Fonctions linéaires et fonctions affines

I) fonction linéaire :

a) proportionnalité et fonction linéaire

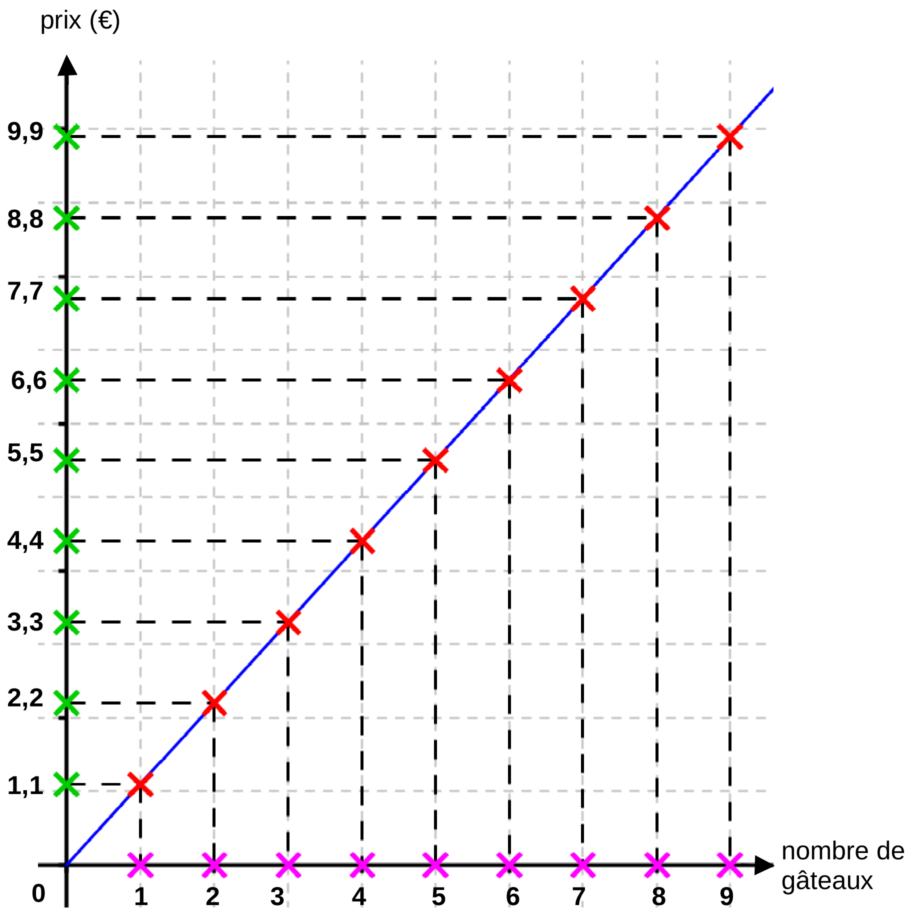
Voici un tableau de valeurs indiquant le prix à payer en fonction du nombre de gâteaux

Nombre de gâteaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prix (€)	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9

X 1,1

« Le prix à payer est **proportionnel** au nombre de gâteaux. Le **coefficient de proportionnalité** permettant de trouver le prix en fonction du nombre de gâteaux est **1,1**»

Traçons la courbe représentant le prix en fonction du nombre de gâteaux :



. la courbe obtenue est **une droite** passant par **l'origine du repère**

. les ordonnées des points de la courbe (vert) sont proportionnelles aux **abscisses** (violet)

Une telle courbe est la représentation graphique d'**une fonction linéaire**

$f : x \longmapsto 1{,}1x$ « ***formule littérale*** de la fonction !»

b) <u>Définition :</u> Soit a un nombre relatif. La **fonction linéaire *f* de coefficient a** associe à chaque nombre x le nombre **a x x** ou **ax**

<u>Ex :</u>

Soit la fonction f qui à un nombre x fait correspondre son triple $f : x \longmapsto 3x$

$f(-2) = 3 \times (-2) = -6$

« f est une fonction linéaire de coefficient 3 !»

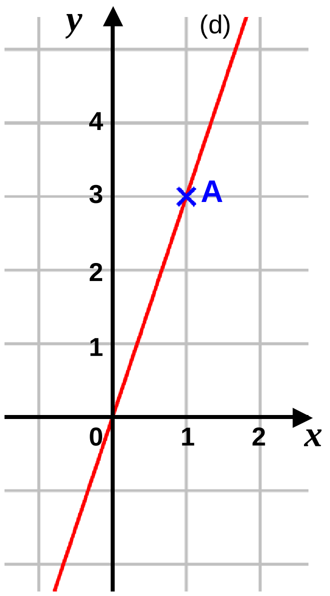
c) <u>Représentation graphique :</u>

<u>Définition :</u> La représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$ est l'ensemble des points de coordonnées (x ; ax)

<u>Propriété :</u> La représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est une **droite** passant par l'**origine du repère.**

a est le **coefficient directeur** de la droite

<u>Ex :</u> Traçons la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 3x$



- La représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
- Il me suffit d'un second point !
- Je choisis de calculer l'image de 1.

$f(1) = 3 \times 1 = 3$

- J' obtiens un point A de la courbe.
- Il ne reste plus qu'à tracer la droite !

<u>La droite (d) a pour équation :</u>

$$y = 3\,x$$

coefficient directeur
de la droite

d) <u>Pourcentages et fonction linéaire :</u>

<u>Propriété :</u> Soit t un nombre positif

► une **augmentation de t%** est représentée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$

► une **diminution de t%** est représentée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$

<u>Ex :</u>

<u>Le prix d'un manteau valant 54 € a augmenté de 12%. Quel est le nouveau prix ?</u>

Le nouveau prix est égal à $\left(1 + \frac{12}{100}\right) \times 54 = 1,12 \times 54 = 60,48$ €

<u>Le volume de l'eau diminue de 8% en passant de l'état solide à l'état liquide.</u>
<u>Quel volume de liquide obtient-t-on à partir de 464 cm^3 de glace ?</u>

Le volume de liquide est égal à $\left(1 - \frac{8}{100}\right) \times 464 = 0,92 \times 464 = 426,88$ cm^3

II) fonction affine :

a) Définition : Soient a et b deux nombres relatifs. La **fonction affine de coefficients a et b** associe à chaque nombre x le nombre **a** x x **+ b** ou **ax + b**

La fonction s'écrit $f : x \longmapsto ax + b$ « la fonction f **associe** ax + b à x !»

$f(x)$ est « l'**image** de x par la fonction f »

Ex : Soit la fonction affine $g : x \longmapsto$ **3x + 2**

g(4) = 3 x 4 + 2 = 14 L'image de 4 par la fonction g est 14

- **Si a = 0** alors $f(x)$= 0x + b = b ← « on dit que f est **constante**!»
- **Si b = 0** alors $f(x)$= ax + 0 = ax ← « f est **une fonction linéaire**!»

Ex : Soit la fonction **h** : $x \longmapsto -3$ h est une fonction constante

b) représentation graphique d'une fonction affine :

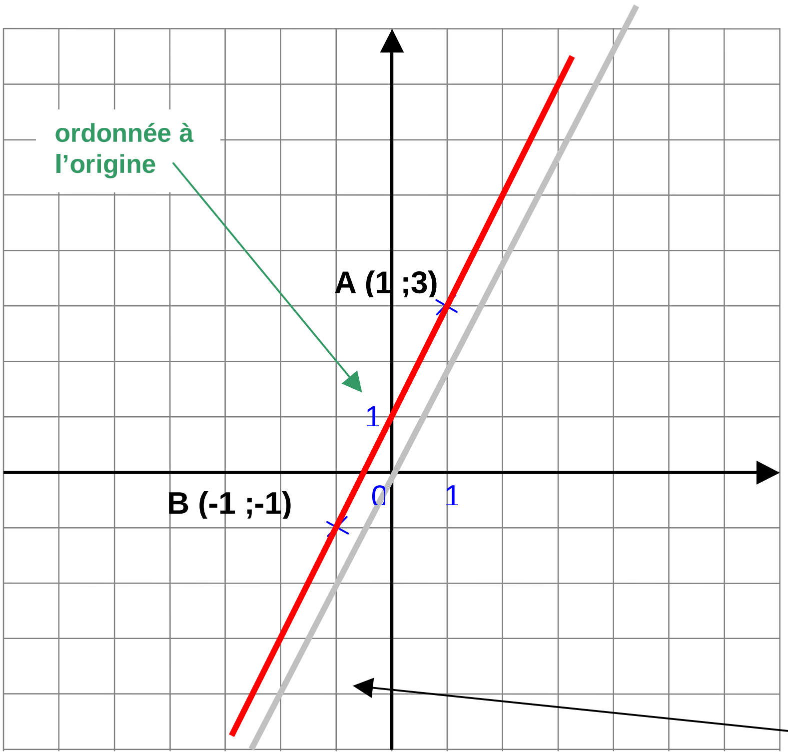
Définition : La représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est l'ensemble des points de coordonnées (x ; ax + b)

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est une **droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite.

b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

Représentons la fonction affine g : $x \longmapsto 2x + 1$



«il me suffit de deux points pour tracer la droite !»

g(1) = 3 et g(–1) = –1 donc A(1 ; 3) et B(–1 ; –1) sont deux points de la courbe !

La droite (AB) a pour équation :

$$y = 2x + 1$$

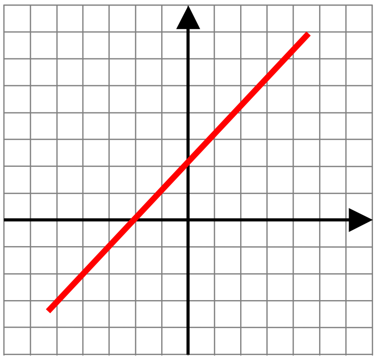
coefficient directeur de la droite

ordonnée à l'origine

La droite (AB) est **parallèle** à la droite représentant **la fonction linéaire associée**

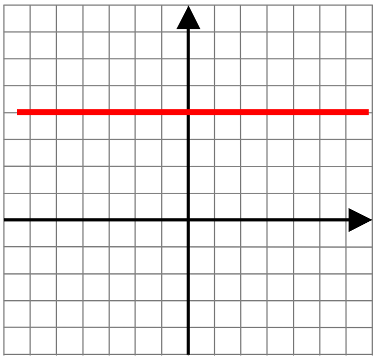
$$y = 2x$$

Remarque : l'allure de la droite varie selon le signe du coefficient directeur



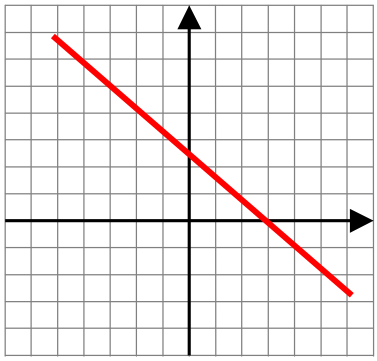
a > 0

la droite « *monte* !»



a = 0

la droite est parallèle à l'axe des abscisses!



a < 0

la droite « *descend* !»

III) proportionnalité des accroissements :

Propriété: Soit f la fonction affine $x \longmapsto ax + b$
Les accroissements de $f(x)$ et les accroissements de x sont proportionnels.

Le coefficient de proportionnalité est le **coefficient directeur a.**

Soient deux points de la courbe :

On a $$\mathbf{a} = \frac{\textbf{différence des ordonnées}}{\textbf{différence des abscisses}}$$

Ex : Soit la fonction affine f

$x \longmapsto \mathbf{2}x + 1$

« $\boldsymbol{x}$ augmente de 3 et $\boldsymbol{f(x)}$ augmente de 2 x 3 = 6!»

On a $\boldsymbol{f(1) = 3}$ et $\boldsymbol{f(4) = 9}$

On a :

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$