4ème
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Code :

Thème : **CALCULS ALGEBRIQUES**

Leçon 1 : **NOMBRES DECIMAUX RELATIFS** **Durée : 4 heures**

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans la bibliothèque d'un collège, un élève d'une classe $4^{éme}$ découvre dans une revue scientifique les informations suivantes :

- Distance Terre-Soleil : 150 000 000 km
- Diamètre de notre galaxie : 1 000 000 000 000 000 000 km
- Épaisseur d'un cheveu : 0,000 05 m
- Diamètre d'un virus : 0,000 000 000 1 m

Voulant recopier ces informations pour les partager avec ses camarades de classe, il constate que certains nombres comportant plusieurs zéros occupent trop d'espace dans leur écriture. Il souhaite savoir si ces nombres n'auraient pas une autre notation.

Il en parle à ses camarades de classe. Ensemble, ils sollicitent l'aide de leur professeur de mathématiques qui leur suggère d'approfondir leurs connaissances sur les nombres décimaux relatifs.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Puissance de 10 d'exposants entiers relatifs

1. Puissance de 10 d'exposants entiers relatifs

a. Définition

Soit *n* un entier positif non nul. On a :

$10^n = 1\underbrace{0\ldots.0}_{n\ zéro(s)}$; $10^{-n} = 0,\underbrace{0\ldots.0}_{(n-1)\ zéro(s)}1$

Remarque : $10^0 = 1$.

Exemples

$10^4 = 10000$; $10^6 = 1000000$; $10^{-3} = 0{,}001$ et $10^{-8} = 0{,}00000001$.

Exercice de fixation

Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

$10^7 = 1\ldots$; $10^{-9} = 0,\ldots$; $100000000000 = 10^{\cdots}$; $0{,}000001 = 10^{\cdots}$

Corrigé

$10^7 = 10000000$; $10^{-9} = 0{,}000000001$; $100000000000 = 10^{11}$; $0{,}000001 = 10^{-6}$.

Remarque

Soit n un entier positif. On a : $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$.

b. Propriétés

m et n sont des nombres entiers relatifs.

$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $(10^m)^n = 10^{m\times n}$; $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$.

Exercice de fixation

Recopie puis complète :

a. $10^5 \times 10^2 = 10^{\cdots} = 10^{\cdots}$ b. $10^{-12} \times 10^{12} = 10^{\cdots} =$ c. $\frac{10^2}{10^7} = 10^{\cdots}$

d. $\frac{10^5}{10^2} = 10^{\cdots}$ e. $(10^3)^5 = 10^{\cdots}$ f. $(10^{-2})^{-5} = 10^{\cdots}$

Corrigé

a. $10^5 \times 10^2 = 10^{5+2} = 10^7$ b. $10^{-12} \times 10^{12} = 10^{-12+12} = 10^0$ c. $\frac{10^2}{10^7} = 10^{2-7} = 10^{-5}$

d. $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$ e. $(10^3)^5 = 10^{3\times 5} = 10^{15}$ f. $(10^{-2})^{-5} = 10^{-2\times(-5)} = 10^{10}$.

Remarque

Soit n un entier naturel non nul. On a : $10^n \times 10^{-n} = 10^0 = 1$.

2. Produit de nombres décimaux écrits sous la forme $d \times 10^P$

Propriété

a et b sont des nombres décimaux relatifs non nuls, p et q sont des nombres entiers relatifs.

$(a \times 10^p) \times (b \times 10^q) = (a \times b) \times 10^{p+q}$

Exercice de fixation

Calcule les produits suivants :

a. $(3 \times 10^6) \times (10 \times 10^6)$ b. $(-7{,}5 \times 10^{-9}) \times (2 \times 10^{10})$ c. $(-5 \times 10^7) \times ((-12{,}4) \times 10^{-9})$

Corrigé

a. $(3 \times 10^6) \times (10 \times 10^6) = (3 \times 10) \times 10^{6+6} = 30 \times 10^{12}$.

b. $(-7{,}5 \times 10^{-9}) \times (2 \times 10^{10}) = (-7{,}5 \times 2) \times 10^{-9+10} = -15 \times 10$.

c. $(-5 \times 10^7) \times ((-12{,}4) \times 10^{-9}) = (-5 \times (-12{,}4)) \times 10^{7+(-9)} = 62 \times 10^{-2}$.

II. Notation scientifique d'un nombre décimal relatif

1. Ecriture un nombre décimal sous la forme $a \times 10^P$

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal et p un nombre entier relatif.

Exemples

$-49 = -4{,}9 \times 10$; $-49 = -4900 \times 10^{-2}$; $-49 = -0{,}0049 \times 10^4$.

$0{,}0078 = 7{,}8 \times 10^{-3}$; $0{,}0078 = 78 \times 10^{-4}$; $0{,}000000078 = 0{,}000078 \times 10^2$.

Exercice de fixation

Recopie puis complète les égalités suivantes :

$a)$ $15000000 = 15 \times 10^{\cdots}$ b) $15000000 = 1{,}5 \times 10^{\cdots}$

c) $-0{,}523 = -532 \times 10^{\cdots}$ d) $-0{,}523 = -5{,}32 \times 10^{\cdots}$

Corrigé

a) $15000000 = 15 \times 10^{6}$ b) $15000000 = 1{,}5 \times 10^{7}$

c) $-0{,}523 = -532 \times 10^{-3}$ d) $-0{,}523 = -5{,}32 \times 10^{-1}$

2. Notation scientifique d'un nombre décimal relatif

Définition

On appelle notation scientifique d'un nombre décimal, l'écriture de ce nombre sous la forme : $a \times 10^{P}$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p un nombre entier relatif.

Exemples

La notation scientifique de 12000 est :$1{,}2 \times 10^{4}$.
La notation scientifique de $0{,}5689$ est : $5{,}689 \times 10^{-1}$.
La notation scientifique de $-681{,}204$ est :$-6{,}81204 \times 10^{2}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les nombres décimaux suivants, identifie ceux qui sont écrits en notation scientifique.

83×10^{-3} ; $-3{,}5 \times 10^{8}$; $-0{,}4 \times 10^{-24}$; $1{,}24 \times 10^{5}$; 6×10^{9}

Corrigé

Les nombres qui sont écrits en notation scientifique sont : $-3{,}5 \times 10^{8}$; $1{,}24 \times 10^{5}$; 6×10^{9}

Exercice 2

Ecris la notation scientifique de chacun des nombres décimaux suivants.

7438 ; 0,0673 ; $-13074{,}64$.

Corrigé

$7438 = 7{,}438 \times 10^{3}$; $0{,}0673 = 6{,}73 \times 10^{-2}$; $-13074{,}64 = -1{,}307464 \times 10^{4}$.

3. Comparaison de nombres décimaux relatifs écrits sous la forme $d \times 10^{P}$

Méthode

Pour comparer deux nombres décimaux positifs A et B écrits sous la forme $d \times 10^{P}$ ($d \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$), on peut procéder comme suit :

On écrit en notation scientifique chacun des nombres A et B : $A = a \times 10^{m}$ et $B = b \times 10^{n}$.

- Si $m = n$, alors A et B sont rangés dans le même ordre que a et b.
- Si $n \neq m$, alors A et B sont rangés dans le même ordre que m et n .

Remarque

Si A et B sont négatifs, on compare $-$A et $-$ B.

A et B sont rangés dans l'ordre contraire de $-$A et $-$ B.

Exemple 1

Comparons $A = 64{,}92 \times 10^{-4}$ et $B = 897 \times 10^{-5}$.

On a : $A = 6{,}492 \times 10^{-3}$ et $B = 8{,}97 \times 10^{-3}$.

Dans les deux notations scientifiques, 10 a le même exposant qui est -3 ; donc on compare 6,492 et 8,97.

$6{,}492 < 8{,}97$ donc $6{,}492 \times 10^{-3} < 8{,}97 \times 10^{-3}$.

Exemple 2

Comparons $1{,}492 \times 10^{-4}$ et $8{,}97 \times 10^{-3}$.

Les deux nombres sont déjà en notation scientifique, donc on compare -4 et -3.

$-4 < -3$, donc $1{,}492 \times 10^{-4} < 8{,}97 \times 10^{-3}$.

Exemple 3

Comparons $-7{,}15 \times 10^{-2}$ $et -3{,}6 \times 10^{-4}$.

Comparons d'abord $7{,}15 \times 10^{-2}$ et $3{,}6 \times 10^{-4}$.

$-2 > -4$, donc $7{,}15 \times 10^{-2} > 3{,}6 \times 10^{-4}$.

$7{,}15 \times 10^{-2} > 3{,}6 \times 10^{-4}$ donc $-7{,}15 \times 10^{-2} < -3{,}6 \times 10^{-4}$.

Exercice de fixation

Compare les deux nombres décimaux dans chacun des cas suivants :

a) $A = 13{,}2 \times 10^{-135}$ et $B = 2{,}5 \times 10^{-134}$.

b) $A = 0{,}0272 \times 10^{58}$ et $B = 0{,}000\,046 \times 10^{59}$.

c) $A = -12{,}584 \times 10^{-7}$ et $B = -521 \times 10^{3}$.

d) $A = -25{,}69 \times 10^{2}$ et $B = 0{,}08 \times 10^{-4}$.

Corrigé

a) $A = 13{,}2 \times 10^{-135}$ $B = 2{,}5 \times 10^{-134}$

$= 1{,}32 \times 10^{-134}$

1,32 < 2,5 ; donc $A < B$.

b)

$A = 0{,}0272 \times 10^{58}$ $B = 0{,}000046 \times 10^{59}$

$=2{,}72\times 10^{56}$ $= 4{,}6 \times 10^{54}$

56 > 54, donc $A > B$.

c) $A = -12{,}584 \times 10^{-7}$ et $B = -521 \times 10^{3}$.

On a : $12{,}584 \times 10^{-7} = 1{,}2584 \times 10^{-6}$ et $521 \times 10^{3} = 5{,}21 \times 10^{5}$.

$-6 < 5$, donc $1{,}2584 \times 10^{-6} < 5{,}21 \times 10^{5}$ d'où $12{,}584 \times 10^{-7} < 521 \times 10^{3}$.

Donc : $A > B$.

d) $A = -25{,}69 \times 10^{2} \quad et \quad B = 0{,}08 \times 10^{-4}$

A est négatif et B est positif , donc $A < B$.

III. Nombre décimal d'ordre *n*

Définition

n est un nombre entier naturel. On appelle nombre décimal d'ordre *n* , un nombre décimal qui peut s'écrire sous la forme $d \times 10^{-n}$; où d est un nombre entier relatif et *n* un nombre entier naturel.

Exemples

$52{,}658 = 52658 \times 10^{-3}$, donc 52,658 est un nombre décimal d'ordre 3.
$-0{,}000054 = -54 \times 10^{-6}$, donc $-0{,}000054$ est un nombre décimal d'ordre 6.

Exercices de fixation

Exercice 1

Identifie les nombres décimaux d'ordre 4 dans la liste de nombres suivants :

45257×10^{4}; -25×10^{-4} ; $3{,}6 \times 10^{-4}$; 178×10^{-4}

Exercice 2

Détermine l'ordre de chacun des nombres décimaux suivants : 45,7 ; 0,00001 ; 0,0000457 et – 4,0057.

Corrigés

Exercice 1

Les nombres décimaux d'ordre 4 sont -25×10^{-4} et 178×10^{-4}

Exercice 2

$45{,}7 = 457 \times 10^{-1}$, donc 45,7 est un nombre décimal d'ordre 1.

$0{,}00001 = 1 \times 10^{-5}$, donc 0,00001 est un nombre décimal d'ordre 5.

$0{,}0000457 = 457 \times 10^{-7}$, donc 0,0000457 est un nombre décimal d'ordre 7.

$4{,}0057 = 40057 \times 10^{-4}$, donc 4,0057 est un nombre décimal d'ordre 4.

Remarques

- Un nombre décimal écrit avec *n* chiffres après la virgule est un nombre décimal d'ordre *n*.
- Un nombre décimal d'ordre *n* est aussi un nombre décimal d'ordre supérieur à *n*.

Exemples

- 0,00032 est un nombre décimal d'ordre 5.
- 56,789 est un nombre décimal d'ordre 3, d'ordre 4, d'ordre 5,…

C. SITUATION D'EVALUATION

Dans le journal « SOS SANTÉ », un professeur de SVT d'une classe de 4ème du Collège moderne de Gagnoa dit avoir recueilli les informations suivantes : « Des cellules microscopiques rectangulaires et identiques de longueur 30 micromètres et de largeur 2 micromètres recouvrent totalement une lamelle de

0,000032568 m² ».

En réponse à la question d'écrire en notation scientifique la surface occupée par chaque cellule et le nombre de cellules qu'il faut pour recouvrir cette lamelle, trois de ses élèves Digbeu, Ama et Koné donnent les réponses résumées dans le tableau ci-dessous.

	Surface en m^2	Nombre de cellules
Digbeu	6×10^{-13}	$54{,}28 \times 10^{4}$
Ama	6×10^{-11}	$5{,}428 \times 10^{5}$
Koné	$0{,}6 \times 10^{-10}$	$542{,}8\times 10^{2}$

NB : 1 micromètre = 10^{-6} m

Le chef de classe affirme que Ama a raison mais Koné n'est pas d'accord.

1. Ecris la notation scientifique de 0,000032568.
2. En utilisant les outils mathématiques au programme, donne ton avis sur l'affirmation du chef de classe.

Corrigé

1. La notation scientifique de 0,000032568 est $3{,}2568 \times 10^{-5}$
2. On a : $30 \text{ micromètres} = 30 \times 10^{-6}\text{m}$ et $2 \text{ micromètres} = 2 \times 10^{-6}\text{m}$

   La surface en m^2 occupée par une cellule est : $30 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6} = 6 \times 10^{-11}$.

   Le nombre de cellules qu'il faut pour recouvrir la lamelle est :

$$\frac{32568\times10^{-9}}{6\times10^{-11}} = 5428 \times 10^{2} = 5{,}428 \times 10^{5} .$$

Le chef a raison car les résultats obtenus par calcul sont conformes à ceux donnés par Ama.

D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

1. Ecris chacun des nombres suivants sous forme de puissance de 10 :
   1000100000 ; 1000000000 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,00001 et 0, 0000001.

2. Donne l'écriture décimale de chacune des puissances de 10 suivantes :

   10^{-4} ; 10^{7} ; 10^{-10} ; 10^{13}

Exercice 2

Dans chaque cas entoure la bonne réponse.

$10^7 =$	70	1 000 000	10 000 000
$10^{-6} =$	$-1\ 000\ 000$	0, 000 001	0,6
$10^7 \times 10^{-4} =$	10^{-28}	10^3	10^{11}
$\dfrac{10^7}{10^{-4}}$	10^{11}	10^3	10^{28}

Exercice 3

Ecris chacun des nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$10^2 \times 10^7$ $\quad$ 10×10^{15} $\quad$ $10^{-5} \times 10^8$

Exercice 4

Ecris chacun des nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$(10^3)^4 =$ $\quad$ $(10^{-7})^{-2} =$ $\quad$ $(10^{-9})^5 =$

Exercice 5

Relie les nombres qui sont égaux.

0,4 756	$47{,}56 \times 10^{-4}$
47 560 000	$47{,}56 \times 10^6$
0,004 756	$47{,}56 \times 10^{-10}$
4 756 000 000 000	$47{,}56 \times 10^{-2}$
0,000 000 004 756	$47{,}56 \times 10^{11}$
47,56	$47{,}56 \times 10^0$

Exercice 6

Recopie puis complète les égalités suivantes par une puissance de 10:

$43{,}25 = 0{,}4325 \times ...$; $\quad$ $43{,}25 = 0{,}000004325 \times ...$

Exercice 7

1. Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre entier qui n'est pas un multiple de 10 et p est un nombre entier relatif.
   730000 000 ; 0,7567 ; −0,000 043 1 ; −70,01.
2. Donne l'écriture décimale de chacun des nombres suivants : $45{,}8 \times 10^{-5}$; $14{,}3 \times 10^5$.

Exercice 8

Entoure la bonne réponse :

La notation scientifique de 941 est	$9{,}41 \times 10^{-2}$	$9{,}41 \times 10^{2}$	$94{,}1 \times 10^{1}$
La notation scientifique de 0,000 17 est	$0{,}17 \times 10^{-3}$	17×10^{-5}	$1{,}7 \times 10^{-4}$

Exercice 9

Donne la notation scientifique de chacun des nombres suivants :

1787 ; 450 000 ; 0,000 009 75 ; 789 400 000 000 .

Exercice 10

Calcule les produits suivants et donne le résultat sous la forme $a\times 10^{p}$ où a est un nombre décimal et p est un nombre entier relatif :
$(1{,}45 \times 10^{3}) \times (2{,}4 \times 10^{2})$; $(-8 \times 10^{4}) \times (5{,}3 \times 10^{-5})$; $(18 \times 10^{-3}) \times (3{,}1 \times 10^{7})$; $4{,}3\times10^{-3}\times3\times10^{4}$;
$8\times10^{-4}\times9\times10^{7}$

Exercice 11

Dans chaque cas compare les deux nombres donnés :

1. 7×10^{6} et 53×10^{5}
2. $0{,}54 \times 10^{-4}$ et $2{,}7 \times 10^{-3}$
3. $32{,}4 \times 10^{4}$ et 154×10^{4}

Exercice 12

Dans chaque cas compare les deux nombres donnés :

a) 5400×10^{2} et $0{,}55 \times 10^{4}$
b) -92×10^{6} et -11×10^{4}

Exercice 13

Donne l'ordre de chacun des nombres décimaux suivants :

$-0{,}005$; $0{,}12$; $-5{,}4$; $12{,}423$; - 17 et $1{,}4 \times 10^{-2}$

Exercices de renforcement

Exercice 14

Range les nombres décimaux suivants dans l'ordre croissant

$0{,}05 \times 10^{2} \times 2 \times 10^{5}$; $0{,}000\,95 \times 10^{11}$; $0{,}124 \times 10^{9}$ et $9{,}2 \times 10^{7}$

Exercice 15

Calcule chacun des produits et quotients suivants puis donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10 :

$2\times10^{9}\times5\times10^{-5}$; $0,25 \times 10^{2} \times 0,004 \times 10^{5}$; $\frac{0,5\times10^{4}}{5\times10^{-2}}$; $\frac{10^{-4}\times10^{3}}{10^{2}}$

Exercice 16

Calcule des produits et quotients suivants puis donne le résultat sous la forme $a \times 10^{p}$ où a est un nombre décimal non multiple de 10 et p est un nombre entier relatif :

$3\ 000\ 000 \times 0,000\ 000\ 000\ 02$; $8\times10^{-4}\times5\times10^{7}$; $\frac{65\times10^{-15}\times2\times10^{41}}{26\times10^{22}}$; $\frac{29\times(10^{5})^{2}\times4\times10^{-3}}{2\times(10^{-3})^{2}}$

Pour les exercices 17 à 20, tu écriras chaque résultat en notation scientifique

Exercice 17

On estime que 6,8 milliards de personnes boivent chacune 1,5 litres d'eau par jour.

Calcule en litre la quantité d'eau bue par jour par toutes ces personnes.

Exercice 18

Un moustique pèse environ $1,6 \times 10^{-6} mg$.

Calcule le nombre de moustiques qu'il faut pour obtenir le poids d'un éléphant pesant environ 6×10^{3} kilogrammes.

Exercice 19

Lorsqu'on superpose 1000 pièces de 25 F CFA, on obtient une pile de 235cm de haut.

Calcule en cm l'épaisseur d'une pièce de 25 F CFA.

Exercices d'approfondissement

Exercice 20

Calcule chacun des produits suivants et écris la notation scientifique du résultat

$73\times2^{40}\times5^{40}$; $3^{2}\times2^{40}\times5^{38}$

Exercice 21

1. Encadre chacun des nombres suivants par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs. $5,33 \times 10^{-2}$; $1,7 \times 10^{-4}$ et $0,015 \times 10^{5}$
2. Range dans l'ordre décroissant les nombres $5,33 \times 10^{-2}$; $1,7 \times 10^{-4}$ et $0,015 \times 10^{5}$

Exercice 22

Détermine la notation scientifique de chacun des nombres suivants puis compare-les.

$0,25 \times 10^{9} \times 8 \times 10^{-3}$ et $5,7 \times 10^{-7} + 1200 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^{11}$

Le chef a raison car les résultats obtenus par calcul sont conformes à ceux donnés par Ama.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1 :

1. 10^3; 10^5; 10^9; 10^{-1}; 10^{-2} ; 10^{-5}; 10^{-7}
2. 0,0001 ; 10000000; 0,0000000001 ; 10000000000000

Exercice 2 :

$10^7 =$	70	1000 000	10 000 000
$10^{-6} =$	$-1\ 000\ 000$	0, 000 001	0,6
$10^7 \times 10^{-4} =$	10^{-28}	10^3	10^{11}
$\dfrac{10^7}{10^{-4}}$	10^{11}	10^3	10^{28}

Exercice 3

$10^2 \times 10^7 = 10^{2+7} = 10^9$; $10 \times 10^{15} = 10^{1+15} = 10^{16}$; $10^{-5} \times 10^8 = 10^{-5+8} = 10^3$

Exercice 4

$(10^3)^4 = 10^{12}$; $(10^{-7})^{-2} = 10^{14}$; $(10^{-9})^5 = 10^{-9\times 5} = 10^{-45}$

Exercice 5

0,4756	$47{,}56 \times 10^{-4}$
47560000	$47{,}56 \times 10^{6}$
0,004756	$47{,}56 \times 10^{-10}$
4 756 000000000	$47{,}56 \times 10^{-2}$
0,000 000004756	$47{,}56 \times 10^{11}$
47,56	$47{,}56 \times 10^{0}$

Exercice 6

$43{,}25 = 0{,}4325 \times 10^2$; $43{,}25 = 0{,}000004325 \times 10^7$

Exercice 7

1. $730\ 000\ 000 = 73 \times 10^7$; $0{,}7567 = 7567 \times 10^{-4}$; $-0{,}000\ 043\ 1 = -431 \times 10^{-7}$

$-70{,}01 = -7001 \times 10^{-2}$

2. $45{,}8 \times 10^{-5} = 0{,}000458$; $14{,}3 \times 10^{5} = 1430000$

Exercice 8

La notation scientifique de 941 est	$9{,}41 \times 10^{-2}$	$9{,}41 \times 10^{2}$	$94{,}1 \times 10^{1}$
La notation scientifique de 0,000 17 est	$0{,}17 \times 10^{-3}$	17×10^{-5}	$1{,}7 \times 10^{-4}$

Exercice 9

$1787 = 1{,}787 \times 10^{3}$; $450\,000 = 4{,}5 \times 10^{5}$ $0{,}000\,009\,75 = 9{,}75 \times 10^{-6}$
$789\,400\,000\,000 = 7{,}894 \times 10^{11}$

Exercice 10
$(1{,}45 \times 10^{3}) \times (2{,}4 \times 10^{2}) = 3{,}48 \times 10^{5}$; $(-8 \times 10^{4}) \times (5{,}3 \times 10^{-5}) = -42{,}4 \times 10^{-1}$

$(18 \times 10^{-3}) \times (3{,}1 \times 10^{7}) = 55{,}8 \times 10^{4}$; $4{,}3 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{4} = 12{,}9 \times 10$

Exercice 11

1. $53 \times 10^{5} = 5{,}3 \times 10^{6}$. Comme $7 > 5{,}3$ alors $7 \times 10^{6} > 53 \times 10^{5}$
2. $0{,}54 \times 10^{-4} = 5{,}4 \times 10^{-3}$. Comme $5{,}4 > 2{,}7$ alors $0{,}54 \times 10^{-4} > 2{,}7 \times 10^{-3}$
3. $32{,}4 \times 10^{4} = 3{,}24 \times 10^{5}$ et $154 \times 10^{4} = 1{,}54 \times 10^{6}$.
   Comme $5 < 6$ alors $32{,}4 \times 10^{4} < 154 \times 10^{4}$

Exercice 12

a) $5400 \times 10^{2} = 5{,}4 \times 10^{5}$ et $0{,}55 \times 10^{4} = 5{,}5 \times 10^{3}$
Comme $5 > 3$ alors $5400 \times 10^{2} > 0{,}55 \times 10^{4}$
b) $92 \times 10^{6} = 9{,}2 \times 10^{7}$ et $11 \times 10^{4} = 1{,}1 \times 10^{5}$

Comme $7 > 5$ alors $92 \times 10^{6} > 11 \times 10^{4}$

On a alors $-92 \times 10^{6} < -11 \times 10^{4}$

Exercice 13

$-0{,}005$ est d'ordre : 3 ; $-5{,}4$ est d'ordre 1 ; 12,423 est d'ordre 3

0,12 est d'ordre : 2 ; -17 est d'ordre 0 ; $1{,}4 \times 10^{-2}$ est d'ordre 3

Exercices de renforcement

Exercice 14

Ecrivons la notation scientifique de chacun des nombres suivants : $0{,}05 \times 10^{2} \times 2 \times 10^{5}$;
$0{,}000\,95 \times 10^{11}$; $0{,}124 \times 10^{9}$
On a :

$0{,}05 \times 10^2 \times 2 \times 10^5 = 0{,}1 \times 10^7 = 1 \times 10^6$; $0{,}000\,95 \times 10^{11} = 9{,}5 \times 10^7$ et
$0{,}124 \times 10^9 = 1{,}24 \times 10^8$

Donc : $0{,}05 \times 10^2 \times 2 \times 10^5 < 0{,}000\,95 \times 10^{11} < 9{,}2 \times 10^7 < 0{,}124 \times 10^9$

Exercice 15

$2\times10^9\times5\times10^{-5} = 10^5$; $0{,}25 \times 10^2 \times 0{,}004 \times 10^5 = 10^4$; $\frac{0{,}5\times10^4}{5\times10^{-2}} = 10^5$; $\frac{10^{-4}\times10^3}{10^2} = 10^{-3}$

Exercice 16

$3\,000\,000 \times 0{,}000\,000\,000\,02 = 3 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-11} = 6 \times 10^{-5}$

$8\times10^{-4}\times5\times10^7 = 4 \times 10^4$; $5 \times (10^5)^{-3} \times 12 \times 10^6 = 60 \times 10^{-15} \times 10^6 = 6 \times 10^{-8}$

$\frac{65\times10^{-15}\times2\times10^{41}}{26\times10^{22}} = 5 \times 10^4$; $\frac{29\times(10^5)^2\times4\times10^{-3}}{2\times(10^{-3})^2} = 58 \times 10^{13}$

Exercice 17

La quantité d'eau en litre bue par jour par toutes ces personnes est :

$6{,}8 \times 10^9 \times 1{,}5 = 6{,}8 \times 10^9 \times 15 \times 10^{-1} = 102 \times 10^8 = 1{,}02 \times 10^{10}$

Exercice 18

Le nombre de moustiques est : $\frac{6\times10^9}{1{,}6\times10^{-6}} = 3{,}75 \times 10^{15}$.

Exercice 19

L'épaisseur en cm d'une pièce de 25 F CFA est : $\frac{235}{10^3} = 2{,}35 \times 10^{-1}$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 20

$73\times2^{40}\times5^{40} = 73 \times (2 \times 5)^{40} = 73 \times 10^{40} = 7{,}3 \times 10 \times 10^{40} = 7{,}3 \times 10^{41}$;

$3^2\times2^{40}\times5^{38} = 3^2 \times 2^2 \times 2^{38} \times 5^{38} = 9 \times 4 \times (2 \times 5)^{38} = 36 \times 10^{38} = 3{,}6 \times 10 \times 10^{38} = 3{,}6 \times 10^{39}$

Exercice 21

1. On a :
$10^{-2} < 5{,}33 \times 10^{-2} < 10^{-1}$; $10^{-4} < 1{,}7 \times 10^{-4} < 10^{-3}$; $10^3 < 0{,}015 \times 10^5 < 10^4$;

2. La notation scientifique de $0{,}015 \times 10^5$ est : $1{,}5 \times 10^3$

On a : $3 > -2 > -4$ donc $1{,}5 \times 10^3 > 5{,}33 \times 10^{-2} > 1{,}7 \times 10^{-4}$ d'où le rangement suivant :
$0{,}015 \times 10^5$; $5{,}33 \times 10^{-2}$; $1{,}7 \times 10^{-4}$

Exercice 22

$0{,}25 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-3} = 2 \times 10^6$;
$5{,}7 \times 10^{-7} + 1200 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^{11} = 5{,}7 \times 10^{-7} + 6000 \times 10^1 = 0{,}00000057 + 60000$
$5{,}7 \times 10^{-7} + 1200 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^{11} = 60000{,}00000057 = 6{,}0000000057 \times 10^4$

Code :

Thème : CONFIGURATIONS DU PLAN

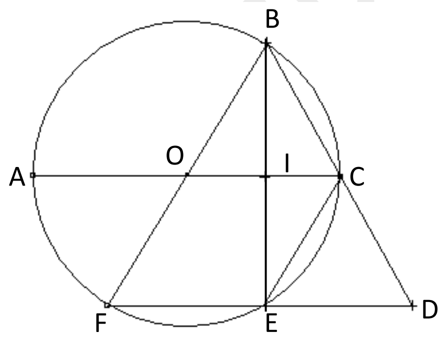
LEÇON 2 : ANGLES

Durée : 8 heures

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

A la recherche d'un logo pour le club mathématique du collège, une élève de la classe de quatrième propose à ses camarades le motif ci-contre.
Elle donne les précisions suivantes :
- Le point O est le centre du cercle ;
- Les droites (AI) et (FD) sont parallèles ;
- Les droites (OF) et (CE) sont parallèles.

Le meilleur élève de la classe affirme que dans cette figure, plusieurs angles ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.
Fouettés dans leur orgueil, les autres élèves s'organisent pour trouver tous les angles de même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.

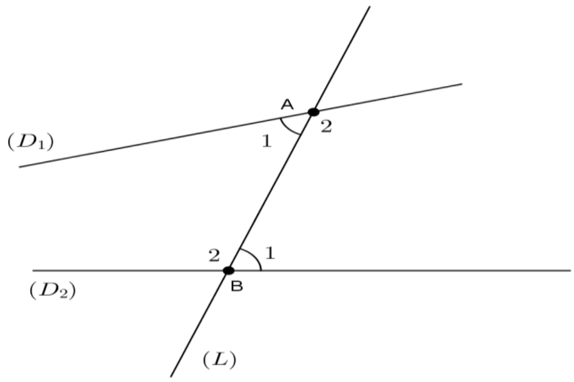


B. CONTENU DE LA LECON

I. ANGLES ALTERNES – INTERNES

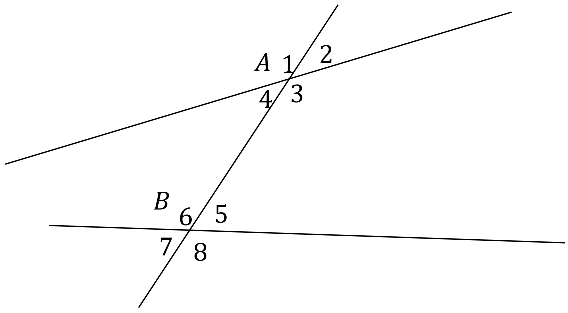
1) Présentation

Sur la figure ci-contre, la droite (L) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en A et en B.
- Les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont des ***angles alternes-internes.***
- Les angles $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_2}$ sont des ***angles alternes-internes***



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, la droite (AB) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en A et en B. Cite deux angles alternes-internes.



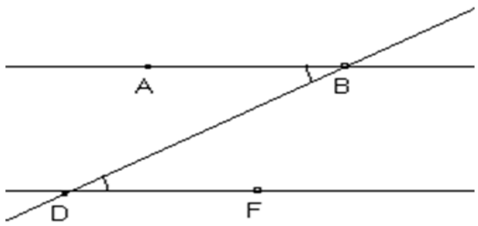
Corrigé

- Les angles $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_5}$ sont alternes-internes.
- Les angles $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_6}$ sont alternes-internes.

2) Propriétés

Propriété 1

Si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



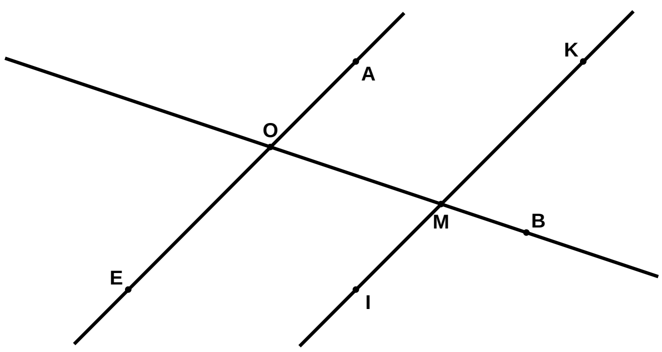
Les droites (AB) et (DF) sont parallèles.
La droite (BD) est sécante à (AB) et à (DF)

Données : $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDF}$ sont deux angles alternes-internes. | (AB) // (DF)

Conclusion : $mes\ \widehat{ABD} = mes\ \widehat{BDF}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (KI) sont parallèles. La droite (OM) est sécante aux droites (AE) et (KI) respectivement en O et M.
1) Justifie que les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ ont la même mesure.
2) Justifie que les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ ont la même mesure.



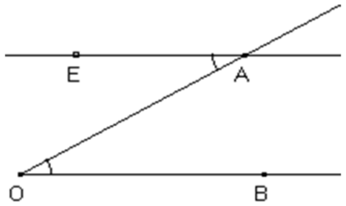
Corrigé

1) Les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ ont la même mesure

2) Les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ ont la même mesure

<u>Propriété 2</u>

Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.



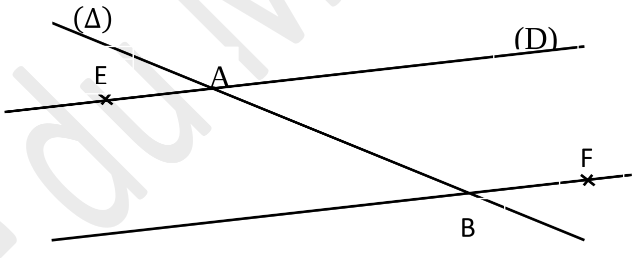
La droite (AO) est sécante à (AE) et à (OB)

<u>Données</u> : $\widehat{EAO}$ et $\widehat{AOB}$ sont deux angles alternes-internes. | mes $\widehat{EAO}$ = mes $\widehat{AOB}$

<u>Conclusion</u>: (EA)//(OB)

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, la droite (Δ) est sécante aux droites (D) et (L) respectivement en A et en B.
De plus les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ ont la même mesure.
Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles.

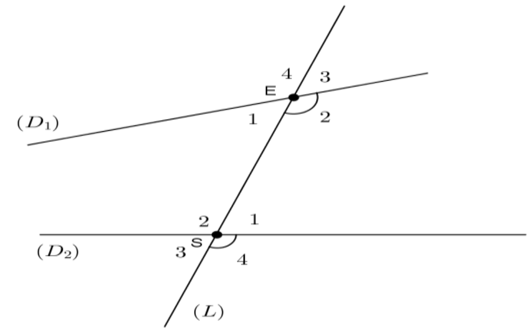


Solution

Les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ sont des angles alternes-internes formés par les droites (D) et (L) et la sécante (Δ).
De plus, les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ ont la même mesure.
Donc, les droites (D) et (L) sont parallèles.

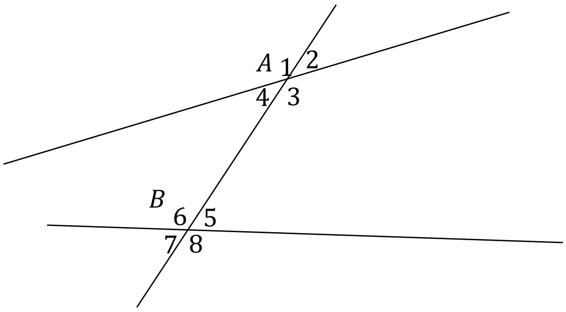
II. ANGLES CORRESPONDANTS

1) Présentation

Sur la figure ci-contre, la droite (L) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en E et en S. - Les angles $\widehat{E_2}$ et $\widehat{S_4}$ sont des angles correspondants. - $\widehat{S_1}$ et $\widehat{E_3}$ sont des angles correspondants ; - $\widehat{S_2}$ et $\widehat{E_4}$ sont des angles correspondants ; - $\widehat{S_3}$ et $\widehat{E_1}$ sont des angles correspondants.	

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, la droite (AB) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en A et en B. Cite tous les angles correspondants.



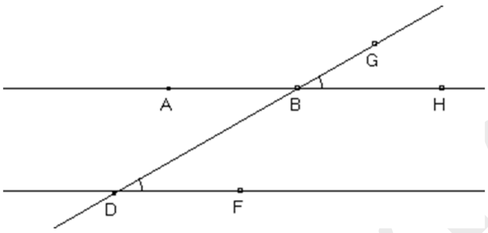
Corrigé

- Les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_6}$ sont deux angles correspondants.
- Les angles $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_7}$ sont deux angles correspondants.

2) <u>Propriétés</u>

<u>Propriété 1</u>

Si deux angles correspondants sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



Les droites (AB) et (DF) sont parallèles.
La droite (BD) est sécante à (AB) et à (DF).

<u>Données</u> : $\boxed{\widehat{\mathrm{BDF}} \text{ et } \widehat{\mathrm{HBG}} \text{ sont deux angles correspondants.}}$ $\boxed{(\mathrm{AB}) \,/\!/\, (\mathrm{DF})}$

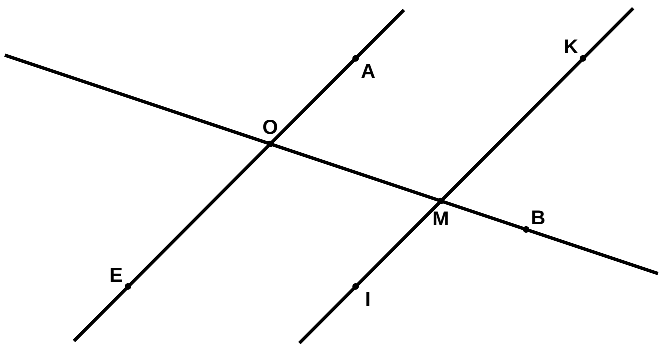
<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{mes } \widehat{\mathrm{BDF}} = \text{mes } \widehat{\mathrm{HBG}}}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (KI) sont parallèles. La droite (OM) est sécante aux droites (AE) et (KI) respectivement en O et en M.

1) Justifie que les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ ont la même mesure.

2) Justifie que les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ ont la même mesure.

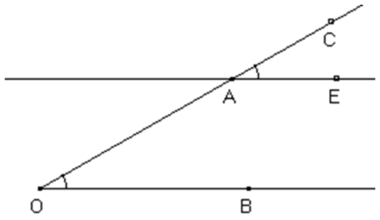


Corrigé

1) Les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et la sécante commune (OM). Donc les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ ont la même mesure.
2) Les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ ont la même mesure.

<u>Propriété 2</u>

Si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants de même mesure, alors elles sont parallèles.



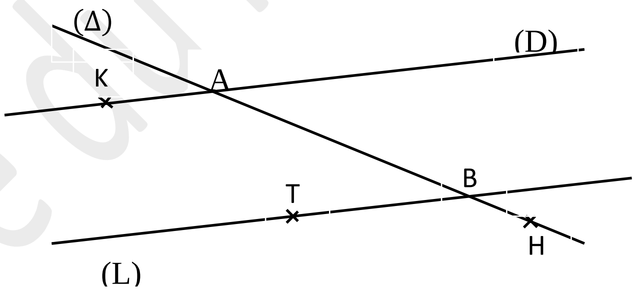
La droite (AO) est sécante à (AE) et à (OB).

<u>Données</u> : $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BOA}$ sont deux angles correspondants. | mes $\widehat{CAE}$ = mes $\widehat{BOA}$

<u>Conclusion</u> : (EA)//(OB)

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, la droite (Δ) est sécante aux droites (D) et (L) respectivement en A et en B.
De plus, les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ ont la même mesure.
Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles.

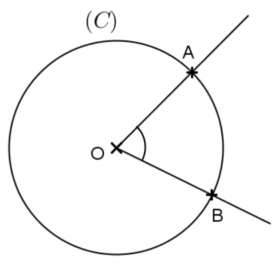


Corrigé

Les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ sont deux angles correspondants formés par les droites (D) et (L) et la sécante (Δ). De plus les deux angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ ont la même mesure.
Donc, les droites (D) et (L) sont parallèles.

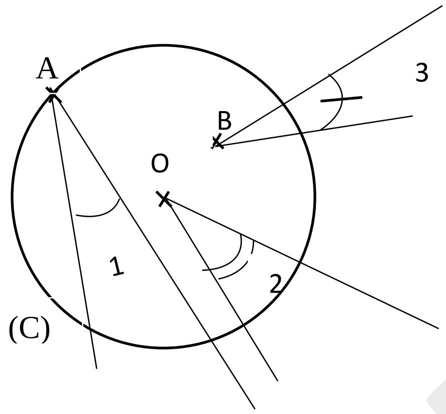
III. ANGLE AU CENTRE

1) Définition

On appelle *angle au centre* d'un cercle, tout angle ayant pour sommet le centre de ce cercle. Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points distincts de (C). $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle (C).	

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
Parmi les angles 1 ; 2 et 3, quel est l'angle au centre. Justifie ta réponse.

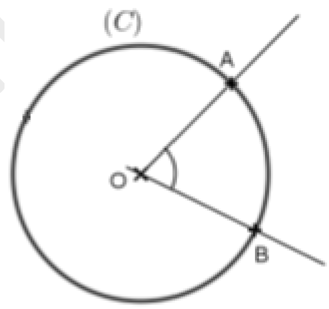


Corrigé

- L'angle 1 n'est pas un angle au centre car son sommet A n'est pas le centre du cercle.
- L'angle 3 n'est pas un angle au centre car son sommet B n'est pas le centre du cercle.
- L'angle 2 est un angle au centre car son sommet O est le centre du cercle.

2) Arc intercepté par un angle au centre

Présentation

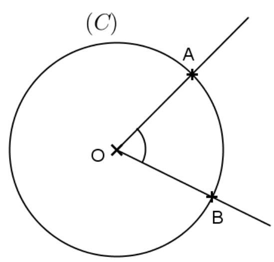
(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C). - Les points A et B déterminent deux parties du cercle appelées ***arcs de cercle***. - Lorsque [AB] n'est pas un diamètre de (C), l'arc le plus court est noté $\boldsymbol{\widehat{AB}}$ et l'arc le plus long est noté $\boldsymbol{\breve{AB}}$. On dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ ou l'arc $\widehat{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.	

3) Longueur d'un arc de cercle

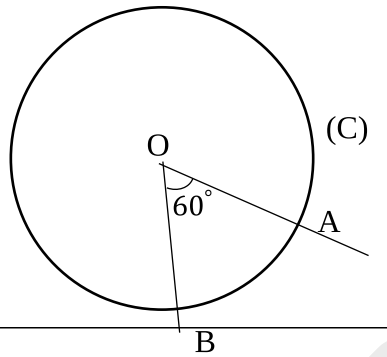
Propriété

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Remarque

Un arc d'un cercle de centre O et de rayon r, intercepté par un angle au centre $\widehat{AOB}$ a pour longueur : $\boldsymbol{\pi r} \times \dfrac{\boldsymbol{mes\ \widehat{AOB}}}{\mathbf{180°}}$. **Longueur** $\boldsymbol{\widehat{AB}} = \times \dfrac{\boldsymbol{mes\ \widehat{AOB}}}{\mathbf{180°}}$.	

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et de rayon 2 cm. A et B sont deux points de (C) tels que $mes\ \widehat{AOB} = 60°$. Calcule la longueur en centimètres de l'arc $\widehat{AB}$. *On prendra* π *= 3,14.*	

Corrigé

Sachant que $mes\widehat{AOB} = 60°$, calculons la longueur en cm de l'arc $\widehat{AB}$.

Longueur $\widehat{AB}$ = $r \times \frac{mes\ \widehat{AOB}}{180°}$.

Longueur $\widehat{AB}$ = $2 \times \pi \times \frac{60}{180}\ cm = 2\pi \times \frac{1}{3}\ cm = \frac{2\pi}{3}\ cm$.

La longueur de l'arc est de $\frac{2\pi}{3}\ cm$, soit environ 2,09 cm.

4) Propriétés

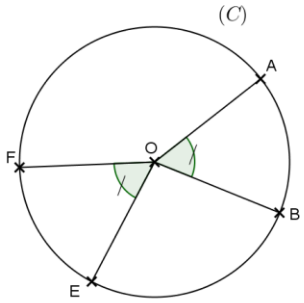
Propriété 1

Dans un cercle , si deux angles au centre ont la même mesure, alors ils interceptent deux arcs de même longueur.

$\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOF}$ sont des angles au centre.

mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{EOF}$

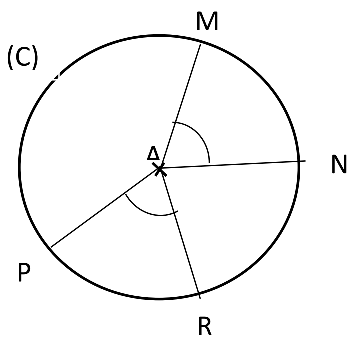
Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{EF}$ sont de même longueur



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre A.
M, N, P et R sont des points de (C) tels que mes $\widehat{MAN}$ = mes $\widehat{PAR}$.

Justifie que les arcs $\widehat{MN}$ et $\widehat{PR}$ ont la même longueur.

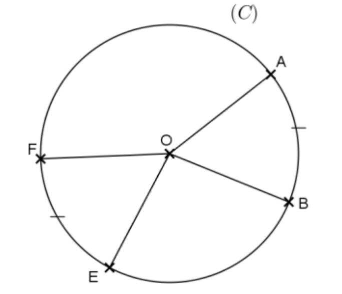


Corrigé

Les angles au centre $\widehat{MAN}$ et $\widehat{PAR}$ ont la même mesure.
Donc, les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{PR}$ ont la même longueur.

Propriété 2

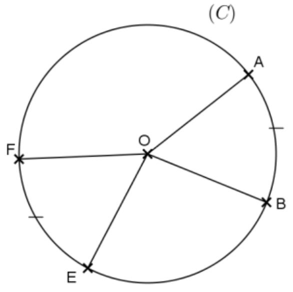
Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur , alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.



$\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOF}$ sont des angles au centre.

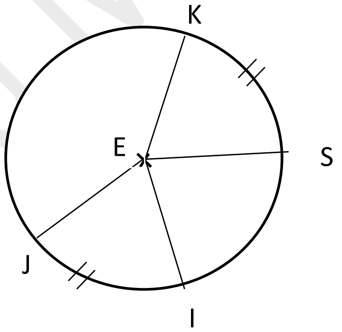
Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{EF}$ sont de même longueur.

$\text{mes}\widehat{AOB} = \text{mes}\widehat{EOF}$



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.
Les arcs $\widehat{JI}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur.
Justifie que les angles au centre $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ ont la même mesure.



Corrigé

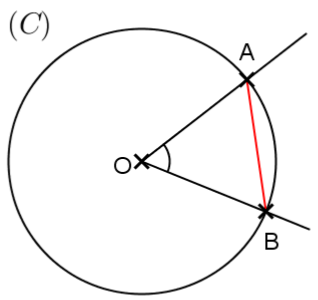
Les angles au centre $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ interceptent respectivement les arcs $\widehat{JI}$ et $\widehat{KS}$.
Les arcs $\widehat{JI}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur. Donc, les angles $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ ont la même mesure.

5) <u>Cordes et arcs de cercle</u>

a) Définition

Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont deux points du cercle.

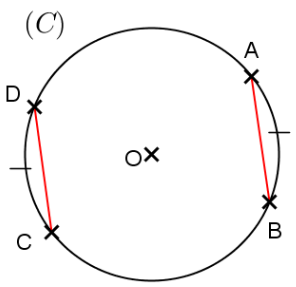
b) Présentation

(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C). Le segment [AB] est une **corde** du cercle (C). La corde [AB] **sous-tend** les deux arcs d'extrémités A et B.	

c) Propriétés

<u>Propriété 1</u>

Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.



[AB] et [CD] sont deux cordes de (C).

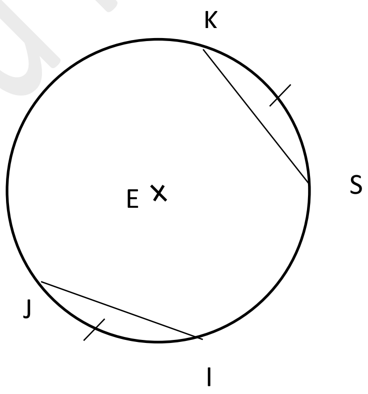
Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ sont de même longueur.

AB = CD

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.
I, J, K et S sont des points de (C) tels que les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur.

Justifie que : KS = IJ.

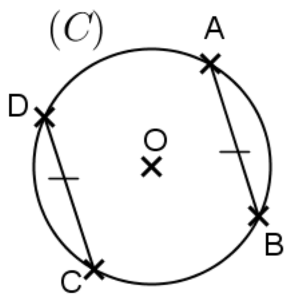


Corrigé

$[IJ]$ et $[KS]$ sont deux cordes de (C) qui sous-tendent les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$.
On sait que les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur ; donc $KS = IJ$.

<u>Propriété 2</u>

Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur.



[AB] et [CD] sont deux cordes de (C).

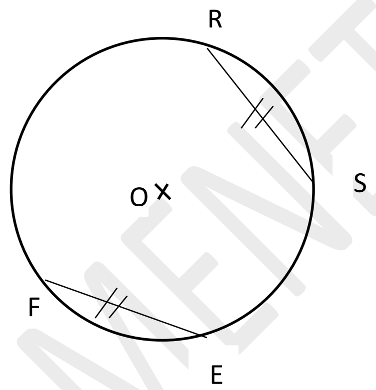
AB = CD

Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ sont de même longueur.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
R, S, F et E sont des points de (C) tels que les cordes [RS] et [EF] ont la même longueur.

Justifie que les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{RS}$ ont la même longueur.

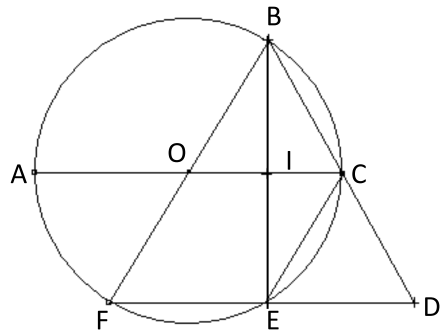


Corrigé

Les segments $[EF]$ et $[RS]$ sont des cordes du cercle (C) qui ont la même longueur, donc les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{RS}$ qu'ils sous-tendent ont la même longueur.

C- SITUATION D'EVALUATION

A la recherche d'un logo pour le club mathématique du collège, une élève de la classe de quatrième propose à ses camarades le motif ci-contre.
Elle donne les précisions suivantes :
. Le point O est le centre du cercle ;
. Les droites (AI) et (FD) sont parallèles ;
. Les droites (OF) et (CE) sont parallèles.
Le meilleur élève de la classe affirme que dans cette figure, plusieurs angles ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.



Les autres élèves se mettent au travail pour vérifier cette affirmation.

En utilisant les outils mathématiques au programme, détermine les angles qui ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.

Corrigé

Les angles qui ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$ sont :

- $\widehat{BOC}$, car opposé à $\widehat{AOF}$ par le sommet O ;
- $\widehat{EFO}$, car $\widehat{BOC}$ et $\widehat{EFO}$ sont des correspondants formés par les parallèles (AC) et (FD), et la sécante commune (BF) ;

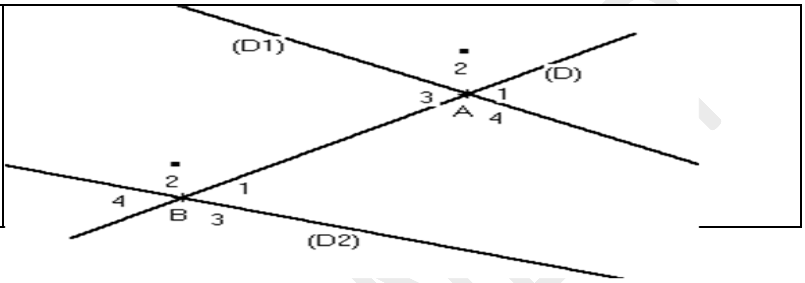
- $\widehat{ACE}$, car $\widehat{ACE}$ et $\widehat{AOF}$ sont deux angles correspondants formés par les parallèles (BF) et (CE), et la sécante commune (AC).
- $\widehat{BFE}$, car $\widehat{BFE}$ et $\widehat{AOF}$ sont deux angles alternes-internes formés par les parallèles (AI) et (FD), et la sécante commune (BF).

D- EXERCICES

D-1 Exercices de fixation

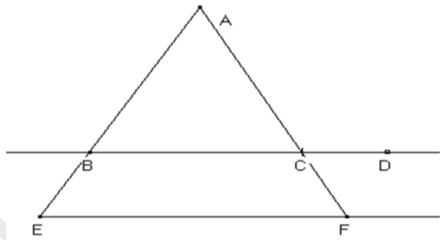
Exercice 1

Observe la figure ci-contre :
1) Cite des angles alternes-internes
2) Cite des angles correspondants



Exercice 2

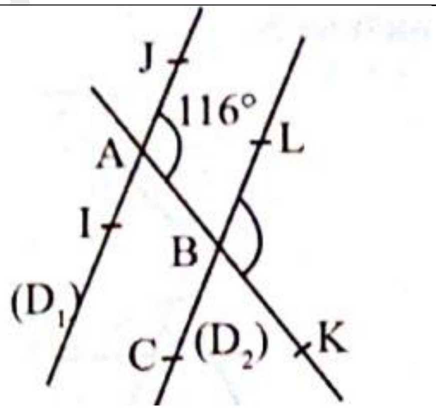
Sur la figure ci-contre, (BC)//(EF)
Cite des angles qui ont la même mesure en justifiant ta réponse.



Exercice 3

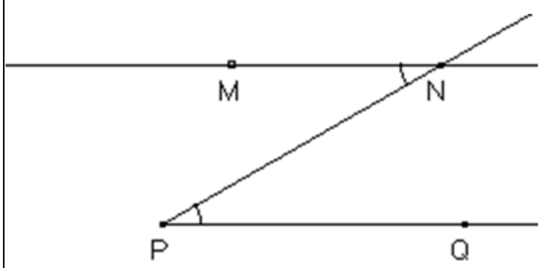
On considère la figure codée ci-contre où les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{KBL}$.



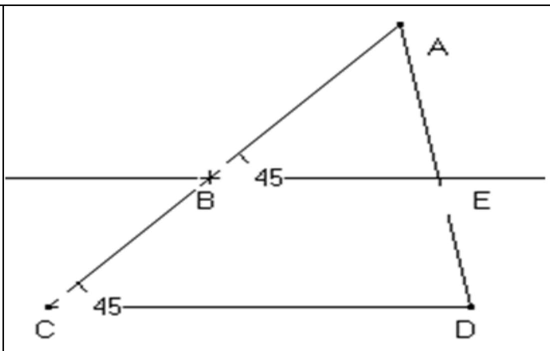
Exercice 4

Sur la figure ci-dessous, les angles $\widehat{\text{MNP}}$ et $\widehat{\text{NPQ}}$ ont la même mesure.
Justifie que (MN)//(PQ)



Exercice 5

Observe la figure ci-contre.
Justifie que les droites (BE)
Et (CD) sont parallèles.



Exercice 6

Dans chacune des figures ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.
Nomme les angles au centre du cercle (C).

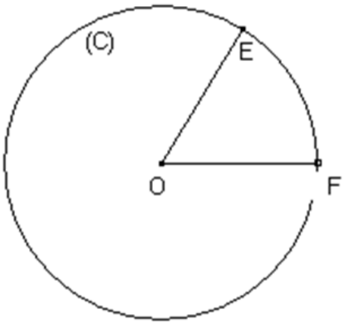


figure 1

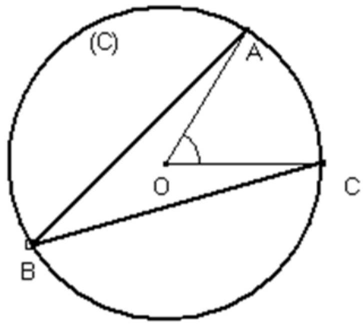


figure 2

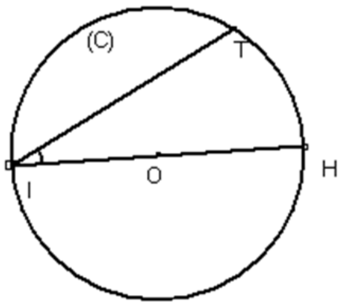


figure 3

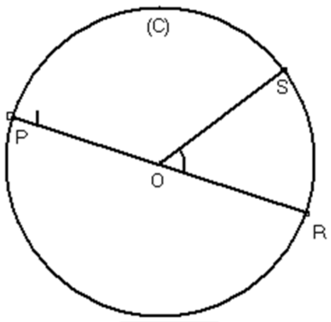


figure 4

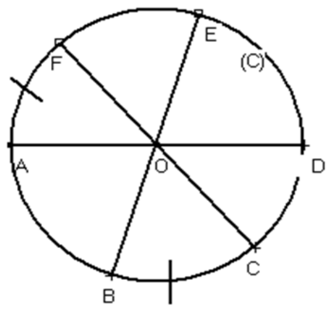
Exercice 7

(C) est un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Calcule la longueur en cm de chacun des arcs interceptés respectivement par un angle au centre de 30° et 135°.

Exercice 8

(C) est un cercle de centre O.
Observe attentivement la figure codée ci-contre.

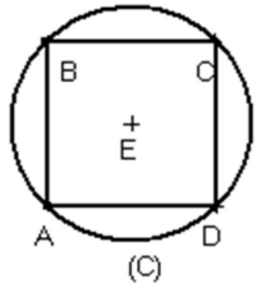
1) Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{ED}$ ont la même longueur.
2) Justifie que les angles au centre $\widehat{FOA}$ et $\widehat{BOC}$ ont la même mesure.



D-2 Exercices de renforcement

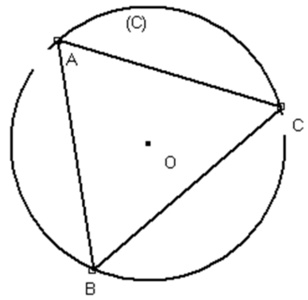
Exercice 9

(C) est un cercle de centre E et de rayon 1 cm.
ABCD est un carré inscrit dans ce cercle.
Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{DA}$ ont la même longueur.



Exercice 10

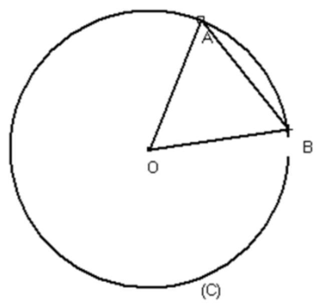
(C) est un cercle de centre O.
A, B et C sont trois points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{AC}$ ont la même longueur.
Justifie que le triangle ABC est équilatéral.



Exercice 11

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, (C) est un cercle de centre O.
A et B sont deux points de (C) tels que AOB est un triangle équilatéral de coté 2,1 cm.

1) Calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2) Déduis-en la longueur de l'arc $\overset{\smile}{AB}$.



Exercice 12

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [BC].
A est un point de (C) et R est le milieu du segment [AC].
La droite (RO) coupe le cercle en deux points E et F tel que F appartient à l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point A.

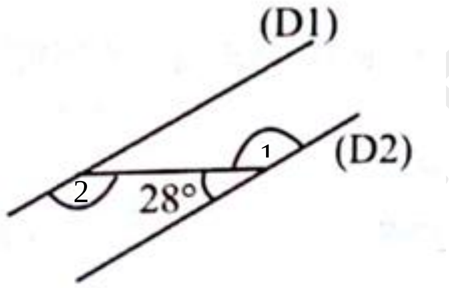
a) Réalise une figure
b) Démontre que les angles $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{BOF}$ ont la même mesure
c) Démontre que les segments [BF] et [EC] ont la même longueur.

D-3 Exercices d'approfondissement

Exercice 13

On considère la figure codée ci-contre.
Les droites (D_1) *et* (D_2) sont parallèles.

Détermine les mesures des angles 1 et 2.



Corrigé

Les angles 1 et 2 sont alternes – internes formés par les droites parallèles (D1) et (D2), et la sécante commune. Ils ont donc la même mesure.
Or la mesure de 1 est 180 – 28=152°.
Donc la mesure de 2 est 152°.

Exercice 14

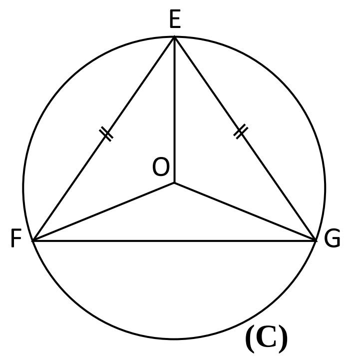
La figure ci-contre représente le logo d'une société. Sur cette figure, EFG est un triangle isocèle en E inscrit dans le cercle **(C)** de centre O et de rayon 4 cm.

1/ Justifie que les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$ ont la même longueur.

2/ Compare les angles au centre $\widehat{EOF}$ et $\widehat{EOG}$ qui interceptent respectivement les arcs $\widehat{EF}$et $\widehat{EG}$. Justifie ta réponse.

3/ Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{EOF}$ sachant que la somme des mesures des trois angles au centre de **(C)** vaut 360° et la mesure de $\widehat{FOG}$ vaut 140°.

4/ Calcule la longueur de l'arc $\widehat{FG}$. Tu donneras le résultat avec deux chiffres après la virgule.
Prends π= 3,14.



Corrigé

1) Les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$ sont sous tendus par les cordes de même longueur [EF] et [EG], ils ont donc la même longueur.
2) Les deux angles interceptent deux arcs de même longueur ($\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$), ils ont donc la même mesure.
3) On a : $mes\widehat{FOG} + mes\widehat{FOE} + mes\widehat{EOG} = 360°$;
or $mes\widehat{FOE}$= $mes\widehat{EOG}$ et $mes\widehat{FOG}$=140° ;
donc : 2 $mes\widehat{FOE}$=360-140, c'est-à-dire que $mes\widehat{FOE}$= 110°.
4) La longueur de l'arc $\widehat{EF}$ est :$\pi \times 4 \times \frac{110}{180} \approx 7{,}65\ cm.$

Code :
Thème : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON 3 : NOMBRES RATIONNELS

Durée : 12 heures

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le collège moderne d'une localité de la Côte d'Ivoire a un effectif de 400 élèves dont 120 filles. Après une conférence sur l'environnement, les élèves veulent se constituer en équipes pour assurer la propreté de l'établissement. Ils souhaitent que les équipes comportent un maximum de filles et de garçons. Afin d'établir un programme cohérent de travail, les élèves de la quatrième décident de déterminer le plus grand nombre d'équipes possibles.

B. RÉSUMÉ DE COURS

I. PPCM et PGCD de deux nombres entiers naturels

1) PPCM d'un nombre entier naturel

a- <u>Définition</u>

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Le plus petit de tous les nombres entiers naturels non nuls qui sont à la fois multiples de a et multiples de b est appelé le Plus Petit Commun Multiple non nul de a et b et est noté PPCM $(a; b)$.

<u>Exemple</u> :
Cherchons le PPCM de 10 et 15.

Les premiers multiples de 10 sont : 0 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; …
Les premiers multiples de 15 sont : 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; …
Les premiers multiples communs de 10 et 15 sont : 0 ; 30 ; 60 ; …
Le Plus Petit Commun Multiple non nul de 10 et 15 est 30.
Donc PPCM (10 ; 15) = 30.

b- <u>Méthode</u>

Pour obtenir le PPCM de deux nombres entiers naturels non nuls, on peut procéder comme suit :

- Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers ;

- Le PPCM des deux nombres est le produit de tous les facteurs apparus dans les deux décompositions, chaque facteur étant pris une seule fois et affecté de son plus grand exposant.

Exemple :
Cherchons le PPCM de 360 et 700

On décompose 360 puis 700 en produit de facteurs premiers. On a :
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$
Les facteurs apparus dans les deux décompositions sont : 2 ; 3 ; 5 et 7
Le plus grand exposant pour le facteur 2 est 3 ; celui de 3 est 2 celui de 5 est 2 et celui de 7 est 1
Donc $\text{PPCM}(360; 700) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12\,600$.

Exercice de fixation

Détermine le PPCM de :

a) 2×3^2 et $2^3 \times 3 \times 5$; b) 18 et 30 ; c) 90 et 60

Corrigé

a) PPCM(2×3^2 ; $2^3 \times 3 \times 5$)= $2^3 \times 3^2 \times 5 = 180$
b) On a : $18 = 2 \times 3^2$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$, donc $PPCM(18\,; 30) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$
c) On a : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $PPCM(90\,; 60) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

2) PGCD de deux nombres entiers naturels

a- Définition

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Le plus grand de tous les nombres entiers naturels qui sont à la fois diviseurs de a et diviseurs de b est appelé le Plus Grand Commun Diviseur de a et b et est noté PGCD $(a; b)$.

Exemple :
Déterminons le PGCD de 18 et 12.

Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Les diviseurs communs de 18 et 12 sont : 1 ; 2 ; 3 et 6.
Le Plus Grand Diviseur Commun d'entre eux est 6 donc le PGCD de 18 et 12 est 6.
PGCD (18 ; 12) = 6.

b- Méthode

Pour obtenir le PGCD de deux nombres entiers naturels non nuls, on peut procéder comme suit :

- Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers ;

- Le PGCD des deux nombres est le produit des facteurs communs aux deux décompositions, chaque facteur étant pris une seule fois et affecté de son plus petit exposant.

Exemple :
Cherchons le PGCD de 360 et 700.

On décompose 360 puis 700 en produit de facteurs premiers.
On a : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$
Les facteurs communs aux deux décompositions sont : 2 et 5.
Le plus petit exposant pour le facteur 2 est 2 ; celui de 5 est 1.
Donc $\text{PGCD}(360; 700) = 2^2 \times 5 = 20$.

Exercice de fixation

Détermine le PGCD de :

$a)$ $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ et $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$; b) 36 et 45 ; c) 90 et 60

Corrigé

a) PGCD($2^2 \times 3^3 \times 5^2$; $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$)= $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
b) On a : $36 = 2^2 \times 3^2$ et $45 = 3^2 \times 5$, donc $PGCD(36\,; 45) = 3^2 = 9$.
c) On a : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $PGCD(90\,; 60) = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

II. Nombres rationnels

1) Définition :

Un nombre rationnel est un nombre égal à une fraction ou à l'opposé d'une fraction

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple :

0 ; 2 ; -3 ; 4,75 ; - 0,023 ; $\frac{7}{2}$ et $-\frac{9}{5}$ sont des nombres rationnels.

2) Ecriture des nombres rationnels

Propriétés

- Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs et $b \neq 0$.
- Pour deux entiers naturels a et b avec $b \neq 0$ on a : $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Exemples :

$\frac{-9}{5} = \frac{9}{-5} = -\frac{9}{5}$ et $\frac{-7}{-2} = \frac{7}{-(-2)} = \frac{7}{2}$

Remarque
Tout nombre décimal est un nombre rationnel.

3) Opérations sur les nombres rationnels

a- Produit de deux nombres rationnels

Propriété :

a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Exemples

- $\frac{-9}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{-9\times4}{5\times7} = \frac{-36}{35} = -\frac{36}{35}$.
- $\frac{-9}{5} \times \frac{7}{-2} = \frac{-9\times7}{5\times(-2)} = \frac{-63}{-10} = \frac{-(-63)}{10} = \frac{63}{10}$.
- $3 \times \frac{8}{11} = \frac{3\times8}{11} = \frac{24}{11}$.

Exercice de fixation

Calcule les produits suivants :

a) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$. b) $\frac{-4}{3} \times \frac{7}{-5}$; c) $\frac{-21}{-5} \times \frac{-4}{11}$; d) $-7 \times \frac{-8}{9}$.

Corrigé

a) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3\times2}{5\times7} = \frac{6}{35}$; b) $\frac{-4}{3} \times \frac{7}{-5} = \frac{-4\times7}{3\times(-5)} = \frac{-28}{-15} = \frac{-(-28)}{15} = \frac{28}{15}$;

b) $\frac{-21}{-5} \times \frac{-4}{11} = \frac{-21\times(-4)}{-5\times11} = \frac{84}{-55} = \frac{-84}{55}$; d) $-7 \times \frac{-8}{9} = \frac{-7\times(-8)}{9} = \frac{56}{9}$.

b- Inverse d'un nombre rationnel

Définition :

a et b sont deux entiers relatifs non nuls.

L'inverse du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est le nombre rationnel $\frac{b}{a}$.

Exemples :

L'inverse de $\frac{9}{5}$ est $\frac{5}{9}$ (on remarque que : $\frac{9}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{45}{45} = 1$).

L'inverse de $-\frac{7}{13}$ est $-\frac{13}{7}$.

Remarque
Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Exercice de fixation

Détermine l'inverse de chacun des nombres rationnels suivants :

1) $\frac{11}{29}$; 2) $\frac{-8}{9}$; 3) $\frac{8}{-7}$.

Corrigé

1) L'inverse du nombre rationnel $\frac{11}{29}$ est le nombre rationnel $\frac{29}{11}$.
2) L'inverse du nombre rationnel $\frac{-8}{9}$ est le nombre rationnel $\frac{-9}{8}$.
3) L'inverse du nombre rationnel $\frac{8}{-7}$ est le nombre rationnel $\frac{-7}{8}$.

c- Quotient de deux nombres rationnels

<u>Définition</u> :

$a, b, c\ et\ d$ sont des nombres entiers relatifs tels que $b, c\ et\ d$ sont non nuls.

On appelle quotient du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ par le nombre rationnel $\frac{c}{d}$, le nombre rationnel $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Ainsi, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

<u>Exemples</u>

- $\frac{\frac{-9}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{-9}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{-9\times7}{5\times4} = \frac{-63}{20} = -\frac{63}{20}$.
- $\frac{\frac{-9}{5}}{-7} == \frac{-9}{5} \times \frac{1}{-7} = \frac{-9\times1}{5\times(-7)} = \frac{-9}{-35} = \frac{9}{35}$.
- $\frac{7}{\frac{3}{4}} = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{7\times4}{3} = \frac{28}{3}$.

Exercice de fixation

Détermine les quotients suivants :

a) $\frac{\frac{3}{11}}{\frac{41}{8}}$; b) $\frac{\frac{5}{7}}{13}$; c) $\frac{17}{\frac{13}{4}}$

Corrigé

a) $\frac{\frac{3}{11}}{\frac{41}{8}} = \frac{3}{11} \times \frac{8}{41} = \frac{3\times8}{11\times41} = \frac{24}{451}$ b) $\frac{\frac{5}{7}}{13} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{13} = \frac{5\times1}{7\times13} = \frac{5}{91}$ c) $\frac{17}{\frac{13}{4}} = 7 \times \frac{4}{13} = \frac{7\times4}{13} = \frac{28}{13}$.

4) Approximation décimale – Arrondi – Troncature

a) Approximations décimales d'un nombre rationnel

Présentation :

On considère l'encadrement $1{,}85 < \frac{13}{7} < 1{,}86$.

On a : 1,86 – 1,85 = 0,01 = 10^{-2} . On dit que :

- ✓ 1,85 est l'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $\frac{13}{7}$.
- ✓ 1,86 est l'approximation décimale par excès d'ordre 2 de $\frac{13}{7}$.

Exemple

Déterminons les approximations décimales par excès et par défaut d'ordre 3 de $\frac{18}{7}$.

On a : $\frac{18}{7} = 2{,}5714285$.

L'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\frac{18}{7}$ est 2,571.

L'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\frac{18}{7}$ est 2,572.

Exercice de fixation

Complète le tableau ci-dessous.

	26,457131	31,354942
Approximation décimale d'ordre 2 par excès		
Approximation décimale d'ordre 2 par défaut		
Approximation décimale d'ordre 3 par excès		
Approximation décimale d'ordre 3 par défaut		

Corrigé

	26,457131	31,354942
Approximation décimale d'ordre 2 par excès	26,46	31,36
Approximation décimale d'ordre 2 par défaut	26,45	31,35
Approximation décimale d'ordre 3 par excès	26,458	31,355
Approximation décimale d'ordre 3 par défaut	26,457	31,354

b) Arrondi d'ordre *n* d'un nombre rationnel

Méthode :

a et b sont deux entiers relatifs et $b \neq 0$.

Pour trouver l'arrondi d'ordre n du nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

- On calcule d'abord le quotient q de la division de $a\ par\ b\ avec\ n+1$ chiffres après la virgule.
- Si le $(n+1)^{ième}$chiffre après la virgule est 0, 1, 2, 3 ou 4, l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale par défaut.
- Si le $(n+1)^{ième}$chiffre après la virgule est 5, 6, 7, 8 ou 9, l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale par excès.

<u>Exemple</u>

Déterminons l'arrondi d'ordre 5 de $\frac{18}{7}$.

On a : $\frac{18}{7} = 2{,}5714285$.

L'arrondi d'ordre 5 de $\frac{18}{7}$ est $2{,}57143$ car le 6ème chiffre après la virgule est 8.

Exercice de fixation

Complète le tableau ci-dessous.

	26,453731	$\frac{15}{13}$
Arrondi d'ordre 2		
Arrondi d'ordre 3		

Corrigé

	26,453731	$\frac{15}{13}$
Arrondi d'ordre 2	26,45	1,15
Arrondi d'ordre 3	26,46	1,154

c) Troncature d'un nombre rationnel

<u>Définition :</u>

On appelle troncature à un n décimales d'un nombre rationnel x le nombre décimal d'ordre n obtenu en ne conservant que les n premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de x.

<u>Exemple</u>

Déterminons la troncature à 5 décimales de $\frac{18}{7}$.

On a : $\frac{18}{7} \approx 2{,}5714285$.

La troncature à 5 décimales de $\frac{18}{7}$ est $2{,}57142$.

Exercice de fixation

Détermine la troncature à 3 décimales de $\frac{23}{13}$.

Corrigé

On a : $\frac{23}{13} \approx 1{,}7692307$. La troncature à 3 décimales de $\frac{23}{13}$ est 1,769.

C. SITUATION D'EVALUATION

Un élève en classe de 4$^{\text{ème}}$ raconte à ses amis de classe qu'il a suivi un reportage sur une course de voitures. Le commentateur a dit que : « La finale a opposé deux voitures (bleue et jaune). Elles sont parties en même temps de la ligne de départ et ont fait plusieurs tours d'un même circuit. La voiture bleue fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture jaune en 30 minutes. »
Le chef de classe affirme que dans ces conditions, il y a des moments (autres que le départ) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ après un certain nombre de tours chacune.
Le sous-chef ne partage cet avis.

1) Détermine le PPCM de 36 et 30.
2) Départage-les.

Corrigé

1) Déterminons $\text{PPCM}(36\,;\,30)$.
   On a : $36 = 2^2 \times 3^2$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$.
   D'où $\text{PPCM}(36\,;\,30) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.
2) On remarque que :
   $180 = 36$ x 5 et $180 = 30$ x 6. Ainsi donc, au bout de 180 minutes la voiture bleue, après 5 tours, retrouve sur la ligne d'arrivée la voiture jaune qui, elle a fait 6 tours pour la première fois. Le chef de classe a donc raison.

D. EXERCICES

D-1. Exercices de fixation

Exercice 1

Détermine le PPCM de 28 et 40.

Exercice 2

Détermine le $PPCM(a; b)$ dans chacun des cas suivants et donne le résultat sous forme de produit de facteurs premiers.
Cas1 : $a = 2 \times 3^3$ et $b = 2^2 \times 7^2 \times 5$.
Cas 2 : $a = 126$ et $b = 231$.
Cas 3 : $a = 3^2 \times 7$ et $b = 45$.

Exercice 3
Détermine le PGCD de 126 et 132 .

Exercice 4
Détermine le $PGCD(a; b)$ dans chacun des cas suivants et donne le résultat sous forme de produit de facteurs premiers.
Cas1 : $a = 2^5 \times 3^2 \;\; et\; b = 2^3 \times 3 \times 5^2$
Cas 2 : $a = 1500 \;\; et\; b = 90$
Cas 3 : $a = 2^4 \times 5^3 \quad et \;\; b = 147$

Exercice 5
On donne les fractions suivantes $\frac{8}{27}$ et $\frac{11}{24}$.

1) Calcule le PPCM de 27 et 24.
2) Détermine le plus petit dénominateur commun de deux fractions.
3) Détermine les fractions obtenues avec ce dénominateur.

Exercice 6

1) Calcule le PGCD de 147 et 234.
2) Simplifie la fraction $\frac{147}{234}$ en utilisant PGCD$(147\;;\;234)$.

Exercice 7
Justifie que les nombres suivants sont des nombres rationnels.
$0{,}75\;;\;1{,}8\;;\;13\;;\;0{,}01\;;\;-0{,}8\;;\;-3$ et $-5{,}25$

Exercice 8
Recopie et complète par $\in$ ou $\notin$.
$-17{,}2 \ldots\ldots \mathbb{N}$; $-17{,}2 \ldots\ldots \mathbb{Z}$; $-17{,}2 \ldots\ldots \mathbb{D}$; $-17{,}2 \ldots\ldots \mathbb{Q}$

$-\frac{4}{5} \ldots\ldots \mathbb{N}$; $-\frac{4}{5} \ldots\ldots \mathbb{Z}$; $-\frac{4}{5} \ldots\ldots \mathbb{D}$; $-\frac{4}{5} \ldots\ldots \mathbb{Q}$.
$\frac{7}{3} \ldots\ldots \mathbb{D}$; $\frac{-7}{10} \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $\frac{7}{-10} \ldots\ldots \mathbb{D}$

Exercice 9
Donne l'inverse de chacun des nombres rationnels suivants :
$\frac{3}{5}; \frac{-5}{4}; 0{,}7; \frac{1}{5}\;; -2 \;et\; -1$.

Exercice 10
Calcule les produits suivants et donne chaque résultat sous forme de fraction (ou d'opposé de fraction) irréductible :

$x = \frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$; $y = -\frac{2}{7} \times \frac{21}{8}$; $z = \frac{6}{25} \times \left(\frac{-15}{4}\right)$; $t = \left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right)$ $u = -2 \times \left(-\frac{7}{12}\right)$.

Exercice 11

Calcule les quotients suivants. Donne chaque résultat sous forme de fraction (ou d'opposé de fraction) irréductible :

$\mathrm{A} = \frac{\frac{-5}{7}}{\frac{4}{9}}$; $\mathrm{B} = \frac{3}{\frac{4}{5}}$; $\mathrm{C} = \frac{8}{5} \div \frac{-3}{7}$; $\mathrm{D} = \frac{\frac{2}{3}}{5}$.

Exercice 12

Donne les arrondis de $\frac{22}{7}$.

1) d'ordre 2.
2) d'ordre 4.

Exercice 13

On donne : $\frac{11}{23} \simeq 0{,}47826086$.

1) Donne un encadrement de $\frac{11}{23}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 4.
2) Donne un encadrement de $\frac{11}{23}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 6.

Exercice 14

Donne la troncature à deux puis à quatre décimales du nombre de $\frac{22}{7}$.

D-2. Exercices de renforcement

Exercice 15

Calcule les nombres ci-dessous et donne chaque résultat sous forme de fraction (ou d'opposé de fraction) irréductible :

$a = -\frac{147}{149} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{147}{149}\right) - \left(\frac{4}{9} + 3 - \frac{5}{2}\right)$; $b = \frac{77}{65} \times \frac{13}{11} \times \frac{10}{14}$; $c = -3 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$;

$d = \frac{8}{3} \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{4}{9} + 3 - \frac{5}{2}\right)$; $e = \frac{7}{23} \times \left[\left(-\frac{8}{6}\right) - \frac{45}{18}\right]$; $f = \left(-6 + \frac{5}{-12}\right) \times (-3)$;

$g = \left(\frac{11}{12} \div \frac{33}{16}\right) \times \frac{3}{5}$; $h = \left(\frac{5}{12} \times \frac{21}{15}\right) \div \frac{1}{4}$; $i = \left(\frac{2}{7} \div \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{5}{8} \div 2\right)$;

$j = \left(\frac{11}{15} \times \frac{35}{44}\right) \div \left(\frac{1}{7} \times \frac{4}{13}\right)$.

Exercice 16

1) Calcule $PPCM(18\,;\,32)$ et $PGCD(18\,;\,32)$.
2) Compare 18×32 et $PPCM(18\,;\,32) \times PGCD\,(18\,;\,32)$.
3) On suppose que pour deux nombres entiers naturels non nuls a et b donnés, on a :
   $a \times b = PPCM(a; b) \times PGCD(a; b)$.
   Soit x un nombre entier naturel tel que $PPCM(40; x) = 840$ et $PGCD(40; x) = 5$.

Détermine le nombre x.

D-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 17

Un fleuriste a vendu $\frac{3}{5}$ des ses bouquets de fleurs le matin. L'après-midi il vend les $\frac{3}{10}$ du reste ;

1) Calcule la fraction de bouquets de fleurs qui lui reste en fin de journée.
2) En fin de journée il lui reste 7 bouquets de fleurs.
   Calcule le nombre de bouquets qu'il avait au début de la journée.

Corrigé

1) Déterminons la fraction de bouquets de fleurs qui lui reste en fin de journée

Désignons par x le nombre de bouquets de fleurs que le fleuriste avait en début de journée. Comme il a vendu les $\frac{3}{5}$ le matin, alors il lui reste $x - \frac{3}{5}x = \frac{5}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$. La fraction de bouquets d fleurs qui lui reste en fin de journée est donc $\frac{2}{5}$.

2) Déterminons le nombre de bouquets de fleurs que le fleuriste avait en début de journée.
   - L'après-midi, il a vendu $\frac{3}{10} \times \left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{3}{25}x$
   - Le nombre de bouquets de fleurs vendus ce jour-là est $\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}x = \frac{18}{25}x$.
   - En fin de journée, il lui reste $x - \frac{18}{25}x = \frac{7}{25}x$. D'où $\frac{7}{25}x = 7$. Ainsi le fleuriste avait 25 bouquets de fleurs en début de journée.

Exercice 18

Le réservoir d'une voiture a une capacité de 48 $litres$.

On sait qu'il est vide au $\frac{2}{3}$

1) Calcule la quantité de carburant qui reste dans le réservoir
2) On ajoute 20 $litres$ à la quantité de carburant restant.
   Calcule la fraction qui représente alors la quantité de carburant par rapport à la capacité du réservoir

Exercice 19

Après le décès de leur père, Deka, Ladon et Baga partagent entre eux les 75 bœufs que leur a légués leur père.

Deka reçoit les $\frac{7}{15}$ des bœufs, Ladon reçoit les $\frac{4}{5}$ de la part de Déka et Baga reçoit le reste.

Calcule la part de chaque enfant.

Corrigé

La part de Déka est : $\frac{7}{15} \times 75 = 35$ bœufs.

La part de Ladon est : $\frac{4}{5} \times 35 = 28$ bœufs.

La part de Baga est : $75 - (35 + 28) = 12$ bœufs.

Exercice 20

Le père d'une élève en classe de 4ème veut recouvrir une surface rectangulaire, dans leur salon, de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Il demande à sa fille la taille maximale des dalles à utiliser ainsi que le nombre de dalles nécessaires. Ne parvenant pas à donner une réponse à son père, elle en parle à ses amis de classe.

1) Détermine le PGCD de 475 et 361.
2) Réponds aux préoccupations de ce père.

Exercice 21

Lors d'une élection, trois candidats étaient en compétition.

Le nombre d'électeurs était de 6155.

Il y a 20 % de non-votants lors du scrutin et le dépouillement des votes a donné les résultats suivants :

- Le candidat Kpandji a eu 42 % des suffrages exprimés.
- Le candidat Yasua a eu 23 % des suffrages exprimés.
- Le candidat Srandan a eu le reste des suffrages exprimés.
- Il y a eu 124 bulletins nuls.

Le fils de Srandan qui est en quatrième veut connaitre le nombre exact de voix obtenues par son père.

Aide le en répondant aux questions suivantes :

1) Calcule le nombre d'électeurs qui ont voté.
2) Calcule le nombre de suffrages exprimés (ce sont tous les votes à l'exception des bulletins nuls).
3) Calcule le nombre de voix obtenues par Srandan.

Code :

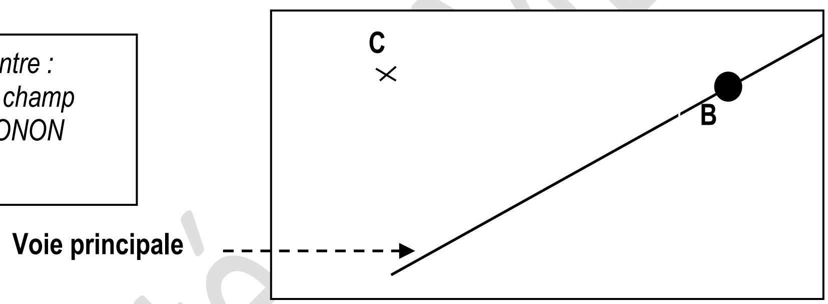
Thème : **GEOMETRIE** DU PLAN

LEÇON 4 : DISTANCES **Durée : 6 heures**

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un riche planteur de la région de BONON cherche à faire tracer la voie la plus courte joignant son champ à la voie principale bitumée et rectiligne à cet endroit. Cette voie devrait lui permettre d'écouler à moindre coût les produits venant de son champ. Disposant d'une carte de la région, il fait appel à son fils élève de quatrième au Collège Moderne de BONON pour réaliser ce tracé. Son fils sollicite ses camarades de classe pour l'aider.
Les élèves réalisent le tracé en utilisant la figure ci-dessous.

Sur la figure ci-contre :
C représente le champ
B représente BONON

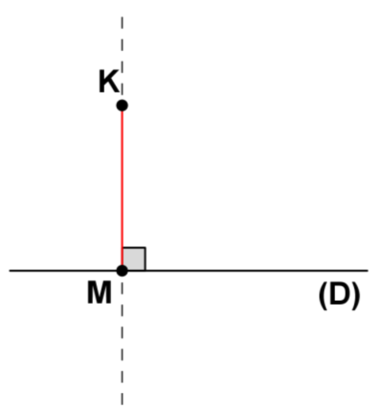


B - CONTENU DE LA LEÇON

I- Distance d'un point à une droite

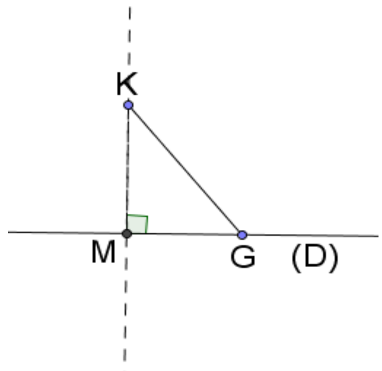
1. Définition

(D) est une droite et K est un point qui n'appartient pas à la droite (D). M est le point d'intersection de (D) et de la perpendiculaire à la droite (D) passant par K. KM est appelée distance du point K à la droite (D).



Remarques:

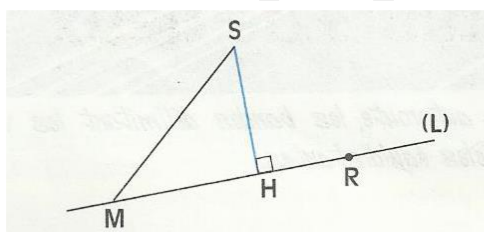
- KM étant la distance du point K à la droite (D), pour tout point G de la droite (D) non confondu à M, on a : KM < KG.



- G ∈ (D) donc la distance du point G à la droite (D) est nulle.

Exemple :

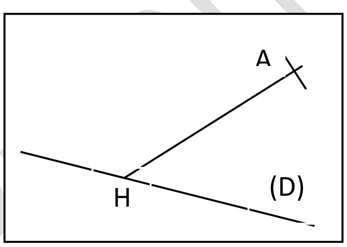
Sur la figure ci-dessous, la droite (SH) est perpendiculaire à la droite (L) au point H, donc SH est la distance du point S à la droite (L).



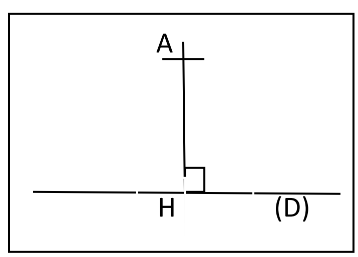
Exercice de fixation

Parmi les figure ci-dessous identifie celles sur lesquelles AH est la distance du point A à la droite (D).

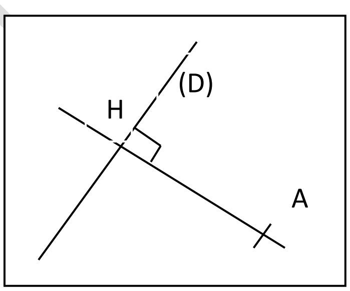
1



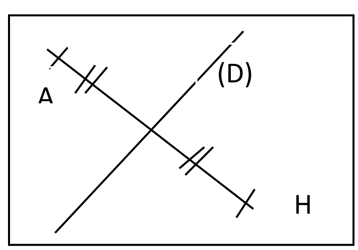
2



3



4



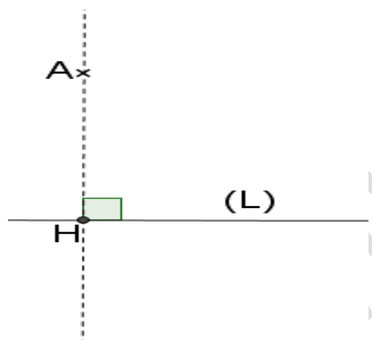
Corrigé

Les figures sur lesquelles AH est la distance du point A à la droite (D) sont les figures 2 et 3.

2. Méthode

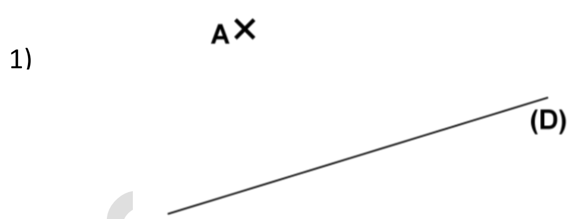
Pour déterminer la distance d'un point A à une droite (L) :

- on trace la perpendiculaire à (L) passant à A ;
- on note H le point d'intersection de cette droite avec (L) ;
- on mesure le segment [AH].
  La distance du point A à la droite (L) est la distance AH.



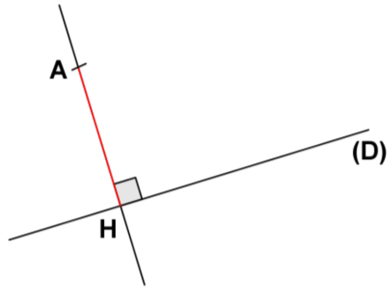
Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, utilise tes instruments de géométrie pour déterminer la distance du point A à la droite (D).



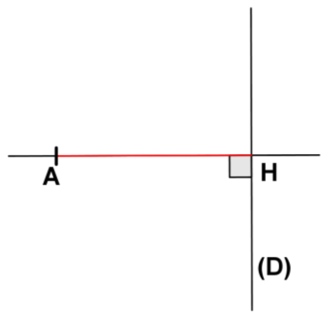
Corrigé

1)



La distance du point A à la droite (D) est la distance AH.

2)

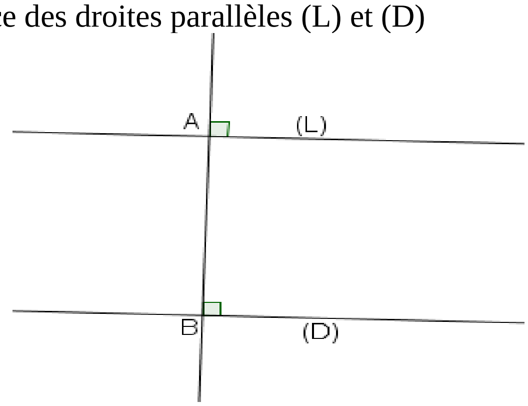


La distance du point A à la droite (D) est la distance AH.

II. Distance de deux droites parallèles

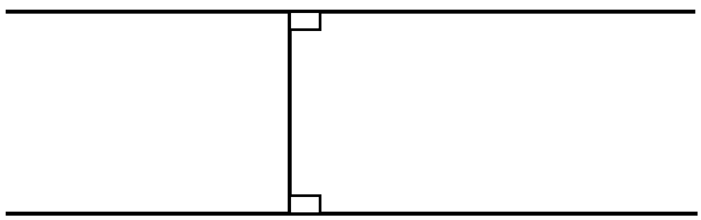
Définition

(L) et (D) sont deux droites parallèles.
A est un point de la droite (L) et B un point de la droite (D) tels que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (L).
La distance AB est appelée distance des droites parallèles (L) et (D)



Exemple

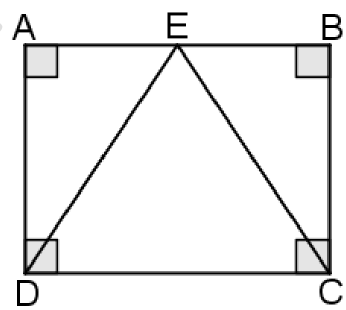
Sur la figure ci-dessous : (D) // (Δ) ; A ∈ (D) ; B ∈ (Δ) ; (AB)⊥(Δ) et AB = 2,6 cm.



La distance des deux droites parallèles (D) et (Δ) est la distance AB c'est-à-dire 2,6 cm.

Exercice de fixation

Observe la figure codée ci-contre puis complète le tableau suivant par Vrai ou Faux.



Affirmation	La distance de la droite (AB) à la droite (DC) est ED	La distance de la droite (AD) à la droite (BC) est AB	La distance de la droite (AB) à la droite (DC) est BC
Réponse			

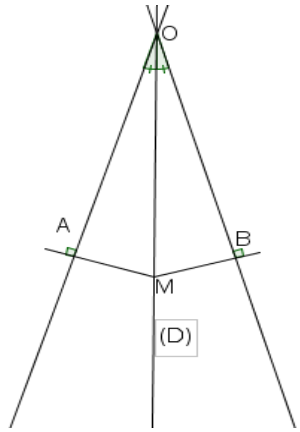
Corrigé

Affirmation	La distance de la droite (AB) à la droite (DC) est ED	La distance de la droite (AD) à la droite (BC) est AB	La distance de la droite (AB) à la droite (DC) est BC
Réponse	Faux	Vrai	Vrai

III. Caractérisation de la bissectrice d'un angle

Propriété 1

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est **équidistant** des supports des côtés de cet angle.



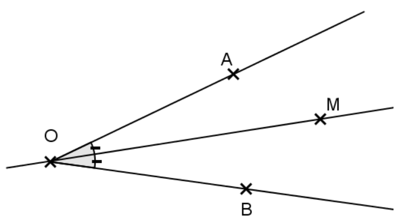
$\boxed{\text{Le point M appartient à la bissectrice (D) de l'angle } \widehat{AOB}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{distance de M à (OA)} = \text{ distance M à (0B)}}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, $\widehat{AOB}$ est un angle et M un point du plan.
Justifie que le point M est équidistant des droites (OA) et (OB).

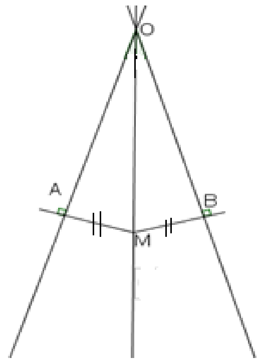


Corrigé

La droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Comme M∈(OM) alors le point M est équidistant des supports des côtés de l'angle $\widehat{AOB}$.

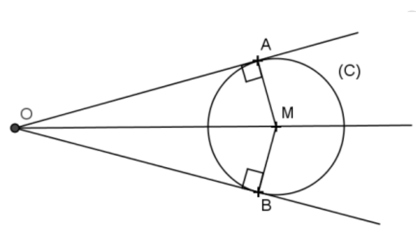
Propriété 2

Si un point est équidistant des supports des côtés d'un angle, alors ce point appartient à la bissectrice de cet angle.



Exercice de fixation

Observe la figure ci-dessous et justifie que le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

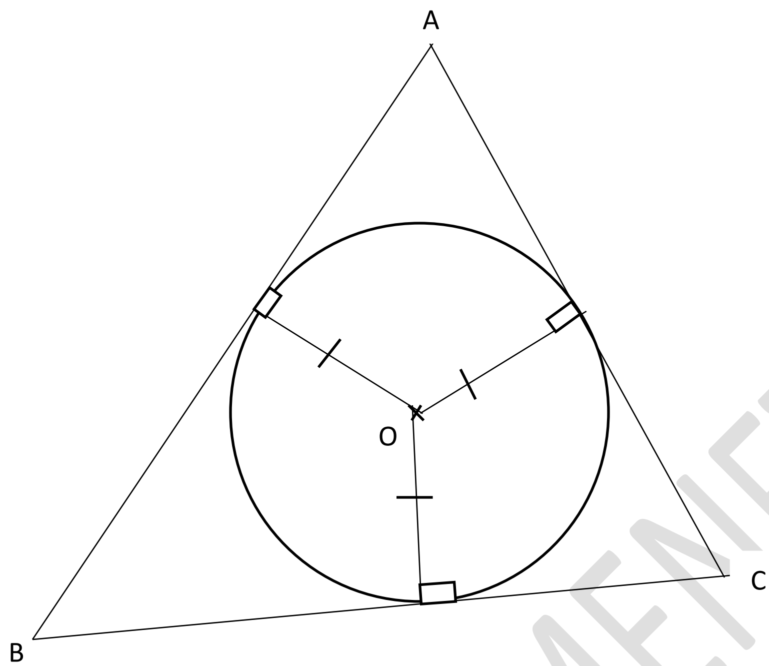


Corrigé

(C) est un cercle de centre M.
A et B sont deux points de (C), donc MA =MA.
Ainsi M est équidistant des supports des côtés de l'angle $\widehat{AOB}$.
D'où M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

C -SITUATION D'ÉVALUATION

Dans un nouveau collège, le mât qui porte le drapeau de la Côte d'Ivoire doit être planté dans un espace de forme triangulaire. La dalle en béton entourant le mât doit avoir une forme circulaire. Le mât doit-être planté au centre du cercle et à égale distance des côtés du triangle comme l'indique la figure ci-dessous.
Pour prévoir les dépenses à effectuer pour la dalle de béton, le président du COGES veut connaître l'aire de la dalle.
Le maçon chargé des travaux demande à son fils de l'aider à trouver un moyen pour déterminer le centre du cercle et la formule de l'aire de la dalle en fonction du rayon r du cercle. Ainsi il pourra lui-même calculer l'aire lorsqu'il aura mesuré le rayon.
On sait que : AB = 24 m , AC = 20 m et BC = 16 m.



1.1. Justifie que le centre O du cercle appartient à la bissectrice (D_1) de l'angle $\widehat{ABC}$ et à la bissectrice (D_2) de l'angle $\widehat{ACB}$.

1.2. Ecris un programme de construction du point O

2-Calcule en fonction de r l'aire de chacun des triangles AOB, AOC et BOC

3-Déduis-en l'aire totale du triangle ABC en fonction de r.

Corrigé

1.1. Selon la propriété, les bissectrices d'un triangle sont concourantes et leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
1.2. Pour construire le point O, il faut tout simplement tracer les bissectrices d'au moins deux angles du triangle ABC.

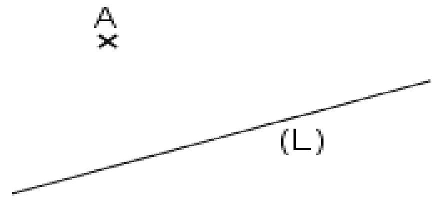
1) L'aire du triangle AOB = $\frac{AB\times r}{2} = \frac{24r}{2} = 12r\ cm^2$
   L'aire du triangle AOC = $\frac{AC\times r}{2} = \frac{20r}{2} = 10r\ cm^2$
   L'aire du triangle BOC = $\frac{BC\times r}{2} = \frac{16r}{2} = 8r\ cm^2$
2) L'aire totale du triangle ABC = $12r\ cm^2 + 10\ \ cm^2 + 8\ \ cm^2 = 30\ \ cm^2$

D - EXERCICES

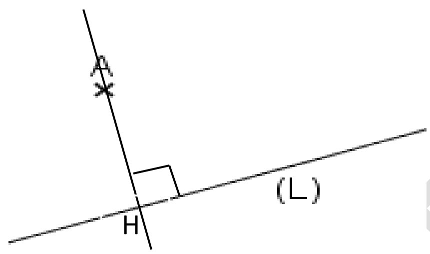
D-1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

L’unité de mesure est le cm.
Sur la figure ci-contre, détermine distance de A à la droite (L).



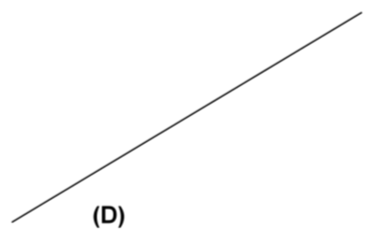
Corrigé



La distance de A à la droite (L) est AH.

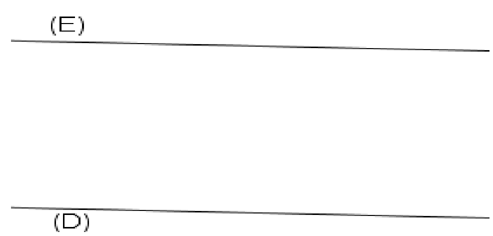
Exercice 2

Sur la figure ci-contre, place un point K à 3,5 cm de la droite (D).

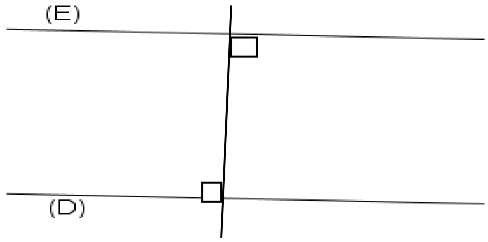


Exercice 3

L’unité de mesure est le $centimètre$, (E) et (D) sont deux droites parallèles.
Détermine la distance des droites (E) et (D).



Corrigé



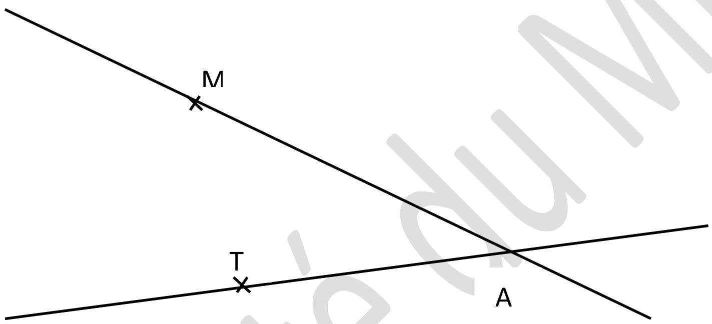
La distance entre les deux droites parallèles (E) et (D) vaut environ 2,2 cm.

Exercice 4

Sur la figure ci-contre, construis une droite (Δ) à 3 cm de du point A

Exercice 5

Construis avec ta règle et ton compas la bissectrice de l'angle $\widehat{KIJ}$ ci-dessous :



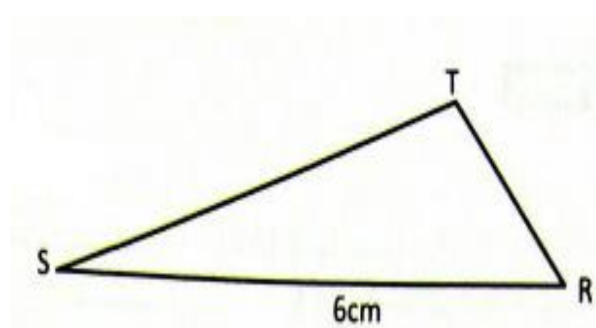
Exercice 6

$\widehat{AOB}$ est un angle.
Place un point M équidistant des droites (OA) et (OB).

D-2- EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 7

L'unité est le centimètre.
RST est un triangle tel que :
RS = 6.
On sait que l'aire du triangle RST est 12 cm^2.
Détermine la distance du point T à la droite (RS).



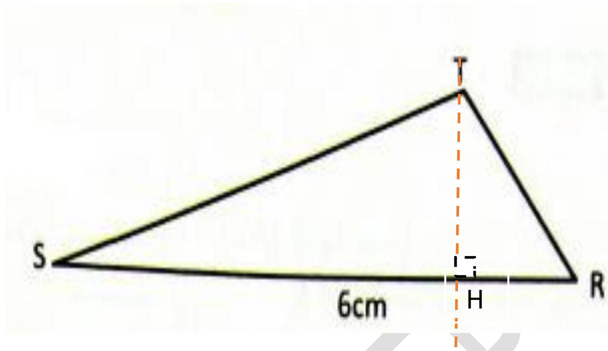
Corrigé

On sait que : $A_{aire}=\frac{Base \times Hauteur}{2}$

Soit H le pied de la hauteur relative au segment [SR].

On a : $A_{aire} = \frac{SR \times TH}{2} \Longrightarrow TH = \frac{2 \times A}{SR}$

$TH = \frac{2\times12}{6} = 4$. La distance du point T à la droite (SR) est égale 4cm.



Exercice 8

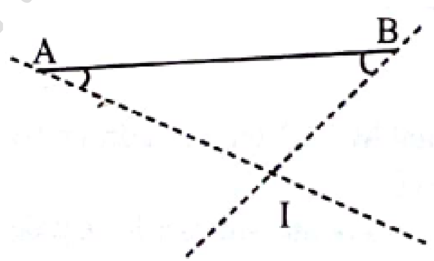
a) Trace une droite (D) et place un point M à 1,5 cm de la droite (D).

b) Place un autre point à 1,5 cm de la droite (D).

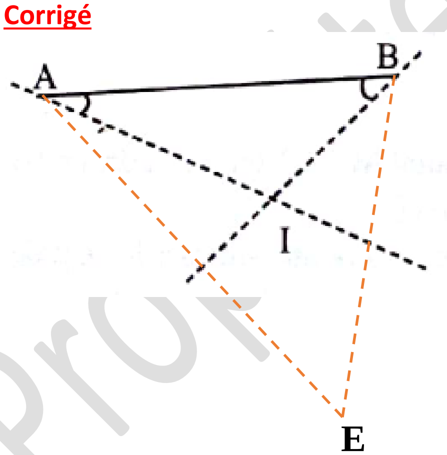
c) Trace les droites où se trouvent tous les points situés à 1,5 cm de (D).

Exercice 9

Construis le point E tel que I soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABE.



Corrigé

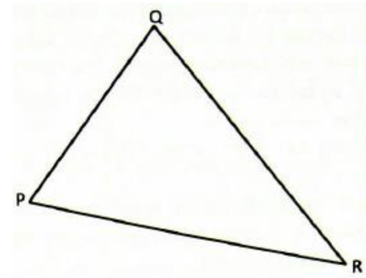


D-3- EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

PQR est un triangle. Soit S un point situé à égale distance des droites (PQ) et (QR).

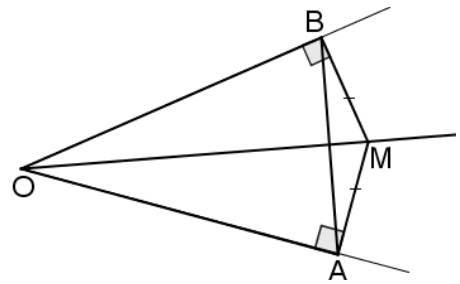
1) Justifie que S appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$
2) Place un point S.



<u>Exercice 11</u>

L'objectif de cet exercice est de justifier que la droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Sur la figure codée ci-contre on a : MA = MB ;
(OB) ⊥ (BM) et (OA) ⊥ (AM)



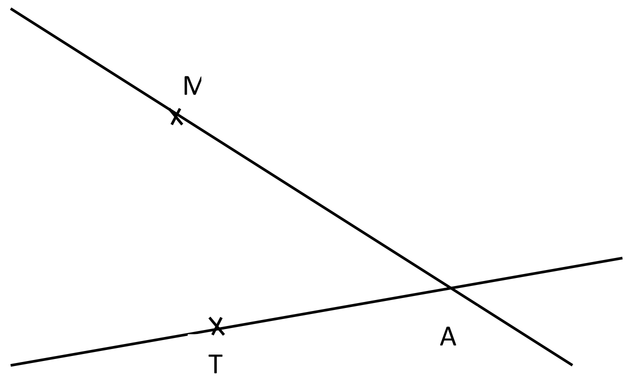
1) a- Quelle est la nature triangle MAB ? Justifie ta réponse.
   b- Déduis-en que les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{BAM}$ ont la même mesure.
2) a- Détermine $mes\widehat{OBA}$ et $mes\widehat{OAB}$.
   b- Déduis-en la nature du triangle AOB.
3) a- Justifie que la droite (OM) est la médiatrice du segment [AB] .
   b- Que représente la droite (OM) pour de l'angle $\widehat{AOB}$?

Justifie ta réponse.

<u>Réponse de l'exercice 12</u>

1) a- On a MA = MB donc le triangle MAB est isocèle en M.
   b- Puisque le triangle MAB est isocèle en M, alors mes$\widehat{ABM}$ = mes$\widehat{BAM}$, car les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.
2) a- On a (OB) ⊥ (BM) et (OA) ⊥ (AM), donc
   mes$\widehat{OAB}$ + mes$\widehat{BAM}$ = 90°
   alors mes$\widehat{OAB}$ = 90° − mes$\widehat{BAM}$ (1)
   mes$\widehat{OBA}$ + mes$\widehat{ABM}$ = 90°
   alors mes$\widehat{OBA}$ = 90° − mes$\widehat{ABM}$ (2)
   donc mes$\widehat{OAB}$ = mes$\widehat{OBA}$ car mes$\widehat{BAM}$ = mes$\widehat{ABM}$.
   b- Puisque mes$\widehat{OAB}$ = mes$\widehat{OBA}$, le triangle AOB est isocèle en O.
3) a- Les points M et O sont équidistants des points A et B, donc éléments de la médiatrice du segment [AB].
   b- La droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ car mes$\widehat{OAB}$ = mes$\widehat{OBA}$ et elle passe par le sommet O de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 12

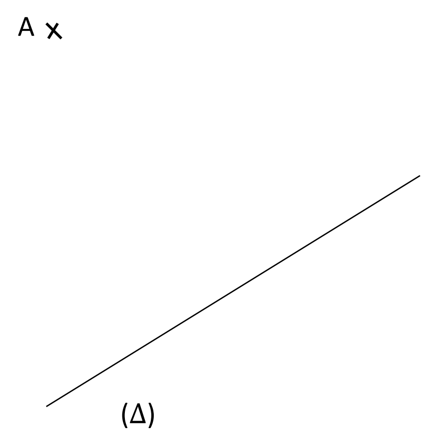


1) Sur la figure ci-dessus, construis un point O situé à 3 cm de la droite (AM) et à 2 cm de la droite (AT).
2) Combien de points tels que A peux-tu construire ?

Exercice 13

Sur la figure ci-contre, le point A est situé à 5 cm de la droite (Δ).
On veut placer un point B tel que :
AB = 4 cm et la distance du B à la droite (Δ) soit égale à 4 cm.

1) Construis sur la figure un point B remplissant les conditions ci-dessus.
2) Détermine le nombre de points B possibles.
3) Détermine la distance du point A à la droite passant par ces points B trouvés.



Code :
Thème : CALCULS ALGEBRIQUES
LEÇON 5 : CALCUL LITTÉRAL **Durée : 8 heures**

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

A la rentrée scolaire, au mois de septembre, une élève en classe de 4ème dispose de 1 000 F dans sa tirelire.
Chaque mois, elle y met une pièce de 200 F économisée sur son argent de poche. Elle veut trouver une formule qui lui permettrait de connaître le montant de son épargne à un mois donné ($n$ième mois). Elle sollicite l'aide de ses camarades de classe pour déterminer son épargne en fonction du nombre de mois qu'elle aura épargné.

B. CONTENU DE LA LECON

I. Expressions littérales

1. Définition

Une expression qui contient une ou plusieurs lettres est appelée **expression littérale**.
Exemples
$2a$; $(a-5b)$; $2\pi r$; $3x+4$... sont des expressions littérales.

2. Calcul de la valeur numérique d'une expression littérale

Méthode

- Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale qui contient une seule lettre, on remplace cette lettre par le nombre donné.
- Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale qui contient plusieurs lettres, on remplace ces lettres par les nombres donnés.

Exercices de fixation

Exercice 1
On donne l'expression littérale A telle que : A $= 3x + 4$.
Calcule la valeur numérique de A pour $x = 5$.

Corrigé
Pour $x = 5$, A $= 3 \times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$.

Exercice 2
On donne l'expression littérale E telle que: E $= a - 5b$.
Calcule la valeur numérique de E pour $a = 7$ et $b = 1$.

Corrigé
Pour $a = 7$ et $b = 1$, E $= 7 - 5 \times 1 = 7 - 5 = 2$.

3. Organisation d'un calcul

Règle d'écriture

Dans un produit, on n'écrit pas le symbole de la multiplication « $\times$ » avant une lettre ou avant une parenthèse ouvrante.

Exemples

On écrira $2x$ au lieu de $2 \times x$ ou $\times 2$.
On écrira ab au lieu de $a \times b$.
On écrira $2(x-7)$ au lieu de $2 \times (x-7)$.
On écrira $9(12+p)(x-7)$ au lieu de $9 \times (12+p) \times (x-7)$.

4. Suppression de parenthèses

Règles

Règle 1

Dans une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses sans rien changer si:

- La parenthèse ouverte est précédée du signe « $+$ » .
- Il n'y a aucun signe avant la parenthèse ouverte.

Exemple

$(-7+a)+(b-3+c) = -7+a+b-3+c.$

Exercice de fixation

Ecris l'expression suivante sans les parenthèses : $(2-3a+b)+(-m+t)-x.$

Corrigé

$(2-3a+b)+(-m+t)-x = 2-3a+b-m+t-x$.

Règle 2

Dans une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe « $-$ » à condition de changer les signes qui précèdent les termes dans ces parenthèses.

Exemple

$a-(b-3+c) = a-b+3-c.$

Exercice de fixation

Ecris l'expression suivante sans les parenthèses :
$x-(3a-b)-(-m+t-y)$

Corrigé

$x-(3a-b)-(-m+t-y) = x-3a+b+m-t+y$.

5. Ordre de priorité des opérations

Règle

Pour calculer une somme algébrique :

- On effectue d'abord les opérations entre les parenthèses (s'il y'a en).
- En absence des parenthèses, on effectue dans l'ordre :
  - les calculs de puissances,
  - les multiplications et divisions,
  - les additions et soustractions.

Exemple

Calcule la somme algébrique A telle que : $A = 7 \times 3^2 - 2\left(5 + \frac{1}{2}\right) + 4$.

$A = 7 \times 3^2 - 2\left(5 + \frac{1}{2}\right) + 4$: J'effectue l'opération entre parenthèses.

$A = 7 \times 3^2 - 2 \times \frac{11}{2} + 4$: Je calcule la puissance de 3^2.

$A = 7 \times 9 - 2 \times \frac{11}{2} + 4$: Je calcule les produits.

$A = 63 - 11 + 4$: Je calcule les sommes et les différences.

$A = 56$.

Exercice de fixation

Calcule la somme algébrique X telle que : $X = 4^3 + 8\left(1 - \frac{3}{4}\right) - 6 \times \frac{2}{3} - 3$.

Corrigé

$X = 4^3 + 8\left(1 - \frac{3}{4}\right) - 6 \times \frac{2}{3} - 3$

$X = 4^3 + 8 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{2}{3} - 3$

$X = 64 + 8 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{2}{3} - 3$

$X = 64 + 2 - 4 - 3$

$X = 59$.

II. Développement et réduction d'un produit

1. Définition

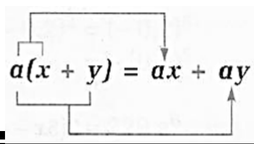
Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

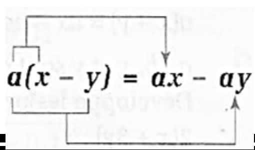
2. Développement des produits $a(x + y)$ et $a(x - y)$

Propriété

a, x et y sont des nombres rationnels.

- $a(x + y) = ax + ay$
- $a(x - y) = ax - ay$





Remarque

On écrit :

- $2x$ et non $x2$.
- $2(x+3)$ et non $(x+3)2$.
- 2×7 et non $2 \,.\, 7$
- $2 \times (-9)$ et non 2×-9.

Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$5(x+7)$; $-2{,}5(x-4)$; $6(-10-2x)$.

Corrigé

$5(x+7) = 5x + 5 \times 7 = 5x + 35.$

$-2{,}5(x-4) = -2{,}5x - 2{,}5 \times (-4) = -2{,}5x + 10.$

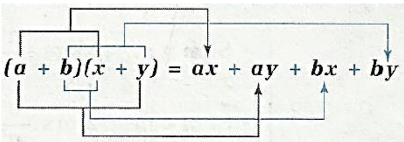
$6(-10-2x) = 6 \times (-10) + 6 \times (-2x) = -60 - 12x.$

3. Développement du produit $(a+b)(x+y)$

Propriété

a, b, x *et* y sont des nombres rationnels.

$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$



Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$(x+5)(y+3)$; $(x+2)(y-3)$; $(3x+2)(2y-1)$.

Corrigé

$(x+5)(y+3) = xy + 3x + 5y + 15$

$(x+2)(y-3) = xy - 3x + 2y - 6$

$(3x+2)(2y-1) = 6xy - 3x + 4y - 2$

4. Produits remarquables

Propriétés

a *et* b sont des nombres rationnels.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$(a+7)^2$; $(a-3)^2$; $(a+8)(a-8)$.

Corrigé

$(a+7)^2 = a^2 + 2 \times a \times 7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49.$

$(a-3)^2 = a^2 - 2 \times a \times 3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9.$

$(a+8)(a-8) = a^2 - 8^2 = a^2 - 64.$

III. Factorisation

1. Factorisation par la mise en évidence d'un facteur commun

Définition

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

Exemple

Factorisons les expressions littérales A et B telles que : $A = 3x + 3$; $B = 12x^2 - 18x$.

Corrigé

A = $3x + 3$

A = $3x + 3 \times 1$

A = $3(x + 1)$.

$B = 12x^2 - 18x$

$B = 6x \times 2x - 6x \times 3$

$B = 6x(2x - 3)$.

Exercice de fixation

Factorise chacune des expressions littérales P, R et S suivantes :

$P = 10 - 5a$; $R = 2x(y-1) + (y-1)$ et $S = -x^2 + 2x$.

Corrigé

$P = 10 - 5a$

$P = 5 \times 2 - 5 \times a$

$P = 5(2 - a)$.

$R = 2x(y-1) + (y-1)$

$R = 2x \times (y-1) + 1 \times (y-1)$

$R = (y-1)(2x+1)$.

$S = -x^2 + 2x$

$S = -x \times x + 2 \times x$

$S = x(-x + 2)$.

2. Factorisation par l'utilisation de produits remarquables

Exemples

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2$.
- $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x-5)^2$.
- $x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x-11)(x+11)$.

Exercice de fixation

Factorise chacune des expressions littérales M, N et L suivantes :

$M = a^2 - 16$; $N = x^2 + 14x + 49$ et $L = y^2 - 22x + 121$.

Corrigé

$M = a^2 - 16$

$M = a^2 - 4^2$

$M = (a+4)(a-4)$.

$N = x^2 + 14x + 49$

$N = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2$

$N = (x+7)^2$.

$L = y^2 - 22y + 1211$

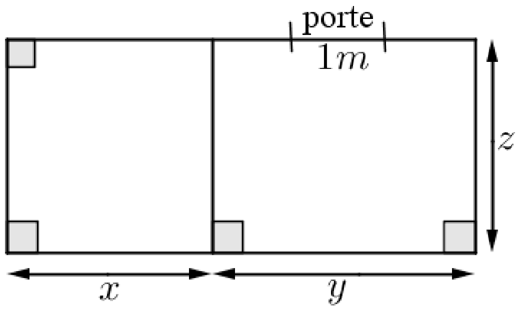
$L = y^2 - 2 \times x \times 11 + 11^2$

$L = (y-11)^2$.

C. SITUATION D'EVALUATION

Un collège Moderne dispose d'un champ subdivisé en deux parcelles toutes de forme rectangulaire.
Pour empêcher les animaux de pénétrer dans le champ, le bureau de la coopérative scolaire veut le clôturer à l'aide d'un grillage en prévoyant une porte en bois de largeur 1 m.
Le prix de la porte est de 10 000F CFA et le mètre de grillage coûte 1 500F CFA.
Averti, le trésorier affirme que la somme se trouvant dans la caisse est de 250 000F CFA.
Le président de la coopérative veut savoir si l'argent disponible en caisse est suffisant pour faire la clôture et la porte.
Le schéma ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur représente ce champ.

1) Justifie que le périmètre du champ est $2(x + y) + 2z$.
2) Calcule ce périmètre sachant que $x = 15$ m, $y = 30$ m et $z = 20$ m.
3) Justifie le coût total des travaux est 203 500F CFA.
4) Réponds à la préoccupation du président de la coopérative.



Corrigé

1) Justifions que le périmètre du champ est $2(x + y) + 2z$

$P = 2L + 2l$ avec $L = x + y$ et $l = z$
$P = 2(x + y) + 2z$
$P = 2(x + y) + 2z$.

2) Calculons ce périmètre sachant que : $x = 15$ m, $y = 30$ m et $z = 20$ m

On a : $P = 2(x + y) + 2z$.
Pour $x = 15$ m, $y = 30$ m et $z = 20$ m, $P = 2(15 + 30) + 2 \times 20$
$P = 2 \times 45 + 2 \times 20$
$P = 90 + 40$
$P = 130$ m.

3) Justifions que le coût total des travaux est de 203 500F CFA.

Soit C le coût des travaux. La largeur de la porte est de 1 m, donc $(P - 1)$ est la longueur du grillage.
C = $(P - 1) \times 1\,500 + prix\ de\ la\ porte$
C = $(130 - 1) \times 1\,500 + 10\,000$
C = $129 \times 1500 + 10\,000$
C = $193\,500 + 10000$
C = $203\,500$.
Donc, le coût total des travaux est de 203 500F CFA.

4) Répondons à la préoccupation du président de la coopérative

On va comparer la somme disponible dans la caisse au coût des travaux.
On a : $250\,000 > 203\,500$, donc l'argent disponible en caisse est suffisant pour les travaux.

D - EXERCICES

D -1 Exercices de fixation

Exercice 1

x, y *et* z sont des nombres entiers relatifs.

Ecris chacune des expressions suivantes sans les parenthèses.

$8 + (x - 9)$; $7 - (-x - y)$

$y + (-x + y)$; $z - (x - 9)$.

Corrigé

- $8 + (x - 9) = 8 + x - 9 = x - 1$.
- $7 - (-x - y) = 7 + x + y$.
- $y + (-x + y) = y - x + y = 2y - x$.
- $z - (x - 9) = z - x + 9$.

Exercice 2

Développe et réduis chacun des produits ci-dessous:

$A = 3(x + 8)$ $\quad$ $B = -7(x - 8)$ $\quad$ $C = (x - 4)(y + 3)$

$D = (a + 5)(b - 7)$ $\quad$ $E = (x + 1)(x - 2)$ $\quad$ $F = (2x + 3)(x - 1)$

Corrigé

$A = 3(x + 8) = 3x + 24$.

$B = -7(x - 8) = -7x + 56$.

$C = (x - 4)(y + 3) = xy + 3x - 4y - 12$.

$F = (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3$.

Exercice 3

Développe et réduis les expressions littérales A, B et C, en utilisant les produits remarquables.

$A = (x + 7)^2$

$B = (y - 3)^2$

$C = (b - 3)(b + 3)$

Exercice 4

Factorise les expressions littérales A, B, C, E et F suivantes :

$A = 7a + 7$ $\quad$ $B = 6x - 9$ $\quad$ $C = 5x^2 + 12x$

$D = x^2 + 6x + 9$ $\quad$ $E = x^2 - 18x + 81$ $\quad$ $F = x^2 - 9$.

D-2 <u>Exercices de renforcement</u>

Exercice 5

Réduis les expressions littérales E, F et G suivantes :

$E = 5x - (1 + x + y); F = 5 - (1 - 2a) + (2a - 5); G = 15x^2 - (x - x^2) - 3x.$

Exercice 6

$a, x\ et\ y$ désignent des nombres rationnels.

Développe et réduis chacune des expressions littérales R, S, T, U, V et W ci-dessous :

$R = (2x + 7)(2x - 7)$ $\quad S = (5 - 2a)(5 + 2a)$ $\quad T = (3y - 7)(3y + 7)$

$U = (x + 1)^2 - x(x + 2)$ $\quad V = xy + x + x(-y + 4)$ $\quad W = (x - 1)^2 - (3x - 1)^2$

Corrigé

$R = (2x + 7)(2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49.$

$S = (5 - 2a)(5 + 2a) = 5^2 - (2a)^2 = 25 - 4a^2.$

$T = (3y - 7)(3y + 7) = (3y)^2 - 7^2 = 9y^2 - 49.$

$U = (x + 1)^2 - x(x + 2) = (x^2 + 2x + 1) - x^2 - 2x = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1.$

$V = xy + x + x(-y + 4) = xy + x - xy + 4x = 5x.$

$W = (x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = (x^2 - 2x + 1) - ((3x)^2 - 6x + 1)$

$= x^2 - 2x + 1 - 9x^2 + 6x - 1$

$W = -8x^2 + 4x.$

Exercice 7

$a\ et\ x$ désignent des nombres rationnels.

Factorise chacune des expressions littérales A, B, C, D, E et F ci-dessous :

$A = 14x - 21$ $\quad B = 1 - 12a + 36a^2$ $\quad C = 2ax - 10x$

$D = 48x^2 - 16ax$ $\quad E = -5x - 8x^2$ $\quad F = 36ax - 27$

Corrigé

A= $14x - 21$= $7\times 2x - 3 \times 7$=$7(2x - 3)$.

$B = 1 - 12a + 36a^2$= $1^2 - 2\times 6a + (6a)^2$=$(1 - 6a)^2$.

C= $2ax - 10$=$2\times ax - 2 \times 5$ =$2(ax - 5)$.

D= $48x^2 - 16ax$= $16x \times 3x - 16x \times a$= $16x(3x - a)$.

$E = -5x - 8x^2 = -x(5 + 8x).$

$F = 36ax - 27$=$9\times 4ax - 9 \times 3 = 9(4ax - 3)$.

Exercice 8

x désigne un nombre rationnel.

Factorise chacune des expressions littérales I, J, K, L, M et N ci-dessous :

$I = x^2 + 14x + 49$ $\quad J = 16x^2 - 8x + 1$ $\quad K = 49x^2 - 16$

$L = x^2 + 14x + (x + 14)$ $\quad M = (x + 1)^2 + x^2 + 2x + 1$ $\quad N = (9x^2 - 1) + (3x + 1)$

D- 3 Exercices d'approfondissement

Exercice 9

a et b sont des nombres rationnels.

Relie chaque expression à sa forme développée et réduite.

$(a - b)^2$	•	•	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b)$	•	•	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^2$	•	•	$a^2 - b^2$

Exercice 10

1) Calcule chacun des nombres A, B et C suivants, en utilisant les produits remarquables.

A = 11^2 $\quad$ B = 19×21 $\quad$ C = $12^2 - 11^2$

2) Développe et réduis chacune des expressions littérales D, E, F et G suivantes :

D = $3(x - 12)$ $\quad$ E = $(x - 12)(-2x + 5)$

F = $(x - 6)^2 + (3 - x)(3 + x)$ $\quad$ G = $2x(1 - 5x) + (x + 3)^2 - 3$

3) Factorise chacune des expressions littérales H, I, J et K suivantes :

H = $7x + 14$ $\quad$ I = $4x^2 - 20x + 25 + x(2x - 5)$

J= $(x + 4)(x + 2) + (x + 2)$ $\quad$ K= $(4x^2 - 9) - (2x + 3)$

Corrigé

1) A = $11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 1 = 100 + 20 + 1 = 121$.

B = $19\times 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$.

C = $12^2 - 11^2 = (12 + 11)(12 - 11) = 33 \times 1 = 33$.

2) D = $3(x - 12) = 3x - 36$.

E = $(x - 12)(-2x + 5) = -2x^2 + 5x + 24x - 60 = -2x^2 + 29x - 60$.

F = $(x - 6)^2 + (3 - x)(3 + x) = x^2 - 12x + 6^2 + 3^2 - x^2 = -12x + 45$.

G = $2x(1 - 5x) + (x + 3)^2 - 3 = 2x - 10x^2 + x^2 + 6x + 9 - 3 = -9x^2 + 8x + 6$.

3) H = $7x + 14 = 7(x + 2)$.

I = $4x^2 - 20x + 25 + x(2x - 5) = (2x - 5)^2 + x(2x - 5)$

$= (2x - 5)(2x - 5) + x(2x - 5) = (2x - 5)(2x - 5 + x) = (2x - 5)(3x - 5)$.

J= $(x + 4)(x + 2) + (x + 2) = (x + 4)(x + 2) + (x + 2) \times 1$

$= (x + 2)(x + 4 + 1) = (x + 2)(x + 5)$.

K= $(4x^2 - 9) - (2x + 3) = (4x^2 - 3^2) - (2x + 3) = (2x + 3)(2x - 3) - (2x + 3)\times 1$

$= (2x + 3)[(2x - 3) - 1] = (2x + 3)(2x - 3 - 1) = (2x + 3)(2x - 4)$

K = $(2x + 3)(x - 2)\times 2 = 2(2x + 3)(x - 2)$.

Exercice 11

Calcule la valeur numérique de chacune des expressions littérales suivantes pour $x = \frac{1}{2}$; $y = 2$ et $z = -1$.

a) $3x + y - z$ $\quad$ b) $-x + 3y - 5z$ $\quad$ c) $x^2 - y^3 + z$.

Code :

Thème: GEOMETRIE DU PLAN

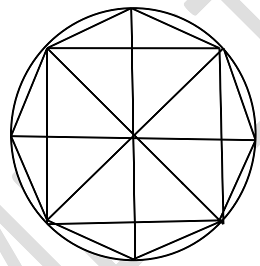
LEÇON 6 : CERCLES ET TRIANGLES

Durée : 8 heures

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Après le tournoi inter-établissements, votre école a remporté le trophée. Les joueurs ont obtenu des médailles marquées par des figures géométriques comme l'indique la figure ci-contre.

Des élèves de 4ème veulent reproduire ces figures géométriques observées. Ainsi, ils décident de faire appel à leurs connaissances en géométrie pour distinguer les figures et les reproduire.

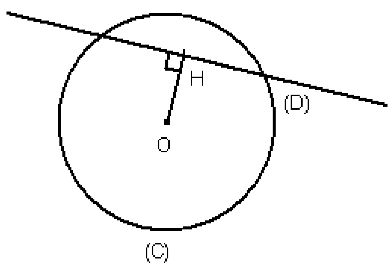
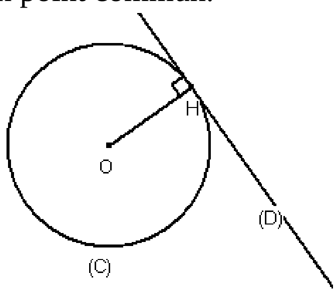
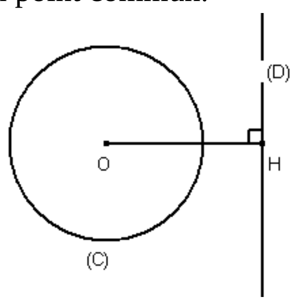


B-CONTENU DE LA LECON

I. Cercle et droite

1. Positions relatives d'une droite et d'un cercle

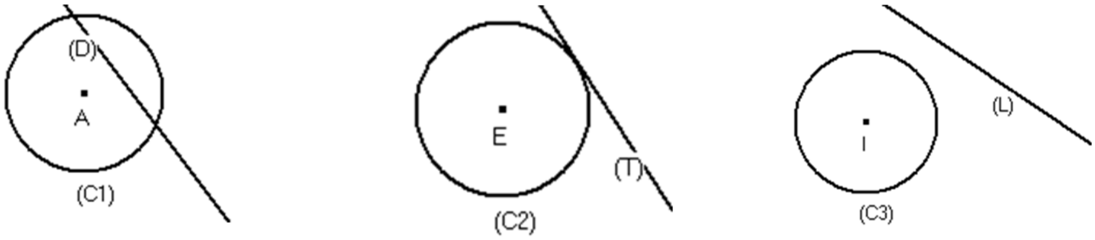
Propriétés

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon r ; (D) est une droite. H est le point de (D) tel que :$(OH) \perp (D)$.		
Si $OH < r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont sécants.	Si $OH = r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont un point commun.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont tangents.	Si $OH > r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) n'ont aucun point commun.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont disjoints.
Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs, alors $OH < r$.	Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont un point commun, alors $OH = r$.	Si $(\mathcal{C})$ et (D) n'ont aucun point commun, alors $OH > r$.

Exercice de fixation

Exercice 1

Observe les figures suivantes.



Recopie et complète par le mot qui convient : tangents, disjoints ou sécants.
- La droite (D) et le cercle (C1) sont …………….
- La droite (T) et le cercle (C2) sont …………….
- La droite (L) et le cercle (C3) sont …………….

Corrigé
- La droite (D) et le cercle (C1) sont sécants.
- La droite (T) et le cercle (C2) sont tangents.
- La droite (L) et le cercle (C3) sont disjoints

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

(C) est le cercle de centre I et de rayon 3 et (L) une droite. K est un point de la droite (L)

tel que : IK=5.

Détermine la position relative de (C) et de (L).

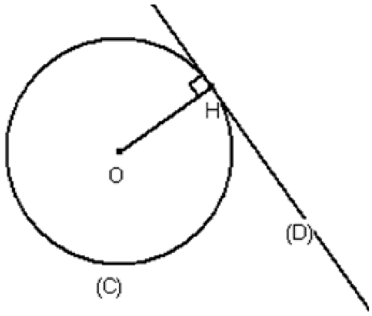
Corrigé

$IK > 3$, donc (C) et (L) sont disjoints.

2. Tangente à un cercle

a- Définition

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et H est un point de $(\mathcal{C})$.
On appelle tangente en H au cercle$(\mathcal{C})$, la droite passant par H et perpendiculaire au support du rayon [OH].



H est un point de $(\mathcal{C})$.
[OH] est un rayon du cercle.
(D) est perpendiculaire à (OH) en H.
(D) est la tangente à$(\mathcal{C})$ en H.

b- Construction des tangentes à un cercle passant par un point extérieur au cercle

Méthode

On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point A extérieur à ce cercle.

Pour construire les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par le point A, on procède de la manière suivante :

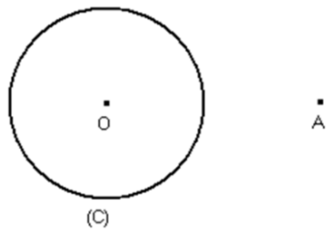
- on place le point I milieu de $[AO]$;
- on trace le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre I et de rayon IA ;
- on place T et T', points d'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
- on trace les droites (AT) et (AT').

Les droites (AT) et (AT') sont les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A.

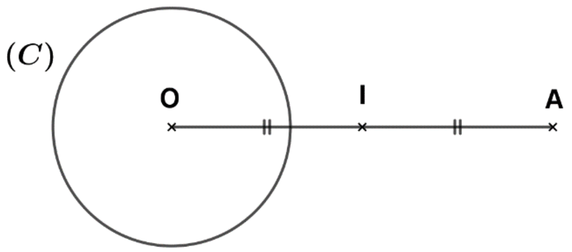
<u>Exercice de fixation</u>

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et A est un point extérieur à $(\mathcal{C})$.

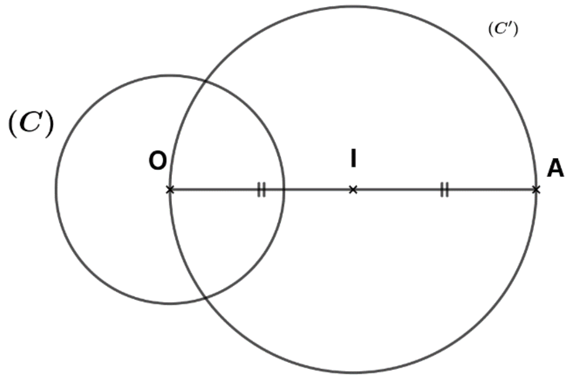
Construis les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A.



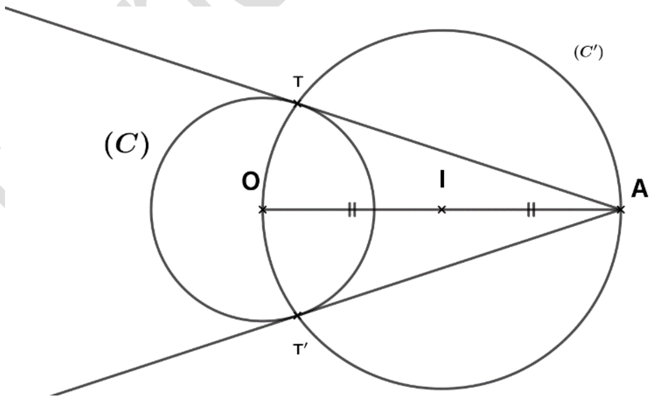
Corrigé



Etape 1



Etape 2



Etape 3

II. Triangles et droites

1. Droite des milieux

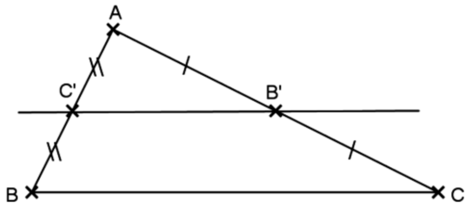
Propriété

Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux cotés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.

ABC est un triangle

C’ est le milieu de [AB]	B’ est le milieu de [AC]

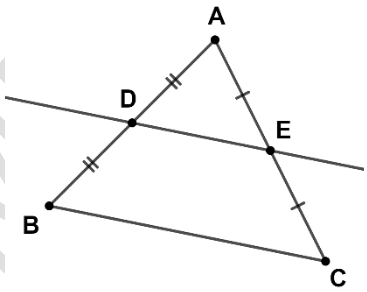
(B’C’)// (BC)



(BC) est appelée **droite des milieux.**

Exercice de fixation

Examine la figure ci-contre.
Justifie que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.



Corrigé

ABC est un triangle. D est le milieu de [AB] et E le milieu de [AC].
Donc, la droite (DE) est parallèle à (BC), car dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux cotés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.

2-Segment joignant les milieux de deux côtés

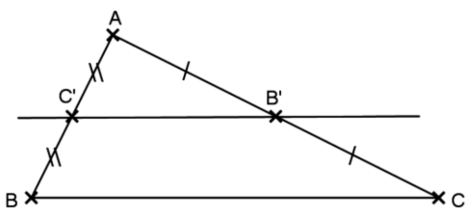
Propriété

Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

ABC est un triangle

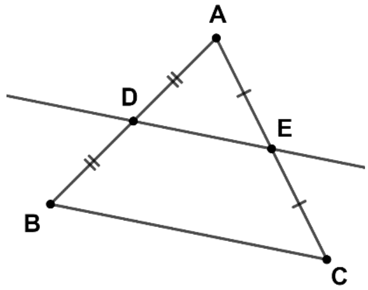
C’ est le milieu de [AB]	B’ est le milieu de [AC]

B’C’ $= \frac{1}{2}$ BC



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, ABC est un triangle tel que $BC = 15\ cm$.
Calcule DE.



Corrigé

ABC est un triangle. D est le milieu de [AB] et E le milieu de [AC].

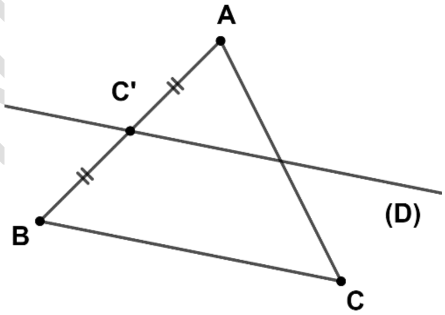
Donc : DE = $\frac{1}{2}BC$, car dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

DE = $\frac{1}{2} \times 15 = 7{,}5\ cm$.

3- Droite passant par le milieu d'un côté

Propriété

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.



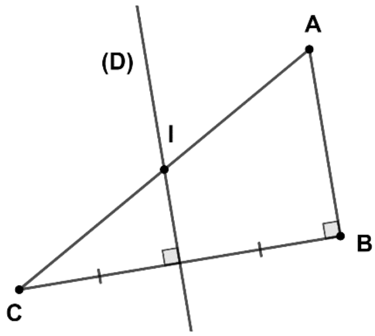
ABC est un triangle.

C' est le milieu de [AB] | (D) //(BC) | C' ∈ (D)

(D) passe par le milieu de [AC]

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B.
La médiatrice (D) de [BC] coupe l'hypoténuse en un point I.
Justifie que le point I est le milieu du segment $[AC]$.



Corrigé

- ABC est un triangle rectangle en B, donc (AB)⊥ (BC).

  (D) est la médiatrice du segment [BC], donc (D) ⊥(BC).

Les droites (AB) et (D) sont perpendiculaires à une même droite (BC), donc elles sont parallèles.

- Dans le triangle ABC, la droite (D)passe par le milieu de [BC] et est parallèle à (AB).
  Donc, la droite (D) passe par le milieu de $[AC]$.
  Or (D) passe par le point I qui appartient au segment $[AC]$.
  Par conséquent, le point I est le milieu de $[AC]$.

III. Droites particulières et points remarquables dans un triangle

1- Hauteurs et orthocentre

a- Propriété

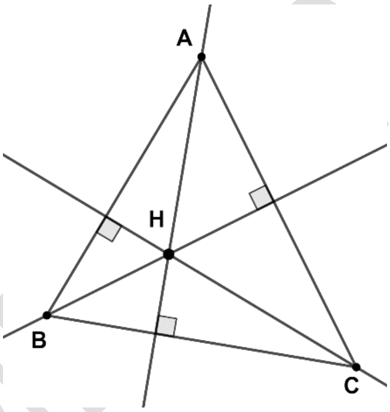
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

b-Définition

Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre.

Exemple

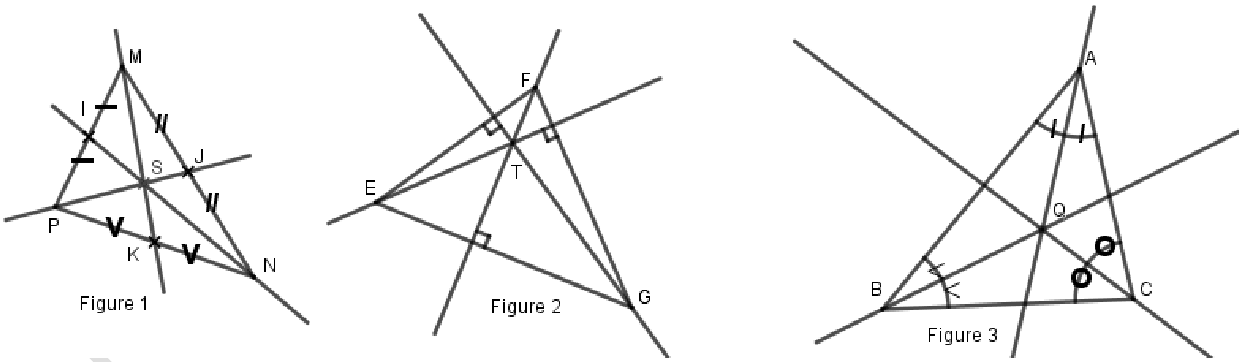
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.



Exercice de fixation

Observe les figures ci-dessous.

Lequel des points S, T et Q est l'orthocentre du triangle ? Justifie ta réponse.



Corrigé

Le points S n'est pas le point de concours des hauteurs du triangle MNP.

Le point Q n'est pas le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Le point T est le point de concours des hauteurs du triangle EFG, donc il est l'orthocentre du triangle EFG.

2- Médianes et centre de gravité

a- Propriété

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

b- Définition

Le point de concours des médianes d'un triangle est appelé **centre de gravité** du triangle.

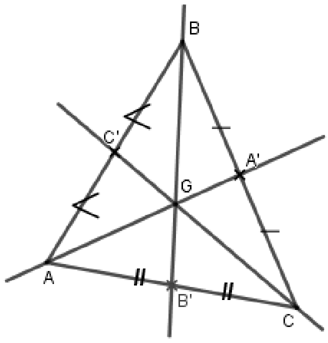
<u>Exemple</u>

Les droites (AA'), (BB') et (CC')

sont les médianes du triangle ABC .

G est le centre de gravité du triangle ABC.

On a : $AG = \frac{2}{3}AA'; BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$.



Remarque

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

Exercice de fixation

Observe les figures ci-dessous.

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

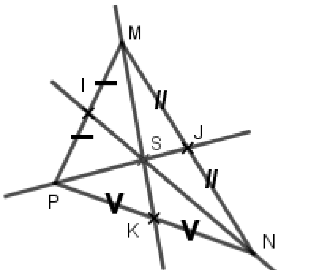


Figure 1

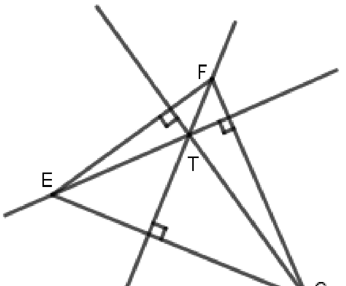


Figure 2

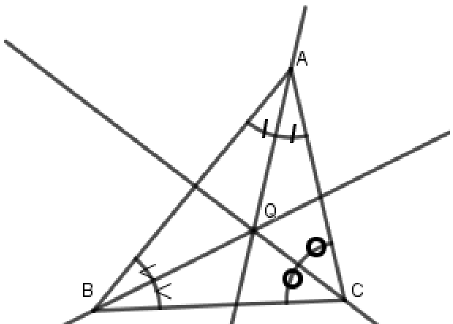


Figure 3

Affirmation	Réponse
S est le centre de gravité du triangle MNP	
T est le centre de gravité du triangle EFG	
Q est le centre de gravité du triangle ABC	

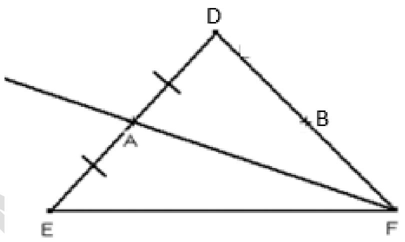
Corrigé

Affirmation	Réponse
S est le centre de gravité du triangle MNP	Vrai
T est le centre de gravité du triangle EFG	Faux
Q est le centre de gravité du triangle ABC	Faux

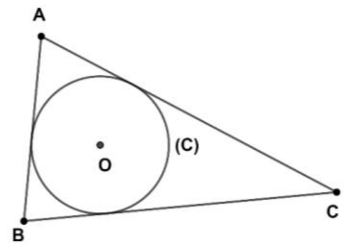
Remarque

Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

La droite (AF) est une médiane du triangle EDF.
$Aire\ AEF = Aire\ ADF$

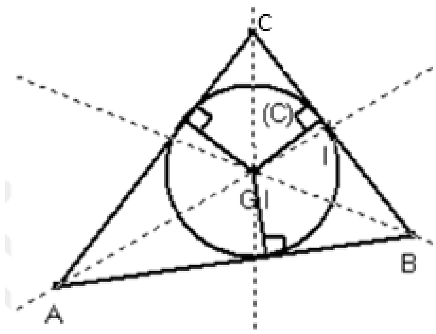


3-Bissectrices et centre du cercle inscrit
a-Définition
On appelle cercle inscrit dans un triangle, le cercle intérieur à ce triangle et tangent aux supports de ses côtés.



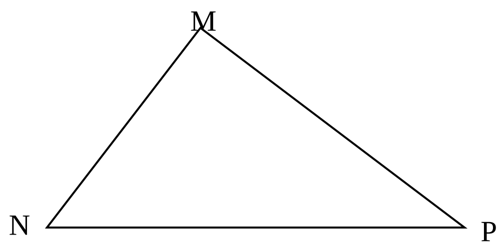
b-Propriété
Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

<u>Exemple</u>
Les droites (AI) , (CI) et (BI) sont les bissectrices du triangle ABC.
I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.



<u>Exercice de fixation</u>

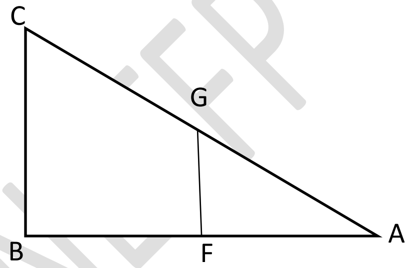
Trace les trois bissectrices du triangle MNP, puis trace le cercle inscrit dans ce triangle.



C-SITUATION D'ÉVALUATION

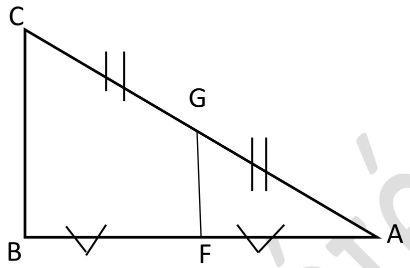
Un géomètre s'est servi d'un schéma réalisé après divers relevés avec son appareil pour déterminer la hauteur d'un immeuble. À la demande de son chef de service qui veut vérifier l'exactitude de ses calculs, il reproduit ce schéma comme l'indique la figure ci-dessous. Des codages manquants rendent difficile l'exploitation de la figure.

1- Code la figure pour qu'on puisse affirmer avec une propriété relative à la droite des milieux que les supports des segments $[GF]$ et $[BC]$ sont parallèles.
2- Détermine la hauteur BC de cet immeuble sur la base de ce codage sachant que $GF = 24$ m.



Corrigé

1.



2. D'après la propriété qui dit que : Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux cotés est égale à la moitié de la longueur du troisième coté.

$GF = \frac{1}{2}BC$, d'où $BC = 2GF$.

Donc : $BC = 2 \times 24 = 48$.

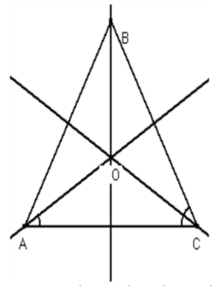
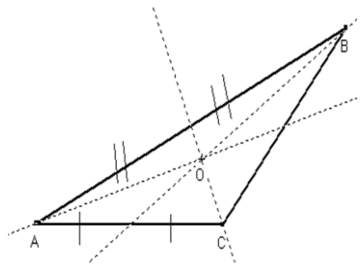
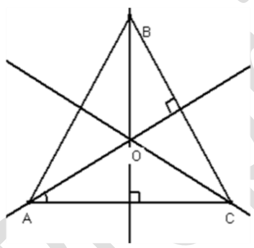
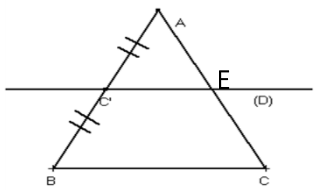
La hauteur de cet immeuble est de 48 m.

D-EXERCICES

D- 1 Exercice de fixation

Exercice 1

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.
Ecris le numéro de la figure et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

N°	Figures	Affirmations		
		A	B	C
1	 Les droites (AO), (BO) et (CO) sont les bissectrices respectives des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$	O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC	O est le centre de gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
2		O est le centre du Cercle inscrit Au triangle ABC	O est le centre de Gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
3		O est le centre du Cercle inscrit Au triangle ABC	O est le centre de Gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
4	 (C'E) //(BC)	$C'E = BC$	$C'E = \frac{1}{2}BC$	$BC = \frac{1}{2}C'E$

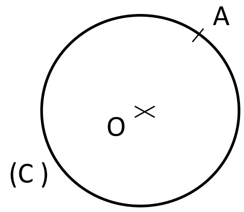
Corrigé

1- A ; 2- B ; 3- C ; 4- B

Exercice 2

(C) est un cercle de centre O et A est un point de (C).

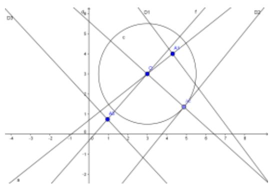
Construis la tangente (T) à(C) au point A.



Exercice 3

1) Construis le cercle (C) de centre O et de rayon 2,5 cm.
2) Dans chacun des cas ci-dessous;
   -place un point A ;
   -trace la droite (D) passant par A et perpendiculaire à (OA) ;
   -indique la position relative de (C) et de (D).
   a) OA = 1,5 cm.
   b) OA = 2,5 cm.
   c) OA = 3,5 cm.

Corrigé



a) Pour OA_1 = 1,5 cm, (C) et (D_1) sont sécants.

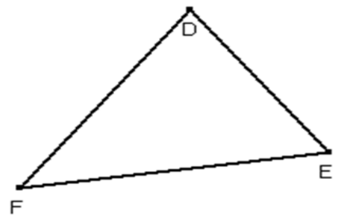
b) Pour OA_2 = 2,5 cm, (C) et (D_2) sont tangents.

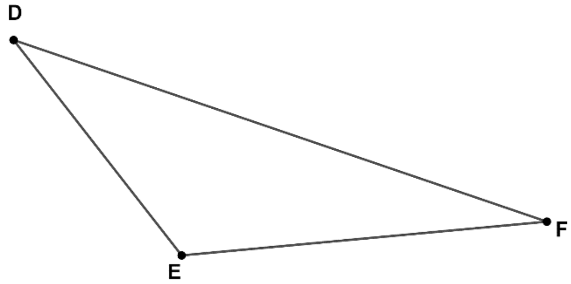
c) Pour OA_3 = 3,5 cm, (C) et (D_3) sont disjoints.

D-2 <u>Exercices de renforcement</u>

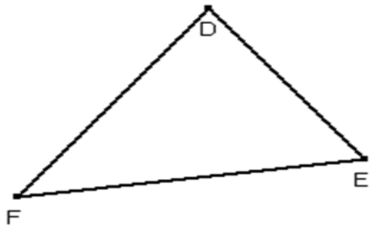
<u>Exercice 4</u>

1) Construis l'orthocentre O du triangle DFE.

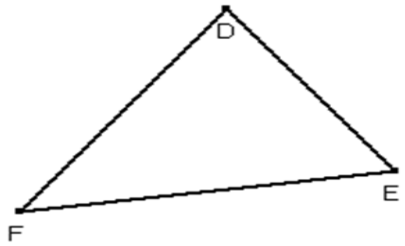




2) Construis le centre de gravité G du triangle DFE.



3) Construis le cercle (C) inscrit dans le triangle DFE.



<u>Exercice 5</u>

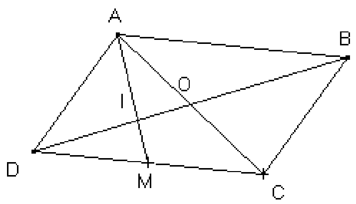
L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 6 ; AC = 7 et BC = 10.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1) Justifie que (IJ)//(BC).
2) Déduis-en que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.
3) Calcule IJ.

Corrigé

1) ABC est un triangle et I milieu de [AB] et J milieu de [AC]. D'après la propriété de la droite des milieux,
   (IJ)//(BC).
2) (IJ)//(BC), D'après la propriété sur le segment joignant les milieux de deux côtés,
3) IJ = $\frac{1}{2}BC$.
4) IJ = $\frac{1}{2}BC$ donc IJ = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$.

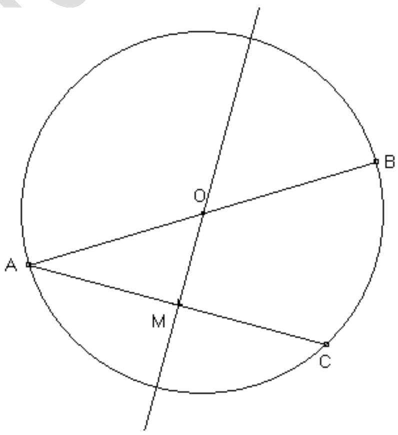
Exercice 6

Soit un parallélogramme ABCD de centre O et M le milieu de [DC]. La droite (AM) coupe (BD) en I.
Justifie que DI =$\frac{1}{3}$ DB.



Exercice 7

Soit un cercle de centre O et de diamètre [AB]. Soit C un point du cercle et M le milieu de [AC].
Justifie que (OM) est perpendiculaire à la droite (AC).



D-3- Exercices d'approfondissement

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
1) Fais une figure.
2) a- Démontre que (IJ) et (BC) sont parallèles.
   b- Justifie que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.
3) Soit M un point intérieur au triangle AIJ ; K le symétrique de M par rapport à I ; L le symétrique de M par rapport à J.

a- Démontre que (IJ) et (KL) sont parallèles.

b- Justifie que IJ = $\frac{1}{2}$ KL.

4) Justifie que BC = KL.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A. La médiatrice de [AB] coupe [AB] au point E et [BC] au point F.

K est le milieu de [AC].

1) Démontre que (EF) et (AC) sont parallèles.

2) Démontre que (BC) et (KE) sont parallèles.

Exercice 10

ABC est un triangle. A' est le milieu de [BC]. La droite passant par A' et parallèle à la droite (AB) coupe la droite (CA) au point P. La droite passant par le point P et parallèle à (BC) coupe la droite (AB) en Q.

1) Fais une figure.
2) Justifie que P est le milieu [AC].
3) Justifie que AB = 2 BQ.

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Code :

Thème : Calculs Algébriques

LEÇON 7 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{Q}$

Durée : 8 heures

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les congés de noël, le club culturel d'un collège a organisé une journée théâtrale dans la salle de spectacle de l'école. Il y avait 85 spectateurs :

- les spectateurs assis ont payé chacun 500 F le billet d'entrée ;
- les spectateurs debout ont payé chacun 150 F le billet d'entrée.

La recette totale de la journée théâtrale est de 30 250 F.
Pour vérifier que le trésorier du club a été correct dans les comptes, les élèves de la 4ème de ce club décident de résoudre une équation pour déterminer le nombre de spectateurs assis.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Équations du premier degré dans $\mathbb{Q}$

1. Définition

a, b et c sont des nombres rationnels tels que a différent de zéro.
Une égalité du type « $ax + b = c$ » où x désigne un nombre rationnel est appelée équation d'inconnue x.

Vocabulaire

- $ax + b$ est le premier membre ou le membre de gauche de l'équation $ax + b = c$.
- c est le second membre ou le membre de droite de l'équation $ax + b = c$.
- Tout nombre rationnel pour lequel l'égalité $ax + b = c$ est vraie, est appelé solution de l'équation $ax + b = c$.

Remarque
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Exemple

$2x + 3 = 5$ est **une équation** d'inconnue x.

- $2x + 3$ est le premier membre ;
- 5 est le second membre ;
- 1 est solution de l'équation $2x + 3 = 5$ car $2 \times 1 + 3 = 5$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Relie chaque équation à son inconnue.

$x + 2 = 12$	$\times$	$\times$	y
$8 = 3 + 5t$	$\times$	$\times$	a
$4y - 3 = -y$	$\times$	$\times$	x
$-23 - 2a = 0$	$\times$	$\times$	t

Corrigé

Relions chaque équation à son inconnue.

$x + 2 = 12$	$\times$	$\times$	y
$8 = 3 + 5t$	$\times$	$\times$	a
$4y - 3 = -y$	$\times$	$\times$	x
$-23 - 2a = 0$	$\times$	$\times$	t

Exercice 2

Pour chacune des équations suivantes, entoure le premier membre.

$x - 7 = -11$; $10 = -2 + 5z$; $7t + 3 = -2t$; $40 - 3k = 9$.

Corrigé

Relions chaque équation à son premier membre

$x - 7 = -11$; $10 = -2 + 5z$; $7t + 3 = -2t$; $40 - 3k = 9$

Exercice 3

1. Justifie que le nombre -4 est solution de l'équation $-2 + x = -6$.
2. Justifie que le nombre -2 n'est pas solution de l'équation $9x = -10$.
3. Justifie que le nombre 6 est solution de l'équation $2x + 7 = 19$.

Corrigé

1. On a : $-2 + (-4) = -6$.
   Donc -4 est solution de l'équation : $-2 + x = -6$.
2. On a : $9 \times (-2) = -18$, $or\ -18 \neq -10$.
   Donc -2 n'est pas solution de l'équation : $9x = -10$.
3. On a : $2 \times 6 + 7 = 19$.
   Donc 6 est solution de l'équation : $2x + 7 = 19$

2. Égalités et opérations

Propriété 1

En ajoutant un même nombre rationnel à chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

a, b et c sont des nombres rationnels.

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.

Exemple

$2x + 1 = 2$, donc $2x + 1 + 3 = 2 + 3$, c'est-à-dire : $2x + 4 = 5$.

Exercice de fixation

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations ci-dessous :

a) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 5 = 3$.
b) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 9 = 6$.
c) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x - 3 = -6$.
d) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 3 = 3$.

Corrigé

a) Faux b) Vrai c) Vrai d) Faux

Propriété 2

En multipliant par un même nombre rationnel non nul, chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

a, b et k sont des nombres rationnels tels que k est différent de zéro

Si $a = b$ alors $ka = kb$

Exemple

$2x = 4$, donc $2x \times 3 = 4 \times 3$; c'est-à-dire : $6x = 12$.

Exercice de fixation

a, b *et* c sont des nombres rationnels non nuls.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si\ c = b, alors\ ac = ab$	
$Si\ c = b, alors\ ac = bc$	
$Si\ a = b, alors\ ab = bc$	

Corrigé

$Si\ c = b, alors\ ac = ab$	vrai
$Si\ c = b, alors\ ac = bc$	Faux
$Si\ a = b, alors\ ab = bc$	faux

3. Résolution d'une équation

Propriété 1

a et b étant deux nombres rationnels, l'équation : $a + x = b$ a pour unique solution la différence $b - a$.

Exemple

$x + 5 = 7$ a pour solution $x = 7 - 5 = 2$.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $x + 12 = 1$.
b) $-13 + x = 0$.

Corrigé

a) $x = 1 - 12 = -11$.
-11 est la solution de cette équation.
b) $x = 0 - (-13) = 13$.
13 est la solution de cette équation.

Propriété 2

a et b étant deux nombres rationnels (a différent de zéro), l'équation : $ax = b$ a pour unique solution le quotient $\frac{b}{a}$.

Exemple

$4x = 8$ a pour solution $= \frac{8}{4} = 2$.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $4x = 2$.
b) $-3x = 5$.

Corrigé

a) $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation.
b) $x = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$.
$-\frac{5}{3}$ est la solution de l'équation.

II. Inéquation du premier degré dans $\mathbb{Q}$

1. Définition

a , b et c sont des nombres rationnels tels que a est différent de zéro.
Une inégalité du type $ax + b >$ c ou $ax + b <$ c dans laquelle x désigne un nombre rationnel est appelée inéquation d'inconnue x.

Vocabulaire

- $ax + b$ est le premier membre ou le membre de gauche de l'inéquation $ax + b >$ c (ou $ax + b <$ c).
- c est le second membre ou le membre de droite de l'inéquation $ax + b >$ c (ou $ax + b <$ c).
- Tout nombre rationnel pour lequel l'inégalité $ax + b >$ c (ou $ax + b <$ c) est vraie, est appelée solution de l'inéquation $ax + b >$ c (ou $ax + b <$ c.)

Remarque

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de cette inéquation.

Exemple

$3x + 4 < 7$ est une **inéquation** d'inconnue x.

- $3x + 4$ est le premier membre ;
- 7 est le second membre ;
- -2 est une solution de l'inéquation $3x + 4 < 7$ car $3 \times (-2) + 4 = -2$ et $-2 < 7$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celles qui sont des inéquations.

a) $3x + 3$; b) $4t + 1 < 6$ c) $2x + 56 > 22$; d) $6 + a = 27$; e) $3 = 9 - x$.

Corrigé

a) $3x + 3$; b) $4t + 1 < 6$ c) $2x + 56 > 22$; d) $6 + a = 27$; e) $3 = 9 - x$

Exercice 2

Pour chacune des inéquations ci-dessous, entoure le second membre.

a) $x + 7 > 11$; b) $9 > 12 + t$ c) $3z - 17 < 15$; d) $3 - t < 14$.

Corrigé

a) $x + 7 > 11$; b) $9 > 12 + t$ c) $3z - 17 < 15$; d) $3 - t < 14$.

2. **Inégalités et opérations**

Propriété 1

En ajoutant un même nombre rationnel à chaque membre d'une inégalité on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

a, b et c sont des nombres rationnels.

- Si $a < b$, alors $a + c < b + c$
- Si $a > b$, alors $a + c > b + c$

Exemples

- $x + 1 < 2$, donc $x + 1 + 4 < 2 + 4$; c'est-à-dire : $x + 5 < 6$.
- $2x + 4 > 0$, donc $2x + 4 + 5 > 0 + 5$; c'est-à-dire : $2x + 9 > 5$.

Exercice de fixation

$a, b\ et\ c$ sont des nombres rationnels.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si\ a < b, alors\ a + c > b + c$	
$Si\ a < b, alors\ a + c < b + c$	

Corrigé

$Si\ a < b, alors\ a + c > b + c$	faux
$Si\ a < b, alors\ a + c < b + c$	vrai

Propriété 2

En multipliant par un même nombre non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient :

- une nouvelle inégalité de même sens si ce nombre est positif ;
- une nouvelle inégalité de sens contraire si ce nombre est négatif.

a, b et k sont des nombres rationnels.

- k est **positif et non nul.**
  - Si $a < b$, alors $ka < kb$.
  - Si $a > b$, alors $ka > kb$.

- k est **négatif et non nul.**
  - Si $a < b$, alors $ka > kb$.
  - Si $a > b$, alors $ka < kb$.

Exemples

- $4x < 13$, donc $2 \times 4x < 2 \times 13$; c'est-à-dire : $8x < 26$.
- $5x < 7$, donc $-3 \times 5x > 7 \times (-3)$; c'est-à-dire : $-15x > -21$.

Exercice de fixation

$a, b\ et\ c$ sont des nombres rationnels.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac < bc$	
$Si\ a < b\ et\ c > 0, alors\ ac < bc$	
$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac < bc$	
$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac > bc$	

Corrigé

$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac < bc$	faux
$Si\ a < b\ et\ c > 0, alors\ ac < bc$	vrai
$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac < bc$	faux
$Si\ a < b\ et\ c < 0, alors\ ac > bc$	vrai

3. Résolution d'une inéquation

Méthodes

- Pour résoudre une inéquation du type $x + a < b$ (ou $x + a > b$), on ajoute à chaque membre de l'inéquation l'opposé de a pour se ramener à une inéquation du type $x < u$ (ou $x > u$).
- Pour résoudre une inéquation du type $ax < b$ (ou $ax > b$), on multiplie chaque membre de l'inéquation par l'inverse de a pour se ramener à une inéquation du type $x < v$ (ou $x > v$).

Exemples

- Déterminons les solutions de l'inéquation $x - 8 < 5$.

$x - 8 < 5$;

$x - 8 + 8 < 5 + 8$;

$x < 13$.

Tout nombre plus petit que 13 est solution de l'inéquation $x - 8 < 5$.

- Déterminons les solutions de l'inéquation $4x > 8$.
  $\frac{1}{4} \times (4x) > \frac{1}{4} \times 8$;
  $x > \frac{8}{4}$;
  $x > 2$.

Tout nombre plus grand que 2 est solution de l'inéquation $4x > 8$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Transforme les inéquations ci-dessous en une inéquation du type $x > a$ ou $x < a$ ayant les mêmes solutions.

a) $x + 11 < -8$.
b) $x - 12 > -19$.
c) $x - 3 < \frac{5}{4}$.

Corrigé

a) $x + 11 < -8$;
$x + 11 - 11 < -8 - 11$;
$x < -19$.

b) $x - 12 > -19$;
$x - 12 + 12 > -19 + 12$;
$x > -7$.

c) $x - 3 < \frac{5}{4}$;
$x < \frac{5}{4} + 3$;
$x < \frac{17}{4}$.

Exercice 2

Détermine pour chacune de ces inéquations, trois nombres solutions.

a) $2x < 5$.

b) $-3x < -18$.

Corrigé

a) Résolvons l'inéquation $2x < 5$.

$\frac{1}{2} \times (2x) < \frac{1}{2} \times 5$;

$x < \frac{5}{2}$.

Tout nombre plus petit que $\frac{5}{2}$ est solution de l'inéquation $2x < 5$.

Donc $0; 1\ et -2$ sont trois solutions de l'inéquation $2x < 5$.

b) Résolvons l'inéquation $-3x < -18$.

$-\frac{1}{3} \times (-3x) > -\frac{1}{3} \times (-18)$;

$x > 6$.

Tout nombre plus grand que 6 est solution de l'inéquation $-3x < -18$.

Donc $7; 10\ et\ \frac{29}{4}$ sont trois solutions de l'inéquation $-3x < -18$.

C. SITUATION D'EVALUATION

René et Bilé sont deux cultivateurs de la région de Divo. Ils ont ensemble livré trois tonnes de cacao à la coopérative de leur village a raison de 700 F le kilogramme. La production de René pèse plus de deux tonnes.

Le gérant de la coopérative, après avoir payé René, annonce qu'il ne lui reste plus que la somme de 750 000 F dans sa caisse. Troublé par cette annonce, Bilé demande à son fils, élève en classe de 4è qui l'accompagne, si le gérant peut payer la totalité de son argent. Ce dernier te sollicite pour répondre à la préoccupation de son papa.

1- Écris une inéquation qui traduit le poids (en kg) de la production de René.
2- Justifie que Bilé peut percevoir la totalité de son argent.

Corrigé

1-Notons x le poids (en kg) de la production de René.

Une inéquation qui traduit le poids de la production de René est : $x > 2000$.

2- René et Bilé ont vendu 3 tonnes et René a plus de 2 tonnes, donc Bilé a une production inférieure à 1 tonne soit 1000 kg.

Le prix d'une tonne de cacao est :

700 F $\times$1000=700 000 F et 700 000 < 750 000. Or, Bilé a moins de 1000 kg de cacao. Donc, Bilé peut percevoir la totalité de son argent.

D. EXERCICES

D-1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

a ,b et c sont des nombres rationnels et x est l'inconnue.

Remplace les pointillés par le mot qui convient (**équation , égalité, premier, second**)

Une ………………………………de la forme $ax + b = c$ est une ………………………………………………..

$ax + b$ est le ……………………………………………………

c est le ……………………………………………………………

Exercice2

Remplace les pointillés par le mot qui convient (**ajoutant, égalité, inégalité, multipliant, non nul**)

En ………………………………un même nombre rationnel à chaque membre d'une……………………….. . on obtient une nouvelle inégalité.

En ……………………………………chaque membre d'une…………………………par un même nombre rationnel………………, on obtient une nouvelle égalité.

Exercice 3

Réponds par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

1) 4 est solution de l'équation $x - 6 = 2$.
2) 28 est solution de l'équation $\frac{x}{2}$ - 4= 9.
3) 3 est solution de l'équation $3x + 4 = 2x + 7$.
4) – 5 est solution de l'équation $\frac{x}{7}$ +11 = -22 .

Exercice4

Résous dans $\mathbb{Q}$, les inéquations suivantes.

$2x - 3 < 4x - 7$; $y + 4 > 8$

$-5y + 3 > -7$; $-\frac{7}{8}x + 3 < 4$.

D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 5

1) Traduis chacune des phrases suivantes par une équation :
   a) La moitié d'un nombre est égal à 11.
   b) Le double d'un nombre diminué de 3 est égal à 0.
2) Déterminer pour chaque équation de la question 1) le premier et le second membre.

Corrigé

1. a) Soit x ce nombre.

Alors, on a : $\frac{1}{2}x = 11$.

b) Soit x ce nombre.

Alors, on a : $2x - 3 = 0$.

2. $\frac{1}{2}x$ est le premier membre et 11 est le second membre de l'équation $\frac{1}{2}x = 11$.
$2x - 3$ est le premier membre et 0 est le second membre de l'équation $2x - 3 = 0$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $x + 2 = 5$; 2. $x + 14 = 6$; 3. $x - 7 = 3$; 4. $-x - 9 = 0$ 5. $4x = 8$; 6. $2t - 5 = 10$

Corrigé

1. $x + 2 = 5$
$x + 2 - 2 = 5 - 2$
$x = 3$

3 est la solution de l'équation $x + 2 = 5$.

2. $x + 14 = 6$

$x + 14 - 14 = 6 - 14$

$x = -8.$

-8 est la solution de l'équation $x + 14 = 6.$

3. $x - 7 = 3$

$x - 7 + 7 = 3 + 7$

$x = 10.$

10 est la solution de l'équation $x - 7 = 3.$

4. $-x - 9 = 0$

$-x - 9 + 9 = 0 + 9$

$-x = 9$

$x = -9$

-9 est la solution de l'équation $-x - 9 = 0.$

5. $4x = 8$

$\frac{1}{4} \times 4x = 8 \times \frac{1}{4}$

$x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

2 est la solution de l'équation $4x = 8.$

6. $2t - 5 = 10$

$2t - 5 + 5 = 10 + 5$

$2t = 15$

$\frac{1}{2} \times 2t = 15 \times \frac{1}{2}$

$t = \frac{15}{2}.$

$\frac{15}{2}$ est la solution de l'équation $2t - 5 = 10.$

Exercice 7

Traduis par une inéquation chacune des situations suivantes :

1. Le triple d'un nombre augmenté de 5 est supérieur à 1.
2. La différence d'un nombre et de 15 est inférieur à 10.
3. Le côté d'un carré est tel que le périmètre de ce carré est plus grand que 64 cm.

Corrigé

1. Soit x ce nombre.
   Alors, on a : $3x + 5 > 1$.
2. Soit x ce nombre.
   Alors, on a : $x - 15 < 10$.
3. Soit x le côté du carré.
   Alors, on a : $4x > 64$.

D-3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 8

On donne l'inéquation $3x + 2 < 5$

1. Cite 5 nombres solutions de cette inéquation
2. Le nombre 5 est-il solution
3. Le nombre O est-il solution

Corrigé

1. $0\ ;\ -2\ ;\ -10\ ;\ -1\ ; -5$
2. Le nombre 5 n'est pas solution car $3 \times 5 + 5 = 20\ > 5$
3. Oui, car $3 \times 0 + 2 = 2 < 5$

Exercice 9

1. Trouve trois nombres solutions de l'inéquation :$\frac{5}{4}x > 5$.
2. Trouve trois nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation : $-6x < -4$.

Exercice 10

Transforme les inéquations ci-dessous en une inéquation du type « $x < a$ »

1. $x + 5 < 8$; 2. $2x - 4 < -10$; 3. $-3x + 5 > 0$; 4. $3x + 18 > 3$;

5. $-x - 7 < -2$; 6. $\frac{3}{2}x > \frac{1}{4}$; 7. $\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{4}$.

4ème
Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Code :

THEME: Organisation et traitement des données

LEÇON 10 : STATISTIQUE **Durée : 6 heures**

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une grande école a mis en stage cinq de ses étudiants, N'golo, Tapé, Kouamé, Yapi et Tayé dans une entreprise à Boundiali. Ces stagiaires ont été évalués de manière continue pendant la période de stage.
Voici les notes obtenues chronologiquement par chacun d'eux :
N'golo : 14 – 16 – 12 – 14 – 13-14
Yapi : 15– 14 – 11 – 16– 12 -12
Tapé: 16 – 12 – 10 – 14 – 12-14
Tayé : 13 – 15 – 14 – 14– 13 -12
Kouamé : 13 – 15 – 14 – 14– 13 -12
À la fin du stage, l'entreprise décide d'embaucher les trois meilleurs stagiaires en établissant la liste des étudiants par ordre de mérite.
Le petit frère de Tapé, en classe de 4ème, veut savoir si Tapé fera partie des embauchés.

B - CONTENU DE LA LEÇON

I- Mode d'une série statistique

Définition

On appelle mode d'une série statistique, toute modalité qui a le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence).

Exemple

Modalités	5	10	15	20	25	30
Effectifs	4	27	11	12	20	4

Le mode de cette série statistique est 10. C'est la modalité qui a le plus grand effectif.

Exercice de fixation

Quel est le mode de la série statistique dont le tableau des effectifs est donné ci-dessous ?

Modalités	Football	Handball	Volley-ball	Natation
Effectifs	25	30	15	30

Corrigé
Cette série statistique a deux modes qui sont : Handball et Natation.

Remarque
Une série statistique peut avoir un ou plusieurs modes.

II- Moyenne d'une série statistique

1. Définition

On appelle moyenne d'une série statistique, le quotient de la somme de toutes les modalités par l'effectif total.

Exemple

La moyenne **M** de la série statistique : 12 ; 6 ; 20 ; 12 ; 15 est :

$$\mathbf{M} = \frac{12+6+20+12+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

La moyenne de cette série statistique est égale à 13.

Exercice de fixation

Calcule la moyenne M de la série statistique ci-dessous :

95 ; 105 ; 100 ; 90 ; 95 ; 105 ; 95 ; 105 ; 100 ; 95 ; 100 ; 100.

Corrigé

$$M = \frac{95+105+100+90+95+105+95+105+100+95+100+100}{12} = \frac{1185}{12} = 98,75$$

La moyenne de cette série statistique est égale à 98,75.

2. Méthode

Pour obtenir la moyenne d'une série statistique, on peut procéder comme suit :

- on multiplie chaque modalité (valeur) par l'effectif correspondant ;
- on additionne les produits obtenus ;
- on divise cette somme par l'effectif total.

Exemple

Le tableau ci-dessous est le tableau des effectifs d'une série statistique.
Calculons la moyenne de cette série statistique.

Modalités	2	5	6	8	12	15
Effectifs	8	5	9	2	9	7

Corrigé

Notons M la moyenne de cette série statistique.

$$M = \frac{2\times 8+5\times 5+6\times 9+8\times 2+12\times 9+15\times 7}{8+5+9+2+9+7} = \frac{324}{40} = 8,1$$

La moyenne de cette série statistique est de 8,1.

Exercice de fixation

Voici les notes données à un groupe de 15 élèves.

Notes	3	5	6	7	7,5	8	9
Effectifs	2	1	4	1	2	3	2

Détermine la note moyenne.

Corrigé

$$M = \frac{3\times2+5\times1+6\times4+7\times1+7,5\times2+8\times3+9\times2}{2+1+4+1+2+3+2} = \frac{99}{15} = 6,6$$

La note moyenne est 6,6.

III- Diagramme semi-circulaire

1. Présentation

On peut représenter les effectifs (ou les fréquences) de chaque modalité d'une série statistique par des secteurs angulaires (ce sont des parties du demi disque déterminées par des angles au centre). C'est un **diagramme semi-circulaire**.

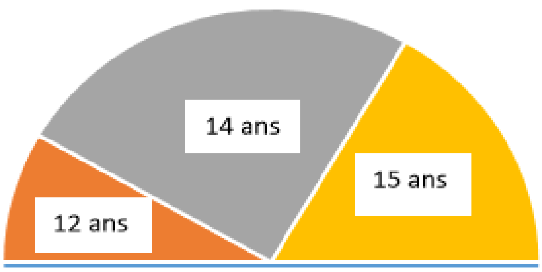
A chaque modalité, on associe un secteur angulaire dont la mesure en degré est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la modalité qu'il représente.

Exemple

Le tableau ci-dessous indique la répartition des effectifs associé à leur mesure d'angle.

Ages	12	14	15	Total
Effectifs	10	30	20	60
Mesure d'angle en degré	30°	90°	60°	180°

Représentons le diagramme semi-circulaire associé à cette série statistique.



Remarques

- Dans le cas d'un diagramme semi-circulaire, la somme des mesures des angles des secteurs angulaires est de 180°.
- La mesure en degré d'un secteur est donnée par la formule ci-dessous :

$$\boxed{mesure\ en\ degré\ du\ secteur = \frac{180° \times effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ \ total}}$$

Exercice de fixation

Le tableau suivant donne la répartition des fruits vendus par Awa la veille des congés de Toussaint.

Modalités	Bananes	Mangues	Oranges	Papaye	TOTAL
Effectifs	36	19	25	10	90
Mesures d'angle en degrés(°)					180

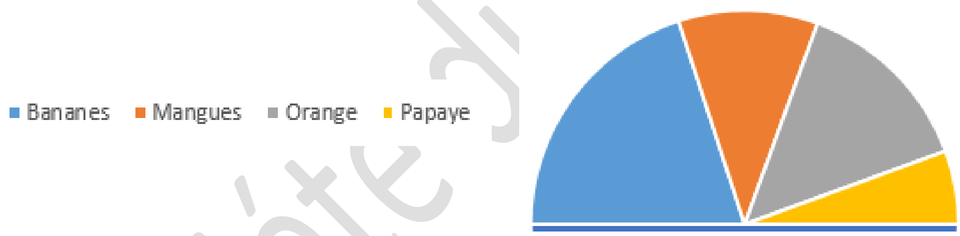
1) Recopie et complète le tableau en déterminant la mesure de l'angle correspondant à chaque modalité.
2) Construis le diagramme semi-circulaire représentant cette série statistique.

Corrigé

1)

Modalités	Bananes	Mangues	Oranges	Papaye	TOTAL
Effectifs	36	19	25	10	90
Mesures d'angle en degrés(°)	72	38	50	20	180

2)



2. Dresser un tableau à partir d'un diagramme semi-circulaire

a) Tableau des effectifs

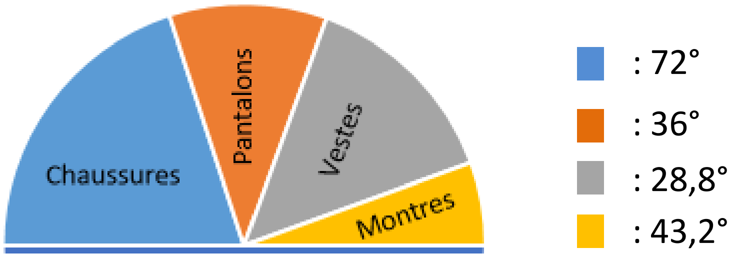
Un diagramme semi circulaire étant donné, pour déterminer les effectifs de chaque modalité, on peut utiliser le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Modalité			
Mesure de l'angle			
Effectif			

$\times \frac{effectif\ total}{180}$

Exercice de fixation

Avant les fêtes de fin d’année, Koné a vendu au total 50 articles. Ce sont des pantalons, des chemises, des vestes et des montres.
Le diagramme semi-circulaire ci-dessous représente le bilan de ces ventes.
Dresse le tableau des effectifs des articles vendus.



Corrigé

Modalités	Chaussures	Pantalons	vestes	Montres	TOTAL
Mesures d’angle en degrés(°)	72	36	28,8	43,2	180°
Effectifs	20	10	8	20	50

On multiplie chaque mesure donnée par $\frac{50}{180}$ *(ou bien* $\frac{5}{18}$*) pour obtenir l’effectif e la modalité.*

b) Tableau des fréquences

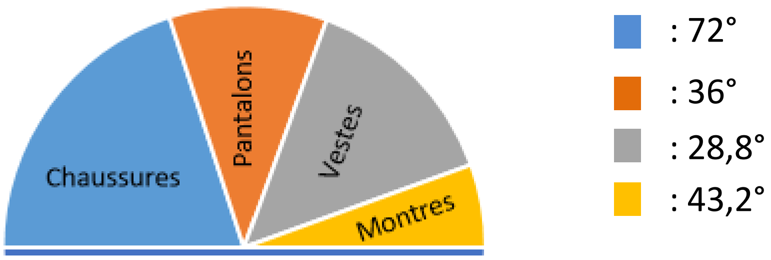
Un diagramme semi circulaire étant donné, pour déterminer la fréquence de chaque modalité, on peut utiliser le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Modalité			
Mesure de l’angle			
Fréquence			

$\times \frac{1}{180}$

Exercice de fixation

Avant les fêtes de fin d’année, Koné a vendu au total 50 articles. Ce sont des pantalons, des chemises, des vestes et des montres.
Le diagramme semi-circulaire ci-dessous représente le bilan de ces ventes.
Dresse le tableau des fréquences des articles vendus.



Corrigé

Modalités	Chaussures	Pantalons	vestes	Montres	TOTAL
Mesures d'angle en degrés(°)	72	36	28,8	43,2	180°
Fréquence	0,4	0,2	0,16	0,24	1
Fréquence en %	*40*	*20*	*16*	*24*	*100*

On multiplie chaque mesure donnée par $\frac{1}{180}$ *pour obtenir la fréquence de la modalité.*

C- SITUATION D'EVALUATION

Cette année, il a été décidé de l'organisation d'un bal de fin d'année pour les élèves de la promotion quatrième d'un collège.
À cet effet, cinq noms d'artistes sont suggérés : DJ Lewis (L), Matty Dollar (M), Garagistes (G), Antoinette Konan (A) et Billy Billy (B).
Par manque de moyen suffisant, l'administration propose aux organisateurs de choisir l'artiste préféré des élèves. Une enquête menée par le comité d'organisation auprès d'un groupe d'élèves de la promotion donne les résultats suivants :

L A A M M G B B B L M L G M A G L M G A M B L M LB M A L B A B B A A

L L M A B A M A B L BB AG M G B L A A A B B G G B M B B M A A M M M

Étant élève de cette promotion, tu t'engages à faire une présentation simple et sans contestation des résultats de l'enquête qui permettra de faire le bon choix rapidement et sans contestation..

1. Dresse le tableau des effectifs de cette série statistique.
2. Construis le diagramme semi-circulaire des effectifs de cette série statistique.
3. Donne le nom de artiste préféré des élèves.

Corrigé

1.

Modalités	L	M	G	A	B	Totaux
Effectifs	11	16	8	17	18	70

2.

Modalités	L	M	G	A	B	Totaux
Effectifs	11	16	8	17	18	70
Mesure d'angle en degré	28	41	21	44	46	180

3. L'artiste préféré des élèves est Billy Billy.

(Diagramme semi-circulaire à insérer)

D- EXERCICES

D-1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Aux deux premiers trimestres, un élève a obtenu en mathématiques les notes suivantes :
12 ; 9 ; 11,5 ; 13 ; 8,5 ; 14 ; 15.
Détermine la note moyenne de cet élève.

Corrigé

$$M = \frac{12 + 9 + 11,5 + 13 + 8,5 + 14 + 15}{7} = \frac{83}{7} = 11,8571429$$

La note moyenne de cet élève est 11,86.

Exercice 2

Les notes sur 10 des 20 élèves d'une classe de quatrième à une interrogation écrite sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Notes	3	5	6	7	7,5	8	9	10
Effectifs	2	5	4	1	2	3	2	1

1) Donne le mode de cette série statistique.
2) Détermine la note moyenne.

Corrigé

1) Le mode de cette série statistique est 5.
2) $M = \frac{3\times2+5\times5+6\times4+7\times1+7,5\times2+8\times3+9\times2+10\times1}{20} = \frac{129}{20} = 6,45$

   La note moyenne est de 6,45.

D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

La direction régionale de la santé de Bouaflé a relevé l'âge de chacun des 65 élèves d'une classe de troisième. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Âges	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	7	8	10	20	12	5	3

1) Détermine le mode de cette série statistique.
2) Quel est le caractère étudié ?
3) Calcule la moyenne d'âge de cette classe.

Corrigé

1) Le mode de cette série statistique est 15.
2) Le caractère étudié est quantitatif.
3) $M = \frac{12\times7 + 13\times8 + 14\times10 + 15\times20 + 16\times12 + 17\times5 + 18\times3}{7 + 8 + 10 + 20 + 12 + 5 + 3} = \frac{959}{65} = 14,75$

   La moyenne d'âge de cette classe est 14,75.

Exercice 4

Voici les notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième lors d'un devoir de mathématique noté sur 20.

08 ; 09 ; 14 ; 08 ; 12 ; 09 ; 07 ; 12 ; 09 ; 13 ; 09 ; 11 ; 12 ; 07 ; 09 ; 08 ; 08 ; 15 ; *10* ; 14 ; 08 ; 13 ; 07 ; 08 et 07.

1) Quel est l'effectif total de cette classe ?
2) Etablis le tableau des effectifs.
3) Détermine le mode de cette série statistique.
4) Calcule la moyenne de cette série statistique.
5) Construis le diagramme semi-circulaire des effectifs de cette série.
   Échelle : on prendra comme rayon 5 cm.

Corrigé

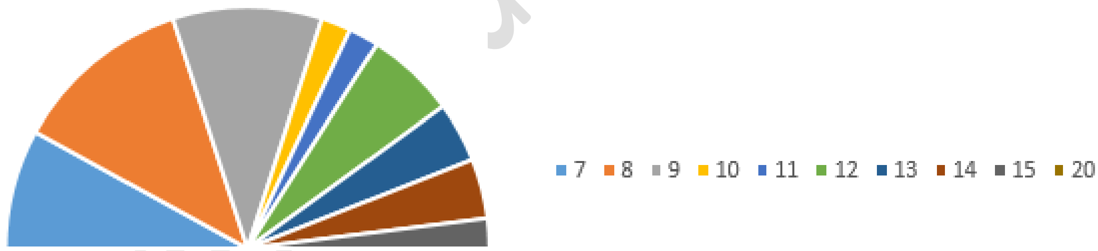
1) L'effectif de cette classe est 25.
2) Tableau des effectifs.

Notes	07	08	09	10	11	12	13	14	15
Effectif	4	6	5	1	1	3	2	2	1

3) Le mode de la série est 8 car il a le plus grand effectif.
4) $\frac{7\times4+8\times6+9\times5+10\times1+11\times1+12\times3+13\times2+14\times2+15\times1}{25}=\frac{247}{25}=9{,}88.$

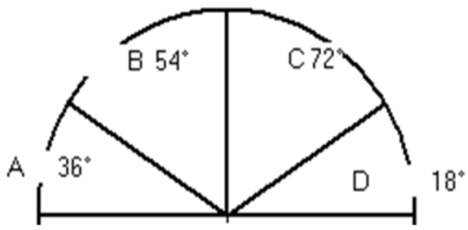
   La moyenne de la classe est : 9,88.

5)



Exercice 5

Le diagramme ci-contre représente la répartition de 1 000 abonnés dans 4 compagnies de téléphonie d'un pays.
1) Etablis le tableau des effectifs.
2) Détermine le mode de cette série statistique.
3) Etablis le tableau des fréquences.



Corrigé

1) Tableau des effectifs

Modalités	A	B	C	D	Total
Mesure d'anges	36	54	72	18	180
Effectifs	$\frac{36\times1000}{180}=200$	$\frac{54\times1000}{180}=300$	$\frac{72\times1000}{180}=400$	$\frac{18\times1000}{180}=100$	1 000

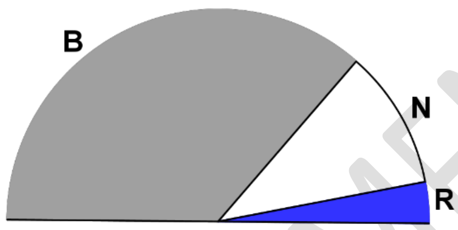
2) Le mode de cette série statistique est la modalité C.
3) Tableau des fréquences.

Modalités	A	B	C	D	Total
Effectifs	200	300	400	100	1 000
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1	1

D-3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 6

Les mers et océans contiennent 1 350 milliards de milliards de litres d'eau. Cela représente 97,5 % de l'eau de la terre. Le diagramme ci-dessous montre la répartition des 2,5 % qui restent, entre les banquises (B), les nappes souterraines (N), et les autres eaux (R) : lacs, fleuves, humidité du sol et l'air, eau des matières vivantes…



Calcule les quantités d'eau représentées par les banquises, puis par les nappes d'eau souterraines.

Exercice 7

Le tableau ci-dessous donne le sexe des enfants nés ce jour dans la maternité de Zouan-Hounien.

N° d'ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Sexe	F	F	M	F	M	F	F	F	F	M	F	M	M	F	M	F	M	M

a) Quelle est la population étudiée ?
b) Quel est l'effectif total de la population ?
c) Quel est le caractère étudié ?
d) Dresse le tableau des effectifs des sexes.
e) Dresse le tableau des fréquences.
f) Construis le diagramme semi-circulaire représentant ces données statistiques.

Exercice 8

Le tableau suivant donne les populations des pays d'Afrique francophones en 1990.

Algérie	18 351 810
Burkina	7 976 019
Burundi	4 852 000
Cameroun	10 446 000

Centrafrique	2 740 000
Congo	2 180 000
Côte d’Ivoire	11 154 000
Gabon	1 060 000
Guinée	6 380 000
Madagascar	10 800 000
Mali	7 600 000
Mauritanie	1 946 000
Niger	7 250 000
Sénégal	6 881 919
Tchad	5 061 000
Togo	3 250 000
Zaïre	32 460 000

a) Quelle est la population étudiée ?

b) Quel est le caractère étudié ?

c) Ce caractère est-il quantitatif ou qualitatif ?

d) Calcule la moyenne des populations des pays d’Afrique francophone.

e) Arrondis chaque effectif au million près puis construis le diagramme semi-circulaire des effectifs ainsi arrondis.

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

CODE

THEME : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

LEÇON 11 : PERSPECTIVE CAVALIERE **Durée : 8 heures**

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une journée dénommée « journée carrière », les élèves d'une classe de quatrième d'un lycée moderne ont effectué, en compagnie de leur professeur de mathématique, une visite dans une usine de fabrication de savons solides ayant la forme de pavé droit. De retour en classe, le professeur constitue les élèves en différents groupes et demande à chacun de ces groupes de représenter dans un cahier un savon vu à l'usine. Ayant vérifié la production de chaque groupe, le professeur affirme qu'aucune représentation ne respecte les règles de la perspective cavalière.

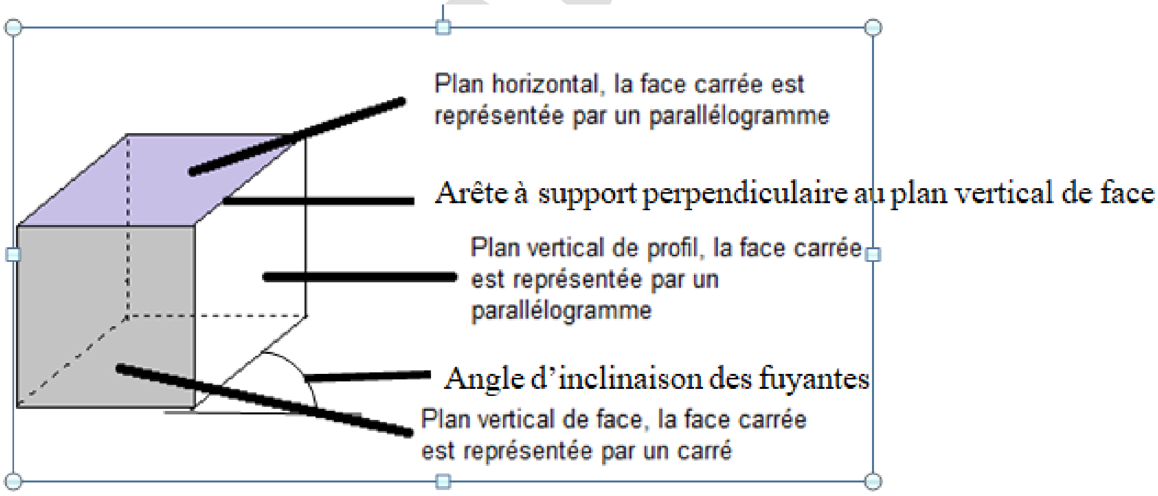
Curieux, les élèves se mettent à faire des recherches sur les règles de la perspective cavalière.

B – CONTENU DE LA LEÇON

La perspective cavalière est une technique de dessin qui permet de représenter dans le plan un solide de l'espace tout en rendant visibles les parties cachées.

I- Vocabulaire

Représentation d'un cube en perspective cavalière.



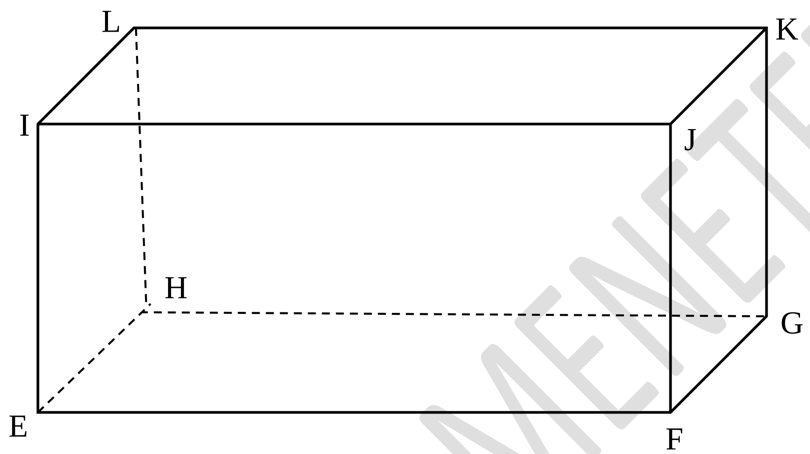
Exercice de fixation

Voici ci-dessous un solide représenté en perspective cavalière.

1. Donne le plan vertical de face arrière.

2. Cite un plan vertical de profil.

3. Donne un plan horizontal.



Corrigé

1. Le plan vertical de face arrière est le parallélogramme LKGH.
2. Un plan vertical de profil est le parallélogramme EILH ou FJKG.
3. Un plan horizontal est le parallélogramme LKJI ou EHGF.

II- Représentation en perspective cavalière

1. Règles de la perspective cavalière

Règle 1 : Des arêtes à supports parallèles sur l'objet sont représentées par des segments de supports parallèles sur le dessin.

Règle 2 : Toute face de l'objet, située dans le plan vertical de face est dessinée sans déformation.

Règle 3 : Des arêtes « cachées » sont représentées par des traits en pointillés.

Règle 4 : Les arêtes de l'objet, à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle de mesure fixée α avec la représentation de l'horizontal sur le dessin. (α est appelé : l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontal).

Règle 5 : Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face sont multipliées par un coefficient c. (c est appelé : coefficient de réduction).

Exercice de fixation

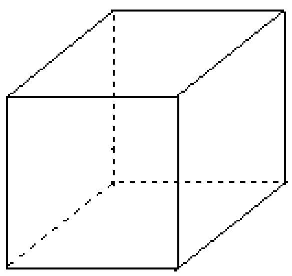
Pour chacune des affirmations suivantes, complète le tableau par « vrai » si l'affirmation est vraie ou par « faux » si l'affirmation est fausse.

Des arêtes cachées sont représentées par des traits continus	
Les arêtes de l'objet, à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont représentées par des segments à supports perpendiculaires	
Toute face de l'objet, située dans un plan vertical de face, est représentée sans déformation	
Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un coefficient de réduction plus petit que 1	

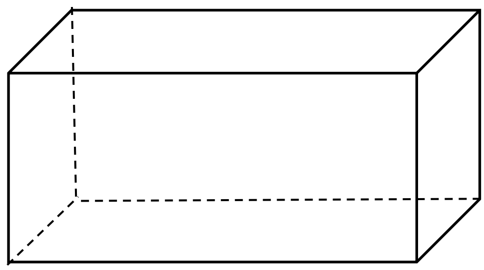
Corrigé

Des arêtes cachées sont représentées par des traits continus	Faux
Les arêtes de l'objet, à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont représentées par des segments à supports perpendiculaires	Vrai
Toute face de l'objet, située dans un plan vertical de face, est représentée sans déformation	Vrai
Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un coefficient de réduction plus petit que 1	Vrai

2. Quelques représentations en perspective cavalière d'un cube et d'un pavé droit



Cube



Pavé droit

Exercice de fixation

Parmi les figures ci-dessous, cite celles qui sont en perspective cavalière.

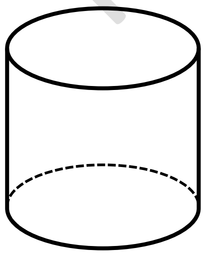


Figure 1

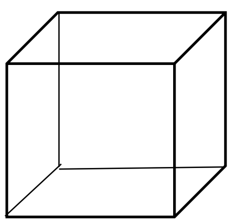


Figure 2

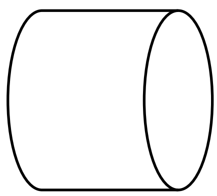


Figure 3

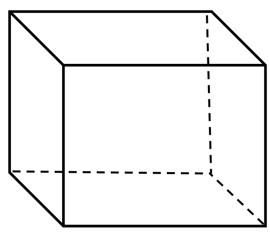


Figure 4

Corrigé

Les figures qui sont représentées en perspective cavalière sont : Figure 1 et Figure 4.

C -SITUATION D'EVALUATION

Lors d'un concours de Mathématiques réunissant les classes de quatrième d'un établissement scolaire, un exercice consiste à représenter en perspective cavalière, une boite de craie posée en face des candidats. Les dimensions de la boite de craie sont données comme suit :

- face avant : IJ = 9 cm et IF = 6 cm
- longueur arête [IK] = 6 cm

On donne c = 0,5 et $\alpha = 40^0$

Le rapporteur de l'équipe A, affirme que la longueur des fuyantes sera de 3 cm tandis qu'un autre élève de l'équipe s'y oppose.

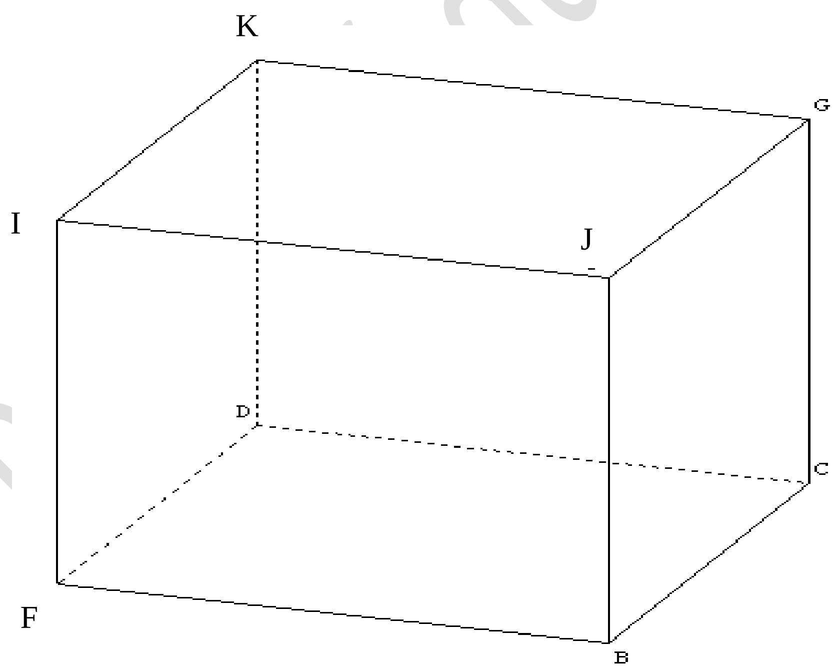
1. Dis si le rapporteur a raison et justifie ta réponse.
2. Représente cette boite de craie en perspective cavalière.

Corrigé

1. On sait que le coefficient de réduction est 0,5, les dimensions sur le dessin sont :
   - face avant : $IJ = 9 \times 0,5 = 4,5\,cm$ et $IF = 6 \times 0,5 = 3\,cm$
   - longueur arête : $IK = 6 \times 0,5 = 3\,cm$

Puisque [IK] est une fuyante, alors la longueur des fuyantes sera de 3 cm. Donc le rapporteur a raison.

2. Représentation de la boite de craie en perspective cavalière.



D- EXERCICES

D-1 EXERCICES DE FIXATION

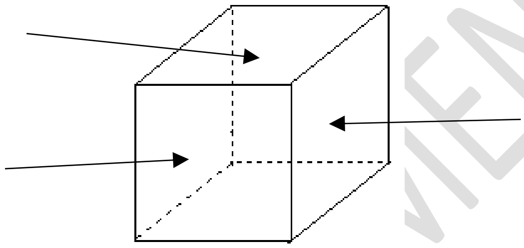
EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, complète le tableau par « VRAI » ou par « FAUX » .

Des arêtes cachées sont représentées par traits en pointillés.	
Les arêtes de l'objet, à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont représentées par des segments à supports parallèles.	
Des arêtes à supports parallèles sont représentées par des segments.	

EXERCICE 2

Observe le solide ci-dessous et complète la partie indiquée par chaque flèche par le mot qui convient : **plan horizontal ; plan vertical de profil ; plan vertical de face.**



EXERCICE 3

Parmi les cubes ci-dessous, indique ceux qui ne sont pas représentés en perspective cavalière. Justifie ta réponse.

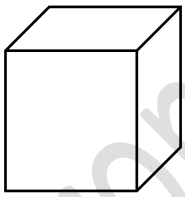


Figure 1

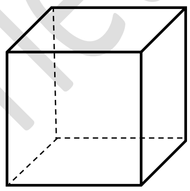


Figure 2

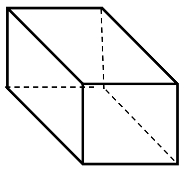


Figure 3

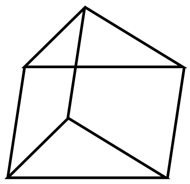


Figure 4

D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

EXERCICE 4

On a représenté un pavé droit en perspective cavalière, mais cette représentation est perdue. Sur la représentation en perspective, on avait:

- ABCD face frontale telle que : AB = 5 cm et AD = 3 cm
- coefficient de réduction utilisé : 0,75

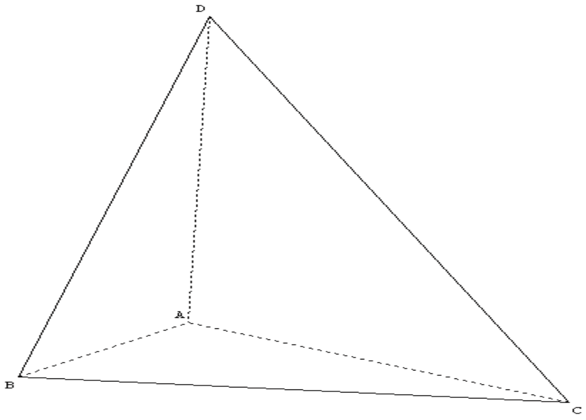
1. Calcule la longueur de la fuyante [CG] sachant que l'arête [CG] du pavé mesure 4cm.

2. Représente ce pavé droit en perspective cavalière sachant que l'angle d'inclinaison des fuyantes est de 35^0.

EXERCICE 5

Représente un prisme à base triangulaire qui est posé sur l'une de ses faces latérales en perspective cavalière. Les dimensions de la base sont : 3 cm ; 4 cm et 5 cm.

Corrigé



D-3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 6

Représente en perspective cavalière un pavé droit de dimensions 2 cm ; 4 cm et 5 cm.

(On prendra $c = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 45°$)

EXERCICE 7

Représente en perspective cavalière un cube d'arête 4 cm. (On prendra $c = \frac{3}{4}$ et $\alpha = 30°$)

EXERCICE 8

Représente en perspective cavalière un cylindre de hauteur 4 cm et de diamètre 3 cm.