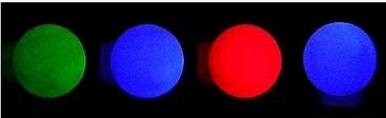


probabilité

Des phénomènes, des situations ou plus généralement **des expériences** permettent de s'intéresser à la probabilité. Quelles chances ai-je d'obtenir tel ou tel résultat ? Peut-on calculer un taux de réussite ?



Exemples :

expérience 1	expérience 2	expérience 3
« je lance une pièce de monnaie non truquée » On regarde ensuite la face supérieure	« je lance un dé non truqué » On regarde ensuite le nombre de points sur la face supérieure	« je tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. » On regarde la couleur de la boule obtenue
		

I) Vocabulaire :

Définition : Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** de l'expérience

l'expérience 1 a deux issues possibles : pile, face

l'expérience 2 a six issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6

l'expérience 3 a trois issues possibles : bleu, vert, rouge

Définition : Un **événement** est défini par une condition conduisant à aucune, une ou plusieurs issues. Un événement réalisé par **une seule issue** est **élémentaire**.

Ex :

Dans l'expérience 2, l'événement « on obtient un nombre impair » est réalisé par les issues 1, 3, 5.



Dans l'expérience 3, l'événement « on n'obtient pas de boule rouge » est réalisé par les deux issues : bleu et vert



Dans l'expérience 1, l'événement « on obtient pile » est réalisé par une issue : pile. C'est un événement **élémentaire**.



Dans l'expérience 2, l'événement « on obtient le nombre 8 » n'est réalisé par aucune issue. C'est un événement **impossible**.



Définition : une expérience est dite **aléatoire** si elle a plusieurs issues possibles sans savoir avec certitude quelles seront les issues produites.

« les résultats d'une expérience aléatoire sont uniquement dus au **hasard** !! Ils sont imprévisibles. »



II) Notion de probabilité :

Définition : Si on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la **fréquence de réalisation d'un événement** se stabilise autour d'un nombre : **la probabilité de cet événement**. Soit A un événement, on note **p(A)** sa probabilité.

« Mais alors, c'est un peu comme si le hasard n'existait pas ! Par exemple, au bout de milliers de tirages du loto, les boules seront chacune sorties le même nombre de fois (à peu près) !!! »



Ex :

Dans l'expérience 1, si on lance la pièce un très grand nombre de fois, on aurait *pile* environ une fois sur deux.

Dans l'expérience 2, si on lance le dé un très grand nombre de fois, on aurait *4* environ une fois sur six.

Dans l'expérience 3, si on tire une boule un très grand nombre de fois, on aurait *une boule bleue* environ une fois sur deux.

« la probabilité de tirer une boule bleue est de $\frac{1}{2}$ car on a deux « *chances* » sur 4 de tirer une boule bleue ! »



III) Calcul d'une probabilité dans le cas d'une situation équiprobable :

Définition : Si, dans une expérience, **toutes les issues ont la même probabilité** de se réaliser, on dit que **la situation est équiprobable**.

Propriété : Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement est égale au quotient suivant :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Ex :

Dans l'expérience 1, la situation est équiprobable (on a autant de chances d'obtenir pile que face). Considérons l'événement A : « on obtient face » $p(A) = \frac{1}{2}$

« il y a bien **une seule issue** correspondante à l'événement (face) et **deux issues possibles** (pile, face) »



Dans l'expérience 2, la situation est équiprobable (on a autant de chances d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6). Considérons l'événement B : « on obtient 5 ou 4 »

$$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

« il y a bien **deux issues** correspondantes à l'événement (5, 4) et **6 issues possibles** (1, 2, 3, 4, 5, 6) »



Dans l'expérience 3, la situation **n'est pas équiprobable** (on a deux fois plus de chances d'obtenir la couleur bleue). Je n'applique pas la formule.

Considérons l'événement C : « on obtient la couleur bleue », 2 boules sur 4 sont bleues

donc il y a deux chances sur 4 d'obtenir une boule bleue $p(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Propriétés :

- Une probabilité est **un nombre compris entre 0 et 1**
- Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se produire : sa probabilité est 0
Ex : dans l'expérience 2, l'événement Z : « on obtient 11 » est impossible et $p(Z) = 0$
- Un événement est dit **certain** s'il se produit nécessairement : sa probabilité est 1
Ex : dans l'expérience 2, l'événement H : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 6 » est **certain** et $p(H) = 1$
- La **somme des probabilités des issues** d'une expérience est **égale à 1**
Ex : dans l'expérience 3, soit A : « on obtient une boule bleue », soit B : « on obtient une boule rouge », soit C : « on obtient une boule verte ». $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

IV) Évènements incompatibles. Évènements contraires :

Définition : Deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Ex : dans l'expérience 2, l'évènement A : « on obtient 6 » et l'évènement B : « on obtient 3 » sont incompatibles

Propriété : Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité pour que **l'un ou l'autre** se réalise est égale à **la somme de leurs probabilités**

Ex : dans l'expérience 2, la probabilité de l'évènement C : « on obtient 6 ou on obtient 3 » est $p(C) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Définition : L'évènement **contraire** d'un évènement A est celui qui se réalise quand A ne se réalise pas. On le note \bar{A} (« A barre »)

Ex : dans l'expérience 2, soit l'évènement D : « on obtient 3 ». L'évènement contraire \bar{D} peut s'écrire : « on n'obtient pas 3 »

Propriété : La **somme des probabilités** d'un évènement A et de son contraire est **1**
 $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

Ex : calculons la probabilité de l'évènement contraire de D, $p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

V) Arbres de probabilité :

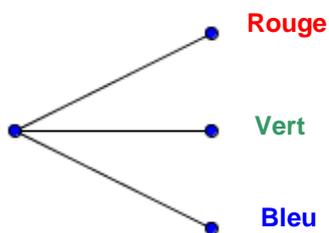
Définition : L'arbre de probabilité d'une expérience indique chacune de ses **issues**. On peut **pondérer** l'arbre des probabilités en indiquant **sur chaque branche** la probabilité correspondante.

Ex : reprenons l'expérience 3.

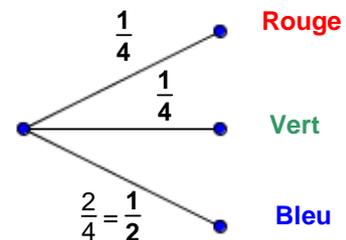


« je tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. Je regarde la couleur obtenue. »

arbre de probabilité



arbre pondéré en probabilité



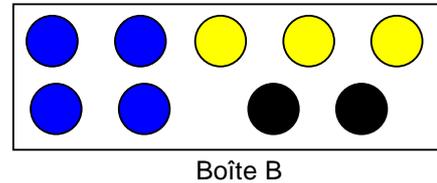
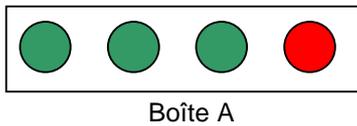
$$P(\mathbf{R}) = \frac{1}{4} \quad P(\mathbf{V}) = \frac{1}{4} \quad P(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \quad \text{et on a bien } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

« la **somme** des probabilités des issues est **égale à 1** »

V) Expérience à deux épreuves :

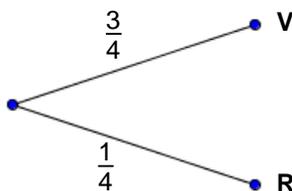
L'expérience est constituée de deux épreuves successives

Ex : On dispose de deux boîtes contenant des boules

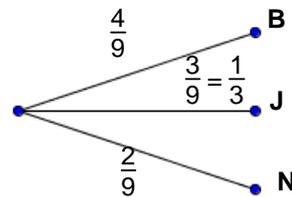


On tire **d'abord** une boule dans la boîte A et on note sa couleur.

Ensuite, on tire une boule dans la deuxième boîte B et on note la couleur.

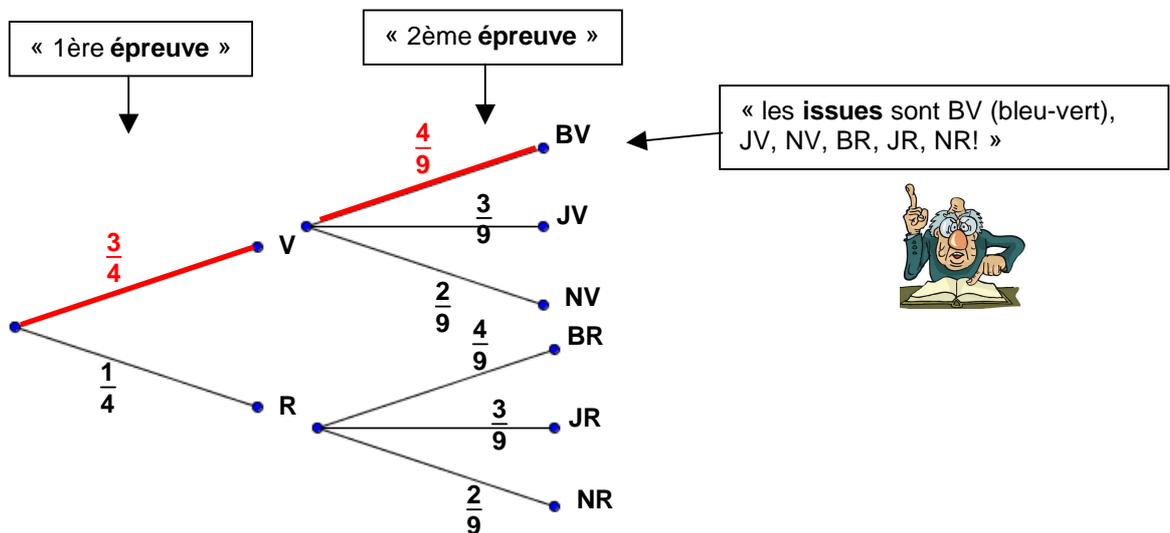


arbre pondéré de la première épreuve



arbre pondéré de la deuxième épreuve

On trace ensuite l'arbre pondéré en probabilité de l'expérience (deux épreuves)



Propriété : Sur un arbre, la probabilité du résultat (de l'issue) est égale au **produit des probabilités** rencontrées le long du chemin pour y parvenir

$$P(BV) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{4 \times 9} = \frac{1}{3}$$

« la probabilité d'obtenir **une boule bleue et une boule verte** à l'issue de l'expérience est $\frac{1}{3}$ »