Troisième

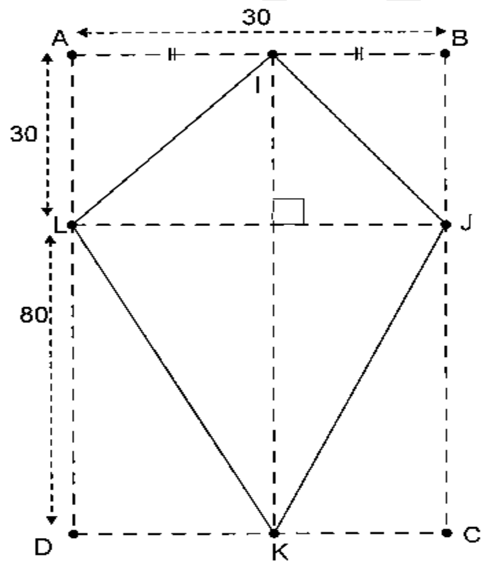
Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

TRIANGLE RECTANGLE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour marquer leur participation à la kermesse du Lycée Moderne de Mankono, les élèves de la classe de 3ème dudit établissement se proposent de fabriquer un grand cerf- volant dont la maquette IJKL réalisée par un professeur de mathématiques est ci-contre. Pour une bonne production, ils décident de déterminer les dimensions des côtés du cerf-volant et la mesure de chacun de ses angles.



RÉSUMÉ DE COURS

1. QUELQUES PROPRIETES LIEES A UN TRIANGLE RECTANGLE

1.1. PROPRIETE DE PYTHAGORE

Prérequis

1-Définis un triangle rectangle.

2-Nomme le plus long côté d'un triangle rectangle.

Solution

1-Un triangle rectangle est un triangle qui a deux côtés de supports perpendiculaires.

2-Le plus long côté d'un triangle rectangle est appelé l'hypoténuse.

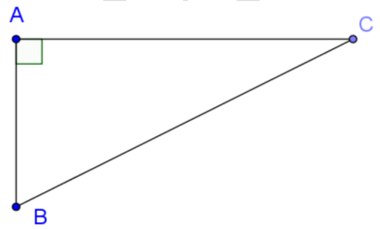
La propriété de Pythagore

Propriété :
Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A.

D'après la propriété de Pythagore ; $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



EXERCICE DE FIXATION

ABC est un triangle rectangle en A tel que BC=5cm et AC=3cm. Calcule AB.

REPONSE

ABC est un triangle rectangle en A. D'après la propriété de Pythagore, $AB^2+AC^2=BC^2$

Donc $AB^2 = BC^2-AC^2$

$AB^2 = 5^2-3^2$

$AB^2 = 25-9 = 16.$

Alors, $AB = \sqrt{16}$

$AB = 4cm$

1.2. RECIPROQUE DE LA PROPRIETE DE PYTHAGORE

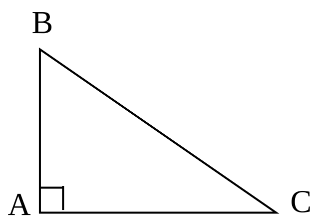
Propriété :
Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple

ABC est un triangle.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

ABC est un triangle rectangle en A



EXERCICE DE FIXATION

ABC est un triangle tel que : $AB = 5\sqrt{3}; AC = 5\sqrt{2}$ *et* $BC = 5$.
Démontre que le triangle ABC *est rectangle en* C.

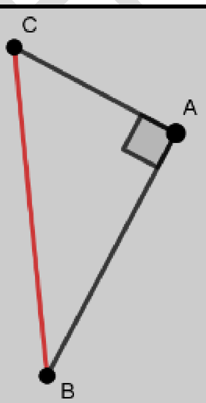
REPONSE

On a: $AB^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 75$; $AC^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$ *et* $BC^2 = 5^2 = 25$
On constate que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ *donc la réciproque de Pythagore ABC est un triangle rectangle en C.*

1.3. CONSTRUCTION D'UN SEGMENT DE LONGUEUR $\sqrt{a}$, $a > 0$

Programme de construction

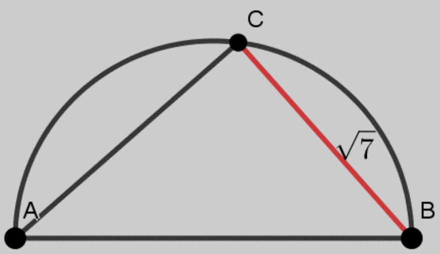
Exemple 1



Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{13}$ *cm sachant que* $13 = 9 + 4$,
on peut procéder comme suit : (En remarquant que $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ *; 3² = 9 et 2² = 4)*
**On construit deux demi-droites de même origine A et de supports perpendiculaires ;*
**Sur l'une de ces deux demi-droites, on place le point B tel que AB=3 cm*
et sur l'autre demi-droite, on place le point C tel que AC=2 cm ;
**On trace le segment [BC] cherché.*

Exemple 2

Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{7}$ *cm sachant que* $7 = 16 - 9$,
on peut procéder comme suit : (En remarquant que $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ *; 3² = 9 et 4² =16)*
**On construit un demi-cercle de diamètre AB=4 cm ;*
**Sur ce demi-cercle, on place le point C tel que AC=3 cm ;*
**On trace le segment [BC].*

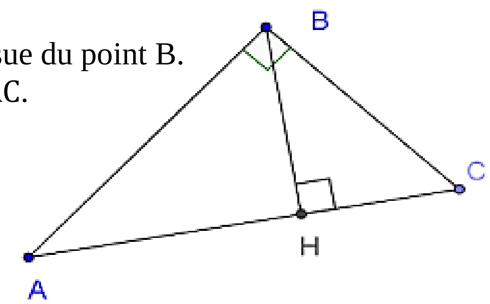


1.4. PROPRIETE METRIQUE DEDUITE DE L'AIRE

Propriété :
Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur passant par le sommet de l'angle droit.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en B et H est le pied de la hauteur issue du point B.
D'après la propriété métrique déduite de l'aire, $AB \times BC = BH \times AC$.

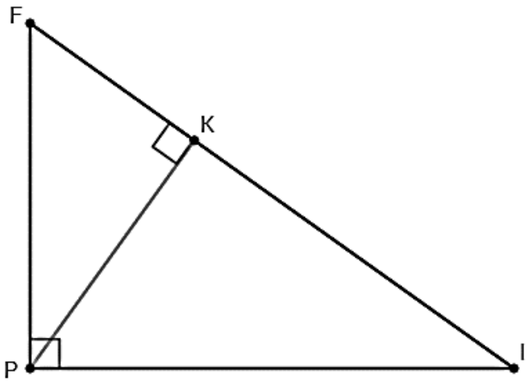


EXERCICE DE FIXATION

FIP est un triangle rectangle en P dont $[PK]$ est la hauteur relative à $[FI]$.

On donne : FP = 4cm ; PI = 2cm et FI =$2\sqrt{5}$cm.

Justifie que PK=$\frac{4\sqrt{5}}{5}$



REPONSE

FIP est un triangle rectangle en P. K est le projeté orthogonal de P sur (IF), d'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a : $FP\times PI = PK \times IF$ *Donc* $PK = \frac{FP\times PI}{IF}$

$$PK = \frac{4\times 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

2. TRIGONEMETRIE

2.1. SINUS ET COSINUS D'UN ANGLE AIGU DANS UN TRIANGLE

Sinus d'un angle aigu (définition) :

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

Cosinus d'un angle aigu (définition) :

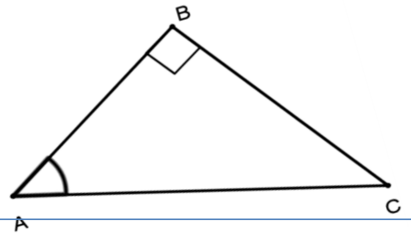
Dans un triangle rectangle, on appelle cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

Exemple

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ et $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$



EXERCICE DE FIXATION

ABC est triangle rectangle en B tels que : $AB = 4\ cm; AC = 5\ cm$ *et* $BC = 3\ cm$

Calcule $\cos \hat{A}$ *et* $\sin \hat{A}$.

REPONSE

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \quad et \quad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

2.2. PROPRIETES

Propriétés sur sinus et cosinus d'un angle :
Pour tout angle aigu de mesure a^0, on a :

$$0 < \sin a^0 < 1$$
$$0 < \cos a^0 < 1$$
$$\sin^2 a^0 + \cos^2 a^0 = 1.$$

Sinus et cosinus de deux angles complémentaires
Propriétés
Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
Autrement dit, si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles tels que $mes\hat{A} + mes\hat{B} = 90°$ alors :
$\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$.

EXERCICE DE FIXATION 1

On donne : $\cos 23° = 0{,}9205$ *et* $\sin 51° = 0{,}771$.
Détermine une valeur approchée de $\sin 67°$ *et* $\cos 39°$

REPONSE

On a: $23° + 67° = 90°$ *donc* $\cos 23° = \sin 67° = 0{,}9205$
De même $\cos 39° = \sin 51° = 0{,}771$

EXERCICE DE FIXATION 2

On donne : $\sin a° = \frac{1}{3}$
Calcule $\cos a°$

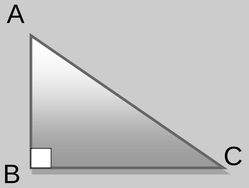
REPONSE

On a : $\sin^2 a° + \cos^2 a° = 1 \rightarrow \cos a° = \sqrt{1 - \sin^2 a°} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2.3. TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

Définition :
Dans un triangle rectangle, on appelle tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :
$$\tan \widehat{BAC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{BAC}} = \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$



Propriété :
La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.
Autrement dit ; si $\hat{A}$ est un angle aigu, on a : $\tan \hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$

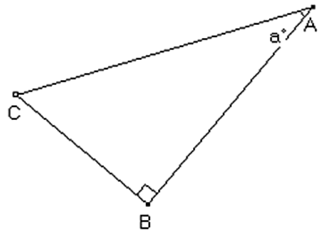
EXERCICE DE FIXATION

ABC est un triangle rectangle en B.

Calcule $tan\ \hat{A}$ lorsque :

1-$sin\ \hat{A} = \frac{1}{3}$ $et\ cos\ \hat{A} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$

2-$sin\ \hat{A} = \frac{3}{5}$ $et\ cos\ \hat{A} = \frac{4}{5}$



REPONSE

1-$tan\ \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

2- $tan\ \hat{A} = \frac{3}{4}$

2.4. UTILISATION DE LA TABLE TRIGONOMETRIQUE

Extrait de la table trigonométrique

degré	sin	cos	tan	1/tan	
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
	cos	sin	1/tan	tan	degré

EXERCICE DE FIXATION

A l'aide de la table, donne un encadrement de mes $\hat{F}$ sachant que cos $\hat{F}$ = 0,302.

REPONSE

On a : $0,292 < 0,302 < 0,309$

d'où $\cos 73° < \cos \hat{F} < \cos 72°$

donc $72° < mes\ \hat{F} < 73°$

SITUATION D'EVALUATION

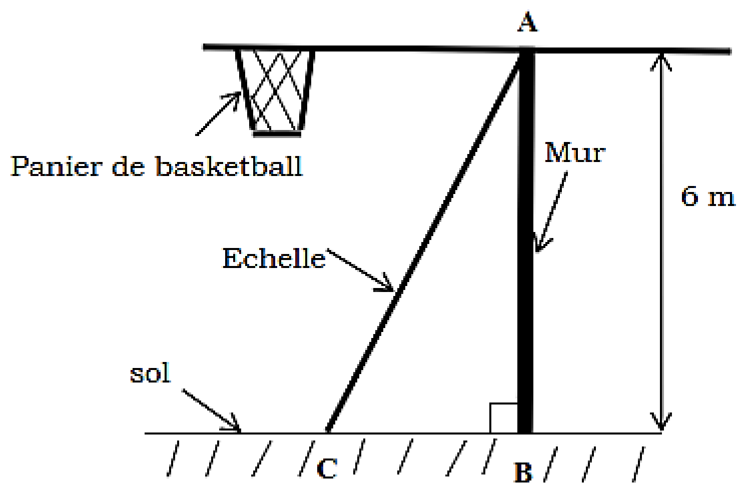
Pour participer à un tournoi communal de basketball organisé par le maire,le président des jeunes veut installer un panier de basket pour l'entrainement de l'équipe du quartier.Président des jeunes veut fixer le panier de basket sur un mur à 6 m du sol.Il dispose d'une échelle qui mesure 6,5 m de long.

Un maçon indique que le panier sera bien placé si l'angle formé par l'échelle et le sol compris en 60° et 70°.

1°/ Détermine la distance entre le pied du mur et le point d'appui de l'échelle (*distance BC*).

2°/ Calcule le sinus de l'angle formé par l'échelle et le sol ($\sin \widehat{ACB}$).

3° / Dis si le panier sera placé.



Extrait de table trigonométrique

Angle	65	66	67	68	69	70
cos	0,423	0,407	0,391	0,375	0,358	0,342
sin	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934	0,940

EXERCICES

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union-Discipline-Travail

EXERCICE 1

MNP est un triangle rectangle en P tel que : $MN = 8$ et mes $\widehat{MNP} = 30°$

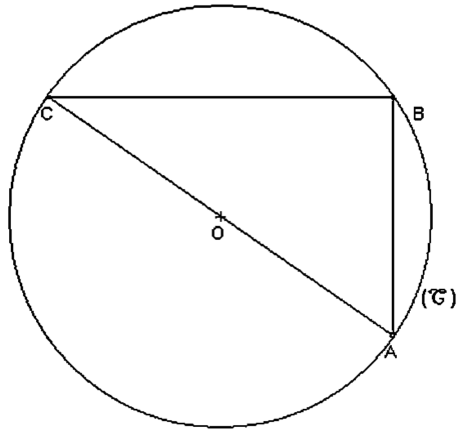
On donne $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1) Calcule MP et PN
2) Construis un segment [AB] de mesure $\sqrt{3}$ (on donnera un programme de construction).

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur :

- ABC est un triangle inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de diamètre [AC].
- On donne : $AB = 4\sqrt{3}$; $AC = 8$;
  $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



1) Justifie que ABC est un triangle rectangle en B.
2) Justifie que $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

EXERCICE 3

Pour mieux éclairer devant la salle des professeurs, monsieur YEO l'électricien, veut fixer une ampoule devant la porte. Pour cela, il dispose d'une échelle de 4m et la porte a une hauteur de 2m.
En vu de prendre des précautions, il veut savoir la mesure de l'angle formé par l'échelle et le sol.

1- A quelle distance du pied de la porte doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau de la porte ?
2- Détermine l'angle formé par l'échelle et le sol.