantes en un point A dont on précisera les coordonnées.

(c) i. Démontre que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.

ii. Démontre que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales.

Solution : **(a)** Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u''}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{u''} = -2\overrightarrow{u}$) Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$ sont parallèles. De plus $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$ n'ont aucun point commun car tout point de $(\mathcal{D})$ a pour abscisse 3 et tout point de $(\mathcal{D}'')$ a pour abscisse 1. Donc les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$ sont strictement parallèles

(b) Un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D}')$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet en posant $z = \lambda$ dans le système d'équations cartésienne de $(\mathcal{D}')$ et en exprimant x et y en fonction de λ, on obtient : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

$\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires car s'il $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u'} = \beta\overrightarrow{u''}$ alors $\begin{cases} -1 = 0 \\ 2 = -2\lambda \\ 1 = 4\lambda \end{cases}$ qui n'admet pas de solution, donc $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ sont sécantes ou non coplanaires.

$(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ ont un seul point en commun si et seulement si : $\begin{cases} -\lambda = 1 \\ 3 + 2\lambda = 1 - 2\gamma \\ \lambda = -1 + 4\gamma \end{cases} \quad (\lambda, \gamma \in \mathbb{R})$.

Ce système admet un seul couple solution $(-1, 0)$. Donc $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ sont sécantes en A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) i. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u''}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes où non coplanaires.

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont un seul point en commun si et seulement si $\begin{cases} 3 = -\lambda \\ 1 + \alpha = 3 + 2\lambda \\ -2\alpha = \lambda \end{cases} \quad (\lambda, \alpha \in \mathbb{R})$.

Ce système n'a pas de solution, donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires
(c) ii. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 0$; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales.

3. **Positions relatives d'une droite et d'un plan**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

(a) $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$

(b) $(\mathcal{D}$ est contenue dans $(\mathcal{P}) \iff \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq 0$ et $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$

(c) $(\mathcal{D})$ se coupe avec $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{M\}$

Remarque 3.1

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont non colinéaires alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants et non orthogonaux

Exemple 3.1

Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$ sont sécantes en un point A dont on précisera les coordonnées.

(b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$.

Solution : **a.)** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants. En remplaçant les valeurs de la coordonnée d'un point de $(\mathcal{D})$ dans l'équation de $(\mathcal{P})$, on obtient $2(2-2\lambda) + (2\lambda) + 2(2-3\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants en A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b.) $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de (Δ) et $A \in (\Delta)$; ainsi la droite (Δ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \frac{1}{2} + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

4. **Projeté orthogonal**

Définition 1 : M étant un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, on appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ le point M' d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$

Définition 2 : M étant un point de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, on appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ le point M' d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$

Exemple : Soit $A(2, -3, 4)$, $B(-3, 1, 2)$ et $\overrightarrow{u}(-1, 2, 3)$.
$(\mathcal{D})$ est une droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ et $(\mathcal{P})$ est le plan perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ et passant par B.

(a) Donne une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.

(b) Détermine une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

(c) i. Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
   ii. Calcul la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$

(d) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal B' de B sur $(\mathcal{D})$ et en déduire $d(B, \mathcal{D})$.

Solution :**(a)** La représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

(b) $\mathcal{P}$ étant perpendiculaire à $\mathcal{D}$ le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Ainsi : $(\mathcal{P}) : -x + 2y + 3z + d = 0$. Comme $\mathcal{P}$ passe par B alors $-(-3) + 2(1) + 3(2) + d = 0 \Longrightarrow d = -11$. D'où $(\mathcal{P}) : -x + 2y + 3z - 11 = 0$

(c).i H est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ donc les coordonnées de H vérifient les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$. On a $-(2-\lambda) + 2(-3+2\lambda) + 3(4+3\lambda) - 11 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ Ainsi $H(\frac{3}{2}, -2, \frac{11}{2})$

(c)ii. $d(A, \mathcal{P}) = AH = \frac{\sqrt{14}}{2}$

(d) B' est le point d'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ et d'après ce qui précède $B' = H$. $d(B, \mathcal{D}) = BH$

Chapitre 3 : Sphère

<u>Leçon :</u> Équation cartésienne d'une sphère et positions relative d'une et d'un plan puis d'une sphère et d'une droite.

<u>Nombre de périodes : 1</u>

<u>Compétences exigées :</u>

<u>Motivation :</u>

Plusieurs objets de notre entourage ont la forme sphérique. La détermination des éléments caractéristiques de ces objets, ainsi que leurs positions relatives avec des plans et des droites restent très préoccupante. À la fin de cette leçon, nous aurons les ressources nécessaires pour répondre à ces différentes préoccupations.

<u>Pré – requis</u>

→ **Distance :**
Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ et (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$;
$d(A,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

→ **Cercles (**caractéristiques, position relative d'une droite et d'un du cercle**)**

→ **Rappel sur la projection orthogonale.**

<u>Situation de vie :</u>

Dans la suite, l'espace euclidien (ε) est muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé.

<u>Activité d'apprentissage</u>

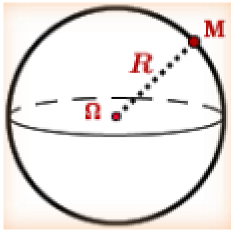
Dans le laboratoire de votre établissement, votre camarade Abena a une pastèque de forme sphérique, dans le repère du laboratoire et par une méthode appropriée il détermine les coordonnées $\Omega(a,b,c)$ du centre de la pastèque et son rayon r.

1. a. Soit $M(x,y,z)$ un point de la surface de la pastèque. Vérifier que
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
b. comment appelle – t – on ce type d'équation ?
2. Soit (P) un plan de l'espace, H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P)
Faire une figure et donner la position relative de (S) et (P) dans chacun des cas suivants :
a) $d > \mathrm{r}$
b) $d = \mathrm{r}$
c) $d < \mathrm{r}$

Résumé

I. Équation de la sphère :

1) Sphère définie par son centre et son rayon :



Soit (S) la sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega\,,\ y_\Omega\,, z_\Omega\,)$ et de rayon R, $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow (x - x_\Omega\,)^2 + (y - y_\Omega\,)^2 + (z - z_\Omega\,)^2 = R^2$

En développant on obtient : $x^2+y^2+z^2 \underbrace{-2x_\Omega}_{a} x \underbrace{-2y_\Omega}_{b} y \underbrace{-2z_\Omega}_{c} z + \underbrace{x_\Omega^2+y_\Omega^2+z_\Omega^2-R^2}_{d}=0$

Que l'on peut réécrire : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Propriété :

Soit $\Omega(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ un point de l'espace et $r \geq 0$, la sphère $S_{(\Omega,\mathrm{r})}$ a un équation cartésienne de la forme : $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=r^2$

Exemple :

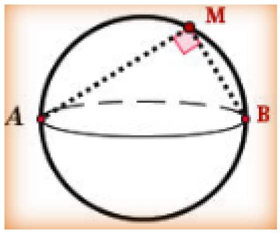
Déterminons l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -2, 0)$ et passant par $A(2, -1, 1)$:

Calculons le rayon de la sphère : $r=\Omega A=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$

Pour tout point $M(x, y, z)$de la sphère, nous avons : $\Omega\mathrm{M} = \mathrm{r}$

Ainsi, $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=3 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+2=0$

2) Sphère définie par un diamètre :



Soit (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

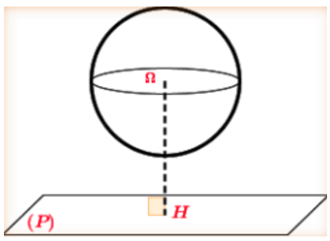
Propriété :

Soient A et B deux points distincts dans l'espace (ε). La sphère de diamètre $[AB]$ a pour ensemble de points M dans l'espace qui vérifie $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Exemple :

Soient $A(1, -1, 0)$ et $B(2, 0,1)$. Déterminer une équation de la sphère de diamètre $[AB]$.

II. Position relative d'un plan et d'une sphère :



(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan de l'espace H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P).

$\rightarrow \boldsymbol{d(H, (P)) = \Omega\mathrm{H} > R}$

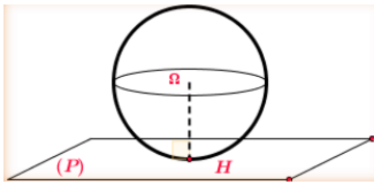
Dans ce cas le plan ne coupe pas la sphère

$\boxed{(S)\cap(P)=\phi}$

→ $\boldsymbol{d(H,(P)) = \Omega H = R}$

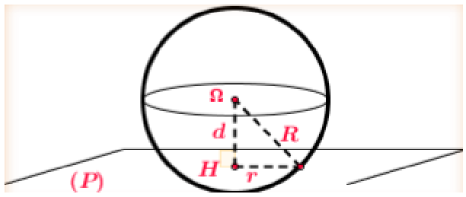
Dans ce cas le plan est tangent à la sphère en un point H

$$\boxed{(S)\cap(P)=\{H\}}$$



→ $\boldsymbol{d(H,(P)) = \Omega H < R}$ Dans ce cas le plan coupe la sphère suivant un cercle.

$$\boxed{(S)\cap(P)=(\Gamma)}$$



Ou (Γ)est un cercle de centre H et de centre r tel que $r^2 = R^2 - d^2$

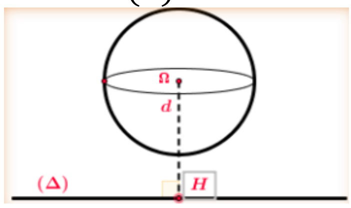
III. Position relative d'une droite et d'une sphère

(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) une droite de l'espace H est la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) et d est la distance entre le point Ω et la droite (Δ).

→ $\boldsymbol{d(H,(\Delta)) = d > R}$

Dans ce cas la droite ne coupe pas la sphère

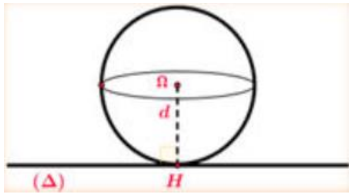
$$\boxed{(S)\cap(\Delta)=\phi}$$



→ $\boldsymbol{d(H,(\Delta)) = d = R}$

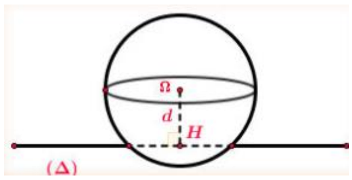
Dans ce cas la droite est tangent à la sphère en un point H

$$\boxed{(S)\cap(\Delta)=\{H\}}$$



→ $\boldsymbol{d(H,(\Delta)) = d < R}$ Dans ce cas la droite coupe la sphère en deux points A *et* B

$$\boxed{(S)\cap(\Delta)=(A,B)}$$



Exercice d'application :

I. Soit (D) la droite passant par $A(1,-1,0)$ et vecteur directeur $\vec{u}(1,2,3)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $C(1,0,3)$ tangente à la droite (D).

II. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,2,-1)$ et de rayon $r = 3$.
On considère le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z = 0$.
1) Déterminer une équation cartésienne de (S).
2) La sphère S coupe – t – elle le plan (P) ?
3) Nature et éléments caractéristiques de $S \cap P$.

III.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(-2,0,1)$, $B(1,2,-1)$ et $C(-2,2,2)$.
   a) Montrer que les points A, B et définissent un plan.
   b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont secants suivant une droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
3. Démontrer que la droite D et le plan (ABC) sont secants et déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.
4. Soit S la sphère de centre $\Omega(1,-3,1)$ et rayon $r = 3$.
   a) Étudier les positions relatives de la sphère S et de la droite D.
   b) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S

MODULE 22 (C-E): ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES

CHAPITRE 19: STATISTIQUES : REGROUPEMENT EN CLASSE

Leçon 1 : Généralité

Objectifs :

- Calculer la moyenne, déterminer la classe modale, le mode, la médiane d'une série regroupée en classes
- Calculer l'écart moyen, la variance, l'écart-type d'une série regroupée en classes
- Interpréter dans des situations contextuelles la signification des différents paramètres (de
position ou de dispersion)

Rappels

Population : C'est l'ensemble étudié.

Individu : C'est un élément de la population.

Effectif total : C'est le nombre total d'individus.

Caractère : C'est la propriété étudiée. On distingue les caractères discrets qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs et les caractères continus dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute, …).

Situation de vie :

On veut déterminer le nombre moyen de voiture qui traversent le payage d'Edéa chaque jour. Pour cela pendant un mois, on choisit chaque jour un intervalle de temps pour compter le nombre de voiture qui traverse ce payage. Comment pouvons-nous utiliser ces donner pour résoudre ce problème ?

Activité : Le temps passé devant la télévision par 50 élèves pendant une certaine journée.

Temps en mn	5	8	10	15	18	25	30	38	45	50	55	59
Nombre d'élèves	2	7	5	4	10	2	6	5	3	1	2	3

1. Compléter ce tableau par les fréquences, effectifs cumulés croissants et décroissants
2. Calculer la moyenne, l'écart type et la variance de cette série.
3. Compléter le tableau suivant

Intervalle de temps $[a; b[$	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ;60[
Nombres d'élèves (n)					
$C = \dfrac{a+b}{2}$					
$A = b - a$					

$d=\frac{n}{A}$					

Résumé

Soit $[a;b[$ une classe :

- On appelle centre de cette classe le réel $C=\frac{a+b}{2}$
- On appelle amplitude de cette classe le réel $A=b-a$
- On appelle densité de cette classe le réel $d=\frac{n}{A}$ où n est l'effectif de la classe et A l'amplitude de cette classe
- La classe modale est la classe ayant la plus forte densité

Remarque : Lorsque les classes ont les même amplitudes, alors la classe modale est la classe ayant le plus grand effectif

- On appelle effectif cumulé croissant le nombre d'individu dont l'effectif est inférieur ou égal à cette modalité.
- On appelle effectif cumulé décroissant le nombre d'individu dont l'effectif est supérieur ou égal à cette modalité.
- On appelle médiane d'une série statistique la modalité qui correspond à la moitié de l'effectif total. La classe médiane est la classe qui contient la médiane.
- La moyenne d'une série statistique est le réel $\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}n_ic_i$ où n_i l'effectif de la classe de centre c_i.
- L'écart moyen d'une série statistique est le réel positif $e_m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}n_i|\overline{x}-c_i|$. L'écart moyen permet de mesurer la dispersion d'une série.
- La variance d'une série statistique est le réel positif $V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}n_i(c_i-\overline{x})^2$. La formule de KOENIG $V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}n_i\,c_i^2-\overline{x}^2$ permet de calculer facilement la variance.
- L'écart type d'une série statistique est le réel positif $\sigma=\sqrt{V}$
- L'intervalle $]\overline{x}-\sigma;\ \overline{x}+\sigma[$ est appelé intervalle moyen. Le pourcentage d'observations contenues dans cet intervalle donne une mesure de la concentration des observations autour de la moyenne

Exercice d'application : le tableau suivant donne la répartition des notes de 50 élèves d'une classe de Première C.

Notes	[2,5[	[5,8[	[8,10[	[10,14[	[14,18[	[18,20[

Nombres d'élèves	5	14	17	9	3	2

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissant et décroissant de cette série
2. Calculer la moyenne, l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série.
3. Détermine la classe modale et la classe médiane de cette série.

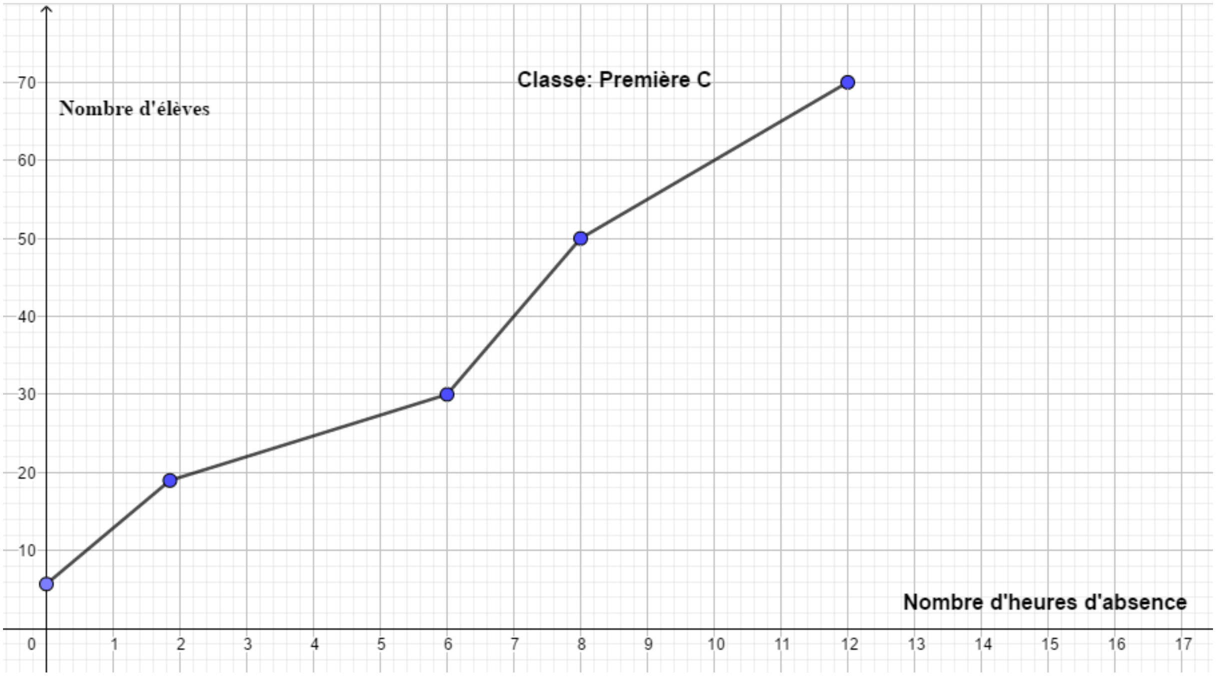
Leçon 2 : Représentation graphique

Objectifs :

- Construire et interpréter un histogramme
- Construire et interpréter la courbe des effectifs ou des fréquences cumulés.
- Déterminer la valeur exacte de la médiane par la méthode d'interpolation linéaire

Introduction : Pour un caractère continue, la série statistique peut être représenter par un histogramme, un polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulés.

Situation de vie : Un surveillant vient d'être affecté dans un établissement scolaire. Il veut connaitre l'état disciplinaire des élèves de la classe de première C. Le seul papier qu'il trouve dans le bureau de son prédécesseur est un papier comportant la figure ci-après. Utilise ce tableau pour reconstituer un tableau des absences de cette classe.



1.1 Histogramme

Activité : Complète le tableau de la série statistique de la leçon précédente :

Notes	[2,5[	[5,8[	[8,10[	[10,14[	[14,18[	[18,20[
Nombres d'élèves	5	14	17	9	3	2
Amplitude						
Densité						
$Hauteur = densite \times 10$						

Par FEUDJIO Alexis Patrice PLEG MATHS lycée d'ODZA

Dans un repère orthogonal, représente des rectangles juxtaposés dont en abscisse on a les bases qui sont les classes et en ordonnées les hauteurs de classes.

Résumé :

- L'histogramme d'une série statistique est un ensemble de rectangles juxtaposées dont les bases sont les amplitudes et les hauteurs sont proportionnelles aux densités des classes.
- Le polygone des effectifs est une ligne brisée obtenue en joignant les milieux des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme

2.2 Polygone des effectifs cumulés croissants et décroissant

Activité : On considère la série statistique de la leçon précédente :

Notes	[2,5[	[5,8[	[8,10[	[10,14[	[14,18[	[18,20[
Nombres d'élèves	5	14	17	9	3	2

1) Compléter le tableau suivant :

Notes (n_i)	2	5	8	10	14	18	20
Effectifs cumulés croissant (ECC_i)							
Effectifs cumulés décroissant (ECD_i)							

2) Dans un repère orthogonal, Placer les points $A_i(x_i; ECC_i)$ puis relier ces points par des segments de droites
3) Dans un repère orthogonal, Placer les points $B_i(x_i; ECD_i)$ puis relier ces points par des segments de droites.

Résumé :

- Le polygone des effectifs cumulés croissants (resp décroissant) est une ligne brisée joignant les points ayant pour abscisse la borne supérieure (resp la borne inferieure) de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé de la classe.
- A l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on détermine la médiane d'une série statistique. En effet la médiane est l'abscisse du point de l'effectif cumulé croissant ou décroissant dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total $\left(\frac{N}{2}\right)$. La valeur exacte de cette médiane se détermine par interpolation linéaire : on utilise les points alignés de l'un des polygone de effectifs cumulés $A(x_A; y_A), M\left(Me; \frac{N}{2}\right)$ et $B(x_B; y_B)$ et la relation $\frac{x_A - Me}{y_A - \frac{N}{2}} = \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$ puis on tire la médiane Me.

Remarque : On peut aussi remplacer les effectifs par les fréquences et on obtient le polygone des fréquences cumulés. Pour calculer la médiane, on remplace $\frac{N}{2}$ par 50 ou 0,5.

Exercice d'application :

Le tableau statistique suivant présente la distribution des retards (en minutes) des élèves d'un établissement un lundi matin :

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[
Effectifs	38	50	32	24	26	30

1. Déterminer la classe modale ainsi que le mode de cette série statistique
2. Construire l'histogramme de cette série statistique et le diagramme des effectifs.
3. Dans un autre repère, construire le polygone des ECC et le polygone des ECD de cette série statistique.
4. En déduire la valeur exacte de la médiane par interpolation linéaire

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : SUITES NUMERIQUES

MOTIVATION :

Dans la vie il nous est souvent arrivé de travaillé sur des notions de logique, avec en exemple des termes qui se répètent ou qui évoluent selon un chronogramme précis. Nous avons même dans nos champs, plantations, nos parents qui en mettant les cultures au sol respectent un écart précis ! On appelle ces cas de figure des suites dans ce chapitre nous amorceront leur étude !

LEÇON I : GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

Durée : 3h

Compétences Exigées :

- Reconnaitre une suite numérique et calculer ses termes
- Représenter les termes d'une suite numérique dans un repère
- Etudier les limites, la monotonie et la convergence d'une suite numérique.

Prérequis :

On considère les fonctions suivantes définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+3}$ et $g(x) = -x^2 + 2$

1- Donner les valeurs de f et g pour $x = 0$; $1; 3$.
2- Représenter graphiquement f et g puis placer les images par f et par g des nombres précédents
3- Quel est la limite de f et g lorsque x tend vers l'infini ?

Activité D'apprentissage

Considérons l'ensemble suivant : $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$

1- Cet ensemble compte combien de termes ? peut-on attribuer une positions precise a chacun de ces termes ?
Remplir le tableau suivant :

Rang						
Terme	0	2	4	6	8	10

En déduire qu'en fonction du rang on peut donner tous les éléments de l'ensemble A.

2- Notons n le rang, et U_n un élément de A au rang n. Compléter le tableau suivant :

Termes	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
Valeurs						

3- Exprimer :
   - Le terme de rang $n + 1$ en fonction du terme de rang n ;
   - Le terme U_n en fonction de .

4- .
   - Sur la droite réelle, placer U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5.

- En posant $U_{n+1} = f(U_n)$; $\begin{cases} y = f(x) \\ x = U_n \end{cases}$; représenter les termes images
  U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5 dans un repère orthonormé.

5- En considérant que n peut aller à l'infini , calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.(on dira que U_n diverge).
Ce résultat se vérifie-t-il sur le graphe de la courbe précédente ?

RESUME

- Une suite numérique est un ensemble de nombres appelés termes qui se suivent et appartiennent à une même famille noté $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Généralement, elles sont entièrement défini de deux façons :
  - Une formule explicite : en exemple $U_n = \frac{6n-3}{n^2}$
  - Une relation de récurrence : en exemple $\begin{cases} U_{n+2} = U_n - U_{n+1} \\ U_0 = 1 \, ; U_1 = 2 \end{cases}$

  Remarque : on peut passer d'une définition a une autre ; même si cela n'est pas toujours évident.

- De par sa définition, une suite numérique peut être considéré comme une fonction. sur ce point, elle admet :
  - Une limite en l'infini. On dira qu'une suite est convergente si sa limite en l'infini donne un réel et est divergente sinon.
    NB : une représentation graphique permet également de déterminer cette limite ; principalement pour le cas de suites définit par une relation de récurrence.
    Remarque : pour une relation de récurrence, en posant $U_{n+1} = f(U_n)$, on remarque que pour chaque image trouvé sur l'axe des ordonnés , il suffit de la ramené sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$ pour qu'elle deviennent un objet pour l'image suivante par f.
  - Une monotonie, c'est-à-dire que U_n peux être : croissante $(U_{n+1} \geq U_n)$; décroissante $(U_{n+1} \leq U_n)$ ou constante $(U_{n+1} = U_n)$. Ceci entraine le fait qu'une suite peut etre borné c'est-à-dire minoré $(il\ existe\ m \in \mathbb{R}\ tel\ que\ m \leq U_n\ )$ et majoré $(il\ existe\ M \in \mathbb{R}\ tel\ que\ U_n \leq M\ )$ a la fois.
    NB : des critères de convergence découlent des données précédentes. Une suite sera dite convergente si elle est à la fois : croissante et majoré ou décroissante et minoré.

EXEMPLE :

On considère les suites $U, V, W\ et\ T$ définit sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases} \qquad V_n = \frac{3n-1}{n+1} \qquad W_n = 2n - 1 \qquad \begin{cases} T_1 = 3 \\ T_{n+1} = 3T_n - 6 \end{cases}$$

1- Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n
2- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (U_n) puis conclure sur sa monotonie et sa convergence.
3- Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , représenté graphiquement les 6 premiers termes de la suite V_n.
4- Dire à partir des critères de convergence si V_n converge.
5- Montrer que T_n est une suite constante de terme.

<u>LECON 2</u> : ETUDE DE SUITES PARTICULIERES :

Suites Arithmétiques et Suites Géométriques.

Nombre d'heures : 3h

<u>Compétences Exigées</u> :

- Reconnaitre et calculer des termes quelconques de suites arithmétiques ou géométriques.
- Sommer des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

<u>Prérequis</u> :

Effectuer les opérations suivantes sans calculatrice :

$3-3+3-3+\cdots+(-1)^n\times 3 =$; $3\times 2-3\times 2^2+3\times 2^3-3\times 2^4=$

<u>Situation problème :</u>

Pour aider ses fils Mathis et Gabriel a être mieux organisé ; leur père leurs donne leurs argent de poche par moi en faisant cette promesse a chacun d'eux :

- A Gabriel l'ainé qui a 10 ans, il donne 2000fr et augmente ce montant de 20% chaque année.
- A Mathis le cadet, il donne 2000fr et augmente ce montant de 500fr chaque anné.

Gabriel se sentant rabaissé, il s'insurge contre son père. Ce dernier le rassure qu'a ses 18 ans il aura compris !

Expliquez la pensé du père.

<u>Activité d'apprentissage</u>

On considère les ensembles

$A=\{1;3;5;7;9;11;13;15;17\}$ $B=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\frac{1}{32};\frac{1}{64};\frac{1}{128};\frac{1}{256}\right\}$

- A et B sont-ils des ensembles définissant des suites de termes ?
- En considérant les éléments de A et B écrit dans l'ordre des éléments d'une suite, exprimer par une formule explicite les termes U_n et V_n de A et B respectivement.
- Exprimer en fonction de $U_n$et de V_n respectivement, les termes U_{n+1} et V_{n+1}
- Sommer les termes de A et de B respectivement.

<u>RESUME</u>

- Une suite de terme général $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite arithmétique si elle peut se mettre sous la forme $U_n=a+nr$ ou sous la forme $U_{n+1}=U_n+r$ ou a représente le premier terme (U_0) et r la raison de la suite.
  REMARQUE : on peut également partir d'un rang quelconque p et avoir
  $U_n=U_p+(n-p)r$.

La somme S_n des termes consécutifs allant de U_p à U_n ;$p < n$ est donnée par :

$$S_n = \frac{(n-p+1)\left(U_p + U_n\right)}{2}$$

Ou $n - p + 1$ représente le nombre de terme allant de U_p à U_n , U_p le premier terme , U_n le dernier terme de la somme.

- Une suite de terme général $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si elle peut se mettre sous la forme$V_n = aq^n$ ou sous la forme $V_{n+1} = qV_n$ ou a représente le premier terme V_0 et q la raison. REMARQUE :

- $q \neq 1\,; q \neq -1\ et\ q \neq 0$
- on peut également avoir, à partir d'un rang quelconque p , $V_n = V_p q^{n-p}$.

De la définition $V_n = aq^n$ nous avons la propriété de convergence suivante :

P) V_n converge si $-1 < q < 1$ et diverge sinon elle diverge

La somme S_n de ses termes consécutifs allant de l'ordre p à l'ordre n ; $p < n$; est donné par :

$$S_n = V_p \frac{(1 - q^{n-p})}{1 - q}$$

<u>EXEMPLE</u>

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$.

Exprimer U_n en fonction de n

MODULE 23 (C-E) : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

Chapitre 21 : ARCS CAPABLES

Intérêt :

Plusieurs objets dans la nature ont la forme d'un arc de cercle. Ce chapitre vise :

- Le repérage d'objets ayant la forme d'un arc de cercle, de les caractériser, de les concevoir…
- La détermination de la position d'un navire par les marins en navigation côtière.

Motivation :

- Description des formes planes sur un décor.
- Détection de la répétition d'un motif sur un tissus, un objet d'art.
- Repérage d'un lieu géométrique au niveau d'un rond-point.

Prérequis :

- Angles inscrits, angles au centre, angles associés.
- Angles formés par une corde d'un cercle et une tangente.

Objectifs :

- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes\widehat{AMB} = x$.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1 ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $Mes\ \widehat{AMB} = x$

1.1 Situation problème

Un objet d'art a été reconnu comme pôle d'attraction dans une ville. Pour protéger cet objet d'art des voitures circulant aux alentours, on veut concevoir un carrefour à sens giratoire *(semblable à un rond-point)* ayant la forme d'un arc de cercle d'extrémités A et B distants de $30m$ tels que tout point M dudit carrefour vérifie la condition donnée par l'ingénieur de conception : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 60°$. Faire une maquette dudit carrefour.

1.2 Activité d'apprentissage

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm, I$ le milieu du segment $[AB]$. On prendra $\alpha = 40°$.

1) Placer un point T tel que Mes $\widehat{TAB} = \alpha$

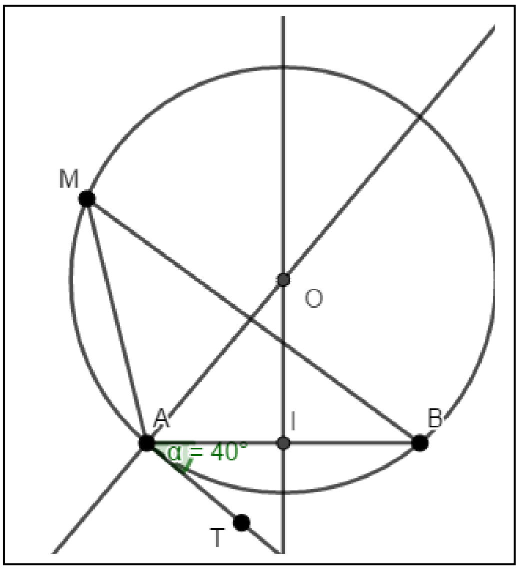
2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT) en A, (C) le cercle de centre O passant par A; M un point de (C) distinct de A et de B tel que $\widehat{AMB}$ soit aigu.

   a) Faire une figure.

   b) Exprimer Mes $\widehat{AOB}$ et Mes $\widehat{AMB}$ en fonction de α.

   c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{AMB} = \alpha$

3) On suppose que $\widehat{AMB}$ est obtus. Exprimer Mes $\widehat{AMB}$ en fonction de α.



Solution

1 et 2a) Faisons une figure.

b). Exprimons Mes $\widehat{AOB}$ et Mes $\widehat{AMB}$ en fonction de α

Mes $\widehat{TAB} = \alpha$ et Mes $\widehat{TAO} = 90°$. Donc Mes $\widehat{BAO} = 90° - \alpha$. Ainsi, Mes $\widehat{AOI} = \alpha$ et Mes $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Puisque $\widehat{AMB}$ est inscrit aigu et est associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$, alors $Mes\ \widehat{AMB} = \alpha$.

c). Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que

Mes $\widehat{AMB} = \alpha$

L'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{AMB} = \alpha$ est la réunion du grand arc de cercle (C) d'extrémités A et B, privé des points A et B; et du symétrique de cet arc par rapport à la droite (AB).

(on dit parfois que le segment [AB] est vu depuis l'arc sous l'angle $\boldsymbol{\alpha}$.)

3). Si $\widehat{AMB}$ est obtus, alors $Mes\ \widehat{AMB} = 180° - \alpha$

1.3 Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, α un angle aigu, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que Mes $\widehat{AOB} = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre O et de rayon OA. L'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{AMB} = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B, défiins sur (C) par la corde $[AB]$ et du symétrique de cet arc par rapport à (AB).

1.4 Définition

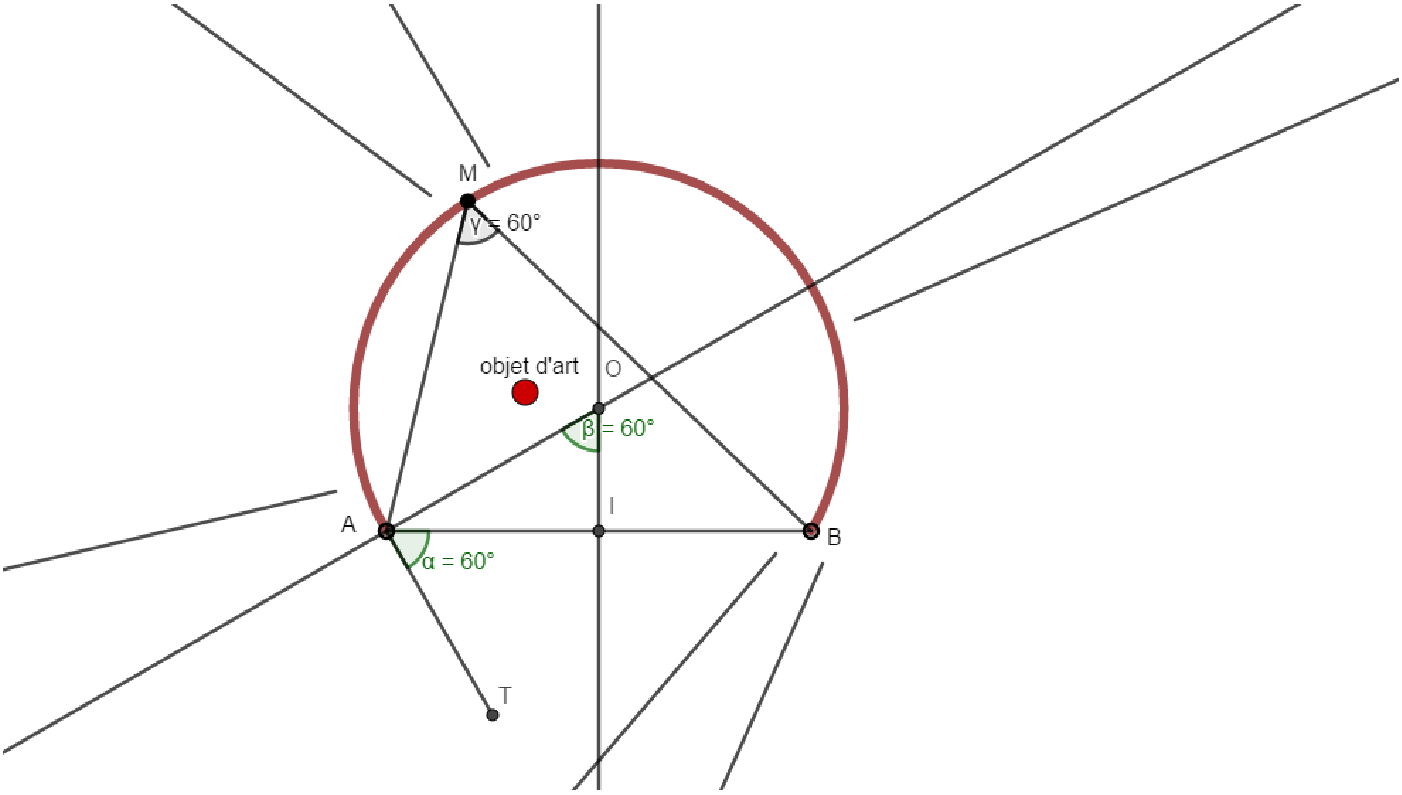
Soient A et B deux points distincts du plan et α un angle aigu. On appelle **arc capable d'extrémités $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$** l'un des arcs de cercle sur lesquels tout point M distinct de A et de B vérifie Mes $\widehat{AMB} = \alpha$.

1.5 Exercice d'application

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6cm$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{AMB} = 80°$.

1.6 Retour à la situation problème

Echelle : $5m$ sera représenté par $1cm$. Si $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 60°$, alors le carrefour à sens giratoire est un arc capable d'extrémités A et B et d'angle 60° (en rouge)



2 ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.1 Activité d'apprentissage 1

Soient A et B deux points distincts du plan.

1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

   a) Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$?

   b) Où se trouve le point M?

   c) On suppose que M est sur ladite position. Que vaut $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$?

   d) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

Solution

1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

   a) Si $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de même sens.

   b) Le point M est donc sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

c) Si le M est donc sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$, alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

d) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

2) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B, car les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens contraires.

2.2 Propriété 1

Soient A et B deux points distincts du plan.

- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B.
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est la droite (AB) privée des points A et B.

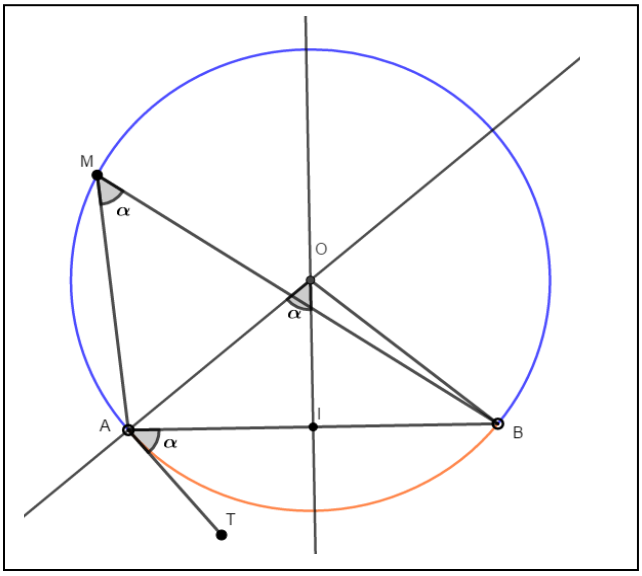
2.3 Activité d'apprentissage 2

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm, I$ le milieu du segment $[AB]$. $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Placer un point T tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}) = \alpha$
2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT) en A, (C) le cercle de centre O passant par A; M un point de $\overset{\frown}{AB}$, distinct de A et B.
   a) Exprimer $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ en fonction de α.
   b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha$

3) Faire de même lorsque : a) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ b) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$,c) $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

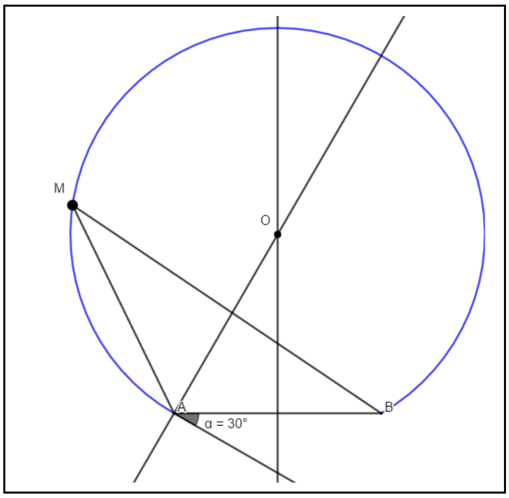
2.4 Propriété 2



Soient A et B deux points distincts du plan,

$\alpha \in]-\pi;\pi[- \{0\}$, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre O et de rayon OA.

- Si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé des points A et B.
- Si $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est le petit arc de (C), d'extrémités A et B privé de A et de B.
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est le cercle (C), privé de A et de B.



***Exemple**:* Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 3cm$.
Construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$.

1) Construire sur des figures différentes les arcs capables d'extrémités A et B et d'angle α dans chacun des cas suivants : $\alpha = 60°; \alpha = 150°$

2) Construire sur des figures différentes l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha$ dans chacun des cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\alpha = -\frac{5\pi}{6}; \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi;$ $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi; \alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi; \alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi;\ \alpha = \frac{5\pi}{2}; \alpha = -\frac{7\pi}{2} + k\pi; \alpha = 3\pi; \alpha = 6\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

MODULE 22

ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

CHAPITRE 3

INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES

Objectifs

- Présenter un graphe et donner son ordre;
- Reconnaitre les sommets adjacents et isolés, déterminer le degré d'un sommet;
- Reconnaitre un graphe simple, orienté et complet.

MOTIVATION

La planification des routes dans les grandes métropoles est d'une importance capitale car celle-ci peut selon qu'elle est faite, empêcher le problème d'embouteillages. Des outils mathématiques peuvent nous aider dans cette difficulté.

Situation problème

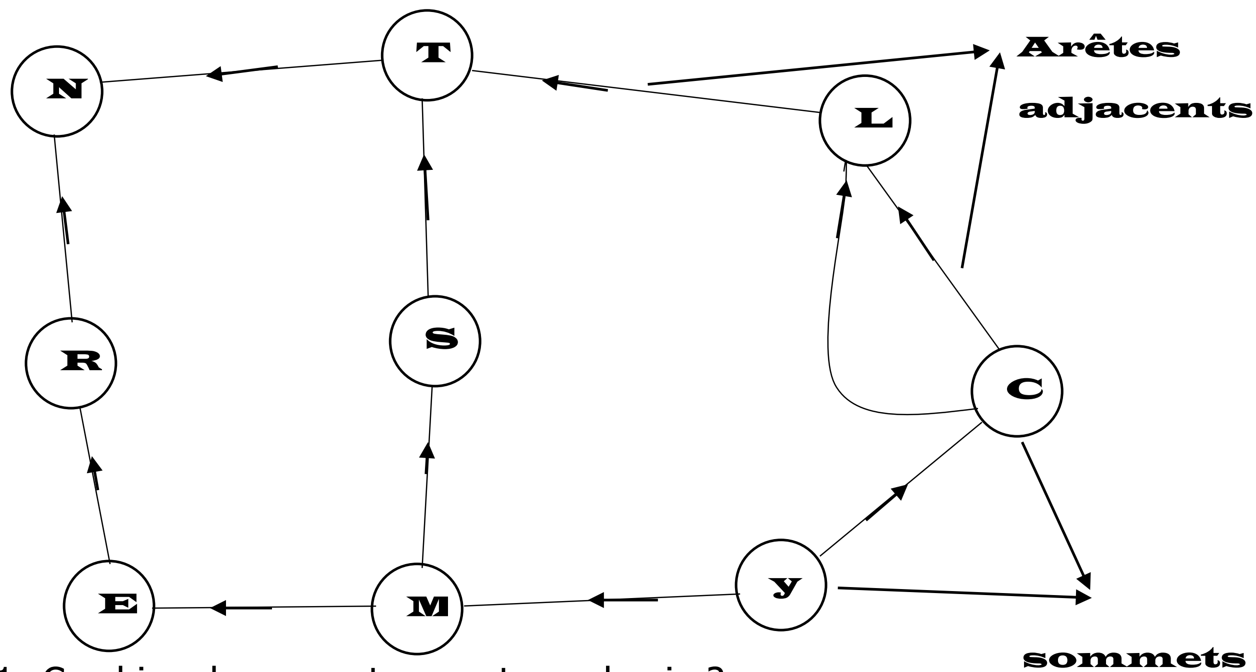
Il y a de cela quelques jours on a assisté dans la ville de douala au Cameroun, aux embouteillages sortant de l'ordinaire dans le cas particulier de la pénétrante ouest de la cité capitale économique dû aux constructions qui s'effectuent de ce coté-là. Dans l'optique de résoudre ce problème, il vous est demandé de proposer sur dessin toutes les différentes voies de contournement permettant de relier le carrefour Yassa du carrefour Ndokoti tout en précisant la voie la plus courte, la moins courte et le nombres total de carrefours y figurant.

Prérequis

- ✓ Utilisation de la notion d'échelle de réduction ;
- ✓ Représenter un itinéraire sur dessin.

Activité d'apprentissage

Considérons le dessin ci-dessous ;



1. Combien de sommets compte ce dessin ?
2. Combien d'arêtes adjacents ou incidents compte ce dessin ?
3. Y a –t'il plusieurs arêtes reliant deux mêmes sommets ?
4. Est-il possible sur ce dessin de rejoindre tous les autres sommets à partir de n'importe quel sommet ?
5. Est-ce que chaque sommet de ce dessin est relié directement à tous les autres sommets ?
6. Combien d'arêtes adjacents passe par le sommet M ?
7. Combien d'arêtes adjacents compte le dessin ? déterminez également la somme des degrés des différents sommets et établissez la relation entre le nombre d'arêtes adjacents et cette somme ?
8. Quel nombre d'arêtes maximal passe par un sommet ?

Solution

1. Ce dessin compte 9 sommets ; donc l'ordre de ce dessin est 9.
2. Ce dessin compte 11 arêtes adjacents ou incidents.
3. Oui, les sommets **R** et **C** sont relies par 02 arêtes différents. Ceci donne à notre dessin d'être appelé **multigraphes** qui est différents de **graphe simple.**
4. Il est possible de rejoindre tous les autres sommets à partir de n'importe quel sommet. Donc le graphe est dit **connexe.**
5. Chaque sommet de ce graphe ne permet pas de relier directement tous les autres sommets. Donc ce graphe n'est pas **complet**.
6. Exactement **03** arêtes passent par le sommet **M** donc le degré du sommet **M** est **03.**
7. Le dessin compte **11 arêtes. Et d(R)= d(T)= d(M)= d(C)= 3**

d(D)= d(S)= d(E) =d(N)= d(Y)= 2 d'où somme des degrés = 22. D'où la relation, somme des degrés = 2 fois nombre d'arêtes adjacents.

8. Le nombre d'arêtes maximal passant par un sommet est **03, et 03** représente donc le **degré du graphe**.

Note :

1. Cette activité répond d'une manière ou d'une autre a la situation problème. Il suffit de considérer Y=yassa, R=carrefour Rail, C= château, T=total Logbaba, N=Ndokoti, D=Dakar, S=Saint Nicolas, M=marche Ndogpassi, E=Elf village.

2. Dans la suite de ce cours on utilisera graphe à la place de dessin.

Résumé

1. Définitions

- Un **Graphe (non orienté)** G est constitué d'un ensemble S=$\{s_1, s_2, \dots s_n\}$ de points appelés **Sommets** et d'un ensemble A= $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ d'**arêtes** tels qu'à chaque arête $\boldsymbol{a_i}$ sont associes deux éléments de S, appelés ses extrémités.
- Un **sommet du graphe** est point du graphe. Le nombre de sommets est l'ordre du graphe.
- Une **arête du graphe** est une ligne reliant deux sommets. Une **boucle** est une ligne reliant un sommet à lui-même.
- Un **sommet est isole** lorsque aucune arête de ce graphe ne le relie aux autres sommets.
- Un **graphe simple** est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacentes**.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.
- Le **degré d'un sommet** est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. le degré d'un graphe est donné par le degré du sommet à valeur maximale.
- Un **graphe est connexe** s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en **composantes connexes**.

- **Un graphe complet** est un **graphe simple** dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

2. Théorème.

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.

<u>Exercices d'applications</u>

1. Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ?

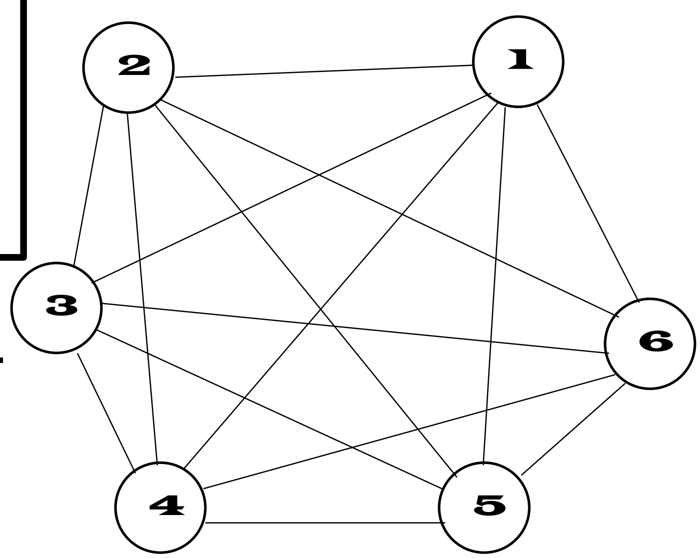
Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?

Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

<u>Solution</u>

.

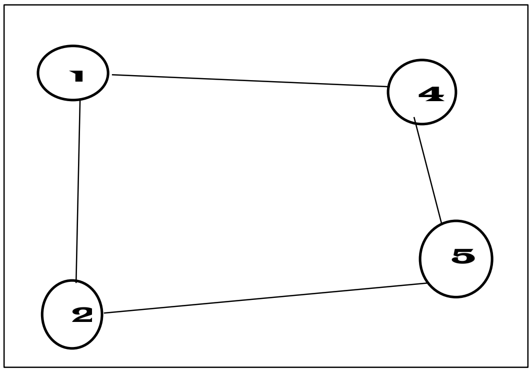
On obtient un graphe **complet**. Il est complet parce qu'il est un **graphe simple** dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.



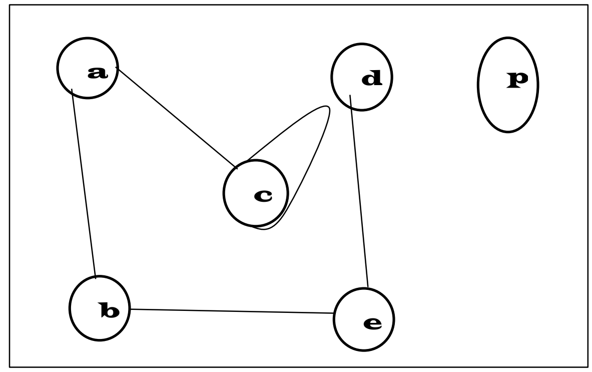
Il faudra 5 jours de tournoi.
Voici un calendrier

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

2. Identifier des schémas suivants, deux sommets adjacents, une boucle et un sommet isolé.



G1



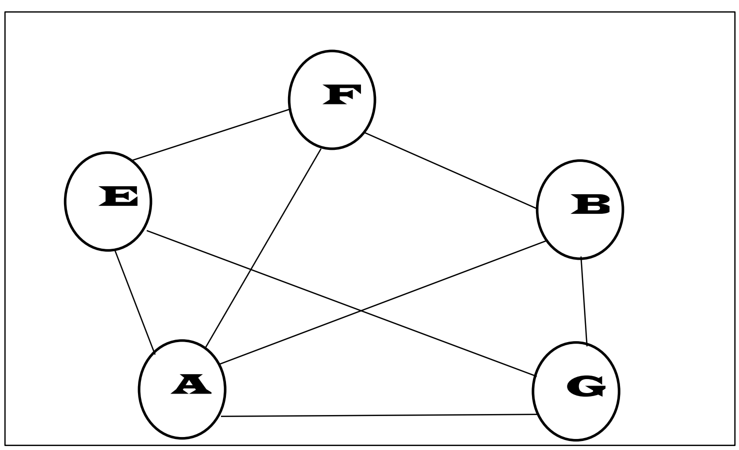
G2

Solution

a. Les sommets 1 et 4 ; 2 et 5 ; 4 et 5 …sont **adjacents**
b. Le sommet c présente une **boucle.**
c. Le sommet **p** est **isolé.**

Remarque : le graphe G1 est **simple** (car il est sans boucle et, entre deux sommets, il y ait au plus une arête) et **connexe** (car il est possible, à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes).

3. utilisez le graphe suivant pour justifier que la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre total d'arêtes.



SOLUTION

Degré de F = 3 ; Degré de E = 3; Degré de A = 4 ; Degré de B = 3 ;

Degré de G = 3. D'où la somme des degrés = **16**

Le nombre total d'arêtes est bel et bien égal à : **8**

Ainsi, nous observons très bien que la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre total d'arêtes.