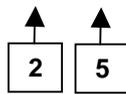


Nombres entiers et rationnels

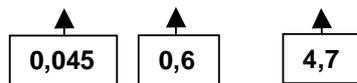
I) Différents types de nombres :

- 9 ; 7 ; 17 ; 0 ; $\sqrt{4}$; $\frac{15}{3}$ sont des nombres **entiers naturels**



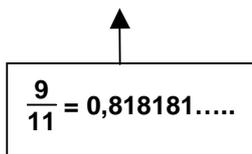
« nous les connaissons depuis l'école primaire ! »

- 3,4 ; 9,87 ; 0,12 ; $\frac{45}{1000}$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{22,09}$ sont des nombres **décimaux**



« ces nombres ont un nombre **fini** de chiffres après la virgule ! **Attention**, un nombre **entier** est aussi un nombre **décimal**. $5 = 5,00$!!! »

- $\frac{1}{3}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{14}{6}$ sont des nombres **rationnels**



« ces nombres peuvent s'écrire sous forme de **quotients de nombres entiers** ! Tout nombre **entier** ou nombre **décimal** est **aussi** un nombre **rationnel** :
 $7 = \frac{70}{10}$; $9,56 = \frac{956}{100}$ »



« il existe des nombres qui ne sont **ni entiers, ni décimaux, ni rationnels** ! On les appelle des **irrationnels**. *On ne peut pas les écrire*, leur nombre de décimales est infini **et** sans suite logique »

- π est **irrationnel**. $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939\dots$
- $\frac{2}{7}$ est **rationnel**. $\frac{2}{7} = 0,285714\ 285714\ 285714\dots$

II) Diviseurs communs à deux entiers :

Définition : Soient a et b deux nombres entiers naturels. Un **diviseur commun** à deux entiers positifs a et b est un **nombre entier** qui **divise a** et qui **divise b**.

Ex : 7 est un diviseur commun à 35 et 56 (35 = 7 x 5 ; 56 = 7 x 8)

« 1 est un diviseur commun à **tous** les entiers naturels !
 $13 = 1 \times 13$; $57 = 1 \times 57$; $a = 1 \times a$ »



Définition : Le **plus grand des diviseurs** communs de deux entiers naturels est nommé le **PGCD (Plus Grand Commun Diviseur)** de ces deux entiers.

Ex : Recherchons le PGCD de 8 et 12

$$8 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$$

Les diviseurs de 8 sont **1, 2, 4, 8**

$$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$$

Les diviseurs de 12 sont **1, 2, 3, 4, 6, 12**

Les **diviseurs communs** à 8 et 12 sont **1, 2, 4**
 Le PGCD de 8 et 12 est **4**. **PGCD (8 ; 12) = 4**

« les diviseurs communs divisent le PGCD ! »



Définition : Deux entiers naturels non nuls sont **premiers entre eux** lorsque leur **PGCD** est égal à **1**

Ex :

Les diviseurs de 5 sont **1** et **5**

Les diviseurs de 12 sont **1, 2, 3, 4, 6, 12**

5 et 12 sont **premiers** entre eux. **PGCD (5 ; 12) = 1**

III) Recherche du PGCD :

1) 1^{ère} méthode : **la méthode des soustractions successives**

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$

PGCD (a,b) = PGCD (b, a - b)

« si un nombre **divise a et b**, il divise forcément leur différence **a - b**!
 Par exemple, **5 divise 25 et 10**, il divise donc **(25 - 10)** soit **15** ! »



Calculons le PGCD de 66 et 48

$$66 - 48 = 18$$

« PGCD (66,48) = PGCD(48,18) »

$$48 - 18 = 30$$

« PGCD (48,18) = PGCD(30,18) »

$$30 - 18 = 12$$

« PGCD (30,18) = PGCD(18,12) »

$$18 - 12 = 6$$

« PGCD (18,12) = PGCD(12,6) »

$$12 - 6 = 6$$

« PGCD (12,6) = PGCD(6,6) = 6 »

« j'arrête mes soustractions, la différence suivante serait égale à 0 ! »



B) 2^{ème} méthode : l'algorithme d'Euclide ou la méthode des divisions successives

Pour trouver facilement le **diviseur commun le plus grand** (PGCD), le mathématicien grec Euclide a mis au point une méthode appelée l'**algorithme d'Euclide** (ou **algorithme des divisions successives**).

Il établit la **propriété suivante** :

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$
 Si le reste de la division euclidienne de a par b est non nul :
PGCD (a,b) = PGCD (b,r)

Vérifions le sur l' exemple précédent : $12 = 8 \times 1 + 4$ et $4 < 8$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ 4 & 1 \end{array}$$

PGCD (12,8) = 4

PGCD (8,4) = 4

« la propriété est vérifiée ! »



« Pourquoi ne pas continuer ? Je trouverai alors facilement le PGCD en m'arrêtant quand le reste sera nul ! » se dit Euclide

Calculons le PGCD de 288 et 84

$$\begin{array}{r|l} 288 & 84 \\ 36 & 3 \end{array}$$

288 = 84 x 3 + 36 et 36 < 84

$$\begin{array}{r|l} 84 & 36 \\ 12 & 2 \end{array}$$

84 = 36 x 2 + 12 et 12 < 36

$$\begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ 0 & 3 \end{array}$$

36 = 12 x 3 + 0

Voici le dernier reste non nul, c'est forcément le PGCD donc
PGCD (288,84) = 12

Le PGCD de 12 et 0 est 12. Le PGCD est donc le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives.



III) Fractions irréductibles :

Définition : Une fraction est **irréductible** lorsque son **numérateur** et son **dénominateur** sont **premiers** entre eux.

Ex : La fraction $\frac{7}{13}$ est irréductible. On ne peut pas la simplifier. 7 et 13 sont **premiers entre eux**. Il n'y a **pas de diviseur commun** à part 1

Ex : Ecrivons la fraction $\frac{60}{45}$ sous forme irréductible :

Il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD (nous serons alors certains qu'il n'existe plus de diviseur commun à part 1)



Déterminons le PGCD de 60 et 45 (algorithme d'Euclide)

$$\begin{array}{r|l} 60 & 45 \\ 15 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 15 \\ 0 & 3 \end{array}$$

PGCD (60,45) = 15

On a donc :

$$\frac{60}{45} = \frac{15 \times 4}{15 \times 3} = \frac{4}{3} \quad \text{avec la fraction } \frac{4}{3} \text{ irréductible}$$

rappel :

Un nombre est **divisible par 2** si **son dernier chiffre** est 0, 2, 4, 6 ou 8.

(ex : 546, 340, 34...)

Un nombre est **divisible par 3** si **la somme de ses chiffres** est divisible par 3.

(ex : 345 car $3 + 4 + 5 = 12$)

Un nombre est **divisible par 4** si **le nombre formé par ses deux derniers chiffres** est divisible par 4. (ex : 216 car $16 = 4 \times 4$)

Un nombre est **divisible par 5** si **son dernier chiffre** est 0 ou 5. (ex : 725, 80....)

Un nombre est **divisible par 9** si **la somme de ses chiffres** est divisible par 9.

(ex : 549 car $5 + 4 + 9 = 18$)