PUISSANCES

I) Puissances d'un nombre relatif :

A) exposant entier positif :

Définition : Soit **a** un nombre relatif et **n** un entier supérieur ou égal à 2

a^n est le produit de n facteurs égaux à a

$$a^n = a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a$$

« le produit comprend **n** facteurs»

n est l'exposant de a a^n est une puissance du nombre a

$a^0 = 1$ $a^1 = a$ a^2 se lit "a au carré" a^3 se lit "a au cube"

Ex :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = (-125)$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$ $4^0 = 1$ $(-3,2)^1 = -3,2$

B) exposant entier strictement négatif :

Définition : **a** étant un nombre relatif non nul et **n** un entier positif non nul

a^{-n} est l'inverse de a^n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times \ldots. \times a \times a}$$

« $a^{-1} = \frac{1}{a}$ »

Ex : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)^{3}} = \frac{1}{\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)} = \left[\frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)}\right]^{3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{3}$$

- la puissance d'un nombre positif est toujours positive.
- la puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair.
- la puissance d'un nombre négatif est négative si l'exposant est impair

Ex : $(-5)^6$ est positif $(-7{,}8)^{-8}$ est positif 9^7 est positif $(-4{,}1)^3$ est négatif

II) Puissances de 10 :

Propriété : Pour tout entier positif n non nul, on a :

$10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots\ldots \times 10 \times 10 = 1000\ldots\ldots\ldots00$

« le produit comprend **n** facteurs»

« **n** zéros»

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}000\ldots\ldots01$

« **n** chiffres **après** la virgule»

Ex : $10^4 = 10000$ $10^{-6} = 0{,}000001$ $10^1 = 10$

6 chiffres **après** la virgule !

Propriété : n désigne un nombre positif

- On multiplie un nombre décimal par $\mathbf{10^n}$ en déplaçant la virgule de **n rangs vers la droite**.

Ex : $4{,}567 \times 10^2 = 456{,}7$ $3{,}4 \times 10^7 = 34\,000\,000$

Si cela est nécessaire, on complète avec des zéros !

- On multiplie un nombre décimal par $\mathbf{10^{-n}}$ en déplaçant la virgule de **n rangs vers la gauche**.

Ex : $4{,}567 \times 10^{-2} = 0{,}04567$ $3{,}4 \times 10^{-7} = 0{,}0000034$

III) Écriture scientifique d'un nombre décimal :

Définition : la notation scientifique d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $a \times 10^{p}$ où a est un nombre décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule**

Ex :
L'écriture scientifique de **56 000** est : $5{,}6 \times 10^{4}$
L'écriture scientifique de **345** est : $3{,}45 \times 10^{2}$
L'écriture scientifique de **– 0,0067** est : $-6{,}7 \times 10^{-3}$

Astuce : j'écris le nombre en mettant un chiffre non nul devant la virgule.
Ici j'écris donc **3,45**. Ensuite je cherche la puissance de 10 par laquelle je dois multiplier **3,45** pour retrouver le nombre de départ **345** !

IV) Opérations avec des puissances :

$3^{2} \times 3^{4} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{2+4} = 3^{6}$

Les exposants s'ajoutent :
2 + 4 = 6 !!»

$$\frac{(-4)^{2}}{(-4)^{5}} = \frac{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)}}{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)} \times (-4) \times (-4) \times (-4)} = \frac{1}{(-4)^{3}} = (-4)^{-3}$$

Les exposants se retranchent :
2 – 5 = –3 !!

$15 - 4 \times 3^{2}$
$= 15 - 4 \times 9$
$= 15 - 36$
$= -11$

$7 + 6^{2} - 5 : 10^{2}$
$= 7 + 36 - 5 : 100$
$= 7 + 36 - 0{,}05$
$= 42{,}95$

Dans une expression sans parenthèse, on calcule d'abord les puissances.

Propriété : quels que soient n et p deux entiers relatifs, on a :

$10^{n} \times 10^{p} = 10^{n+p}$ $\qquad \frac{10^{n}}{10^{p}} = 10^{n-p}$ $\qquad (10^{n})^{p} = 10^{n \times p}$

Ex : $10^{4} \times 10^{3} = 10^{7}$ $\qquad \frac{10^{9}}{10^{4}} = 10^{9-4} = 10^{5}$ $\qquad (10^{3})^{2} = 10^{2 \times 3} = 10^{6}$

$10^{-5} \times 10^{8} = 10^{3}$ $\qquad \frac{10^{-5}}{10^{9}} = 10^{-14}$ $\qquad (10^{-7})^{3} = 10^{-21}$