B. Les mathématiques

On peut admettre que les principes logiques sont innés car ils ne font que poser une exigence de cohérence interne à la pensée qui est la condition du sens. Les mathématiques aussi paraissent évidentes et innées, et pourtant elles semblent bien nous délivrer une connaissance du monde (espace, quantités). Cela est problématique : à moins de supposer qu'un dieu ait mis en nous ces « semences de vérité » (Descartes), comment expliquer la conformité des mathématiques, c'est-à-dire de notre esprit, au monde ? Pour répondre à cette question nous allons commencer par une présentation des mathématiques afin de mieux comprendre, comme pour la logique, de quoi il retourne.

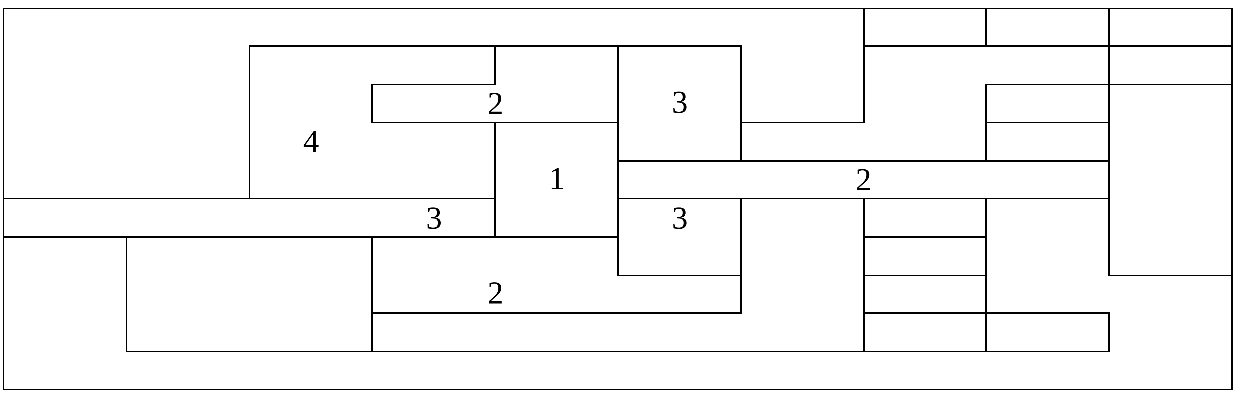
1. Présentation

Les mathématiques ont un statut extrêmement prestigieux parmi les sciences. Elles sont au fondement du développement de la raison humaine, et en particulier de la philosophie grecque. En effet, depuis Thalès, Pythagore et Euclide, les mathématiques ont constitué le modèle de toute science et ont considérablement inspiré la philosophie. Par exemple, l'idéalisme platonicien que nous avons vu avec l'allégorie de la caverne est fortement inspiré des mathématiques, qui nous révèlent l'existence d'être idéaux et éternels (points, droites, triangles, cercles) qui transcendent les êtres physiques soumis au temps et au devenir (traits tracés au tableau, bulles de savon, etc.).

A quoi est dû un tel prestige ? Sans doute d'abord au succès des mathématiques, qui a permis aux hommes d'agir avec succès sur le monde. Aujourd'hui encore, n'importe quel pont, n'importe quel ouvrage d'ingénieur repose sur la vérité des mathématiques. Mais leur prestige est sans doute aussi dû à leur grande rigueur, qui en fait un modèle de raisonnement et de scientificité. Tout, dans une démonstration mathématique, est clairement défini et démontré, rien n'est laissé au hasard. Enfin, tout ou presque.

Avant de nous lancer dans l'analyse de la vérité des mathématiques, soulignons la grande variété de leur objet. On dit souvent que les mathématiques sont les sciences de la *quantité* (arithmétique). Mais il faut au moins ajouter à cela l'espace (géométrie). Et il faut bien voir la richesse et la diversité des mathématiques, qui les apparente parfois à une théorie si générale qu'elle confine à la simple logique. D'ailleurs mathématiques et logique sont étroitement liées. Je donnerai ici deux exemples de théories mathématiques exotiques qui donnent une idée de leur diversité.

(1) La théorie des quatre couleurs. Cette théorie affirme qu'il suffit de quatre couleurs pour pouvoir colorier toute carte (c'est-à-dire tout plan découpé en territoires par des lignes quelconques) sans que deux territoires ne soient jamais de la même couleur. Voici un exemple illustratif :



On commence par colorier le carré central avec la couleur 1. La surface au-dessus ne peut pas être coloriée avec la même couleur : il faut donc une deuxième couleur, 2. Le carré à droite ne peut être colorié ni avec la couleur 1, ni avec la couleur 2, car il les touche toutes deux. On doit donc utiliser une nouvelle couleur de notre palette, 3. La surface au-dessous de ce carré touche 1 et 3, mais pas 2. On peut donc réutiliser 2 pour la colorier, afin de ne pas introduire inutilement une nouvelle couleur. La surface au-dessous touche 1 et 2, on peut donc réutiliser 3. En continuant à tourner, on utilise encore 2, puis 3. Mais la dernière surface touche à la fois 1, 2 et 3. Il faut donc une quatrième couleur, 4. Vous pouvez vérifier que toute la carte, et n'importe quelle autre, peut être coloriée avec seulement quatre couleurs. La théorie des quatre couleurs démontre ce résultat mathématiquement.

(2) La théorie des nœuds. Cette théorie porte sur tout anneau de ficelle, aussi embrouillé qu'on veut. Elle établit des opérations possibles sur les nœuds qui sont exactement analogues aux opérations que l'on peut faire sur les nombres. Nous l'évoquerons plus précisément plus loin.

Remarquons toutefois que ces deux théories, aussi diverses soient-elles, sont toutes deux liées à l'espace. Il n'est donc pas faux de dire que les mathématiques traitent de nombres et d'espace. Mais d'autres exemples[3], que nous verrons par la suite, montreront que les mathématiques sont parfois beaucoup plus générales, et peuvent traiter d'objets parfaitement indéterminés.

Voici, pour terminer, deux exemples de raisonnements mathématiques pour vous convaincre de leur utilité et de leur puissance. Premier exemple : on veut créer une feuille de papier rectangulaire telle que, si on la plie en deux, on obtient un nouveau rectangle ayant exactement la même proportion. Comment faire ? Ce genre de problème montre la puissance des mathématiques. Car on peut trouver le résultat par tâtonnement, en multipliant les essais et erreurs ; mais les mathématiques nous donnent une méthode pour trouver le résultat exact du premier coup. En effet, on veut un rectangle de petit côté a et de grand côté b tels que $a/(b/2) = b/a$. Résolvons cette équation : $a/(b/2) = b/a \Leftrightarrow 2a/b = b/a \Leftrightarrow 2a^2 = b^2$. Pour $a = 1$, on a donc $b^2 = 2$, soit $b = \sqrt{2}$. Cette proportion, découverte par Léonard de Vinci, est celle de nos feuilles de format A4.

Un autre raisonnement mathématique célèbre, qui en illustre la puissance, est celui d'Euclide visant à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. Cela semble particulièrement difficile, car il faut démontrer l'existence d'une infinité d'éléments. Mais on y parvient en renversant le problème et en démontrant qu'il *ne peut pas* en exister un nombre fini.

> Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Appelons P le plus grand nombre premier. Soit le nombre $1 \times 2 \times 3 \ldots \times (P-1) \times P + 1$. Appelons-le N. N est supérieur à P. N n'est pas divisible par 2, car le reste de sa division par 2 est 1. (En effet, $N = 2 \times (3 \times 4 \times 5 \ldots \times (P-1) \times P) + 1$.) De même, ce nombre n'est divisible par aucun nombre inférieur ou égal à P. Or tout entier naturel autre que 0 et 1 est soit un nombre premier, soit un produit de facteurs premiers. Si N est premier, alors P n'est pas le plus grand nombre premier, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. Mais si N n'est pas premier, il doit être un produit de facteurs premiers, et comme il n'est divisible par aucun nombre inférieur ou égal à P, il doit donc être divisible par un nombre premier plus grand que P, donc P n'est pas le plus grand nombre premier. Là aussi nous aboutissons à une contradiction. Puisque l'hypothèse « P est le plus grand nombre premier » nous mène nécessairement à une contradiction, nous devons rejeter cette hypothèse. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Cette méthode qui consiste à supposer le contraire de ce qu'on veut démontrer pour aboutir à une contradiction (une absurdité) est appelée un raisonnement par l'absurde. Notons qu'elle

[3] Par exemple la théorie des groupes.

repose sur le principe du tiers exclu, car on suppose que si A n'est pas faux (ici, A = « il existe une infinité de nombres premiers »), alors A est vrai. Ce principe a été contesté, et la possibilité de construire des systèmes cohérents qui admettent une troisième valeur de vérité (la valeur « indécidable ») montrent que le principe du tiers exclu est moins fondamental que le principe d'identité et le principe de contradiction. Nous voyons ici que les mathématiques, comme toute science et toute pensée, reposent sur les principes logiques.

2. Quel est le fondement des mathématiques ?

Mais les mathématiques ne se réduisent pas à la logique : en plus des principes logiques, elles reposent sur des principes proprement mathématiques. La question fondamentale qui se pose est de savoir d'où vient la vérité de ces principes mathématiques. Sur quoi repose une démonstration mathématique ?

Platon, dans le *Ménon*, montre qu'un simple esclave ignorant, répondant aux questions de Socrate, parvient à effectuer une démonstration mathématique (il s'agit de construire un carré dont la surface soit le double d'un carré donné). Il en conclut que les principes mathématiques sont innés en nous : nous ne les apprenons pas, nous les redécouvrons par ***réminiscence***. Il en va d'ailleurs ainsi, conclut Platon, pour toute connaissance : apprendre, c'est se souvenir de ce que l'on savait déjà. Ces réminiscences sont le signe que notre âme est immortelle : avant d'entrer dans notre corps elle devait être dans un monde idéal où elle appréhendait directement la vérité.

Cette vision des choses, outre son caractère peu convaincant, ne nous dit pas ce qu'est à proprement parler la spécificité des mathématiques sur la logique. Considérons un raisonnement mathématique, par exemple celui qui établit que la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Pour démontrer cela on peut tracer une parallèle à un côté d'un triangle qui passe par le sommet opposé. Par symétrie (sur les angles alternes internes), on remarque alors que la somme des angles vaut 180 degrés. Il est clair que dans ce cas il ne s'agit pas d'une simple tautologie, mais que nous avons découvert une véritable connaissance sur l'espace : d'où vient-elle, alors que nous avons l'impression que nous n'avons rien supposé, sinon des choses parfaitement évidentes et innées ?

En première analyse, on peut dire que ce raisonnement repose sur une intuition de l'espace. C'est cette intuition qui nous permet de « voir » une symétrie, par exemple. De même, l'arithmétique reposerait sur une intuition des nombres. A chaque fois, on remonte à des notions si évidentes qu'on ne peut les démontrer et qu'elles nous semblent indubitables. Mais peut-on véritablement tenir ces idées intuitives pour des « semences de vérité » mises en nous par Dieu (Descartes), pour des évidences indubitables (Pascal), bref pour des ***jugements synthétiques a priori*** (Kant), c'est-à-dire une connaissance innée du monde ?

Kant pense pouvoir prouver que l'intuition de l'espace et du temps[4] n'est pas a posteriori (issue de l'expérience) mais qu'au contraire elle est la condition de toute expérience : car sans la notion d'espace (et de causalité) je n'aurais même pas l'idée de choses indépendantes de moi, donc je n'aurais pas d'« expérience ». C'est sur la base de raisonnements de ce genre que Kant nous demande d'admettre l'idée que les connaissances mathématiques sont des *jugements synthétiques a priori*.

Pascal tire de ces limites de la démonstration l'idée que « le cœur a ses raisons, que la raison ne connaît point »[5], qu'« il n'y a rien de si conforme à la raison que ce désaveu de la raison »[6] et même que Dieu existe, car nous le connaissons par le « cœur », le « sentiment ». Bref, il voit surtout dans ces limites une humiliation de la raison :

---

[4] NB : pour Kant l'intuition du nombre repose sur l'intuition du temps, car elle repose sur le fait de compter, opération mentale temporelle.

[5] Pascal, *Pensées*, éd. Brunschvicg, § 277.

[6] *Id*., § 272.

Nous connaissons la vérité, non seulement par la raison, mais encore par le cœur ; c'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premiers principes, et c'est en vain que le raisonnement qui n'y a point de part essaye de les combattre. Les pyrrhoniens qui n'ont que cela pour objet, y travaillent inutilement. Nous savons que nous ne rêvons point ; quelque impuissance où nous soyons de le prouver par raison, cette impuissance ne conclut autre chose que la faiblesse de notre raison, mais non point l'incertitude de toutes nos connaissances, comme ils le prétendent. Car la connaissance des premiers principes, comme qu'il y a espace, temps, mouvement, nombres, est aussi ferme qu'aucune de celles que nos raisonnements nous donnent. Et c'est sur ces connaissances du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie, et qu'elle y fonde tout son discours. Le cœur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace et que les nombres sont infinis ; et la raison démontre ensuite qu'il n'y a point deux nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre. Les principes se sentent, les propositions se concluent ; et le tout avec certitude, quoique par différentes voies. Et il est aussi ridicule et inutile que la raison demande au cœur des preuves de ses premiers principes, pour vouloir y consentir, qu'il serait ridicule que le cœur demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre, pour vouloir les recevoir.

Cette impuissance ne doit donc servir qu'à humilier la raison, qui voudrait juger de tout, mais non pas à combattre notre certitude, comme s'il n'y avait que la raison capable de nous instruire.

Pascal, *Pensées*, éd. Brunschvicg, § 282

Il est bien entendu que la raison – ou plus précisément, la démonstration – a des limites infranchissable et que la vérité des démonstrations dépend tout entière d'autre chose que de la démonstration. Mais peut-on accepter pour autant sans autre forme de procès le « sentiment » comme critère ultime de toute vérité ? Sans doute que non, et les mathématiques elles-mêmes nous donnent une preuve éclatante de cet échec du « cœur », qui n'est pas moindre que celui de la « raison ».

3. La crise de la représentation

Reprenons notre raisonnement démontrant que la sommes des trois angles d'un triangle vaut 180 degrés. Nous nous sommes appuyés uniquement sur des choses « évidentes », sur des vérités du « cœur ». Parmi elles, il y avait l'idée que par le sommet du triangle il passe une unique parallèle au côté opposé. Cette idée était si évidente que nous nous sommes à peine aperçus que nous la supposions. C'est pourtant là un principe mathématique indémontrable.

Ce principe était bien connu des géomètres, depuis Euclide qui en avait fait le cinquième postulat de son système. Un *postulat* est une « demande », c'est-à-dire un principe que l'on pose au départ et que l'on demande au lecteur d'accepter, bien qu'il n'ait pas l'évidence d'un axiome. Ainsi, au fondement de la géométrie euclidienne on trouve 23 définitions (ex : le point est ce qui n'a pas de partie ; la droite est le plus court chemin d'un point à un autre, etc.), 10 axiomes ou notions communes (ex : deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ; le tout est plus grand que la partie) et 5 postulats, dont ce fameux cinquième postulat (une droite et un point étant donnés, il passe par le point une unique parallèle à la droite). Ce cinquième postulat était très célèbre, car il n'avait pas l'évidence des autres, et on pensait qu'il était possible de le démontrer. Les savants alexandrins, arabes et européens s'y essayèrent pendant plus de vingt siècles, sans succès. Au XIX^{e} siècle, le mathématicien Lobatchevski décida de procéder par l'absurde : il supposa que le cinquième postulat était faux, et en tira les conséquences logiques dans l'espoir de parvenir à une contradiction. Surprise, au lieu de parvenir à une contradiction il élabora un système parfaitement cohérent, créant ainsi la première ***géométrie non-euclidienne***, dans laquelle par un point il passe *plusieurs* parallèles à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à

180 degrés. Quelques années plus tard, Riemann supposa que par un point il ne passe *aucune* parallèle à une droite donnée, et il aboutit lui aussi à une géométrie cohérente.

Ce fut un véritable coup de tonnerre dans le ciel des mathématiques : si d'autres géométries que la géométrie euclidienne sont possibles, qu'est-ce qui prouve la vérité de celle-ci ? Ce ne peut pas être en tout cas la simple cohérence logique. C'est ainsi que commença la *crise du fondement des mathématiques*, qui n'est qu'une composante de la vaste ***crise de la représentation*** qui se produit au tournant du XIX^e siècle et qui touche aussi bien la peinture (avec l'invention de la photographie et l'essor de l'art non figuratif), la musique (avec la création du système atonal par Schönberg à Vienne), la physique (avec la relativité d'Einstein), la philosophie (avec l'apparition de l'inconscient et de la psychanalyse), le langage (avec la linguistique de Saussure), et même la logique elle-même (avec la découverte du paradoxe des classes par Russell en 1902) que les mathématiques proprement dites.

La crise du fondement des mathématiques redoubla d'ailleurs quand il fut établi par Einstein que la géométrie de notre monde n'est pas euclidienne mais riemannienne. L'espace de l'univers ne serait pas « plat », mais « sphérique ».

> Pour comprendre à quoi ressemble une géométrie non euclidienne, imaginons une sphère. Une droite est un cercle dont le rayon est celui de la sphère (ex : l'équateur pour la Terre). Un point étant donné, la droit passant par ce point passe donc par l'antipode de ce point : toute droite passant par le pôle Nord passe par le pôle Sud.
>
> Supposons une droite (par exemple l'équateur) et un point donnés. Par ce point il ne passe *aucune* parallèle à la droite. En effet, si le point est dans l'hémisphère nord, son antipode est dans l'hémisphère sud, et vice versa : par conséquent dans les deux cas la droite qui passe par ce point coupe nécessairement l'équateur (pour rejoindre l'antipode qui est dans l'autre hémisphère). Elle le coupe même deux fois. Dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180 degrés et le périmètre d'un cercle inférieur à $2\pi r$.
>
> La sphère nous donne l'image d'un espace de Riemann à deux dimensions. Pour imaginer, ou au moins concevoir, ce qu'est un espace sphérique à trois dimensions, on peut utiliser cette analogie de la sphère. Sur Terre, si on part dans n'importe quelle direction, on fait le tour de la Terre et on revient à son point de départ. De même, dans un espace sphérique à trois dimensions, il faut imaginer que si on part dans n'importe quelle direction (à gauche, à droite, en haut, en bas, en avant, en arrière, etc.), on finit par revenir à son point de départ par la direction opposée.
>
> Autre expérience : sur une sphère, si on trace un cercle autour de soi, puis qu'on augmente son rayon, ce cercle grandit d'abord, puis il atteint le diamètre de la sphère, puis il diminue et finit par se réduire en un point, le point à l'antipode du point où l'on se trouve. Dans notre espace, cela signifie que si on imagine une sphère autour de soi et qu'on augmente le rayon de cette sphère (un ballon de baudruche qu'on gonflerait de plus en plus), cette sphère va grossir, jusqu'au moment où elle atteindra le « diamètre » de l'univers ; alors elle commencera à se rétrécir, sa paroi extérieure deviendra sa paroi intérieure, et elle finira par se refermer sur le point antipode.
>
> Autre image pour comprendre la même chose : les droites qui partent d'un point, par exemple les rayons du soleil, sont comme les méridiens qui partent du pôle Nord : ils s'éloignent d'abord les uns des autres, puis s'infléchissent et se rapprochent, et finissent par converger au point antipode.
>
> Retenons de tout cela au moins cette idée toute simple : illimité ne veut pas dire infini. Une sphère est un espace à deux dimensions illimité (en se déplaçant sur cette surface on ne rencontre jamais aucune limite, ni trou ni mur), mais fini. (Cf. annexe pour quelques compléments et paradoxes liés à l'infini et à sa mathématisation par Cantor, ainsi que sur la relativité d'Einstein.)

Avec cette découverte fracassante, il devint évident que les intuitions mathématiques ne sont pas des « semences de vérité » ni des « jugements synthétiques a priori » car elles peuvent tout à fait se révéler fausses. On peut penser au contraire que ces intuitions, loin d'être innées et a priori, sont a posteriori, elles proviennent de l'expérience. Par exemple, notre intuition de l'espace à trois dimensions est issue de notre expérience du mouvement dans le monde. On obtient l'idée d'espace à partir de la possibilité du mouvement, par abstraction.

Ainsi, aux arguments de Kant on peut répondre que c'est par l'expérience que se fait l'apprentissage de la distinction entre le moi et le monde (Freud), ainsi que l'acquisition des intuitions mathématiques (Piaget). Puisque cette intuition vient de l'expérience, il ne s'agit de rien de transcendant ou de divin et sa vérité est limitée à l'expérience humaine ordinaire, ce qui explique qu'elle puisse se révéler fausse à l'échelle cosmique.

Bref, les mathématiques sont bien *synthétiques* (elles disent bien quelque chose du monde, par exemple de l'espace), mais elles ne sont pas *a priori* (innées, antérieures à l'expérience), mais *a posteriori* : elles découlent d'une intuition qui vient elle-même de l'expérience, et on peut penser contre cette intuition. Par conséquent aucune intuition ne garantit a priori la conformité d'un système formel au monde : il faut vérifier expérimentalement, dans chaque cas, que le système conceptuel qu'on utilise correspond bel et bien au monde réel. Toute connaissance vient de l'expérience.

4. Les limites de la logique

La remise en cause de la géométrie euclidienne a jeté le doute sur l'ensemble des mathématiques : si l'on ne peut se fier aux « vérités du cœur », à l'intuition mathématique, à nos idées naturelles d'espace, de temps et de nombre, à quoi peut-on se fier ? Face à cette difficulté, on pourrait vouloir tenter de fonder les mathématiques sur la logique, c'est-à-dire de réduire les mathématiques à la logique pour en exclure la part « intuitive ».

C'est ce qu'a tenté de faire le philosophe, logicien et mathématicien anglais Bertrand Russell au début du XXe siècle. On peut formaliser ainsi l'arithmétique[7], mais il reste quelques axiomes irréductibles à la logique. Conclusion : les mathématiques ne peuvent pas être réduites à la logique. Elles reposent sur des axiomes de base qui ne sont pas de simples principes logiques.

De plus, Russell s'est confronté à un paradoxe logique fondamental, similaire au paradoxe du menteur. Il s'agit du paradoxe des classes :

> Pour réduire les mathématiques à la logique, Russell raisonnait à partir de *classes*, ensembles d'éléments indéterminés. Par exemple, le nombre peut être défini comme l'ensemble des classes ayant le même cardinal. Dans cette stratégie, Russell s'est trouvé confronté au paradoxe suivant : soit l'ensemble de tous les ensembles qui ne font pas partie d'eux-mêmes à titre d'élément ; cet ensemble appartient-il ou n'appartient-il pas à lui-même ? S'il appartient à lui-même, alors par définition il ne devrait pas appartenir à lui-même. Mais s'il n'appartient pas à lui-même, alors il devrait appartenir à lui-même. Comme le paradoxe du menteur, ce cas (qui repose aussi sur une forme de circularité) est insoluble. Et comme Eubulide quelques siècles plus tôt, Russell a failli se suicider. Pour résoudre malgré tout ce problème, il a introduit une théorie *ad hoc* : la ***théorie des types***, qui stipule qu'un élément ne peut pas appartenir à un élément du même « niveau », du même « type ». Un club de foot ne peut contenir que des joueurs de foot, et non des clubs de foot. Cet argument ne satisfait pas complètement Russell, car il semblait sans fondement autre que la résolution du paradoxe des classes ; pourtant on peut remarquer la bizarrerie intense de l'idée d'un ensemble qui se contient lui-même : car un tel ensemble a alors une structure infinie, un peu à la manière d'une fractale.

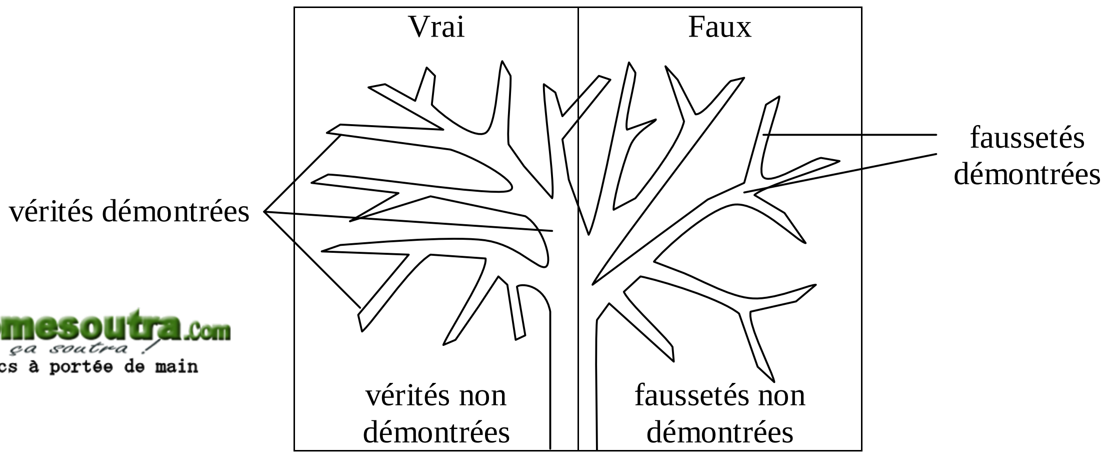
Finalement, c'est le logicien autrichien Kurt Gödel qui a établi, par une démonstration rigoureuse, les limites de la logique. Ce sont les célèbres ***théorèmes d'incomplétude*** de 1931 :

---

[7] Cf. annexe.

Introduisons d’abord deux notions : la consistance et la complétude. Un système formel est *consistant* si toute formule déductible est valide. Un système est *complet* si toute formule valide est déductible. Gödel a montré que tout système logique assez puissant pour formaliser l’arithmétique est *incomplet* : il existe au moins une proposition valide qui ne peut être démontrée. Gödel a aussi montré qu’un tel système ne peut pas démontrer par lui-même qu’il est consistant.

Ces limites ne sont pas dramatiques, car elles ne remettent pas en cause la consistance, qui est le point le plus important. Un système inconsistant serait inutilisable, il n’aurait aucune valeur car on ne saurait pas si ce qui est démontrable est valide. Le théorème de Gödel affirme qu’on ne peut pas prouver la consistance du système par ses propres moyens, mais on peut néanmoins supposer qu’il est consistant.



Arbre dans l’espace logique représentant les propositions déductibles (théorèmes) dans un système formel. Si le système était *complet*, il remplirait tout l’espace logique, c’est-à-dire toute la surface. Gödel a montré que pour tout système formel assez puissant, l’arbre n’atteint pas toutes les régions de l’espace logique.

Les théorèmes d’incomplétude font partie des grands arguments, très célèbres, maintes fois cités pour souligner les limites de la connaissance humaine. On peut les rapprocher d’autres « théorèmes » qui établissent les limites de notre connaissance dans d’autres domaines : en philosophie, l’idée de Kant affirmant que le sujet transcendantal (ainsi que la chose en soi) est inconnaissable ; en linguistique, l’idée de Wittgenstein affirmant que le langage ne peut représenter sa propre « forme de représentation » ; en physique, le principe d’incertitude de Heisenberg qui montre que l’on ne peut connaître à la fois la vitesse et la position d’une particule ; etc.