COMPETENCE

Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

THÈME : **GÉOMÉTRIE DU PLAN**

Leçon :

Nombres complexes et Transformations du plan

Dans toute cette leçon, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé (O , I , J)

1- Transformations élémentaires du plan

1-1 / Rappels :

On appelle transformation du plan toute application bijective du plan dans le plan.

Exemples : translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale, rotation, homothétie

1-2 / Bijection complexe – Écriture complexe

Soit F une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. On définit ainsi une bijection f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z du point M associe l'affixe z' de l'image M' du point M par F.

- Cette application f : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à z associe z' s'appelle **bijection complexe** associée à la transformation du plan F.
- L'égalité **z'= f(z)** s'appelle **l'écriture complexe** de F.

Exemple : Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe 3 + 2i. Déterminons l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit M(z) et M'(z') son image par $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}$(M) = M' donc $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Rightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Rightarrow z' - z = 3 + 2i$

On en déduit que l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est : $\boldsymbol{z' = z + 3 + 2i}$

Remarques : l'écriture complexe permet de déterminer l'affixe de l'image d'un point par une transformation du plan

Exemples : Soit A(-10+7i) et A' son image par la translation $t_{\vec{u}}$ de l'exemple précédent.

On a alors $z_{A'} = z_A + 3 + 2i = -10 + 7i + 3 + 2i = -7 + 9i$

1-3/ Écritures complexes de transformations élémentaires du plan

On retiendra les résultats suivants :

- L'écriture complexe de $S_{(OI)}$ est : **z' =** $\bar{z}$
- L'écriture complexe de $S_{(OJ)}$ est : **z' = -** $\bar{z}$
- L'écriture complexe de S_O est : **z' =** $-z$
- L'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe b est : **z' = z + b**
- L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est : **z' = kz**
- L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est : **z' =** $e^{i\theta}z$

2/ Similitudes directes du plan

2-1/ Définition

Soit k un nombre réel strictement positif.

On appelle similitude toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', M'N' = k MN

Conséquence : Toute similitude **multiplie toute longueur par son rapport.**

Ainsi l'image d'un cercle de rayon 2 par une similitude de rapport 5 est un cercle de rayon **2 X 5 = 10.**

2- 2/ Similitude directe

Une similitude est dite directe lorsqu'elle conserve l'orientation des angles. Elle est dite indirecte lorsqu'elle ne conserve pas l'orientation des angles.

Exemple : les translations, les rotations, les homothéties sont des similitudes directes

NB : Les similitudes indirectes ne sont pas au programme en Tle D

2- 3/Écriture complexe d'une similitude directe

Propriétés :

Toute écriture complexe de la forme z' = az + b où $a \in \mathbb{C} - \{o\}$ et $b \in \mathbb{C}$ et celle d'une similitude directe.

Éléments caractéristiques d'une similitude directe

Soit S une similitude directe d'écriture complexe z' = az + b avec a$\neq$ 1. Alors :

- Le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ est le centre de S
- Le nombre k = $|a|$ est le rapport de S
- Le nombre θ = Arg(a) est l'angle de S

Ω , k et θ sont appelés les **éléments caractéristiques** de S

On note $S_{(\Omega\ ,k\ ,\theta\ )}$ la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ.

Détermination d'une similitude directe

Soit F une transformation du plan d'écriture complexe z' = az + b où a $\in$ $\mathbb{C}-\{o\}$ et b $\in$ $\mathbb{C}$

		Nature et éléments caractéristiques de F
$a \in \mathbb{R}$	$a = 1$	F est une translation de vecteur d'affixe b
	$a \neq 1$	F est une homothétie de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
$a \in \mathbb{C}$ et $a \notin \mathbb{R}$	$\|a\| = 1$	F est une rotation. Son angle est Arg(a) et son centre est d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
	$\boldsymbol{\|a\| \neq 1}$	F est une similitude directe. Son rapport est $\|a\|$, son angle est Arg(a) et son centre est d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Exercices à chercher pour le Mercredi 25 /03 /2020 :

N° 19 et 20 Page 144 + N° 23 P 145 _ Vallesse TD.