

Equations

I) Mise en équation de problèmes :

► Voici l'énoncé d'un problème :

Le réservoir d'essence de ma voiture a **une capacité totale de 60 litres**.
Il manque **32 litres** d'essence pour qu'il soit plein.
Quelle **quantité d'essence** se trouve dans le réservoir ?

Pour simplifier notre recherche, nous allons « traduire » l'énoncé par une phrase mathématique.

$$\text{Quantité d'essence inconnue} + 32 = 60$$

Pour simplifier davantage, je remplace la valeur inconnue par une lettre. Je choisis x

$$x + 32 = 60$$



Le problème est présenté sous forme d' une égalité avec une inconnue : une **équation**.

La solution n'est pas difficile à trouver... $x = 28$. Je vérifie que l'égalité est vraie en remplaçant x par 28.
En effet, $28 + 32 = 60$. 28 est donc la solution de l'équation. Mon réservoir contenait donc 28 litres.

► Voici l'énoncé d'un second problème :

René a acheté une aubergine et pour 2,25 € de pommes.
Anaïs a acheté deux aubergines et pour 1,15 €, un melon.
Ils ont tous deux dépensé la **même** somme.
Quel est le prix d'une aubergine ?

Appelons x le prix d'une aubergine
On peut **traduire** cette situation par l' équation

$$2x + 1,15 = x + 2,25$$

Le problème a été mis sous forme d'**équation**

x est appelé l'**inconnue** de l'équation.

Nous allons par la suite apprendre une méthode pour trouver la valeur cherchée.

II) Quelques propriétés des égalités :

Propriété : une **égalité reste vraie** si on **ajoute** (ou on **soustrait**) **le même nombre** à ses deux membres.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a + c = b + c$$

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a - c = b - c$$

Ex : Soit x un nombre relatif

- Si $x = 7$ alors $x + 4 = 7 + 4$ donc $x + 4 = 11$
- Si $x = -9$ alors $x - 2 = -9 - 2$ donc $x - 2 = -11$
- Si $x - 9 = 4$ alors $x - 9 + 9 = 4 + 9$ donc $x = 13$

Propriété : une **égalité reste vraie** si on **multiplie chaque membre de l'égalité** par un **même nombre**.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a \times c = b \times c$$

Ex : Soit x un nombre relatif

- Si $x = -7$ alors $x \times 4 = -7 \times 4$ donc $x \times 4 = -28$
- Si $\frac{x}{5} = 3$ alors $\frac{x}{5} \times 5 = 3 \times 5$ donc $x = 15$

Propriété : une **égalité reste vraie** si on divise **chaque membre de l'égalité** par un **même nombre non nul**

a, b, c désignent trois nombres relatifs avec $c \neq 0$, on a :

$$\text{Si } a = b \text{ et } c \neq 0 \text{ alors } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Ex : Soit x un nombre relatif

- Si $x = 5$ alors $\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$ donc $\frac{x}{2} = 2,5$
- Si $-3x = 7$ alors $\frac{-3x}{-3} = \frac{7}{-3}$ donc $x = -\frac{7}{3}$

II) Équations :

Définition : une **équation** est une **égalité** comprenant un ou plusieurs nombres **inconnus** (écrits en général sous forme de lettre(s))

Ex: $x + 9 = 5x - 7$ ← « voici une équation où l'inconnue est x ! »

$\downarrow$
 premier membre
de l'équation

$\downarrow$
 second membre
de l'équation



Définition : **résoudre** une équation d'**inconnue x** , c'est **trouver toutes les valeurs** possibles de x telles que **l'égalité soit vraie**.

Ex: Soit l'équation : $x + 9 = 5x - 7$
 Le nombre **4** est une solution de l'équation. On a en effet : $4 + 9 = 13 = 5 \times 4 - 7$

« On obtient le même résultat en remplaçant x par 4 dans les deux membres donc 4 est une solution de l'équation. ! »



II) Résoudre une équation à une inconnue :

Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :

$$3x + 9 = 7x - 2$$

« Pour rassembler les " x ", je retranche $7x$ à chaque membre »

$$\begin{array}{rcl} 3x + 9 - 7x & = & 7x - 2 - 7x \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ -4x & & 0 \end{array}$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les termes en " x " »

$$9 - 4x = -2$$

« Je rassemble les termes "sans x " en ajoutant -9 à chaque membre »

$$\begin{array}{rcl} 9 - 4x - 9 & = & -2 - 9 \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ 0 & & -11 \end{array}$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les termes "sans x " »

$$-4x = -11$$

« Je divise chaque membre par -4 pour qu'il ne reste plus que x dans le premier membre ! »

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-11}{-4}$$

$$x = \frac{-11}{-4} = \frac{11}{4}$$

Il faut faire en sorte que x soit seul dans le premier membre !!



Ex : Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :

$$\begin{aligned}-5x + 4 &= 15x - 9 \\ -5x + 4 - 15x &= 15x - 9 - 15x \\ -20x + 4 &= -9 \\ -20x + 4 - 4 &= -9 - 4 \\ -20x &= -13 \\ x &= \frac{-13}{-20} = \frac{13}{20}\end{aligned}$$

Ex : Résolvons l'équation d'inconnue m suivante :

$$3(2 - 5m) = 4m + 7 - (3m + 4)$$

En développant l'expression, les parenthèses seront supprimées!!



$$6 - 15m = 4m + 7 - 3m - 4$$

$$6 - 15m = m + 3$$

$$6 - 15m - m = m + 3 - m$$

$$6 - 16m = 3$$

$$6 - 16m - 6 = 3 - 6$$

$$-16m = -3$$

$$m = \frac{-3}{-16} = \frac{3}{16}$$

III) Résoudre un problème à l'aide d'une équation :

énoncé :

Jacques et Lucien ont une collection de petites voitures. Jacques en a **12 de moins** que Lucien. Lucien en a **trois fois plus** que Jacques.
Combien de voitures possède Jacques ?

Notons x le nombre de voitures de Jacques

$$x + 12 = 3x$$

«je **traduis** l'énoncé sous forme d'équation !

$$x + 12 - x = 3x - x$$

$$12 = 2x$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

«je **résous** l'équation ! »



Jacques possède 6 voitures.