OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en T^{le} A

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT-PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup de pays ont opté pour un système éducatif solide où l'apprenant participe à la construction des savoirs qui lui permettront de maitriser son environnement en faisant face à des situations de vie réelles, complexes et diversifiées, une école intégrée, soucieuse du développement durable, et prenant en compte les cultures et les réquisits locaux à la place d'une école coupée de la société. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert ses portes à l'APC qui complètera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeunes enseignants soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus. Cet ouvrage et toute la collection de la 6ème en Terminale sont l'œuvre de ce groupe d'enseignants dynamiques et rompus à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette 3ème édition est le fruit de l'un de ses objectifs majeurs, conséquence de trois mois et demi de travail à parti du 27/07/2020.

Conçus pour aider le personnel enseignant ainsi que ceux qui seront dans le besoin, cette édition n'a pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être un complément d'outil de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'a connues l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, pour toutes les leçons de cette 3ème édition et dans toutes les classes, une forte corrélation est établie entre situation problème et activités d'apprentissages. L'objectif ici étant d'aider l'apprenant à dérouler lui-même les ressources de la leçon qui lui sont nécessaires à la résolution de la tâche évoquée par la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, et au premier rang M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien qui a su remobiliser les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de la rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capital, il s'agit de M. Ngandi Michel. Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyé via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr,

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via whatsapp à l'un des administrateurs ci-dessous nommés:

M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953 / 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/651 993 749), M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671) et M. NTAKENDO Emmanuel (676 519 464) M. TALA Stéphane (693460089).

LES AUTEURS.

Liste des enseignants ayant participés au projet dans l'atelier Terminale littéraire sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien

CHAPITRES	NOMS ET PRENOMS	NUMEROS
ÉQUATIONS ; INÉQUATIONS ET SYSTÈMES LINÉAIRES	DURELIEN ESSACKI	698828273
COURBES REPRÉSENTATIVES	MPENGSOUI AMARA HENRI CHRISTIAN	674532274
LIMITES ET CONTINUITÉS.	YOUCHAHOU MOUNKPOUOKOUI	695916229
ÉTUDE DE FONCTIONS	DONGMO ROMUALD SIMPLICE	697125982
FONCTIONS DERIVEES ET PRIMITIVES	BALLA ADALBERT BIENVENU	696114441
FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENNES	TALA STEPHANE	693460089
FONCTIONS EXPONENTIELLES	ARISTIDE LEKOMO	696521445
STATISTIQUES	JIDAS TCHOUAN	676054953
PROBABILITES	NJANKO ETIENNE ARNOLD	694650323

Table des matières

MODULE 21 : RELATTIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : EQUATIONS ; INEQUATIONS ET SYSTEMES LINEAIRES

INTERETS :

L'étude de situations issues de la vie économique et sociale, de la gestion des données conduit souvent à la résolution d'équations et d'inéquations à une ou à plusieurs inconnues ; nous mettons en évidence les phases du traitement de tels problèmes ainsi qu'un contrôle de résultats.

MOTIVATION :

La résolution de nombreux problèmes dans la vie se ramène à la résolution des équations, inéquations et des systèmes d'équations. Ce chapitre nous donne des techniques pour pouvoir le faire aisément.

Leçon 1 :EQUATIONS ET INEQUATIONS DE DEGRE 3 dans IR
100 MINUTES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

Résoudre les équations et inéquations de degré 3 en utilisant la méthode par identification et par la division euclidienne

PREREQUIS :

Soit $x \in IR$, Déterminer a, b, et c pour que $p(x) = ax^2 + bx + c$ soit égal au polynôme $q(x) = -5x^2 + 7$

SOLUTION :

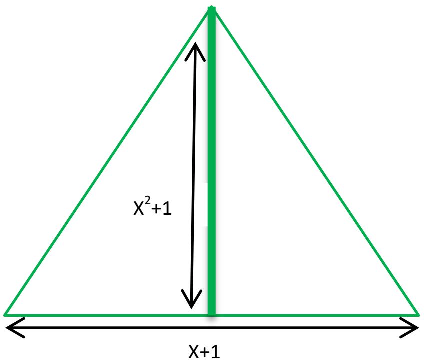
Soit $x \in IR, p(x) = q(x) \Leftrightarrow ax^2 = -5x^2 \Leftrightarrow a = -5$, $bx = 0 \Leftrightarrow b = 0$ et $C = 7$

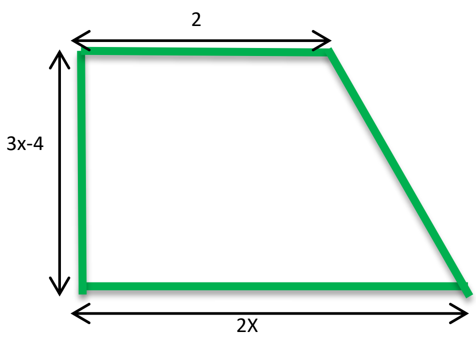
D'où $\boldsymbol{a = -5, b = 0}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{c = 7}$

SITUATION PROBLEME :

Arnold a gagné un marché de pavé pour le parking du stade omnisport. Pour cela, il voudrait sortir des pavés triangulaires pour le parking des motos et des pavés de forme trapézoïdale pour les voitures, cependant ces pavés doivent avoir la même aire. Son ingénieur lui dit qu'il est possible avec les dimensions ci-dessous

A ton avis est-il possible de trouver une valeur de x qui vérifie ce que déclare l'ingénieur ?





Activité d'apprentissage :

Soient un triangle de hauteur $\boldsymbol{x^2+1}$, de base $\boldsymbol{x+1}$ et un trapèze de hauteur $\boldsymbol{3x-4}$, de grande base $\boldsymbol{2x}$ et de petite base **2.**

a) Calculer l'aire de chaque figure
b) Calculer la différence d'aire en fonction de x
c) Soit $p(x)$ le polynôme issu de cette différence
   - Calculer $p(-1)$
   - Déterminer par identification après développement a, b, et c pour que $p(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$
   - résoudre $p(x) = 0$

Solution

a) Soit A_1 l'aire du triangle et A_2 l'aire du trapèze.

On a : $A_1 = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{2} = \frac{1}{2}(x^3+x^2+x+1)$ et $A_2 = \frac{(GB+PB)\times hauteur}{2} = \frac{(2x+2)(3x-4)}{2}$

D'où $A_2 = \frac{1}{2}(6x^2-2x-8)$.

b) Différences d'aire en fonction de x

Soit $p(x) = A_1 - A_2$, on a $p(x) = \frac{x3+x2+x+1}{2} - \frac{6x2-2x-8}{2} = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+3x+9)$

c) $p(-1) = \frac{1}{2}(-1-5-3+9) = 0$ d'où -1 est racine du polynôme

- $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + x^2(a+b) + x(b+c) + c$. Par identification, on a : $\begin{cases} ax^3 = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ x^2(a+b) = -\frac{5}{2}x^2 \Leftrightarrow b = -3 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$ d'où $a = \frac{1}{2}; b = -3 ; c = \frac{9}{2}$

  On a donc $\boldsymbol{p(x) = (x+1)(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2})}$

- Résolvons $p(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right) = 0.$

  $(x+1) = 0 \; ou \; x^2 - 6x + 9 = 0$

  Utilisons le discriminant pour résoudre $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$. On a donc une racine double $x_0 = 3$

D'où $S = \{(1;3)\}$

RESUME :

I. EQUATIONS DE DEGRE 3

❖ Définition

Tout polynôme de la forme $(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ($\mathbf{a \neq 0, b, c\ et\ d\ des\ reels}$) est appelé **polynôme de degré 3.**

❖ Racine d'un polynôme :

Le nombre γ est une racine du polynôme p, signifie que $\boldsymbol{P(\gamma) = 0}$

Exemple : on considère le polynôme $p\ definie\ par\ P\ (x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$. Vérifier que -1 est une racine du polynôme P.

Solution : on a $P(1) = -2 + 5 - 4 + 1 = 3 - 3 = 0$, d'où -1 est une racine du polynôme P.

❖ Forme $(x-\propto)(ax^2+bx+c) = 0$

$\boldsymbol{\alpha}$ étant une racine de P, ce polynôme peut donc s'écrire sous la forme

$p\,(x) = (x-\propto)(ax^2+bx+c)$. Cette forme nous permet de **factoriser** le polynôme $\boldsymbol{p}(x)$

NB : si une fraction $\frac{a}{b}$ est une racine de P, alors on peut faire la division euclidienne du polynôme $\boldsymbol{P}$ par $(x - \frac{a}{b})$

❖ *Résolution d'équations de degré 3 :*

Toute équation de la forme $\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=0}$ est appelée équation de degré 3.

$\propto$ étant racine du polynôme, cette équation est sous la forme $(\boldsymbol{x}-\propto)\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$. $(\boldsymbol{x})$ étant un polynôme du second degré. La résolution de cette équation se fait à partir de deux méthodes : **la méthode par identification des coefficients et par division euclidienne**.

a) *Méthode par identification des coefficients*

Exemple : soit P le polynôme défini par $(x) = x^3-6x^2+5x+12$ ou X est un réel quelconque.

- Calculer $p(3)$. Que traduit ce résultat ?
- Mettre (x) sous la forme $(x-3)(x^2+bx+c)$ ou b et c sont les réels à Déterminer.
- Résoudre dans IR l'équation $(x) = 0$.

Solution : $(\mathbf{3}) = 3^3-6(3)^2+5(3)+12 = 27-54+15+12 = -27+27 = 0$ d'où $p(3) = 0$. Ce résultat traduit que 3 est racine du polynôme P.

Mettons P(x) sous la forme $(x-3)(x^2+bx+c)$. On a :

$(x) = x^3+bx^2+cx-3x^2-3bx-3c = x^3+(b-3)x^2+(c-3b)-3c$. Par identification des coefficients, on a $\begin{cases} b-3=-6 \Leftrightarrow b=-3 \\ C-3b=5 \Leftrightarrow c=-4 \\ -3c=12 \end{cases}$ **d'où $\boldsymbol{b=-3}$ *et* $\boldsymbol{c=-4}$**

Donc $P(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4})$

Résolvons l'équation $P(x) = 0$. On a : $(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-\mathbf{3}) = \mathbf{0}$ *ou*

$(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}) = \mathbf{0}$. Calculons le discriminant ; on a :

$\Delta = (-3)^2-4(1)(-4) = 9+16 = 25 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ *et* $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

D'où **S= $\{-1; 3; 4\}$**

a) Division euclidienne:

Exemple : Soit le polynôme P défini par $(x) = x^3+3x^2-6x-8$

- Montrez que -1 est racine de P
- Ecrire p sous la forme $(x+1)(x^2+bx+c)$ ou b et c sont des réels à déterminer

Solution : montrons que -1 est racine de P

On a : $(-1) = (-1)^3+3(-1)^2-6(-1)-8 = -1+3+6-8 = 2-2 = 0$. D'où -1 est racine du polynôme P. Ecrivons P sous la forme $(x+1)(x^2+bx+c)$

On cherche maintenant à factoriser $(x) = x^3+3x^2-6x-8$ par $(x-(-1)) = (x+1)$ Utilisons la méthode de la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-6x-8 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 & x^2+2x-8 \\ \hline 2x^2-6x & \\ -2x^2-2x & \\ \hline -8x-8 & \\ 8x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$Ainsi,\qquad \boldsymbol{x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)}.$

b) INEQUATIONS DE DEGRE 3

Une inéquation du troisième degré est une inéquation se ramenant à la forme

$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d \geq 0}$ **(**$<$ ou, $>$ et $\leq$) ; pour résoudre ce type d'inéquation, on détermine les racines de son polynôme associé, on dresse son tableau de signe, l'intervalle ou la réunion d'intervalles solution est celle du signe de l'inégalité.

Exemple : résolvons l'inéquation (x): $\boldsymbol{x^3+3x^2-4<0}$

On sait que 1 est racine du polynôme $\boldsymbol{x^3+3x^2-4}$ et on trouve $(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$

(Voir méthode). On résout l'inéquation $x^2+4x+4<0$. Le polynôme $x^2+4x+4=(x+2)^2$ est toujours positif et s'annule a $\boldsymbol{-2}$ (**quand le signe n'est pas évident, calculer le discriminant du trinôme et en déduire son signe**)

x$-1>0$ *si et seulement si* $x>1$ on a le tableau suivant

X	$-\infty$ **-2**	**1**	**+∞**
$\boldsymbol{x^2+4x+4}$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{X-1}$	$-$	$-$	$+$
$\boldsymbol{(x-1)(x^2+4x+4)}$	$-$	$-$	$+$

On en déduit la solution de l'inéquation : S $=]-\infty;\boldsymbol{-2}[\cup]-\boldsymbol{2};\boldsymbol{1}[$

c) *Equations et inéquations faisant intervenir des inconnues auxiliaires*

Exemple 1 : résoudre dans IR l'équation suivante : $x^4+2x^2-3=0$.

Procédons par un changement d'inconnue : $X = x^2$. On a alors $X^2+2X-3=0$

$\Delta = b^2-4ac \Leftrightarrow 4+12=16; \sqrt{x}=4$. On a deux racines distinctes x_1= -3 et x_2=1

Or $X = x^2 \Leftrightarrow x^2$ =-1 (impossible) et x^2=1 $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x=-1$

D'où S= $\{-1; 1\}$

Exemple 2 : résoudre dans IR l'inéquation suivante : $x^4+2x^2-3 \geq 0$

D'après l'exemple 1, l'équation admet deux racines distinctes ; déterminons le signe du polynôme X^2+2X-3

x	∞ -1	1	∞
X^2+2X-3	+ 0	− 0	+

La solution de l'inéquation est donc $S =]-\infty; -1[\cup]1 ; +\infty[$

Exercices d'application :

Dans chacun des cas suivants, détermine les réels a, b et c. puis résout chacune des inéquations $p(x) < 0$; $\boldsymbol{p(x) \leq 0}$; $\boldsymbol{p(x) > 0}$; $\boldsymbol{p(x) \geq 0}$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$ $\quad P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

b) $P(x) = 3x^2 - 10x^2 + 9x - 2$ $\quad P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Soit $(x) = x^3+3x^2-x-3$ un polynôme.

Vérifier que 1 est une racine de $p(x)$.

Déterminer deux réels a et b tels que $(x-1)(x^2+ax+b)$.

Résoudre l'inéquation $p(x) < 0$

LECON 2 : SYSTEME LINEAIRE DANS IR² ET IR³ Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues
- Résoudre les systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues par la méthode du pivot de Gauss.

SITUATION PROBLÈME :

Trois personnes jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Après trois parties ou chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2400 Fr. quel étaient les avoirs initiaux de chacun ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Résoudre le système suivant :

(S) : $$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 2400 & (L1) \\ -2x + 6y - 2z = 2400 & (L2) \\ -x - y + 7z = 2400 & (L3) \end{cases}$$

Solution

Le système (S) est équivalent au système $\begin{cases} x - y - z = 600 & (L_1) \\ -x + 3y - z = 1200 & (L_2) \\ -x - y + 7z = 2400 & (l_{3)} \end{cases}$

Dans L_1, on a $x = 600 + y + z$. En remplaçant x par sa valeur dans (L_2), on obtient l'équation $\boldsymbol{y - z = 900}$ et en remplaçant $\boldsymbol{x}$ par sa valeur dans$(l_{3)}$,on obtient l'équation $-\boldsymbol{y} + \boldsymbol{3z} = \boldsymbol{1500}$. On obtient le nouveau système $\begin{cases} y - z = 900 & (l'_2) \\ -y + 3z = 1500 & (l'_3) \end{cases}$

Dans (l'_2), on a $y = 900 + z$ et en remplaçant y par sa valeur dans (l'_3), on obtient $-900 - z + 3z = 1500 \Leftrightarrow 2z = 2400 \Leftrightarrow \boldsymbol{Z = 1200}$ et en remplaçant Z par sa valeur dans (l'_2) on obtient $\boldsymbol{y = 2100}$.

y *et* z étant trouvés, remplaçons les par leur valeurs dans (L_1) pour trouver x, on a donc

$x - 2100 - 1200 = 600 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 3900}$

D'où $S = \{(3900;\ 2100;\ 1200)\}$

RÉSUMÉ :

I. SYSTEME LINEAIRE DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

A) DÉFINITION

Tout système qui s'écrit sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$**a, b, c, a', b' et c'** des réels est appelé **système linéaire de deux équations a deux inconnues** avec (x ; y) des inconnues.

B) RÉSOLUTION

Pour résoudre un système **(S) :** $\begin{matrix} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{matrix}$ on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes : **la substitution, l'addition et la méthode de Cramer** (déterminant).

- On appel déterminant du système (S) le réel Δs tel que **Δs =**$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ **=** $\boldsymbol{ab' - a'b}$
- On appel déterminant de $\boldsymbol{x}$ le réel noté Δx tel que **Δx =** $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = \boldsymbol{cb' - c'b}$
- On appel déterminant de y le réel noté Δy tel que **Δy=**$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \boldsymbol{ac' - a'c}$

1[er] **cas :** si **Δs** ≠ 0, alors on a : $x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$ et don **S =** $\{(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\}$

2[eme]**cas** : Si Δ = 0 et (Δx = 0 ou Δy = 0) alors le système n'admet aucune solution donc **S= Φ**

3[eme]**cas** Si Δs = 0 ; Δx = 0 et Δy = 0, alors le système admet une infinité de solutions. On a donc

S = $\{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{IR} : \mathbf{ax + by} = \mathrm{c}\ \}$

Exemple : résoudre dans IR le système suivant

$$\begin{cases} 2x - 7y = 14 & (L1) \\ x + y = 61 & (L2) \end{cases}$$

On a: Δs = $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 7 = 9$; Δx = $\begin{vmatrix} 14 & -7 \\ 61 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 427 = 441$

Δy = $\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 61 \end{vmatrix} = 122 - 14 = 108$ d'ou on a $x = \frac{441}{9} = 49\ et\ y = \frac{108}{9} = 12$

D'où $= \{(\mathbf{49}; \mathbf{12})\}$

Résolvons le système ci-dessus par la méthode de substitution.
On a dans (L_2): $x = 61 - y$. Remplaçons x par sa valeur dans (L_1) ce qui nous donne
$122 - 9y = 14 \Leftrightarrow \mathbf{9}\boldsymbol{y} = \mathbf{108} \Leftrightarrow y = \frac{108}{9} = \mathbf{12}$
. Trouvons la valeur de x dans (L_2) ; on a $x = 61 - 12$. Ce qui nous donne $\boldsymbol{x} = \mathbf{49}$

D'où **S** = $\{(\mathbf{49}; \mathbf{12})\}$

Résolvons le système ci-dessus par la combinaison

$$\begin{array}{ll} L1 & 2x - 7y = 14 \\ -2L2 & -2x - 2y = -122 \\ \hline L1 - 2L2 \Leftrightarrow & y = 12 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} L1 & 2x - 7y = 14 \\ 7L2 & 7x + 7y = 427 \\ \hline L1 + 7L2 \Leftrightarrow & 9x = 441 \Leftrightarrow x = 49 \end{array}$$

D'où **S** = $\{(\mathbf{49}; \mathbf{12})\}$

a) DÉFINITION

Tout système linéaire de la forme (**S**)$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d & (E1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (E2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (E3) \end{cases}$ (**a, a', a'', b, b', b'' c, c', c'', d, d', d'' étant des réels**) est appelé système linéaire de trois équations a trois inconnues. Le triplet $(x; y; z)$ étant le triplet des inconnues.

a) Résolution

La résolution de ce système nécessite deux méthodes à savoir ; la **substitution** et la résolution par **la méthode du pivot de gauss.**

- **Méthode par substitution**

Exemple : soit le système suivant (**S**)$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 8 \ (1)} \\ \{\boldsymbol{2x + y + 2z = -2 \ (2)} \\ \boldsymbol{x + y + 3z = -6 \ (3)} \end{cases}$

Dans la ligne (1), on a : $x = 8 - 2y + z$. $(\mathbf{4})$ en remplaçant $x\ dans\ 2\ on\ a$:

$2(8 - 2y + z) + y + 2z = -2 \Leftrightarrow -3y + 4z = 18$. $(\mathbf{5})$ remplaçons la ligne 4 dans la ligne 3 :

On a $8 - 2y + z + y + 3z = -6\ equivaut\ a : -y + 4z = -14$. $(\mathbf{6})$. Les lignes 5 et 6 donnent le système $\begin{cases} -3y + 4z = -18 \\ -y + 4z = -14 \end{cases}$ avec $y = 2\ et\ z = -3$. En remplaçant $y\ et\ z\ par\ leur\ valeurs\ dans\ la\ ligne\ 1\ on\ obtient\ x = 1$ d'où **S =** $(\mathbf{1}; \mathbf{2}; -\mathbf{3})$

- **Résolution par la méthode du pivot de Gauss**

C'est une méthode qui permet de transformer un système linéaire en un autre système équivalent, triangulaire et facile à résoudre

Exemple : résoudre le système suivant par la méthode du pivot de gauss

$$S)\begin{cases} x + 2y - z = 8 \ (E1) \\ 2x + y + 2z = -2 \ (E2) \\ x + y + 3z = -6 \ (E\,3) \end{cases}$$

On prend la ligne 1 comme pivot et on annule une inconnue dans les lignes 2 et 3. Eliminons x dans (E1) et (E2), on a donc $2E1 - E2 \Leftrightarrow$: $3y - 4z = 18$ (E'2)

$\mathrm{E1} - \mathrm{E2} \Leftrightarrow y - 4z = 14\ (E'3)$ et le système devient $\begin{cases} x + 2y - z = 8 & (E1) \\ 3y - 4z = 18 & (E'2) \\ y - 4z = 14 & (E'3) \end{cases}$

On a : $(E'2) - 3(E'3) \Leftrightarrow 8z = -24\ (E''3)$

Ainsi le système (S) devient $\begin{cases} x + 2y - Z = 8 & (E1) \\ 3y - 4Z = 18 & (E2) \\ 8z = -24 & (E3) \end{cases}$ **(système triangulaire)**

D'où $S = (1; 2; -3)$

EXERCICES D'APPLICATION :

Exercice 1 : résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y + z = 12 \end{cases} \quad ; \begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{2}{y-2} + \frac{2}{z-3} = 2 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-2} + \frac{3}{z-3} = 10 \\ -\frac{1}{x-1} - \frac{4}{y-2} - \frac{9}{z-3} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 3(x-2) + 4y = 18 \\ 2(x-2) - 5y = -11 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1- Résoudre dans IR^2 le système suivant : $\begin{cases} 2x - 7y = 14 \\ x + y = 61 \end{cases}$

2- Un agriculteur a une parcelle rectangulaire de largeur l et de longueur L. lors du passage des tuyaux de canalisation d'eau, on a diminué sa longueur de 7m et on a augmenté sa largeur de 2 m, de telle sorte que son aire reste inchangée. Sachant que cette parcelle rectangulaire a pour périmètre 122 m

a) Montrer que l et L vérifient le système $\begin{cases} 2l - 7L = 14 \\ l + L = 61 \end{cases}$ b) En déduire l et L de cette parcelle

3- Trois élèves KENGNE, KENFACK et NTAMACK se rendent dans un super marcher pour acheter des chocolats marqués A , B et C. KENFACK commande un chocolat du type A, trois chocolats du type B, et deux chocolats de type C et il paye 850 Fr. KENGNE commande un chocolat de type A, deux chocolat B, et un chocolat C et il paye 600 FR. NTAMACK quant à lui commande deux chocolats A, quatre chocolats B, et trois chocolats C et paye 1300 Fr.

a) Quel est le prix d'un chocolat A, d'un chocolat B, et d'un chocolat C ?

b) Que payera un client qui commande 5 chocolats A, 5 chocolats B et 6 chocolat C ?

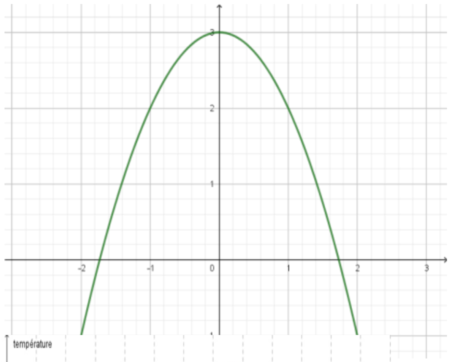
CHAPITRE : COURBES REPRESENTATIVES

INTERET : A partir de la courbe du chômage par exemple, dans une période donnée, l'apprenant pourra représenter l'évolution de cette courbe de façon à ce qu'elle soit avantageuse pour la société, et prévenir les risques d'enlisement de la situation.

MOTIVATION : La lecture, l'interprétation et la représentation des données telles que le taux de chômage, l'évolution du budget,…. Nécessitent un certain nombre d'outils pour faire une bonne estimation et des meilleures prévisions. Cette leçon vous donnera quelques-uns de ces outils.

LEÇON 1 : COURBE D'UNE FONCTION. *100 MINUTES*

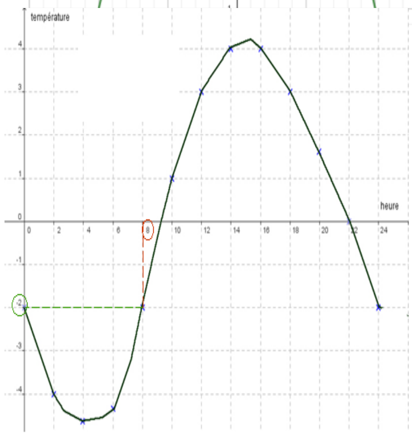
OBJECTIFS PEDAGOFIQUE **:** Au terme de la leçon, l'apprenant doit être capable de conjecturer à partir d'une courbe, l'ensemble de définition, les limites et la continuité.



PRE-REQUIS **:** Quels sont les antécédents de -1 , de la courbe dont la représentation est donnée ci-contre ? …..-2 *et* 2.

SITUATION DE VIE :

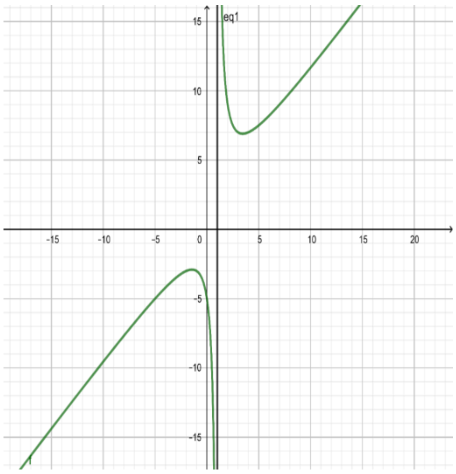
Devant son écran de télévision, Moussa a déterminé les températures du vendredi (matin et soir) d'un pays, en fonction des heures $\boldsymbol{x}$, et a fait la représentation ci-contre. Entre 14h et 18h, il y'a eu coupure d'électricité et il n'a pas pu relever les températures. Il aimerait faire une étude des températures en fonction du temps pendant le matin (de l'aube jusqu'à midi).



Quels sont les éléments d'étude des températures de la courbe de Moussa sur lesquels il peut se baser?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1- Quelles sont les valeurs prises par $\boldsymbol{x}$ pendant la journée ? …..0 ; 1 ; 2 ; 3 ;…. 23 et 24 Comment peut-on appeler cet ensemble ? ……l'ensemble de définition
1- Quelle est la température dans ce pays, à minuit ? …-2° Celsius. Et à midi ? …+3° Celsius. Que représentent ces deux températures pour la fonction pendant le matin? Ces deux nombres représentent les limites en 0 et en 12 respectivement.
2- Quelle est la différence entre la courbe des températures le matin et celle du soir ? comment peut-on qualifier (dans son tracé) la courbe pendant le matin ? …Le tracé de la courbe le matin n'est pas interrompu pourtant celle du soir l'est. On peut dire qu'elle est continue le matin.



RESUME **:**

f est une fonction à variable réelle dont la courbe est représentée ci-contre :

1- **Le domaine de définition $\boldsymbol{D_f}$**, qui est l'ensemble des réels ayant une image par f est :

$\boldsymbol{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

2- La limite d'une fonction en un point est la valeur dont elle se rapproche lorsque la variable se rapproche du point en question. Ainsi ,

- **Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$**

(la courbe va vers le bas). On note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- **Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$**
  (la courbe va vers le haut). On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- **Lorsque x se rapproche de 1, à gauche, $f(x)$ tend vers $-\infty$ (la courbe va vers le bas).**
  On note $\lim_{x\to1<} f(x) = -\infty$
- Lorsque x se rapproche de 1 à droite, $f(x)$ **tend vers $+\infty$ (la courbe va vers le haut).**
  On note $\lim_{x\to1>} f(x) = +\infty$.

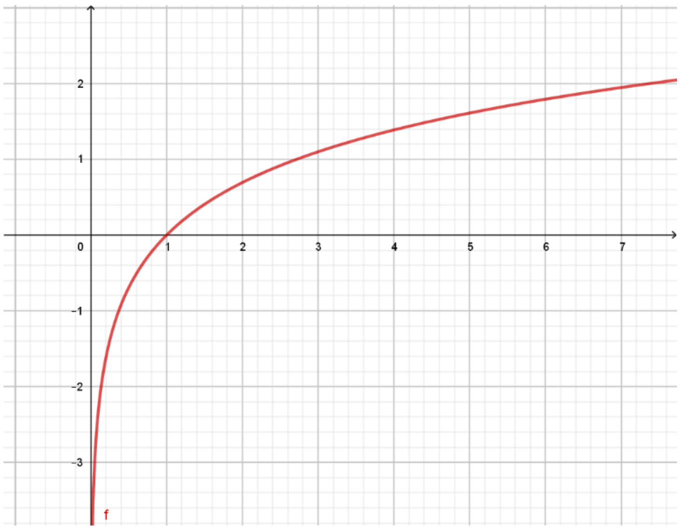
3- La courbe d'une fonction est continue dans un intervalle si chaque élément de cet intervalle a une image par la fonction **(la courbe est tracée sans interruption)**.

Exemple : la courbe de la fonction f ci-dessus est continue dans $]-15\,;\,-5[$; mais elle ne l'est pas dans $]-5\,;\,5[$

EXERCICE D'APPLICATION :

Soit la g fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1- Déterminer son ensemble de définition.
2- Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3- Donner un intervalle dans laquelle la fonction g est continue.



LEÇON 2 : ELÉMENTS DE SYMÉTRIE.   100 MINUTES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUE **:** Au terme de la leçon, l'apprenant doit être capable de justifier qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie, et qu'un point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie à la courbe d'une fonction, où a et b sont des nombres réels.

PRE-REQUIS **:** Calculer la valeur numérique des expressions : $-3x^2 + x$ et $\frac{x^2-4x}{x+5}$, pour $x = -2$.

… … … … . . $-3(-2)^2 + (-2) = -3 \times 4 - 2 = -14$; $\frac{(-2)^2-4(-2)}{-2+5} = \frac{4+8}{3} = 4$

SITUATION PROBLEME :

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$, et, $(\mathbf{C}f)$ et $(\mathbf{C}g)$ leurs courbes représentatives dans le repère (O, I, J).

Quel type d'élément de symétrie pouvons-nous avoir pour chacune de ces fonctions ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1- On considère la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et la droite d'équation $x = 2$.

a) Calculer $(2 \times 2 - x) = \cdots 4 - x$

Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(4 - x) \in \mathbb{R}$.

En effet $x \in \mathbb{R}$ et $4 \in \mathbb{R}$, donc $(4 - x) \in \mathbb{R}$.

b) Complète : $f(4 - x) = (4 - x)^2 - (16 - 4x) + 5 = x^2 - 4x + 5 = f(x)$.

Que peut-on conclure ? On peut conclure que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie à la courbe de f.

2- Soit $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$. On considère le point A(2 ; 2).

a) Justifier que si $(2 - x) \in Dg$, alors $(2 + x) \in Dg$.

En effet, $(2 - x) \in Dg \;\; => 2 - x \neq 2$

$=> -x \neq 0$

$=> x \neq 0$

$=> 2 + x \neq 2$

$=> (2 + x) \in Dg$

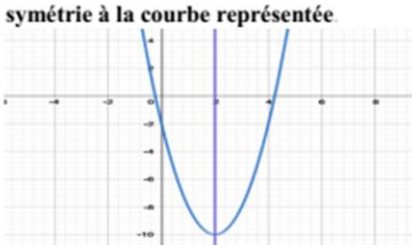
b) Complète : $g(2 - x) + g(2 + x) = \frac{2(2-x)+3}{2-x-2} + \frac{2(2+x)+3}{2+x-2} = \frac{4-2x+3}{-x} + \frac{4+2x+3}{x} = \frac{4x}{x} = 4 = 2 \times 2$.

Que peut-on conclure ? On peut conclure que le point A est le centre de symétrie à la courbe de g.

RESUME :

f est une fonction de domaine Df, $(\mathcal{C}f)$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan, $\Omega(a, b)$ est un point du plan et (D) est la droite d'équation $x = a$.

La droite d'équation $x = 2$ est l'axe de symétrie à la courbe représentée



1- La droite (D) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}f)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :
   - si $x \in Df$ alors (2a- x) $\in Df$
   - $f(2a - x) = f(x)$.

   Illustration ci-contre.

2- Le point Ω est le centre de symétrie de courbe $(\mathcal{C}_f)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :
   - Si $x \in Df$ alors (2a- x) $\in Df$
   - $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Le point A(-1 ; -2) est le centre de symétrie à la courbe représentée

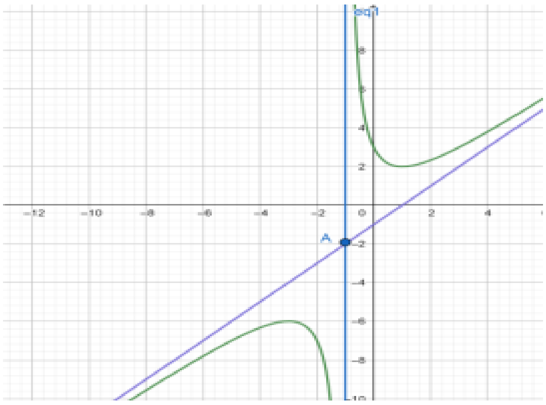


Illustration ci-contre.

Remarque 1 :

Les conditions sus-évoquées peuvent se ramener à :

- ✓ pour l'axe de symétrie (D), $\forall\, x \in \mathbb{R}$, si $(a - x) \in Df$ alors $(a + x) \in Df$. Et $f(a - x) = f(a + x)$.
- ✓ pour le centre de symétrie Ω, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, si $(a - x) \in Df$ alors $(a + x) \in Df$. Et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

Remarque 2 :

- ✓ si f est une fonction **paire alors la droite d'équation $x = 0$ est l'axe de symétrie** de $(\mathcal{C}f)$.
- ✓ si f est une fonction **impaire alors l'origine du repère (le point O) est le centre de symétrie de $(\mathcal{C}f)$**

EXERCICE D'APPLICATION :

I. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x + 7$.
   Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

II. Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

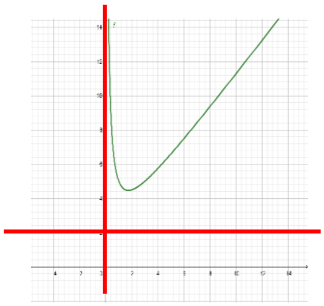
$$x \to \frac{x^2+3x+6}{x+2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
3. Montrer que le point $\Omega(-2, -1)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f.

CONCLUSION : A la prochaine séance nous allons entamer un nouveau chapitre sur la limite et continuité d'une fonction.

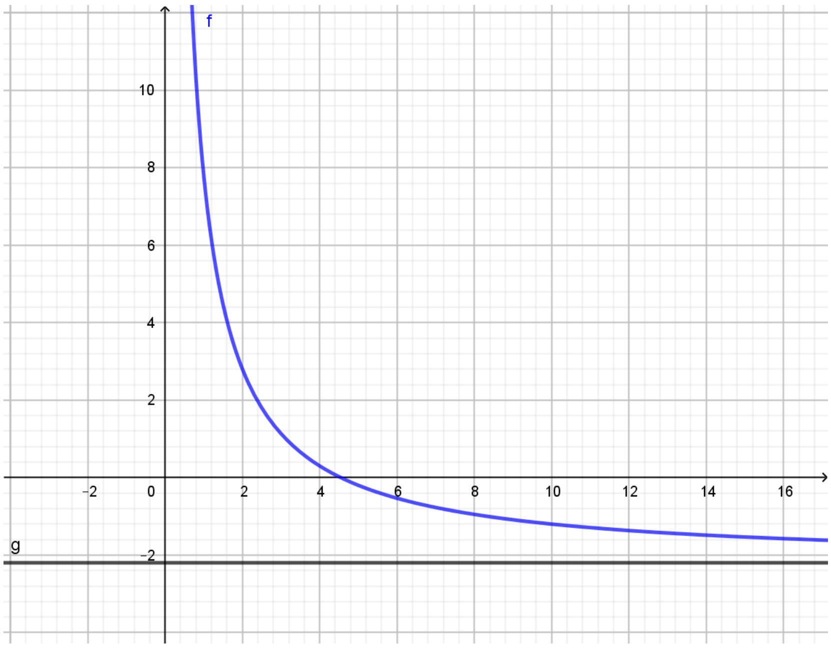
LEÇON 3: ASYMPTOTE. DUREE : 100 MINUTES

OBJECTIFS PEDAGOFIQUE : Au terme de la leçon, l'apprenant doit être capable de conjecturer à partir d'une courbe, les asymptotes éventuelles ; et justifier qu'une droite d'équation donnée est asymptote à la courbe d'une fonction.



PRE-REQUIS : Donner les limites à droite de zéro et en $+\infty$ de la fonction ci-contre. Puis trace sur la figure les droites d'équation $x = 0$ et $y = 1$.

……… $+\infty$ $et + \infty$.



SITUATION PROBLEME :

Motaze est un élève de la Tle A4. Passionné d'économie, il a tracé la courbe ci-contre, représentant le taux de variation annuel en % du salaire $h(x)$, en fonction du taux de chômage x. Il aimerait étudier le taux annuel du salaire lorsque le taux de chômage diminue ou lorsqu'il augmente. Comment peut-il faire cette étude et donner une conclusion à cette étude ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE:

1- Observe la courbe ci-dessus.

a) Quelle est la limite de h, lorsque x prend tend vers l'infini. Que peut-on dire de la droite d'équation y= -2,2 ? ….. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2{,}2$. On peut dire que cette droite est une asymptote horizontale par rapport à la courbe.

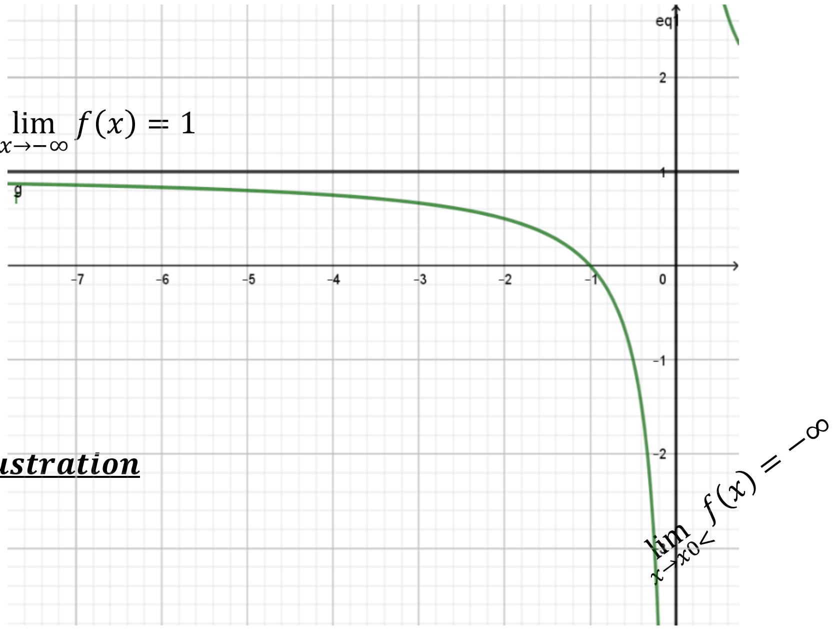
b) Quelle est la limite de h, lorsque x tend vers 0 ? que peut-on dire de la droite d'équation $x = 0$? $\lim_{x\to 0>} h(x) = +\infty$. On peut dire que cette droite est une asymptote verticale à la courbe.

2- On suppose que $h(x) = \frac{10}{x} - 2{,}2$.

a) Calculer la limite de h en 0 par valeurs supérieures.… … $\lim_{x\to 0>} h(x) = \lim_{x\to 0>} \frac{10}{x} - 2{,}2 = \frac{10}{0^+} - 2{,}2 = +\infty$.

b) Calculer la limites de h en $+\infty$. … … $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to 0>} \frac{10}{x} - 2{,}2 = \frac{10}{+\infty} - 2{,}2 = 0 - 2{,}2 = -2{,}2$.

RESUME :



Illustration

F est une fonction, $x0$ et y_0 des nombres réels, et (D) une droite.

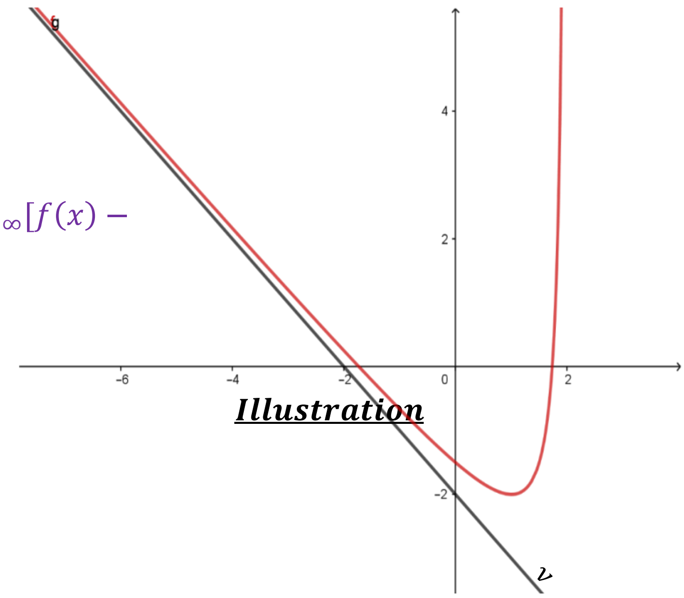
- Si $\lim_{x\to x0>} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to x0<} f(x) = \pm\infty$, alors la droite (D) : $x = x0$ est une **asymptote verticale** à la courbe de .
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y0$, alors la droite (D') : $y = y0$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f .
- Si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite (D) : $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe de f.

De manière générale, si f est une fonction définie au voisinage de l'infinie, vérifiant

$f(x) = ax + b + h(x)$, avec $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$, alors la droite

(D) : $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe de f

$\lim_{x\to-\infty}[f(x) -$



Illustration

EXERCICE D'APPLICATION :

On définit la fonction f par : $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

1- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis en déduire les asymptotes éventuelles.

2- Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b\frac{c}{x+1}$.

3- En déduire l'équation de l'asymptote oblique.

CHAPITRE : LIMITES ET CONTINUITE.

INTERET:

Les limites peuvent être utiles pour regarder le comportement d'une fonction en un point ou en l'infini.

MOTIVATION :

Certaines grandeurs telles que le taux d'évolution du budget, du chômage, du changement climatique d'un pays sont exprimées par des fonctions usuelles. La connaissance de leur limite permet d'analyser et de prévoir leur comportement à une certaine période ou dans une zone. Cette leçon nous permettra d'avoir les outils nécessaires pour résoudre un tel problème.

LEÇON1: LIMITES durée: 100minutes

OBJECTIFS PEDAOGIQUES :

Calculer la limite d'une fonction au voisinage de l'infini et au voisinage d'un point.

PREREQUIS :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)= -2x^2+ 3x-5$. Calculer $f(-2)$ et $f(3)$

Solution :

$f(x)= -2x^2+ 3x-5$.

Calculons $f(-2) = -2(-2)^2+3(-2)-5= -19$ et $f(3)= -2(3)^2+3(3)-5= -14$

SITUATION PROBLEME :

Un chauffe-eau dans lequel l'eau froide arrive à la température de 10°C fournit de l'eau chaude à la température de T°C avec un débit de x kg /s . Un électrotechnicien a modélisé l'évolution de cette température (en fonction du débit) par la relation $T =10 + \frac{12}{5x}$. Son souci est de savoir quelle sera la valeur de cette température pour des valeurs grandes du débit.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x)= 10 + \frac{12}{5x}$

a) Compléter le tableau suivant :

X	10	100	1000	10000
$f(x)$				

Compléter la phrase suivante :

Pour des valeurs suffisamment….. les nombres $f(x)$ se rapprochent de …..

b) Compléter le tableau suivant :

X	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$				

Compléter la phrase suivante :

Pour des valeurs proches de …, les nombres $f(x)$ se rapprochent de …..

c) Quelle sera la valeur de cette température pour des valeurs grandes du débit ?

Solution :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x)= 10 + \frac{12}{5x}$

a) Complétons le tableau suivant :

X	10	100	1000	10000
$f(x)$	10,24	10,024	10,0024	10,00024

Complétons la phrase suivante :

Pour des valeurs suffisamment grandes de x, les nombres $f(x)$ se rapprochent de 10.

b) Complétons le tableau suivant :

X	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	11,26315	11,20603	11,20060	11,20006

Complétons la phrase suivante :

Pour des valeurs proches de 2, les nombres *f(x)* se rapprochent de 11,2.

c) la valeur de cette température pour des valeurs grandes du débit.

on peut associer l'évolution de cette température à la fonction numérique définie sur]0;+∞[par *f(x)*= 10 + $\frac{12}{5x}$ avec *x* le débit. Pour des valeurs suffisamment grandes de *x*, les nombres *f(x)* se rapprochent de 10. Donc pour les valeurs grandes du débit, la température est de 10° C.

RESUME:

1) Limite au voisinage de l'infini.

Soit *f* une fonction définie au moins sur un intervalle [a ; +∞ [.

a) Définitions :

Lorsque *x* prend les valeurs de plus en plus grandes, si les nombres *f(x)* deviennent de plus en plus

- grands, on dit que *f* a pour limite +∞ au voisinage de +∞ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ =+∞
- grands en valeur absolue mais négatifs, on dit que *f* a pour limite -∞ au voisinage de +∞ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = -∞.
- proches d'un nombre réel *l*,on dit que *f* a pour limite *l*au voisinage de +∞ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Propriété :

Soit *f* une fonction de domaine de définition D_f. et b un nombre réel. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ = b, alors la droite (D) : y=b est une asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

Exemple :

Soit *f* la fonction numérique définie sur]0 ; +∞[par *f(x)*= 10 + $\frac{12}{5x}$. Lorsque *x* prend les valeurs de plus en plus grandes, les nombres *f(x)* deviennent de plus en plus proches de 10 alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ =10.

b) Limites en l'infini des fonctions élémentaires.

Fonctions	Limites en $-\infty$	Limites en $+\infty$
$x \to a, a \in \mathbb{R}$	a	a
$x \to x$	$-\infty$	$+\infty$
$x \to ax$	$-\infty$ $si\ a > 0$ $+\infty$ $si\ a < 0$	$+\infty$ $si\ a > 0$ $-\infty$ $si\ a < 0$
$x \to x^n, (n \in \mathbb{R}^+)$	$-\infty$ $si\ \ n\ \ impair$ $+\infty$ $si\ \ n\ \ pair$	$+\infty$
$x \to \frac{1}{x}$	0	0
$x \to \frac{1}{x^{n+1}}\ (n \in \mathbb{R}_+^*)$	0	0
$x \to \sqrt{x}$	N'existe pas	$+\infty$

Exemple :

Calculer chacune des limites suivantes :

a)$\lim_{x\to+\infty} 345$ b) $\lim_{x\to-\infty} -7x^2$ $c)$ $\lim_{x\to+\infty} 10 + \frac{12}{5x}$ $d)$ $\lim_{x\to-\infty} -3x$

2) Limite au voisinage d'un réel x_0.

Définition :

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f. ;x_0 et l deux nombres réels. Si $f(x)$ est proche de l lorsque x est proche de x_0, alors on dit que f a pour limite l au voisinage de x_0. On note $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Propriété :

Si f admet une limite en x_0 alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque : Lorsqu'une fonction f admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

Exemple :

Soit f la fonction numérique définie sur]0 ; +∞[par $f(x)= 10 + \frac{12}{5x}$. Lorsque x prend les valeurs de plus en plus proches de 2, les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus proches de 11,2 alors $\lim_{x\to 2} f(x)$ =11,2.

3) Limites à gauche et limite à droite de x_0.

Définitions :Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f.

- f admet pour limite l à gauche de x_0, si les nombres $f(x)$ se rapprochent de l lorsque x se rapproche de x_0 par valeurs inferieures. on note $\lim_{x\to x_0<} f(x) = l$;
- f admet pour limite l' à droite de x_0, si les nombres $f(x)$ se rapprochent de l' lorsque x se rapproche de x_0 par valeurs supérieures. on note $\lim_{x\to x_0>} f(x) = l'$;
- f admet pour limite l en x_0, si $\lim_{x\to x_0<} f(x) = \lim_{x\to x_0>} f(x) = l$.

propriétés :

- $si \lim_{x\to x_0<} f(x) = -\infty\ et \lim\limits_{x\to x_0>} f(x) = +\infty$ Alors la droite d'équation $x=x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.
- Soit (D) : y = ax + b une droite . si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - y]$ =0, alors la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exemple : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} x + 1\ si x < 1 \\ \frac{3}{x+2} si x > 1 \end{cases}$

Calculer la limite de f à gauche et à droite de 1. f admet-elle une limite en 1 ?

4) opérations sur les limites.

soient f et g deux fonctions, x_0, k et k' des nombres réels.

- Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	K	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	k'	k'	k'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$	k+k'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

- Limite du produit de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	k	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	k'	k'(k'≠0)	k'(k'≠0)	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f.g)(x)$	k.k'	$\begin{cases}+\infty, k'>0\\-\infty, k'<0\end{cases}$	$\begin{cases}+\infty, k'<0\\-\infty, k'>0\end{cases}$	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	k	K	k	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	k'	$+\infty$	$-\infty$	k'>0	k'<0	k'<0	k'>0	0	∞
$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$		0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I

(F.I= Forme Indéterminée)

Remarques : - la limite en l'infini d'une fonction polynôme est la limite en l'infini du monôme de plus haut degré.

- la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des monômes de degré le plus élevé du numérateur et du dénominateur.

EXERCICES D'APPLICATIONS:

1) Calculer chacune des limites suivantes.

a)$\lim_{x\to 5}(x+8)(-x+3)$ b) $\lim_{x\to -\infty} 2x^2+3x-8$ c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-2}{x^2+3}$

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$.

a) calculer les limites aux bornes du domaine de définition de *f*.

b) en déduire les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de *f*.

3) soit g la fonction définie par $g(x)= x+1-\frac{3}{x-2}$.

Montrer que la droite (D) : y = x+1 est une asymptote à la courbe représentative de *g*.

LEÇON2 : CONTINUITE

5ominutes

OBJECTIFS PEDAOGIQUES :

- Étudier la continuité d'une fonction en en point et dans un intervalle.
- Exploiter la courbe représentative d'une fonction pour étudier sa continuité en en point et dans un intervalle.

PREREQUIS :

soit f la fonction numérique définie par $f(x)= x^2+ 3$. Calculer et comparer $f(1)$ et $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solution :

$f(1) =4$ et $\lim_{x\to 1} f(x)=4$ alors $f(1)= \lim_{x\to 1} f(x)$.

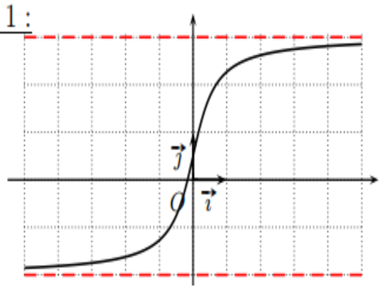
SITUATION PROBLEME :

Monsieur YOUSSOUF dont la maison est située au point 'A' souhaite rendre visite à sa maman AMINA dont la maison est au point 'B' mais souhaite rencontrer sa petite sœur ALIMA qui est au point 'C' devant une rigole qu'il faut sauter. Comment doit-il procéder ?

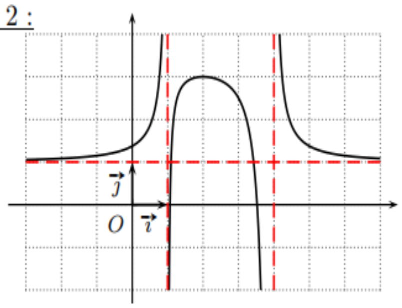
ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Observer les courbes représentatives des situations 1 et 2 suivantes et dire laquelle est tracée sans lever le crayon.

- Situation 1 :



- Situation 2 :



2) Place trois poins A ; B et C tous distincts
   a) Trace le parcours de Monsieur yousssouf entre A et B
   b) Trace le parcours de Monsieur yousssouf entre B et C sachant qu'il saute la rigole avant d'arriver à C.
   c) Que remarquez-vous ?
   d) Comment Monsieur YOUSSOUF doit-il procéder ?

Solution :

a) la courbe de la situation 1 est tracée sans lever le crayon.

RESUME:

Définition :

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f.,x_0 un nombre réel et I un intervalle.

- f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Exemple :

Dans la situation 1 de l'activité la fonction est continue en tout point de son domaine de définition mais dans la situation 2 elle n'est pas continue en 1 et 4 .

Remarques :

- toute fonction polynôme est continue sur IR.
- toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

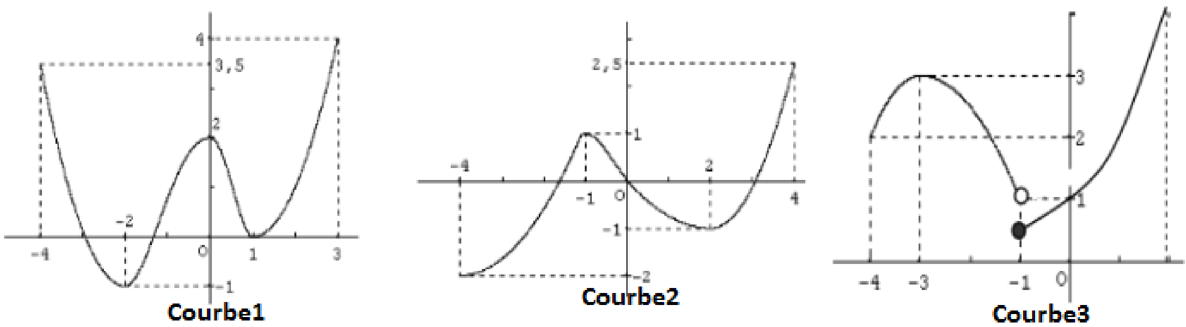
EXERCICES D'APPL ICAT IONS :

1) Etudier la continuité de chacune des fonctions suivantes en x_0.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x+5$, $x_0=1$.

b) $g(x) = \frac{2x-5}{x+3}$, $x_0=-3$

2) soient les courbes représentatives des fonctions suivantes :



a) la fonction représentée par la courbe1 est-elle continue en 2 ?

b) la fonction représentée par la courbe2 est-elle continue dans l'intervalle [-4 ;4] ?

c) la fonction représentée par la courbe3 est-elle continue en -1 ?

CHAPITRE : FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENNES

- *INTERETS* : Calcul du PH d'une solution (en chimie) ; etc.
- *MOTIVATION* : La notion de logarithme permet de d'élargir et d'agrandir le champ d'étude des fonctions ainsi que les suites et le champ de calcul des primitives et par conséquent, celui des intégrales ; elle permet aussi de résoudre certaines équations du premier ordre.

LEÇON 1 : VOCABULAIRE, PROPRIETES, EQUATIONS ET INEQUATIONS *100 minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction logarithme népérien ;
- Résoudre des équations, inéquations et systèmes ayant pour inconnue auxiliaire ln ;

PREREQUIS

- Détermination des primitives de fonctions de la forme: $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ tel que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

R : $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$

- En utilisant la calculatrice dans le cas où cela est possible calculer au centième près : ln2, ln0.5, ln4 ,2ln2, ln (-2), ln1
  R : ln2=

1-SITUATION PROBLEME :

Un élève de la classe première A est confronté à un double problème le premier problème, la résolution de l'équation x^2-4$\sqrt{ln2}x$+ $ln16$=0 et le second trouver la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ peux-tu l'aider ?

2-ACTIVITE D'APPRENTISSAGE:

1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $I =]0; +\infty[$: $f(x) = 2$; $g(x) = x^2$; $u(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{x^3}$.
2. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   f admet-elle une primitive sur I ? Si oui, déterminer si possible celle qui s'annule en 1.
3. Calculer et comparer ln16 et 4ln2, ln9 et 2ln3 conjecture de $\ln x^n$
4. Calculer et comparer ln$\frac{2}{3}$ et ln2-ln3, ln$\frac{9}{5}$ et ln9-ln5 conjecture de ln$\frac{x}{y}$

SOLUTION :

1. Primitives des fonctions :

- $f(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = 2x + k \;\; ; k\epsilon\mathbb{R}$;
- $g(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \;\; ; k\epsilon\mathbb{R}$
- $u(x) = \frac{1}{x^2} \;\; \Longrightarrow \;\; U(x) = -\frac{1}{x} + k \;\; ; k\epsilon\mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$; f est continue sur $I =]0; +\infty[$; alors f admet une primitive sur I. Toutefois, les

3. ln16 = 4ln2 , ln9 = 2ln3 par conjecture on a $\ln x^n = n\ln x$
4. $\ln\frac{2}{3}$ = ln2-ln3, $\ln\frac{9}{5}$ =ln9-ln5 par conjecture on a $\ln\frac{x}{y}$=lnx-lny

3-RESUME

1-Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ de la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{x}$ notée ln et prenant la valeur 0 en 1.

Conséquence :

- Pour tout x appartenant à$]0;\ +\infty[$, $(lnx)' = \frac{1}{x}$,
- $ln1 = 0$,

Remarque :

R_1 : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ où e est la base du logarithme népérien.(on $e^1 = e \approx 2.72$).

R_2 : Etant donné que la fonction primitive soit définie sur le même ensemble que la fonction considérée , la fonction ln est définie sur $]0\,;\ +\infty[$.

1. Propriétés.

a- Soit une fonction u

- $\ln(u(x))$ existe ssi $u(x) > 0$;
- $\ln|u(x)|$ existe ssi $u(x) \neq 0$;
- $\ln[u(x)]^2$existe ssi $u(x) \neq 0$

b- Soient $a > 0\,; b > 0\ et\ n\epsilon\mathbb{Q}$ on a alors :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- $\ln(a^n) = n\ln a$.

c- Soient $a > 0\ et\ b > 0$ on a :

- $\ln a = \ln b \iff a = b$;
- $\ln a > \ln b \iff a > b$;
- $\ln a = \mathrm{b} \iff a = e^b$

4-EXERCICE D'APPLICATION :

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes : $f_1(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$; $f_2(x) = (x+1)\ln(x-2)$.

b) Simplifier les expressions suivantes : $A = 2\ln(-2+\sqrt{5}) + \ln(9+\sqrt{5})$; $B = \ln(0{,}1) + \ln(10) - \ln(0{,}0001)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$:

$$\ln(1-x) = 0\ ;\ln(x+3) - \ln(x-1) = \ln(x+5)\,;2\ln(x-2) > 4\ \ et \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

2-DERIVEE

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors $\forall x \in I$; $(\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$.

Exemple : calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x)$;
b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$;
c) $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$;
d) $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Solution :

a) $f(x) = \ln(x)$

Domaine de dérivabilité : $D_D =]0\,;\,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 2x + 4 > 0$ donc $D_f = D_D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} = \frac{2x+2}{x^2+2x+4} \implies f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+4}$;

c) $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$		
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$ 0	$-$ ||	$+$

$D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,+\infty[= D_D$;

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \frac{-3}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)(x+1)}$$

3-PRIMITIVES

Etant donnée U ; une fonction continue sur un intervalle I. Alors $\forall x \in I$; $\int \frac{U'(x)}{U(x)} dx = \ln|U(x)| + k$

Exemple : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{x}$;
b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$
c) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

Solution :

a) $f(x) = \frac{1}{x} \;= \frac{x\prime}{x}$; donc : $F(x) = \ln|x| + k$;

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+3} = \frac{(x^2+3)\prime}{x^2+3}$; donc : $F(x) = \ln|x^2 + 3| + k$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-1} = \frac{x-1+4}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{4}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1} = x' + 4\frac{(x-1)\prime}{x-1}$; donc $F(x) = x + 4\ln|x - 1| + k$;

LEÇON 2: FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENNES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Calculer les limites des fonctions logarithmes népériens du type $\ln(ax+b)$;
- Calculer la dérivée d'une fonction logarithme népérien.

PREREQUIS

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x)$;
b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$;

R :a) f'(x)= $\frac{1}{x}$

b)f'(x)= $\frac{2X+2}{x^2+2x+4}$

1-SITUATION PROBLEME :

Un élève de la classe première A est confronté à un problème qui consiste à étudier l'évolution de la pandémie COVID 19 dans une région dans une période de 13 mois. Elle est modélisée par la fonction f(x)= ln(2x+1) peux-tu l'aider ?

2-ACTIVITE D'APPRENTISSAGE:

Considérons la fonction f(x)= ln(2x+1)

1- Déterminer l'ensemble de définition de f
2- Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de f
3- Calculer f(0) et f(13)
4- Calculer la dérivée de f puis étudier son signe puis conclure sur les variations de f

SOLUTION

1- f(x) existe ssi 2x+1>0
ssi 2x>-1
ssi x>$\frac{-1}{2}$
Donc Df=]$\frac{-1}{2}$;+∞[
2- $\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3- f(0)=0 et f(13)=ln(27)
4- f'(x)=$\frac{2}{2x+1}$ >0 donc f est strictement croissante

3-RESUME

1 - LIMITES

Soit $x > 0$; les limites classiques suivantes sont admises :

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \ln x = 0$; avec $\alpha > 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; avec $\alpha > 0$

2- ETUDE DE LA FONCTION $x \longmapsto \ln x$

$f(x) = \ln x$;

- Domaine de définition : $D_f =]0\,;\,+\infty[$;
- Limites aux bornes du domaine de définition :
  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$;
- Branches infinies : $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; donc (C_f) admet une branche parabolique de direction (OX).
- Dérivabilité et dérivée : est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x}$;
- Variation de f ; $\forall \epsilon]0\,;\,+\infty[$; $f(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$;
- Tableau de variations de f ;

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

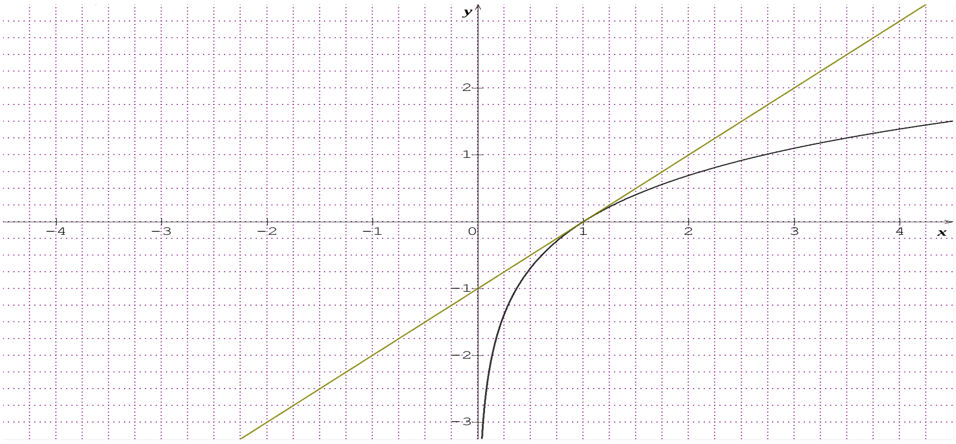
- Intersections avec les axes :

$f(x) = 0 \implies x = 1$; donc $A\binom{1}{0} \epsilon\ (C_f)$

- Tangente en $x = 1$:

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 0 = x - 1$; donc $(T): y = x - 1$.

- Courbe



4-EXERCICE D'APPLICATION :

1- Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(2x-3-\ln x)$; $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+2+3\ln x)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+1}$

2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition ; $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$.

FONCTION EXPONENTIELLE

INTERET : les fonctions exponentielles me permettront de déterminer les dimensions, de lire et interpréter un texte comportant des nombres tels que : taux d'évolution de budget, l'intérêt d'un placement en banque.

MOTIVATION : Pour résoudre certains problèmes de la vie tels que……

LECON1 : DEFINITION *Durée : 50minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction exponentielle ;
- Utiliser $lnx = y$ équivaut à $e^y = x$.

PREREQUIS

1. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = lnx$.

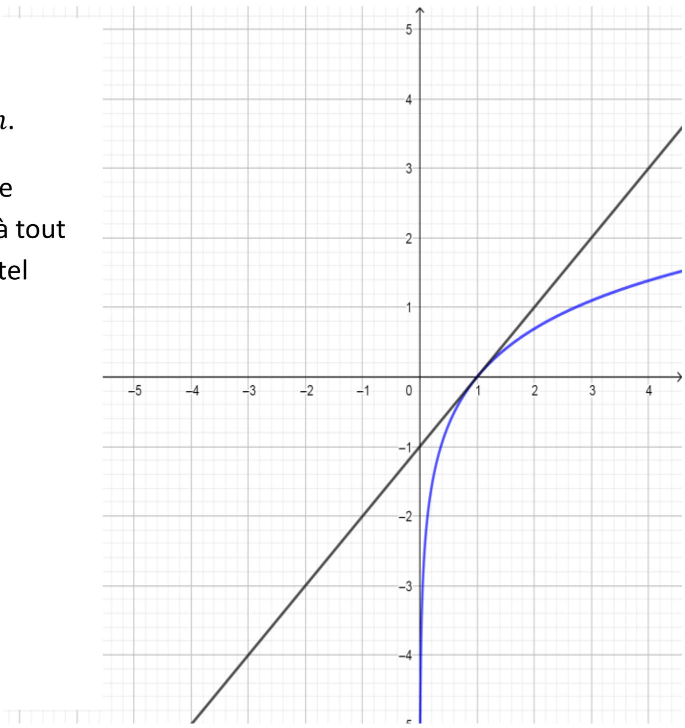
SOLUTION : f existe si et seulement si $x > 0$. Donc $D_f =]0; +\infty[$

SITUATION PROBLEME :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

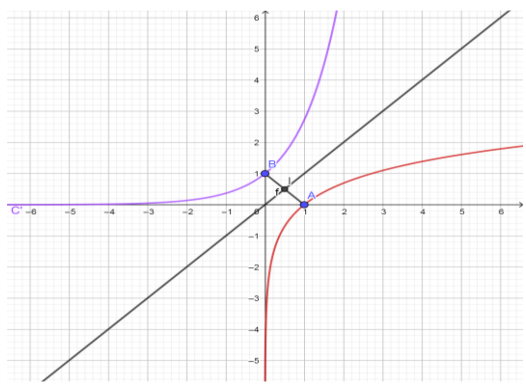
La courbe C ci-contre est la représentation de la fonction ln.

Pour tout nombre réel a, l'équation $lnx = a$ admet-elle une unique solution dans $]0; +\infty[$ ou quelle est la fonction qui à tout nombre réel a associe le nombre réel strictement positif b tel que : $lnb = a$.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). La courbe C ci-dessus est la représentation graphique de la fonction ln. Cette fonction sera notée h. Et on appellera g la fonction dont la courbe représentative est C'.



En observant ce graphique, répondez aux questions suivantes :

1) Quelle est domaine de définition de h ?
2) Déterminez $h(1)$ et $g(0)$.

3) Les points A et B sont-ils symétriques par rapport à la droite $T : y = x$?
4) Que pouvez-vous dire des courbes C et C' ?
5) Soit b l'antécédent 0 par h, déterminez b.
6) Compare b et g(0).
7) Quel est le domaine de définition de g ?
8) Pouvez-vous dire que g est la fonction qui à tout réel a associe le réel strictement positif b tel que $lnb = a$?

SOLUTION

1) Le domaine de définition de h est $]0; +\infty[$.
2) Nous déterminons que : h(1)=0 ; g(0)=1.
3) On constate que les points A et B sont symétriques par rapport à T.
4) De ce qui précède la courbe C' est le symétrique de C par rapport à T.
5) Valeur de b : b=1
6) Alors b=g(0)=1.
7) Le domaine de définition de g est R.
8) Nous avons vu que D_h=$]0; +\infty[$ et D_g=R. De plus ln1=0, C et C' sont symétriques par rapport à T, donc g est la fonction qui à tout réel a associe le rée strictement positif b. Cette fonction g est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

RESUME

Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Soit a$\in \mathbb{R}$, $b = exp(a)$ équivaut à $\begin{cases} a = lnb \\ b \in]0; +\infty[\end{cases}$.

Remarque

- Par extension à tout nombre réel x, on note $exp(x) = e^x$. On lit exponentielle de x ou exposant x.
- Pour tout nombre réel a, $e^a > 0$.
- Pour tout réel a, $ln\,(e^a) = a$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif ,$e^{lna} = a$.

Exemples :

- $e^{ln3} = ln3$; $lne^{-3} = -3$.
- Déterminez x pour $e^x = 3$.
- Déterminez y pour $lny = -2$.

Répondez par vrai ou faux.

1) $e^{-4,5} = -4,5$
2) la fonction exponentielle qui $x \longmapsto e^x$ est définie sur $]-\infty; +\infty[$.
3) l'équation admet $e^x = -5$ une solution dans R .

LECON2 : PROPRIETES ALGEBRIQUES- LIMITES USUELLES- DERIVEE

DUREE : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- calculer les limites des fonctions $x \longmapsto e^{ax+b}$.
- calculer la dérivée des fonctions $x \longmapsto e^{ax+b}$.

PREREQUIS :

1) Recopiez et complétez

$$a^{n+m} = a^{\cdots} \times a^{\cdots} \; ; \; (a^n)^m = a^{\cdots}$$

2) Calculez 2^3 ; 3^{-2}.

SOLUTION :

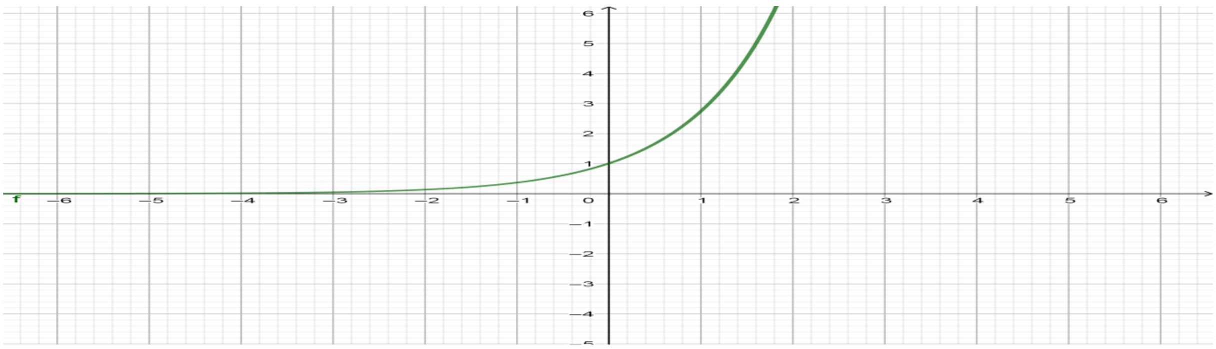
1) recopions et complétons :$a^{n+m} = a^n \times a^m$; $(a^n)^m = a^{n\times m}$.
2) calculons : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

SITUATION PROBLEME :

La fonction qui modélise le nombre de vues d'une vidéo x jours après sa mise en ligne est définie par $V(x) = e^{(x+3)}$. Sophie vient de poster une vidéo pour sa reprise des cours après un confinement long de trois mois. Elle voudrait calculer le nombre de vues qu'elle pourrait enregistrer d'ici deux jours ? Aide Sophie à faire ce calcul.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Calculez au dixième près à l'aide d'une calculatrice e^5 ; $e^2 \times e^3$.
2) Comparez les résultats précédemment obtenus.
3) Pouvez-vous dire que pour tout réels a et b, $e^{a+b} = e^a \times e^b$?
4) Quel sera le nombre de vues de la vidéo de Sophie après deux jours ?
5) Calculez au dixième près à l'aide d'une calculatrice : e^{-2} et $\frac{1}{e^2}$.
6) Comparez les résultats obtenus.
7) Pouvez-vous dire que :$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$?
8) La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$. En vous servant de cette courbe répondez aux questions suivantes :



a) Déterminez $\lim_{x \to -\infty} e^x$.
b) Déterminez $\lim_{x \to +\infty} e^x$.

RESUME :

Propriétés :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

EXEMPLES:

e^{1-ln2}=e×e$^{-\ln 2}$=e× $\frac{1}{e^{ln2}}$=e× $\frac{1}{2}$.

$(e^3)^2$=e^6.

Remarques :

- $\lim_{X \to -\infty} e^x$=0 ; $\lim_{x \to +\infty} e^x$=+∞.
- $\lim_{x \to -\infty} xe^x$=0 ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$=+∞.
- La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur R et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto e^x$. Donc $(e^x)' = e^x$.
- De façon générale on admet que la dérivée d la fonction $(e^{at+b})' = ae^{at+b}$.
- $\lim_{X \to -\infty} e^{ax+b}$=$\begin{cases} 0, si\ a > 0 \\ +\infty, si\ a < 0 \end{cases}$.
- $\lim_{X \to +\infty} e^{ax+b}$=$\begin{cases} +\infty, si\ a > 0 \\ 0, si\ a < 0 \end{cases}$.

EXERCICE D'APPLICATION :

1) Ecrivez sous la forme e^a les expressions ci-dessous :
   a) $e^3 \times e^5$
   b) $e^4 \times e^{-7}$
   c) $(e^3)^6$
   d) $\frac{e^{10}}{e^4}$
2) Développez et réduisez les expressions suivantes :
   a) $(3 + e^{-x})(2 - 3e^x)$
   b) $(e^x + 2)(e^x + 7)$
3) Dans chacun des cas suivants déterminez la limite de la fonction f en -∞ et +∞ :
   a) $f(x) = e^x + x$
   b) $f(x) = e^x + e^{-x}$
   c) $f(x) = e^{-2x+1}$
   d) $f(x) = e^{3x}$
4) Calculez la dérivée sur R de la fonction f définie par $f(x) = e^{5x+2}$

LECON3 : RESOLUTIONS D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS- PRIMITIVES

DUREE : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Résoudre des équations, inéquations et système ayant pour inconnue auxiliaire e^x ;
- Déterminer la primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$

PREREQUIS :

1) Résolvez dans R : $x^2+2x-15=0$
2) Résolvez dans R^2 : $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x-3y=-11 \end{cases}$

SOLUTION :

1) résolvons dans $R : x^2+2x-15=0$
   Le discriminant de $x^2+2x-15$ est $\Delta = 4+60=64$. $\sqrt{\Delta}=8$.
   $x=\frac{-2-8}{4}=\frac{-5}{2}$ ou $x=\frac{-2+8}{4}=\frac{3}{2}$. Donc $S_R=\left\{\frac{-5}{2};\frac{3}{2}\right\}$
2) résolvons dans R^2 le système : $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x-3y=-11 \end{cases}$
   De $2x+3y=4$ on obtient $3y=4-2x$, en remplaçant $3y$ par $4-2x$ dans $5x-3y=-11$ on a $7x=14$ ce qui donne $x=2$.
   En remplaçant $x=2$ dans $3y=4-2x$, on obtient $y=0$. Donc $S_{R^{2=\{(2;0)\}}}$

SITUATION PROBLEME :

Le service en charge de mesurer le gain ou la perte d'une entreprise industrielle qui transforme le cacao en chocolat a pu modéliser le profit(en millions de FCFA) en fonction de la quantité en tonnes de produits vendus par la fonction : $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}-e^x+3$. Cette entreprise vend entre 0 et 5 tonnes de produits chaque mois. Le PDG de cette entreprise veut préparer une nouvelle stratégie pour éviter les pertes chaque mois, pour cela il veut savoir quelle quantité minimale de produits son entreprise doit pouvoir vendre. Que doit faire le service en charge de la perte ou du gain pour répondre au PDG ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

I. On considère (E) : $e^{3x}-3e^{2x}-e^x+3=0$ et (E') : $e^{3x}-3e^{2x}-e^x+3>0$.
   On pose $X=e^x$.
   1) Quelle condition doit vérifier X ?
   2) Montrez que (E) peut encore s'écrit $X^3-3X^2-X+3=0$.
   3) Montrez 1 vérifie l'équation $X^3-3X^2-X+3=0$
   4) Résolvez dans R $X^3-3X^2-X+3=0$.
   5) Déduisez les solutions de (E).
   6) Résolvez (E') dans R
   7) Pour quelle quantité minimale de produits vendus l'entreprise pour faire un gain chaque mois ?

II. Soit les systèmes :

(S):$\begin{cases} -x+y=1 \\ e^x+e^y=1 \end{cases}$ et (S'):$\begin{cases} 2e^x-e^y=-2 \\ 4e^x+e^y=5 \end{cases}$.

On pose X=e^x et Y=e^y.

1) Quelle condition vérifie X et Y ?
2) Montrez que (S') peut se mettre sous la forme $\begin{cases} 2X-Y=-2 \\ 4X+Y=5 \end{cases}$.
3) Déduisez une résolution de (S').
4) Montrez que (S) s'écrit encore $\begin{cases} y=x+1 \\ (1+e)e^x=1 \end{cases}$
5) Déduisez une résolution de (S) dans R^2

III. On donne les fonctions f et F définies pour tout t dans R , par $f(t)=e^{at+b}$ et $F(t)=\frac{e^{at+b}}{a}$.

1) Calculez la dérivée de la fonction F sur R.
2) Que constatez-vous ?

SOLUTION :

I.

Pour tout réel x, $e^x>0$ alors X >0.

1) (E) s'écrit X^3-$3X^2$-X+3=0. Car $e^{3x}=(e^x)^3$ et $e^{2x}=(e^x)^2$.
2) Résolvons X^3-$3X^2$-X+3=0.

   X=1 est une solution de cette équation. La division euclidienne de X^3-$3X^2$-X+3 par X-1 nous permet d'avoir X^3-$3X^2$-X+3=(X-1)(X+1)(X-3).

   D'où X=1 ou X=-1 ou X= 3. Comme X>0, alors X=1 ou X=3. Donc S=$\{1;3\}$.
3) Déduisez les solutions de (E)

   X=1 équivaut à e^x=1 ce qui équivaut à x=ln1=0 ;

   X=3 équivaut à e^x=3 ce qui équivaut à x=ln3.

   Donc S_1=$\{0; ln3\}$.
4) Résolvons (E') dans R

   Comme X+1>0, on s'intéresse donc au tableau de signe de (X-1) (X-3).

   On a donc S=$]-\infty;0[\cup]ln3;+\infty[$.
5) Cette entreprise pour élaborer sa nouvelle stratégie doit vendre au moins mensuellement une quantité supérieur à ln3 tonnes.

II.

1) Pour tout x et y réels, $e^x>0$ et $e^y>0$, alors X>0 et Y> 0.
2) On vérifie aisément le résultat.
3) Déduisons une résolution de (S') dans R^2

   La résolution de $\begin{cases} 2X-Y=-2 \\ 4X+Y=5 \end{cases}$ donne X=$\frac{1}{2}$ et Y=3.

   X=$\frac{1}{2}$ équivaut à x=-ln2 et Y=3 équivaut à y=ln3. Donc S_1=$\{(-ln2; ln3)\}$
4) Montrons que (S') s'écrit encore $\begin{cases} y=x+1 \\ (1+e)e^x=1 \end{cases}$

   De $-x+y=1$ on obtient y=x+1. En remplaçant y par $x+1$ dans l'équation $e^x+e^y=1$ on obtient $e^x+e^{x+1}=1$ ce qui équivaut à $(1+e)e^x=1$.
5) Déduisons une résolution de (S) dans R^2

$(1+e)e^x=1$ il en résulte que x=-ln (1+e) et y=1-ln(1+e). Donc S_2=$\{(-\ln(1+e)\,;1-\ln(1+e))\}$.

III.

1) calculons F' : $F'(t) = a \times \frac{e^{at+b}}{a} = e^{at+b}$
2) Nous constatons que pour tout t dans R, F'(t)=f(t).
   On appelle F une primitive de f sur$R$.

RESUME :

- Pour résoudre les équations, inéquations et système d'équation ayant pour inconnue auxiliairee^{x}, on pose $X = e^{x}$ ou $Y = e^{y}$ et on résous.
- une primitive de la fonction x↦ e^{ax+b} est la fonction x↦ $\frac{1}{a}e^{ax+b}$.

EXERCICE D'APPLICATION:

1) Résout dans R : $3e^{x}-2=e^{2x}$.
2) Résout dans R : $e^{x}>1+e^{-x}$.
3) Résout dans R^2 : $\begin{cases} 2e^{x} - e^{y} = -1 \\ 4e^{x} + 3e^{y} = 18 \end{cases}$.
4) Détermine une primitive sur R de la fonction$f(t) = e^{-2t+5}$.

✠ ÉTUDE DE FONCTION ✠

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : ÉTUDE DE FONCTIONS

INTERET :

MOTIVATION :

Dans ce chapitre, les élèves doivent déployer un raisonnement mathématique pour résoudre les problèmes liés à la vie en faisant appel aux fonctions.

LEÇON 1 :ÉTUDE D'UNE FONCTION POLYNÔME

Objectifs pédagogiques :

↪ Reconnaitre une fonction polynôme.

↪ Étudier et construire une fonction polynôme.

Pré-réquis :

1. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacunes des fonctions suivantes : $f(x) = -2x^2 + x - 1$; $g(x) = 2 - x + 3x^2 + 5x^3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x + 3 = 0$; $x^2 + 5x + 6 = 0$

Correction

1. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacunes des fonctions suivantes : $f(x) = -2x^2 + x - 1$; $g(x) = 2 - x + 3x^2 + 5x^3$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x + 3 = 0$; $x^2 + 5x + 6 = 0$

$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2} \Leftrightarrow S = \{\dfrac{-3}{2}\}$

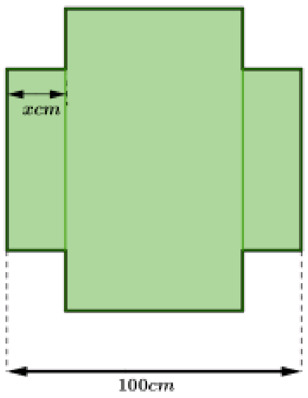
$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4(1)(6) = 1$

ainsi, $x_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ et $x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$

Donc $S = \{-3, -2\}$

SITUATION PROBLÈME On dispose d'une feuille de carton carrée de coté 100cm. Aux quatre coins de cette feuille, on découpe un carré de côte xcm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte sans couvercle.

On désigne par $V(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm.



Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal puis calculer ce volume maximal.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la fonction V définie sur $\mathbb{R}$ par $V(x) = x(100 - 2x)^2 = 4x^3 - 400x^2 + 10000x$.

1. Calculer les limites de V aux bormes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de V sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
3. (a) Déterminer les extrémums relatifs de V.

   (b) Repondre à la situation problème.

Correction

On considère la fonction V définie sur $\mathbb{R}$ par $V(x) = x(100 - 2x)^2 = 4x^3 - 400x^2 + 10000x$.

1. Calculer les limites de V aux bormes de son ensemble de définition.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} V(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$.

2. Étudier les variations de V sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.

   V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $V'(x) = 12x^2 - 800x + 10000$.

   On a $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 800x + 10000 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 200x + 2500 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{50}{3}$ où $x = 50$

Variation de V

x	$-\infty$		$\frac{50}{3}$		50		$+\infty$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 1 – Tableau de signe

– V est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{50}{3}\right[$ et sur $]50, +\infty[$.

– V est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{50}{3}, 50\right[$.

Tableau de variation de V

x	$-\infty$		$\frac{50}{3}$		50		$+\infty$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2\times 10^6}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2 – Tableau de variation

3. (a) Déterminer les extrémums relatives de V.

   * V admet un maximum relatif atteint en $\dfrac{50}{3}$ égal à $\dfrac{2\times 10^6}{27}$.
   * V admet un maximum relatif atteint en 50 égal à 0.

   (b) Repondre à la situation problème.

   Le volume de la boîte est maximal pour $x = \dfrac{50}{3}$ et ce volume maximal est $V = \dfrac{2\times 10^6}{27}$.

RESUMÉ

0.1. Fonction polynôme

Définition 0.1.1

Toute expression de la forme ax^2+bx+c où a, b, c sont des réels est appelée **Fonction polynôme** de degré 2.

Définition 0.1.2

Toute expression de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont des réels est appelée **Fonction polynôme** de degré 3.

Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Calculer les limites au bornés de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les extremums relatifs.
4. Écrire une équation de la tangante (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
5. Construire (C_f) et sa tangente (T).

Solution de l'exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Calculons les limites au bornés de son ensemble de définition.

   On $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$.

2. Étudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

   f est dérivables sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme et $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

   On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ où $x = 2$.

Tableau de Signe

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$ et f est strictement croissante $]0; 2[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

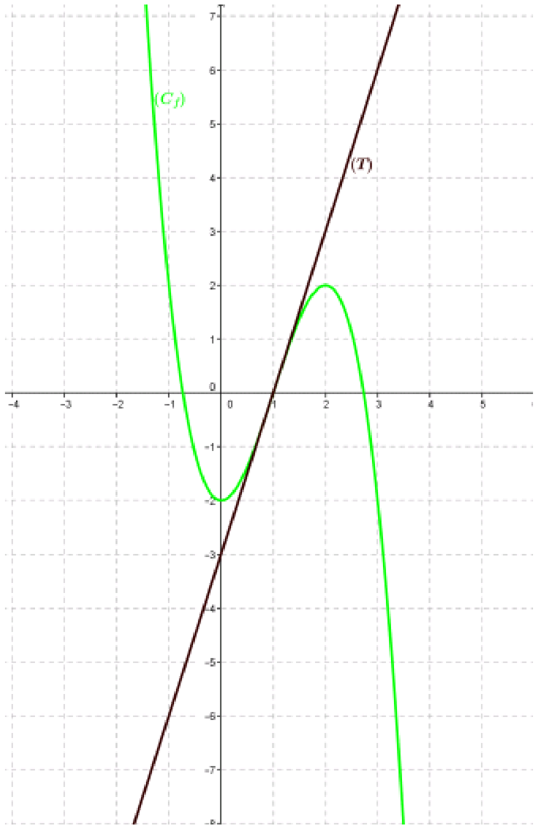
3. Déterminons les extremums relatifs.

   f admet -2 comme minimum et 2 comme maximum

4. Écrivons une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

   $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Longrightarrow (T) : y = 3(x-1)$

5. Construisons (C_f) et sa tangente (T).



(C_f)
(T)

LEÇON 2 :ÉTUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Objectifs pédagogiques :

Reconnaitre une fonction rationnelle du type $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

Étudier et construire une fonction rationnelle.

Pré-réquis

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la dérivée g' de g.

Correction

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$.

   $D_g=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

2. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$;

   $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2} -2x+1=-3\\ \lim\limits_{x\to2} x-2=0\end{cases}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

   $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=-\infty\end{cases}$

3. Calculer la dérivée g' de g.

   g est dérivable sur $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ et pour tout x élément de $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{(-2x+1)'(x-2)-(x-2)'(2x+1)}{(x-2)^2}\\&=\frac{-2(x-2)-(-2x+1)}{(x-2)^2}\\&=\frac{3}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

SITUATION PROBLÈME Pour déménager, une agence de location de véhicules propose un camion a Nyangono. Pour ce camion :

∗ Nyangono loue ce camion a 8000 FCFA par heure (camion et chauffeur compris) pendant toute la durée du déménagement.

∗ Nyangono recrute un certain nombre de manoeuvres qu'il paie a 2000 FCFA chacun et par heure pendant toute la durée du demenagement.

∗ La duree des opérations de charge et de décharge (avant et après le voyage) est inversement proportionnelle au nombre de manoeuvres recrutés.

∗ Chaque manœuvres reçoit 2 000 FCFA par heure pendant toute la durée du déménagement.

∗ Un seul manœuvre mettrait 2 heures pour les opérations de charge et de décharge. ce camion charge met deux heures pour réjoindre le domicile de Etame. Déterminer le nombre de manœuvres pour lequel la dépense est minimale de ce camion.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x}$ et (C) sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x élément du domaine de définition, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$.

   (b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$. Trouver l'autre asymptote.

   (c) Étudier la position relative de (d) et (C).

3. (a) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

   (b) Dresser le tableau de variation de f.

   (c) Déterminer les extremum éventuelles.

   (d) Montrer que le point $\Omega(0,5)$ est centre de symétrie de (C).

4. Construire (C) est ses asymptotes.

5. Repondre à la situation problème.

Solution

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x}$ et (C) sa courbe représentative.

1. (a) Déterminons le domaine de définition de f.

   $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

   (b) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

2. (a) Déterminons les réels a, b et c tel que pour tout x élément du domaine de définition, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$.

On a $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{5x}{x} + \dfrac{4}{x} = x+5+\dfrac{4}{x}$. Ainsi $a = 1;\ b = 5\ et\ c = 4$

(b) Montrons que la droite (d) d'équation $y = x+5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$. Trouver l'autre asymptote.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+5)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+5)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$.

Donc la droite (d) d'équation $y = x+5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Deplus donc la droite d'équation x

(c) Étudions la position relative de (d) et (C).

En étudiant le signe de $\dfrac{4}{x}$ dans un tableau de signe, on remarque que :

- $\forall\ x\ \in]-\infty;0[$, (C) est en dessous de (d).
- $\forall\ x\ \in]0;+\infty[$, (C) est au dessus de (d).

3. (a) Étudions les variations de f sur son ensemble de définition.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\ x\ \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(2x+5)(x)-1(x^2+5x+4)}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2-4 = 0 \Rightarrow x = 2$ où $x = -2$ et on a la tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(b) Dressons le tableau de variation de f. On a la tableau de variation suivante :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty \Vert +\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

(c) Déterminons les extremums éventuels.

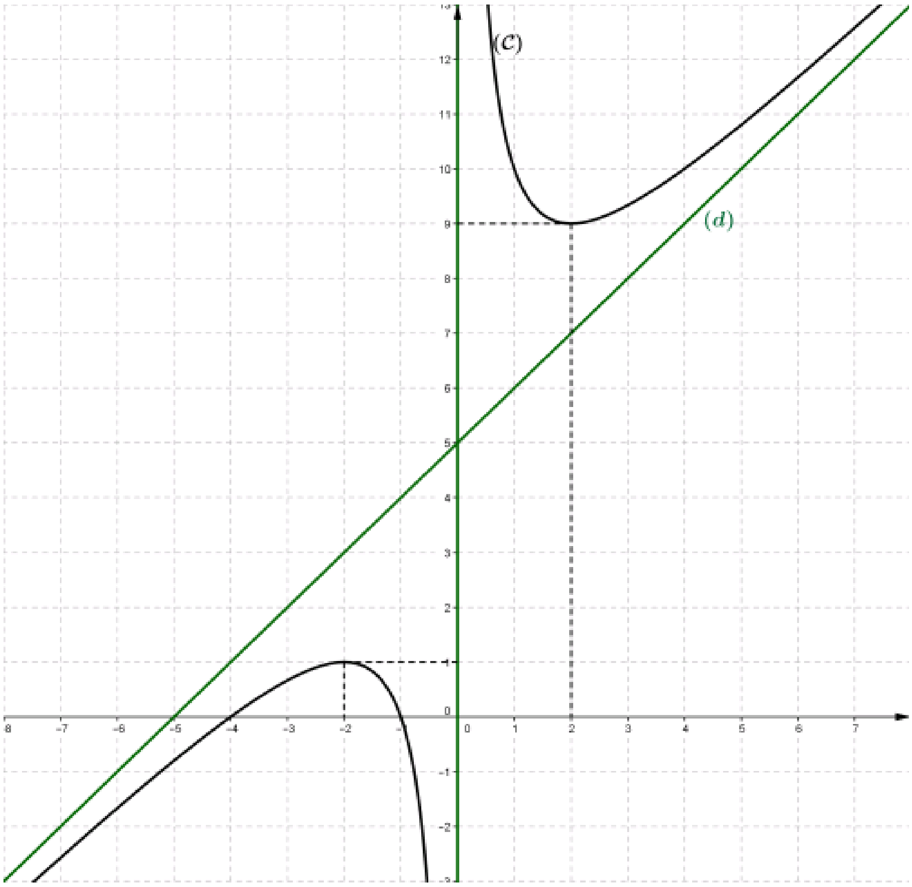
On a 1 comme maximum relatif atteint en -2 et 9 comme minimum relatif atteint en 2.

(d) Montrons que le point $\Omega(0,5)$ est centre de symétrie de C. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{aligned}
f(x) + f(-x) &= \frac{x^2+5x+4}{x} + \frac{(-x)^2+5(-x)+4}{-x} \\
&= \frac{x^2+5x+4}{x} + \frac{x^2-5x+4}{-x} \\
&= \frac{x^2+5x+4}{x} + \frac{-x^2+5x-4}{x} \\
&= \frac{10x}{x} \\
&= 10
\end{aligned}$$

Donc le point $\Omega(0,5)$ est centre de symétrie de (C).

4. Construisons (C) et ses asymptotes.



5. Répondons à la situation problème.

désignons par x le nombre de manœuvres et par $h(x)$ la fonction qui x(le nombre de manœuvres) associe la somme à payer pour le déménagement. c'est-à-dire $f(x)$ = montant de la location + le montant à payer aux manœuvres. Si on désigne par t(en heure) la durée de charge et de décharge du camion.

Puis le camion met 2 heures, on a comme montant de location est $8000(t + 2)$, et la durée d'opération d'un manœuvre étant de deux heures, le montant à payer aux manœuvres sera $2000x(t + 2)$. Or $\frac{t}{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{x}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
h(x) &= 8000(t + 2) + 2000x(t + 2) \\
&= (t + 2)(2000x + 8000) \\
&= \left(\frac{2}{x} + 2\right)(2000x + 8000) \\
&= \frac{(2 + 2x)(2000x + 8000)}{x} \\
&= \frac{4000x + 16000 + 4000x^2 + 16000x}{x} \\
&= \frac{4000x^2 + 20000x + 16000}{x} \\
&= \frac{4000(x^2 + 5x + 4)}{x}
\end{aligned}$$

En considérant le tableau ci-dessous, on constate que la valeur minimale est atteinte pour $x = 2$. On conclu que le nombre manœuvres est 2.

RESUMÉ

0.2. Fonction rationnelle

Définition 0.2.1

Toute expression de la forme $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ où a, b, c, d, e sont des réels est appelée **Fonction rationnelle**.

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1. (a) Calculer les limits aux bornes du domaine de définition de g.

   (b) Trouver l'asymptote eventuelle.

   (c) Momtrer que $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ pour tout $x \neq -1$

(d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_g).

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

   (b) Écrire une équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 0.

   (c) g admet t-elle les extremums relatives ?

3. (a) Déterminer les points de rencontre de la courbe avec les axes de coordonnées.

   (b) Construire (C_g) avec ses asymptotes et sa tangente.

Exercice 2

LEÇON 3 :ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

Objectifs pédagogiques :

↪ Reconnaitre une fonction logarithme.

↪ Étudier et construire une fonction logarithme.

Pré-réquis

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 - x)$.
2. Calculer $\ln 1$, $\ln e^2$.
3. Calculer la dérivée g' de g.

Correction

1. Déterminons le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 - x)$.

   $g(x)$ existe si et seulement si $1 - x > 0$ ie ssi $x < 1$. Donc $D_g =]-\infty; 1[$

2. Calculons $\ln 1$, $\ln e^2$.

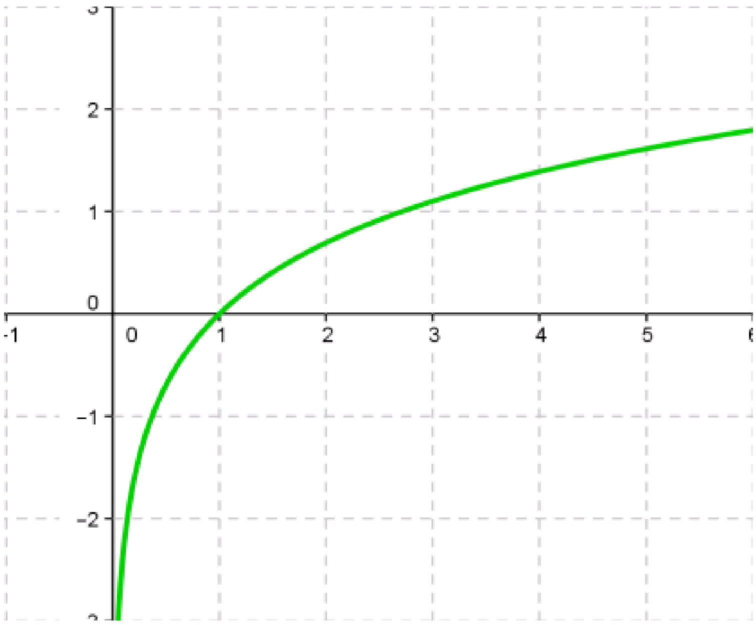
   $\ln 1 = 0$, $\ln e^2 = 2\ln e = 2 \times 1 = 2$

3. Calculer la dérivée g' de g.

   g est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et pour tout x élément de $]-\infty; 1[$, $g'(x) = \dfrac{(1-x)'}{1-x} = \dfrac{-1}{1-x}$.

SITUATION PROBLÈME

Atangana a entendu parler du nombre de Neper et veut trouver une valeur approchée. Dans le graphe ci-dessous aide Atangana à trouver dans quel intervalle ce nombre ce trouve.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. (a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

   (b) Déterminer le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
4. Construire (C_g) et (T).

CORRECTION

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculons les limites

   on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

   g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

tableau de variation

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

FIGURE 3 – Tableau de variation

3. (a) Ecrivons une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

$$(T) : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

$$= \quad x-1$$

Donc $(T) : y = x - 1$

(b) Déterminons le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

On a $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4. Construisons (C_g) et (T).

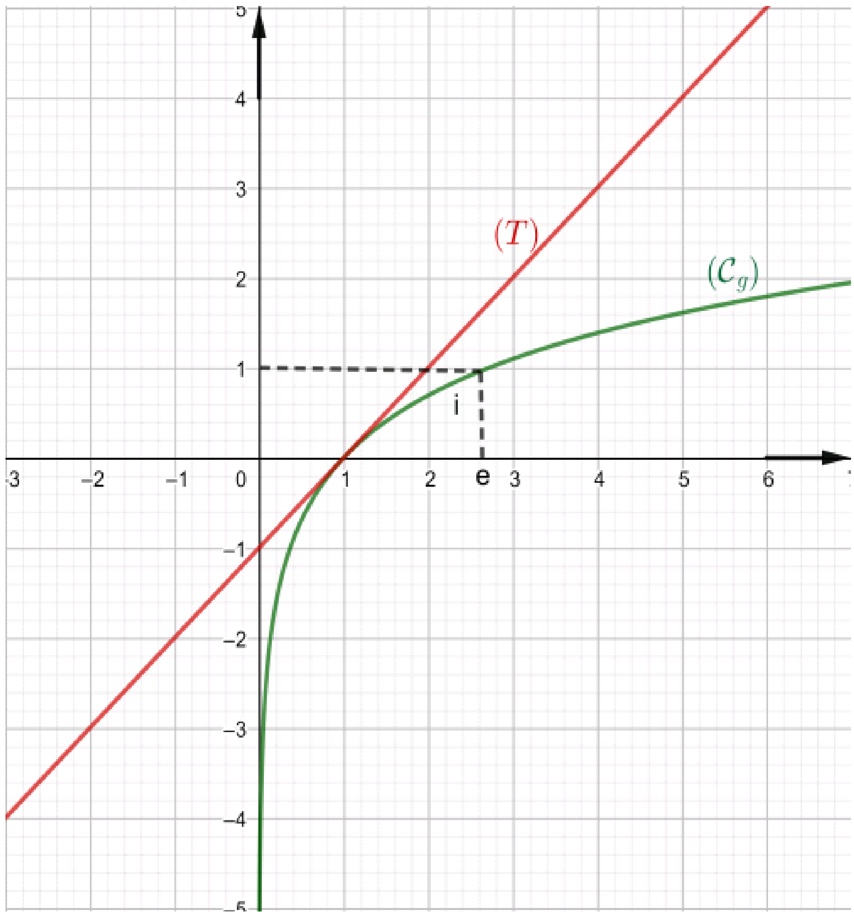


FIGURE 4 – Courbe de la fonction g

0.3. RESUMÉ

Définition 0.3.1

On appelle fonction **logarithme néperienne** la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

0.4. Étude d'une fonction Logarithme du type $\ln(ax+b)$

Exercice

Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \ln(x-2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de h.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ et donner une interprétation géometrique du resultat.

   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in]2, +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

   (b) Étudier les variations de h sur $]2, +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau de variation de h.

3. (a) Recopier et complèter le tableau ci-dessous au 10^{ime} près

x	3	4	10	15
h(x)				

   (b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

   (c) Construction (C) et (T).

CORRECTION

Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \ln(x-2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. (a) Déterminons le domaine de définition de h.

   $D_h =]2, +\infty[$

   (b) Calculons $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ et donnons une interprétation géometrique du resultat. On a $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C) en $-\infty$.

   (c) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

2. (a) Montrons que pour tout $x \in]2, +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

   h est dérivable sur $x \in]2, +\infty[$ et $\forall\ x \in]2, +\infty[$, $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x-1}{x-2}$.

   (b) Étudier les variations de h sur $]2, +\infty[$.

   $\forall\ x \in]2, +\infty[$ $h'(x) > 0$ donc h est strictememt croissante.

(c) Dressons le tableau de variation de h.

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	
$h(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

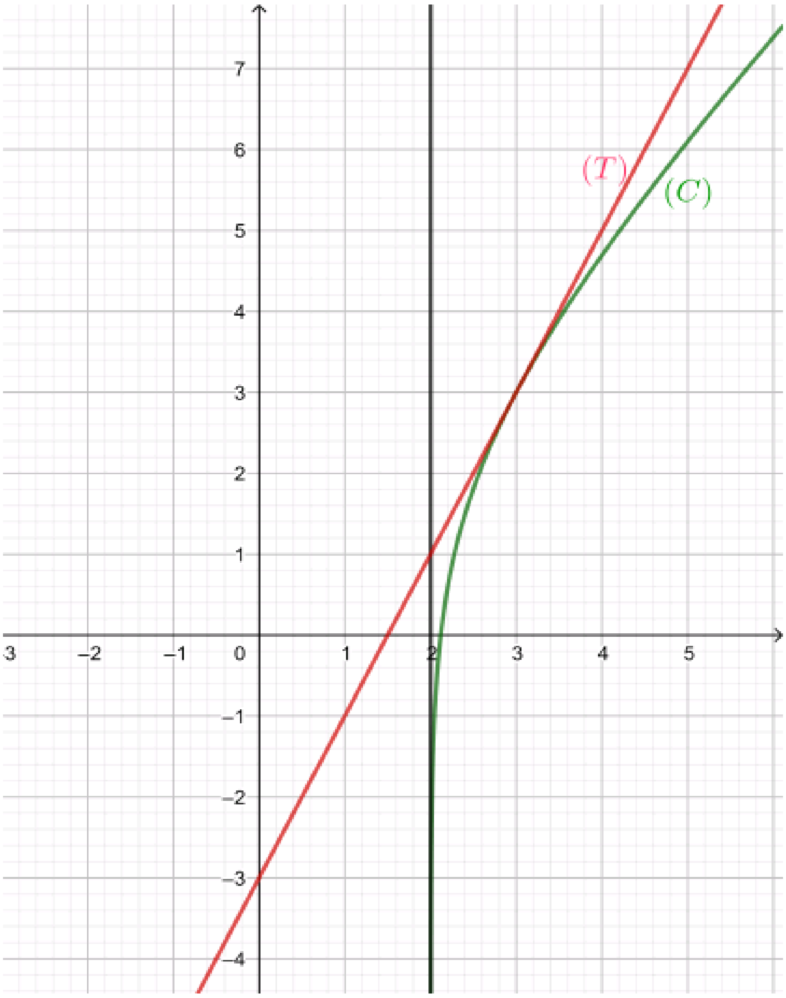
3. (a) Recopier et complèter le tableau ci-dessous au 10^{ime} près

x	3	4	10	15
h(x)	3	4.7	12.1	17.6

(b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

$(T) : y = 2x - 3$

(c) Construction (C) et (T).



LEÇON 4 :ÉTUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Objectifs pédagogiques :

$\hookrightarrow$ Reconnaitre une fonction exponentielle.

$\hookrightarrow$ Étudier et construire une fonction exponentielle.

Pré-réquis

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction h définie par $h(x) = \exp(1-x)$.
2. Calculer e^0, e^1 et e^2.
3. Calculer la dérivée h' de h.

Correction

1. Déterminons le domaine de définition de la fonction h définie par $h(x) = \exp(1-x)$.

   ici $D_h = \mathbb{R}$

2. Calculons e^0, e^1 et e^2.

   On a : $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et $e^2 \simeq 7.389$

3. Calculons la dérivée h' de h.

   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (1-x)'\exp(1-x) = -\exp(1-x)$.

SITUATION PROBLÈME

Une population est atteinte d'une infection tous les 1h. Le nombre de personne infectée suit une fonction f dite fonction exponentielle.

Olomo en classe de second ayant entendu sa soeur de terminale A4 parler d'une telle fonction, veut savoir combien de personnes environ pourront être infectées après 5h.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x)$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. (a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0.

   (b) Déterminer le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.
4. Construire (C_g) et (T).
5. Déterminer le nombre de personnes infectées après 5h.

CORRECTION

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = exp(x)$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculons les limites

   on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = exp(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 5 – Tableau de variation

3. (a) Ecrivons une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

$$\begin{aligned} (T) : y &= g'(0)(x - 0) + g(0) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

   Donc $(T) : y = x + 1$

   (b) Déterminons le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

   On a $g(0) = \exp(0) = 1 \Leftrightarrow g(0) = 1$

4. Construisons (C_g) et (T).

5. Déterminons le nombre de personnes infectées après 5h.

   Si on désigne la x le temps d'infection, alors après 5h nous aurons $\exp 5 \simeq 148$ personnes infectés.

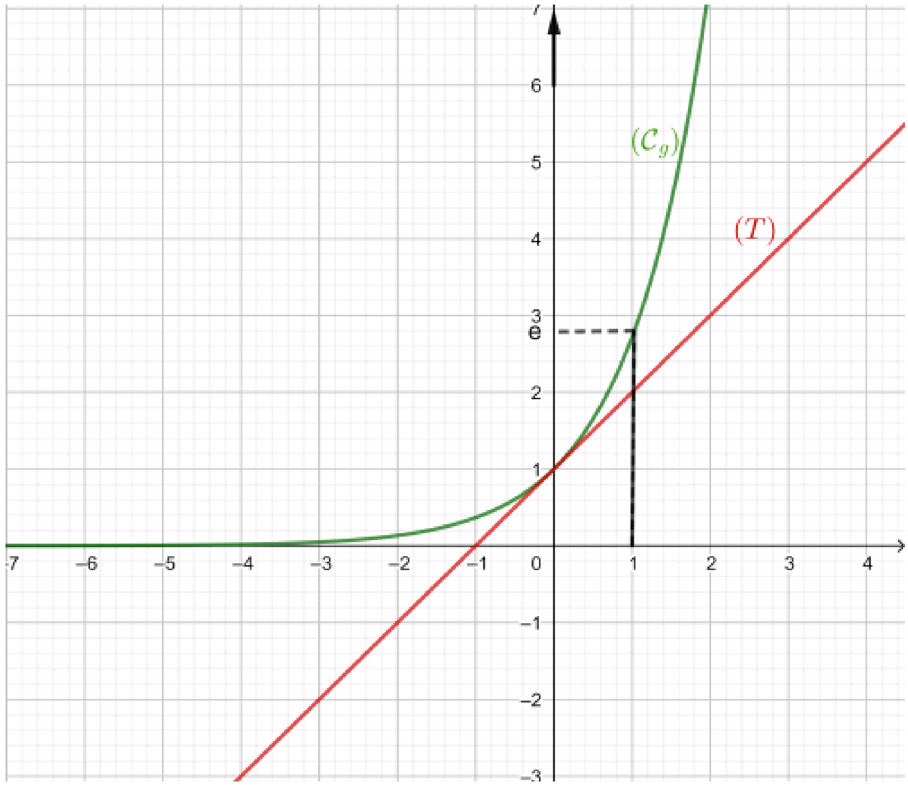


FIGURE 6 – Courbe de la fonction g

0.5. RESUMÉ

Définition 0.5.1

On appelle fonction **exponentielle néperienne** la bijection réciproque de la fonction $x \longmapsto \ln x$.

0.6. Étude d'une fonction Logarithme du type $\exp(ax + b)$ où e^{ax+b}

Exercice

Soit h la fonction définie par $h(x) = e^{2x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de h.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

   (c) Vérifier que $h(x) = e^2 x \times e^3$ puis endédure $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et conclure.

2. (a) Montrer que pour tout $\mathbb{R}$, $h'(x) = 2e^{2x+3}$.

   (b) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

   (c) Dresser le tableau de variation de h.

3. (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous au 10^{ime} près

x	-4	-3	1	2
h(x)				

   (b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\frac{3}{2}$.

   (c) Construction (C) et (T).

0.7. Étude d'une fonction

0.7.1. Plan d'étude

En absence des consignes particulières, pour étudier une fonction f et construire sa courbe représentative (C_f), l'élève peut adapter le schéma suivant :

1. Étude des variations de f sur D_f
   * Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   * Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
   * Étudier le sens de variation de f.
2. Tableau de variation
   * Étudier le comportement de f aux bornes de son D_f.
   * Resumer tous les resultats obtenus jusqu'a present dans le tableau de variation.
3. Déterminer les points d'intercertion de la courbe avec les axes de coordonnées.
4. Construction de la courbe (C_f)
   * Respecter scrupuleusement les unités graphiques graphiques lorsqu'elles sont données.
   * Tracer les droites particulières.
   * Placer les points particuliers.
   * Construire (C_f) avec soin.

CHAPITRE : FONCTIONS DERIVEES ET PRIMITIVES

- *INTERET :* Bien que les programmes de maths intègrent cette question, elle laisse perplexe plus d'un lycéen : « à quoi sert une fonction dérivée ? ». **Réponse :** elle permet de mesurer les variations d'une fonction pour toute valeur de x.
- *MOTIVATION :* La notion de dérivation est fondamentale en analyse et plus particulièrement dans l'étude des fonctions. On rencontre également des applications de la dérivation dans de nombreux domaines comme les problèmes d'optimisation, la recherche de tangentes à une courbe, l'étude des mouvements d'un solide comme par exemple le calcul de la vitesse instantanée d'une voiture, en économie avec le calcul de coûts marginaux etc.

LECON 1 : DERIVEES USUELLES ET DERIVEES DES FONCTIONS COMPOSEES Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

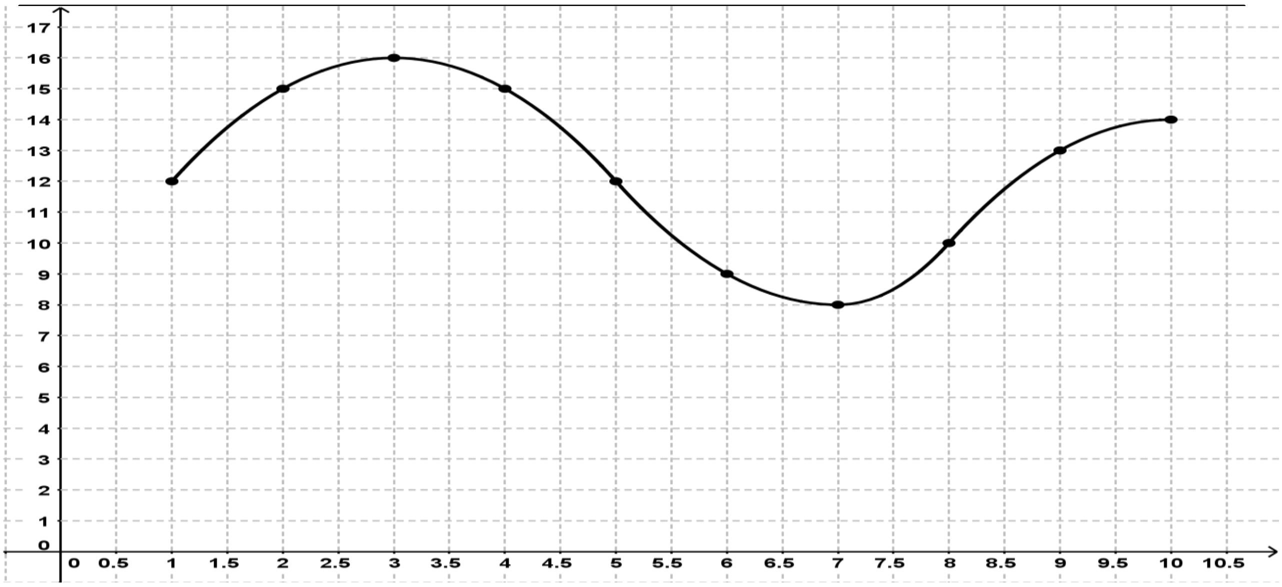
- Déterminer la dérivée de fonctions simples en utilisant les formules usuelles ;
- Déterminer la dérivée de fonctions composées en utilisant les formules usuelles.

PRE-REQUIS : Notion du nombre dérivé (Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point)

SITUATION-PROBLEME :

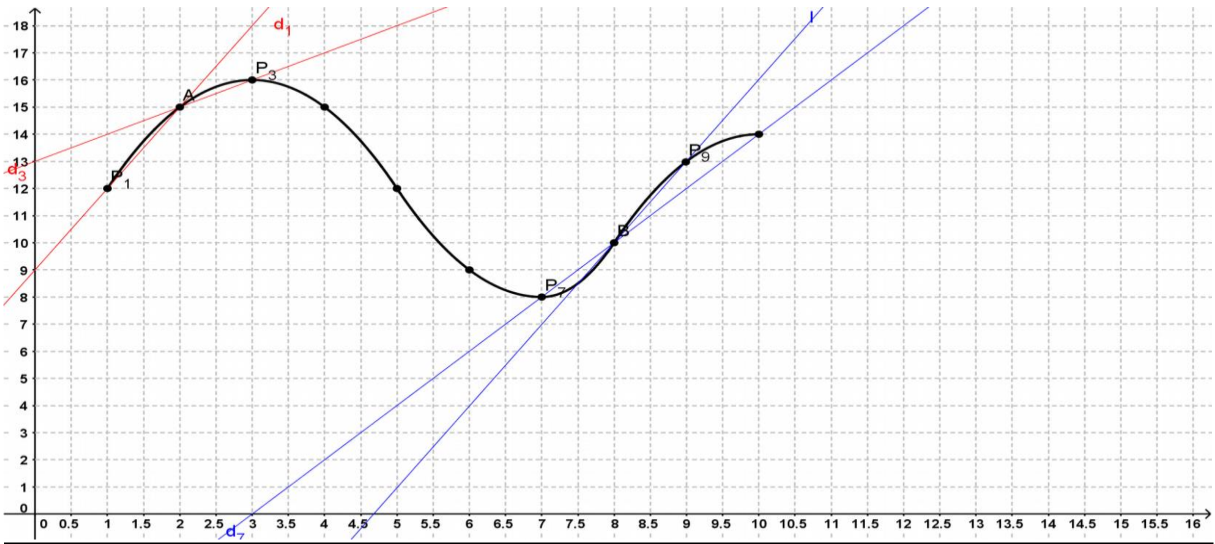
Une nouvelle maladie frappe les habitants de la planète Pandora. Dès qu'ils sont infectés, les habitants (qui sont habituellement d'une couleur bleue) deviennent blancs. Inquiet, le ministre de la santé demande qu'une enquête de terrain soit immédiatement réalisée, pour étudier la propagation de la maladie et ainsi pouvoir répondre aux questions des journalistes. Au bout de 11 jours, les médecins reviennent avec une courbe, modélisant le nombre de millions de nouveaux cas en fonction du temps, exprimé en jours. Que devra répondre le ministre de la santé, si on lui pose les questions suivantes:

1. Combien y a-t-il eu de nouveaux cas le 5ème jour ?
2. Peut-on dire qu'il y a deux malades en plus, entre le 7ème et le 8ème jour ?
3. La maladie a-t-elle régressé entre le 3ème et le 7ème jour ?
4. Résumer par une phrase simple l'évolution de la maladie entre le 1er et le 10ème jour.
5. : L'épidémie a-t-elle progressé plus vite le 2ème jour ou le 8ème jour ?



Solution :

1. Il y a eu 12 nouveaux cas le 5ème jour.
2. Non il y a 10 malades en plus car on parle de nouveaux malades, les effectifs ne se cumulent pas.
3. La maladie a régressé car les nouveaux cas sont moins nombreux » mais ils comprennent que la maladie « se propage toujours mais moins vite.
4. La maladie progresse lentement mais touche chaque jour un peu de personnes. Du 1er au 3ème jour, elle a progressé considérablement puis, elle faiblie jusqu'au 7ème jour pour progresser fortement jusqu'au 10ème jour.
5. ***Elément de réponse :*** « il faudrait voir où la courbe est plus pentue », ou plutôt : « il faudrait savoir où la courbe monte le plus vite, ou encore où la fonction croît le plus vite », ou même comparer les « écarts entre les jours ». On a donc besoin de visualiser ce qui se passe autour des points de la courbe d'abscisse 2 et 8.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

Activité 1

1) Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer$f'(a)$, le nombre dérivé de f en a
   b) Déduire $f'(x)$

Solution :

1a) Calcul du nombre dérivé de f en a.

Calculons d'abord le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$$

Quand h se rapproche de 0, alors $2a+h$ se rapproche de $2a$. On a donc $\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$

Ainsi $f'(a)=2a$

1b) Déduction de $f'(x)$.

Comme $f'(a)=2a$ alors $\boldsymbol{f'(x)=2x}$

Activité 2

Reproduire la même démarche avec la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^2-2x$.

1a) Calcul du nombre dérivé de f en a.

Calculons d'abord le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-2(a+h)-a^2+2a}{h}=\frac{2ah+h^2-2h}{h}=2a+h-2$$

Quand h se rapproche de 0, alors $2a+h-2$ se rapproche de $2a-2$. On a donc $\lim_{h\to 0}(2a+h-2)=2a-2$

Ainsi $f'(a)=2a-2$

1b) Déduction de $f'(x)$.

Comme $f'(a)=2a-2$ alors $\boldsymbol{f'(x)=2x-2}$

RESUME

1. *FONCTIONS DERIVEES*

Définition

Soit une fonction f, dérivable en tout point d'un intervalle E.

On appelle **fonction dérivée** de f, notée f' , la fonction qui, à tout nombre x de l'intervalle E , associe $f'(x)$.

Exemple 1 : On a démontré précédemment (voir activité d'apprentissage) que $f: x \mapsto x^2$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée est : $f'(x) = 2x$.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -2x + 1$. Déterminer la fonction dérivée f'.

Propriétés 1 : dérivées des fonctions usuelles ou élémentaires (à retenir par cœur)

Il est très rare en pratique de calculer les fonctions dérivées en partant de la limite du taux d'accroissement, les calculs étant souvent longs et pénibles. On va dans la pratique se référer à des dérivées de base que l'on connaît et combiner entre elles ces formules à l'aide de règles que nous allons énoncer nouveau paragraphe.

Fonction f	**Ensemble de définition de f**	**Fonction f'**	**Ensemble de dérivabilité de f**
$f: x \mapsto a$ (fonction constante)	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \mathbf{0}$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \mathbf{1}$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \mathbf{2x}$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^n$ (n *entier naturel non nul supérieur ou égal* à 2)	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \boldsymbol{nx^{n-1}}$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n *entier naturel non nul supérieur ou égal* à 1)	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f': x \mapsto -\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x^{n+1}}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f': x \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$	$\mathbb{R}^+ - \{0\}$

Propriétés 2 : Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle E.

Opérations sur les fonctions	Dérivées	Conditions
(1) $f = \boldsymbol{u + v}$	$\boldsymbol{f' = u' + v'}$	*u* et *v* dérivables sur un intervalle *E*
(2) $f = \boldsymbol{ku}$ (k constante)	$\boldsymbol{f' = ku'}$	*u* dérivable sur un intervalle *E*
(3) $f = \boldsymbol{uv}$	$\boldsymbol{f' = u'v + v'u}$	*u* et *v* dérivables sur un intervalle *E*
(4) $f = \boldsymbol{\frac{1}{v}}$	$\boldsymbol{f' = -\frac{v'}{v^2}}$	*v* dérivable sur un intervalle *E* et *v* ne s'annule pas sur cet intervalle *E*
(5) $f = \boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\boldsymbol{f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$	*u* et *v* dérivables sur un intervalle *E* et *v* ne s'annule pas sur cet intervalle *E*
(6) $f = \boldsymbol{u^{\alpha}}$	$\boldsymbol{f' = \alpha u' u^{\alpha-1}}$	selon les valeurs de α
(7) $f = \boldsymbol{\sqrt{u}}$	$\boldsymbol{f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$	*u* dérivable sur un intervalle *E* et $u > 0$
(8) $f = \boldsymbol{v \circ u}$ **(fonction composée)**	$\boldsymbol{f' = u' \times (v' \circ u)}$	*u* dérivable sur un intervalle *E* à valeurs dans *I* , et, *v* dérivable sur *I*.
(9) $f =$ **ln***u*	$\boldsymbol{f' = \frac{u'}{u}}$	*u* dérivable sur un intervalle *E* et $u > 0$
(10) $f = \boldsymbol{e^u}$	$\boldsymbol{f' = u'e^u}$	*u* dérivable sur un intervalle *E*

EXERCICE D'APPLICATION :

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+3}$; c) $f(x) = \sqrt{5-7x}$; d) $f(x) = (1-2x)^3$

Solution:

a) Pour calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. En utilisant (1) on obtient $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

b) Pour calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3/2\}$ par$f(x) = \frac{3x-5}{2x+3}$, on pose $u(x) = 3x - 5$ et $(x) = 2x + 3$. On obtient alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$. En utilisant (5) on obtient $f'(x) = \frac{3(2x+3)-2(3x-5)}{(2x+3)^2} = \frac{19}{(2x+3)^2}$

c) Pour calculer la dérivée de la fonction f définie sur $x \in \left]-\infty; \frac{5}{7}\right[$ par $f(x) = \sqrt{5-7x}$, on pose $u(x) = 5 - 7x$. On obtient alors $u'(x) = -7$. En utilisant (7) on obtient $f'(x) = \frac{-7}{2\sqrt{5-7x}}$

d) Pour calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)^3$, on pose $u(x) = 1 - 2x$ et $\alpha = 3$. On obtient alors $u'(x) = -2$. En utilisant (6) on obtient $f'(x) = 3 \times (-2)(1-2x)^{3-1} = -6(1-2x)^2$

TRAVAIL A FAIRE A LA MAISON

Déterminer f' pour les fonctions ci-dessous.

1) $f(x)\frac{2x-3}{4x+7}$ 2) $f(x) = \sqrt{x-17}$ 3) $f(x) = (3x-2)(6x+11)$ 4) $f(x) = (3x+5)^6$

LECON 2 : DERIVEE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Déterminer le sens de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

SITUATION-PROBLEME :

Maxime s'entraîne sur la piste circulaire de son stade pour se préparer à une course.
On donne un tableau de valeurs de la fonction D qui au numéro d'ordre de chacun de ses tours de piste fait correspondre le temps réalisé, en secondes.

n	3	7	9
D	85	99	110

Est-ce entre le 3^e tour et le 7^e tour, ou entre le 7^e tour et le 9^e tour, que le taux d'augmentation du temps réalisé est le plus élevé ?

Solution :

Le taux d'augmentation du temps réalisé entre le n^etour et le m^etour est le *taux de variation* de la fonction D sur l'intervalle $[n; m]$.
Le taux de variation d'une fonction sur un intervalle est le quotient de la ***différence entre les valeurs de la fonction aux deux bornes de l'intervalle*** par la ***longueur de l'intervalle***.
On calcule le taux de variation de la fonction D sur les intervalles [3;7] et [7;9] On obtient :

Taux de variation sur [3;7]

$$\frac{D(7)-D(3)}{7-3} = \frac{99-85}{4} = 3,5$$

Taux de variation sur [7;9]

$$\frac{D(9)-D(7)}{9-7} = \frac{110-99}{2} = 5,5$$

Le taux de variation sur l'intervalle [7;9] est supérieur au taux de variation sur l'intervalle [3;7]

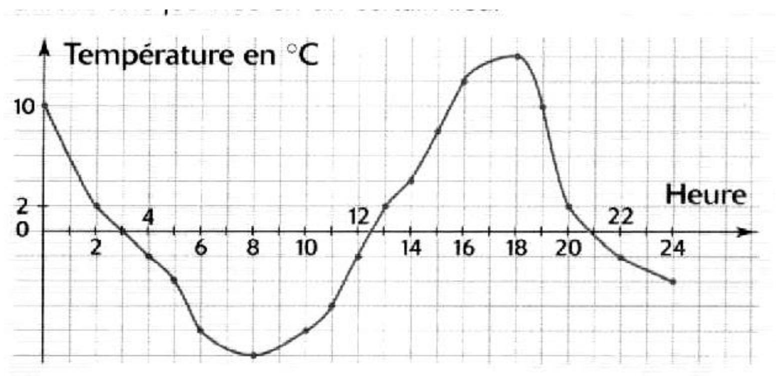
Donc, c'est entre le 7^e tour et le 9^e tour, que le taux d'augmentation du temps réalisé est le plus élevé.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 :

Un appareil enregistreur a fourni le relevé de température ci-dessous. A partir de ce relevé, dire sur quelle(s) plage(s) horaires(s) la température augmente ou diminue ?

Dresser le tableau de variations de la fonction f qui à chaque valeur de t de l'intervalle $[0;24]$ fait correspondre la température $f(t)$ en °C



Solution :

Soit à dire sur quelle(s) plage(s) horaire(s) la température augmente ou diminue.

- De 8h à 18h, la température augmente ;
- De 0h à 8h puis de 18h à 24h la température diminue.

Dressons le tableau de variations.

t	0		8		18		24
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	10	↘	-10	↗	14	↘	-4

Activité 2 :

Soit f une définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

1. Déterminer la dérivée f' de f
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; -2/3[$ puis sur $]-2/3; +\infty[$
4. Déduire les variations de f (dire si f est croissante ou décroissante) à partir du signe de f'

Solution :

1. Déterminons $f'(x)$

$$f'(x) = 6x + 4$$

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = {}^{-2}/_{3}$$

3. $f'(x)$ est négative sur$]-\infty;-2/3[$ et positive sur $]-2/3;+\infty[$
4. La fonction f est donc décroissante $]-\infty;-2/3[$ sur et croissante sur $]-2/3;+\infty[$

On résume ce résultat dans un tableau de variations

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-7/3$	$\nearrow$	

RESUME

Propriété :

Soit une fonction f, dérivable en tout point d'un intervalle E. Le sens de variation de f sur E est donné par le signe de sa dérivée f' :

- ***f*** est **croissante** sur E si, et seulement si, f' est **positive** sur E ;
- ***f*** est **décroissante** sur E si, et seulement si, f' est **négative** sur E ;
- ***f*** est **constante** sur E si, et seulement si f' est **nulle** sur E.

NB : Les variations d'une fonction concerne trois points essentiels qui sont :

- Le calcul de la dérivée ;
- Le signe de la dérivée ;
- Le sens de variation de la fonction.

Tous les résultats concernant les variations d'une fonction sont résumés dans un tableau appelé tableau de variation qui se présente ainsi qu'il suit :

x	$ensemble\ de\ définition\ de\ f$
f'	signe de la dérivée
f	Sens de variation de la fonction

TRAVAIL A FAIRE A LA MAISON :

Etudier les variations des fonctions f ci-dessous.

1) $f(x) = x^2 + x - 2$ 2) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+3}$ 3) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}$ 4) $f(x) = \sqrt{5-7x}$

LECON 3 : PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées ;
- Déterminer la primitive d'une fonction donnée vérifiant une condition initiale.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 : On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $F(x) = x^3 + x^2$

a) Calculer la dérivée *F'* de *F*
b) Que remarquez-vous ?

Solution :

a) Calculons la dérivée *F'* de *F*

$F'(x) = 3x^2 + 2x$

b) On remarque que F admet pour dérivée la fonction f en effet, $F'(x) = 3x^2 + 2x = f(x)$

Activité 2 :

En vous servant du tableau de dérivation de fonctions usuelles compléter le tableau suivant :

Trace écrite	Consigne donnée à 'oral
1. $f(x) = 2$	a) Déterminer une fonction dont la dérivée est 2. b) En existe-t-il une autre ?
2. $f(x) = x$	a) Idem b) Déterminer de plus celle qui s'annule en 2
3. $f(x) = 2x - 3$	a) Idem
4. $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$	a) Idem
5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$	a) Idem

Vocabulaire

Le problème qui consiste à déterminer une fonction à partir de sa dérivée est celui de "primitivation". La fonction F obtenue à partir de *f'* est appelée une primitive de f.

Déterminer une primitive d'une fonction revient en fait à se poser la question : ***« Quelle fonction puis-je dériver pour "retomber" sur la fonction initiale ? »***

Solution :

Trace écrite	Consigne donnée à l'oral
1. $f(x) = 2$	a) Déterminons une fonction dont la dérivée est 2. $\boldsymbol{F(x) = 2x\ (F'(x) = 2 = f(x))}$ b) En existe-t-il une autre ? oui il en existe une autre $(\boldsymbol{F(x) = 2x}$**-3) car** $\boldsymbol{(F'(x) = 2 = f(x)}$
2. $f(x) = x$	a) $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{2}\ (F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x))}$ b) Déterminons de plus celle qui s'annule en 2 $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{2} - 2}$
3. $f(x) = 2x - 3$	a) $\boldsymbol{F(x) = x^2 - 3x}$
4. $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$	a) $\boldsymbol{F(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} + 7x + 3}$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$	a) $F'(x) = \frac{-1}{x}$+2

RESUME

1. Définition

Soit *f* une fonction définie et continue sur un intervalle *I*. On appelle primitive de *f* sur *I* toute fonction *F* dérivable sur *I* telle que, pour tout réel *x* de *I*, ***F'(x) = f(x)***.

Exemple : soit la fonction *f* définie sur R par *f(x)* = 2*x*. La fonction carré est une primitive de *f* sur R.

2. Ensemble des primitives d'une fonction

L'ensemble des primitives de *f* sur *I* est l'ensemble des fonctions *G* définies sur *I* par ***G(x) = F(x) + c*** pour tout *x* de *I*, ***c* étant une constante réelle**. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Il découle de ce théorème que si une fonction admet une primitive, alors elle en admet une infinité.

Reprenons notre fonction *f* de l'exemple précédent. Nous avons vu que la fonction carré était une primitive de *f* mais la fonction *F* définie sur R par *F(x)* = x^2 + 4 en est une autre sur ℝ.

3. Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I et admettant des primitives*, a un réel appartenant à *I* et y_0 un réel donné. Alors il existe une **primitive unique** *F* telle que $\mathbf{F(a) = y_0}$.

Remarque : on parle de primitive avec condition initiale.

Exemple

Déterminer la primitive *F* surℝ de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 1 en 0.

F est de la forme $x \longmapsto \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + c$ où c est un réel. Or $F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

d'où $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + 1$

4. Calcul des primitives

4.1. Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	**Admet une primitive définie par $F(x) =$**	**Sur tout intervalle I contenue dans**
$f : x \mapsto a$ (fonction constante)	$ax + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$ (n *entier naturel non nul*)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n *entier naturel non nul supérieur ou égal à* 1)	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$lnx + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto e^x$	$e^x + c$ (où $c \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$

4.2. Primitives des fonctions composées

Fonction définie sur I	**Primitive de f sur I (C est une constante réelle)**
$f = u' + v'$	$F = u + v + C$
$f = ku'$	$F = ku + C$ (k constante)
$f = u'u$	$F = \frac{u^2}{2} + C$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$
$f = \frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ *et* $n > 1$)	$F = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = \frac{-1}{u} + C$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}, u > 0$	$F = 2\sqrt{u} + C$
$f = \frac{u'}{u}, u > 0$	$F = lnu + C$
$f = u'e^u$	$F = e^u + C$

EXERCICE D'APPLICATION :

Déterminez une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 12x^5 - 4x^3 + 1$; $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$ c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1; +\infty[$

d) $f(x) = 6x(3x^2 - 2)^3$; $I = \mathbb{R}$ e) $f(x) = 2(5x - 1)$; $I = \mathbb{R}$

Solution:

Déterminons une primitive de f sur I

a) f est une somme de fonctions élémentaires de la forme x^n. Ainsi une primitive de f sur I est :

$F(x) = 12\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^4}{4} + x + c = 2x^6 - x^4 + x + \mathrm{c}$ ((où $c \in \mathbb{R}$)

b) la fonction f est sous la forme $f = \frac{u'}{u^n}$ avec $u = (x^2 + 1)$ et $n = 3$

En effet, $u = (x^2 + 1) \Longrightarrow u' = 2x$ donc $\frac{u'}{u^n} = \frac{2x}{(x^2+1)^3}$ il faut donc ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$ pour qu'elle soit identique à celle de $\frac{u'}{u^n} = \frac{2x}{(x^2+1)^3}$

$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^3}\right)$ Alors $F(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{-1}{(3-1)(x^2+1)^{3-1}}\right] + c = \frac{-3}{4(x^2+1)^2} + c$

c) la fonction f est sous la forme $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = x^2 - 1$

En effet, $u = x^2 - 1 \Longrightarrow u' = 2x$ donc $\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ Alors, $F(x) = 2\sqrt{(x^2 - 1)} + c$

d) la fonction f est sous la forme $f = u'u^n$ avec $u = (3x^2 - 2)$ et $n = 3$

En effet, $u = (3x^2 - 2) \Longrightarrow u' = 6x$ donc $u'u^n = 6x(3x^2 - 2)^3$

Alors $F(x) = \frac{1}{3+1}(3x^2 - 2)^{3+1} + c = \frac{1}{4}(3x^2 - 2)^4 + c$

e) la fonction f est sous la forme $f = u'u$ avec $u = (5x - 1)$

En effet, $u = (5x - 1) \Longrightarrow u' = 5$ donc $u'u = 5(5x - 1)$ il faut donc ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$ pour qu'elle soit identique à celle de $u'u = 5(5x - 1)$

$f(x) = \frac{2}{5}[5(5x - 1)]$ Alors $F(x) = \frac{2}{5}\frac{(5x-1)^2}{2} + c = \frac{1}{5}(5x - 1)^2 + c$

TRAVAIL A FAIRE A LA MAISON

Exercice 1 :

1) calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 1$

2) déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x) = 3x^3 - 9x^2$

3) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$

Déterminer la primitive F de f sur qui s'annule pour $x = 1$

MODULE 21 : GESTIONS ET ORGANISATIONS DES DONNEES

CHAPITRE : STATISTIQUES

INTERET : La statistique est une branche des mathématiques qui s'occupe de la collecte et du traitement des données, dans le but d'en tirer des informations**.**

MOTIVATION : Faire une étude statistique c'est recueillir, organiser, représenter et exploiter les données numérique ou non dans le but de constat, de prévision, de comparaison et de prendre les décisions. La statistique est un instrument d'alerte et d'information en général.On l'utilise dans tous les secteurs de la vie humaine :

- En Médecine : Test d'efficacité des médicaments, évolution du comportement des maladies
- En Politique : Sondages d'opinions, résultat d'une élection.
- Dans le transport : Etudier les accidents de circulation, les marques de voitures les plus utilisées dans un pays.

LECON 1 : SERIES STATISTIQUES A UN CARACTERE QUANTITATIF 200 MINUTES

COMPETENCES A ACQUERIR :

- Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type pour une série statistique discrète.
- Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type pour une série statistique dont les modalités sont regroupées en classes.
- Déterminer les quartiles, le décile d'une série statistique.
- Représenter une série statistique par un histogramme, par des diagrammes circulaires.

PRE-REQUIS :

- Savoir calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

SITUATION PROBLEME :

A la fin du premier trimestre dans une classe de TleA4, les moyennes sur 20 arrondies à l'entier directement inferieur de 60 élèves de cette classe sont les suivantes : 5-6-9-10-5-7-7-11-15-13-11-10-7-8-13-5-9-8-4-8-10-10-14-12-10-12-13-12-11-15-6-12-10-15-10-13-11-11-10-17-16-10-16-10-10-15-11-6-13-12-4-9-9-8-8-15-15-13-14-17.

Le professeur principal doit classer ces notes en quatre intervalles :$[0; 5[$; $[5; 10[$; $[10; 15[$; $[15; 20[$. Au terme de ce classement, le professeur affirme que 20% des élèvesont moins de 10/20. Est-ce que cette affirmation est vraie ? Justifier votre réponse.

ACTIVITE 1 : En vous servant des notes ci-dessus, répondez aux questions.

Intervalles de notes	$[0; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 20[$	TOTAL
Nombre d'élèves (n_i)					
Fréquence en %					
ECC					
ECD					
FCC					
FCD					
Amplitude (a_i)					
Densité ($d_i=\frac{n_i}{a_i}$)					
Centre des classes (C_i)					
$n_i c_i$					
$n_i c_i^2$					

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2) Quelle est la classe modale et le mode de cette série statistique?
3) Déterminer le nombre d'élèves ayant une moyenne comprise entre$[0; 10[$.
4) Calculer le pourcentage des élèves ayant moins de 10/20.
5) Calculer : $\bar{X} = \frac{\sum n_i c_i}{N}$; $V(x) = \frac{\sum n_i c_i^2}{N} - \bar{X}^2 et \sigma = \sqrt{V(x)}$. (N=effectif total)
6) a) Placer dans un repère le premier point d'abscisse la borne inferieur de la première classe d'ordonnée 0.
   b) Placer les autres points d'abscisse les bornes supérieurs des classes et d'ordonnées les fréquences cumulées croissantes correspondantes.
   c) Joint ces points par des segments.
   d) Comment appelle t-on ce diagramme ?

7) Quel est graphiquement l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 50% ?

SOLUTION

1) Recopie et complète le tableau.

Intervalles de notes	$[0; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 20[$	TOTAL
Nombre d'élèves (n_i)	2	18	30	10	60
Fréquence en %	3,33%	30%	50%	16,67%	100%
ECC	2	20	50	60	
ECD	60	58	40	10	
FCC	3,33%	33,33%	83,33%	100%	
FCD	100%	96,67%	66,67%	16,67%	
Amplitude (a_i)	5	5	5	5	
Densité (d_i=$\frac{n_i}{a_i}$)	0,4	3,6	6	2	
Centre des classes (C_i)	2,5	7,5	12,5	17,5	
$n_i c_i$	5	135	375	175	690
$n_i c_i^2$	12,5	1012,5	4687,5	3062,5	8775

2) La classe modale est $[10;\ 15[$ et le mode est 12,5.
3) Le nombre d'élèves ayant une moyenne comprise entre $[0; 10[$ est 20.
4) Le pourcentage des élèves ayant moins de 10/20 est 33,33%.
5) $\bar{X} = \frac{690}{60} = 11,5$; $V(x) = \frac{8775}{60} - (11,5)^2 = 14$; $\sigma = \sqrt{14} = 3,74$.

ACTIVITE 2 : Voici en vrac les scores obtenus par 30 candidats lors d'un jeu radiophonique, note sur 5 points. 1-4-2-1-4-4-3-4-2-3-3-3-3-2-5-5-1-2-3-2-1-4-3-4-1-3-2-1-4-1.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Note (x_i)	1	2	3	4	5
Effectif (n_i)					
Fréquence en %					
$n_i x_i$					
$n_i x_i^2$					
FCC					
FCD					

2) Quel est le mode de cette série statistique ?

3) Calculer : $\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$; $V(x) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2 et \sigma = \sqrt{V(x)}$.

4) Quelle est la modalité de cette série telle qu'au moins 25% des modalités lui soient inferieurs ou égales et 75% superieurs ou égales ?

5) Quelle est la modalité de cette série telle que 10% des modalités lui soient inferieurs ou égales et 90% supérieurs ou égales ?

SOLUTION :

1) Recopie et complète

Note (X_i)	1	2	3	4	5
Effectif	7	6	8	7	2
Fréquence en %	23,33	20	26,66	23,66	6,66
$n_i x_i$	7	12	24	28	10
$n_i x_i^2$	7	24	72	112	50
FCC	23,33	43,33	69,99	93,32	100
FCD	100	76,65	56,65	29,99	6,66

2) Le mode est 3.

3) $\bar{X} = \frac{81}{30} = 2,5$; $V(x) = \frac{265}{30} - (2,5)^2 = 16,12$; $\sigma = \sqrt{16,12} = 4,01$.

4) $La\ modalité\ est: 30 \times 0,25 = 7,5 \cong 8$.

ACTIVITE 3 : Considérons les tableaux suivants :

Tableau 1 :

Menu	Okok	Koki	Eru	Sanga	Ndole	Total
Effectifs	6	4	7	4	9	30

Mesure en degré de l'angle au centre						360°

Tableau 2 :

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	Total
Effectifs	5	9	15	22	23	27	25	21	17	15	14	7	200

- Pour le premier tableau :
  1) Recopier et compléter.
  2) Construire un cercle, puis représenter dans ce cercle chaque angle inscrit correspondant à chaque modalité.
  3) Construire un repère orthogonal.
     a) Représenter sur l'axe des abscisses chaque modalité par un segment.
     b) Représenter sur l'axe des ordonnées chaque effectif.
     c) Pour chaque modalité, construire un rectangle de longueur égale à son effectif.
- Pour le tableau 2 :
  1) Construire un repère orthogonal, puis place en abscisse les modalités et en ordonnées les effectifs.
  2) Pour chaque modalité, construire un segment vertical de longueur égale à son effectif.

SOLUTION :

1) Recopie et complète

Menu	Okok	Koki	Eru	Sanga	Ndole	Total
Effectifs	6	4	7	4	9	30
Mesure en degré de l'angle	72°	48°	84°	48°	108°	360°

2) Construction d'un diagramme circulaire.
3) Construction d'un diagramme à bande.

RESUME :

I- *Moyenne, variance et écart-type d'une série statistique dont les modalités sont regroupées en classes.*

- La densité d'une classe est le quotient de son effectif par son amplitude.
- L'amplitude d'une classe $[a; b[$ est le nombre réel $b - a$.
- La classe modale d'une série statistique regroupée en classe est :

- La classe qui correspond au plus grand effectif, dans le cas ou les classes ont même amplitude,
- La classe qui a la plus grande densité, dans le cas de classes d'amplitudes différentes.

- Le mode d'une série regroupée en classe est le centre de la classe modale.
- Le centre d'une classe $[a; b[\ est\ \frac{a+b}{2}$.

Considérons le tableau statistique ci-dessous.

Classes	$[a_1; b_1[$	$[a_2; b_2[$	....	$[a_p; b_p[$	TOTAL
Centre des classes (C_i)	C_1	C_2	....	C_p	
Effectif (n_i)	n_1	n_2	....	n_p	N
Fréquence	f_1	f_2	....	f_p	1 ou 100%

- La moyenne de cette série est le réel $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}{N}$.
- La variance est le réel $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2}{N} - \bar{x}^2$.
- L'écart-type est la racine carrée de la variance. Il est noté $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

II- Moyenne, variance et écart-type pour une série statistique à caractère discret.

Considérons le tableau statistique ci-dessous.

Modalités (x_i)	x_1	x_2	....	....	x_p	TOTAL
Effectif (n_i)	n_1	n_2	....	....	n_p	N
Fréquence (f_i)	f_1	f_2	....	....	f_p	1 ou 100%

- Le mode de cette série statistique est la modalité qui a le plus grand effectif.
- La moyenne de cette série statistique est le réel $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$.
- La variance de cette série statistique est le réel $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$.
- L'écart-type de cette série statistique est : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

III- Quartile, médiane et décile d'une série statistique

- La médiane, notée M_e, est la modalité de la série statistique discrète qui subdivise la série en deux sous séries de même effectif $\frac{N}{2}$ (N = effectif total) : la sous série des modalités inferieurs ou égales à M_e, et celles des modalités supérieurs à M_e.
- Le premier quartile Q_1 d'une série statistique est la modalité de la série telle qu'au moins 25% des modalites lui soient inferieurs ou égales et 75% supérieurs ou égales.

- Le troisieme quartile Q_3 d'une série statistique est la modalité de la série telle que 75% des modalités lui soient inferieurs ou égales, et 25% superieurs.
- L'intervalle interquartile d'une série statistique est $[Q_1; Q_2]$.
- L'écart interquartile est le nombre $Q_3 - Q_1$.
- Le premier décile d'une série statistique est la modalité de la série telle que 10% des modalités lui soient inferieurs ou égales et 90% supérieurs ou égales.
- Le neuvième décile d'une série statistique est la modalité de la série telle que 90% des modalités de celle-ci lui sont inferieur ou égale et 10% superieur.
- L'intervalle inter décile d'une série statistique est $[D_1; D_9]$.
- L'écartinter décile d'une série statistique est le nombre $D_9 - D_1$.

  Exemple : dans la série 10 ;25 ;30 ;40 ;41 ;42 ;50 ;55 ;70 ;101 ;110 ;111, le premier quartile est 30. En effet il y a 12 nombres et $\frac{12}{4} = 3$;Q1 est donc la 3e valeur soit 30.

  Remarque : si $\frac{n}{4} = 4.25$ alors Q1 est la 5e valeur.

IV- Diagrammes : Dans cette partie le professeur représentera les diagrammes

- La représentation du **diagramme circulaire** d'une série statistique se fait à l'aide de la mesure de l'angle au centre de chaque secteur circulaire représentant chacune des modalités. Elle est donnée par :
- $\alpha = \frac{Effectifdelamodalite \times 360°}{Effectiftotal} ou \alpha = Fequencedelamodalite \times 360°$.
- Pour construire **un diagramme en bâton**, on construit un repère orthogonal, ensuite on place en abscisse les modalités et en ordonnée les effectifs. Ici, chaque modalité est représentée par un bâton dont la longueur est proportionnelle à son effectif.
- Pour construire **un diagramme à bandes**, on construit un repère orthogonal. Ensuite, on représente sur l'axe des abscisses chaque modalité par un segment (deux segments qui se suivent ne doivent pas avoir de points communs). Pour chaque modalitéreprésentée sur l'axe des abscisses, on construit un rectangle dont la longueur est égaleà l'effectif de cette modalité. Le diagramme obtenu est appelé diagramme à bandes.

V- Polygone des fréquencescumulées croissantes.

La fréquence cumulée croissante est le quotient de l'effectif cumule croissant par l'effectif total.

Le polygone des fréquences cumulées croissantes est représenté de la manière suivante :

- Placer le premier point d'abscisse la borne inferieur de la première classe d'ordonnée o.
- Placer les autres points d'abscisse les bornes superieurs des classes et d'ordonnées les fréquences cumulées croissantes correspondantes.
- Joindre ces points par des segments.

<u>**N.B**</u> : Pour déterminer graphiquement la médiane ;

* On trace le polygone des FCC.

* La médiane sera l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50%.

EXERCICE D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1 : On donne la série statistique dont les modalités sont rangées ainsi qu'il suit :

4-5-5-5-6-6-7-8-8-9-9-9-9-10-10-11-11-11-12-13-13-13-14-14-15-15-17.

1) Déterminer le premier et le troisieme quartile puis la médiane.
2) Donner l'intervalle interquartile et l'écart interquartile.
3) Déterminer le premier et le neuvième décile puis donner l'intervalle inter décile et l'écart inter décile de cette série statistique.

EXERCICE 2 : Dans une petite entreprise de 50 employés, on àévaluer la distance qui sépare le village des ouvriers de leur lieu de travail. Les résultats sont consignes dans le tableau suivant :

Distance (Km)	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 16[$	$[16; 20[$
Effectif (n_i)	5	14	20	7	4

1) Déterminer la classe modale et le mode de cette série statistique.
2) Calculer la distance moyenne, la variance et l'écart-type.
3) Calculer le pourcentage des ouvriers dont le domicile se trouve à moins de 12Km.
4) Construire l'histogramme de cette série statistique.

EXERCICE 3 : Durant un mois, un client pointilleux apesé chaque jour à un gramme prés, les baguettes de pain que lui livre son boulanger. Il a inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Masse (x_i)	140	141	142	143	144	145
Effectif (n_i		16		9		
ECC	24		53		67	70

1) Compléter le tableau.
2) Construire le diagramme en bâtons de cette série statistique.
3) Calculer la moyenne de cette série statistique.
4) Déterminer le mode et la médiane de cette série statistique.
5) Calculer l'écart-type.

LECON 2 : SERIES A DEUX CARACTERES 100 MINUTES

COMPETENCES A ACQUERIR :

- Représenter graphiquement une série à deux caractères quantitatifs.
- Déterminer les coordonnées du point moyen d'une série à deux caractères quantitatifs.
- Reconnaitre sur un graphique un type d'ajustement convenable des variables associées à chacun des deux caractères de la série.
- Déterminer une équationcartésienne de la droite d'ajustement linéaire d'une série double.
- Utiliser la droite d'ajustement de Mayer pour évaluer graphiquement des valeurs d'une variable connaissant celle de l'autre.

PRE-REQUIS :

- Savoir placer les points de coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormé.

SITUATION PROBLEME :

Le Directeur des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors des précédents recrutements pour des postes analogues, il a fait une étude statistique et à dresser le tableau suivant :

Salaire proposé (X_i)	60000	64000	68000	72000
Nombre de candidatures (Y_i)	11	17	20	25

Donner une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

ACTIVITE :

On s'est intéresséà l'évolution du nombre de visiteurs d'un site touristique sur 8 années. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Rang de l'année (X)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs(Y)	540	560	700	800	875	1120	1370	1500

1) Placer les points suivants dans un repère orthogonal(1cm pour une année en abscisses et 1cm pour 200 visiteurs en ordonnées) :
   $A\binom{1}{540}; B\binom{2}{560}; C\binom{3}{700}; D\binom{4}{800}; E\binom{5}{875}; F\binom{6}{1120}; H\binom{7}{1370} et K\binom{8}{1500}$. Comment appelle t-on les points ainsi représentes ?
2) Soit G un point de coordonnée$(\bar{X}; \bar{Y})$.

a) Calculer : $\bar{X} = \frac{\sum X}{N} et \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N}$ (N= Nombre de case) puis en déduire les coordonnées de G.

b) Comment appelle t-on le point G ?

3) On divise le tableauprécédent en deux sous séries$G_1(\bar{X}_1 ; \bar{Y}_1) et G_2(\bar{X}_2 ; \bar{Y}_2)$.

G_1

1	2	3	4
540	560	700	800

G_2

5	6	7	8
875	1120	1370	1500

a) Calculer : $\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1}$; $\bar{Y}_1 = \frac{\sum Y_1}{N_1}$; $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2}$; $\bar{Y}_2 = \frac{\sum Y_2}{N_2}$; $a = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1} et b = \bar{Y}_1 - a\bar{X}_1$.

b) Déduire l'équation de la droite $(G_1G_2) telque : (G_1G_2) : y = ax + b$. Comment appelle t-on cette droite ?

4) Estimer alors à l'unité prés par excès, le nombre de visiteurs de l'année de rang 10 en remplaçant dans l'équation de la droite $(G_1G_2), x par$ 10.

RESUME :

I- Nuage des points

On appelle nuage de points associe à la série statistique (x_i ; y_i ; n_{ij}) l'ensemble des points M_{ij} du plan dont les coordonnées sont (x_i ; y_j). Si les effectifs des modalités (x_i ; y_j) sont non nuls, alors chaque point sera représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la modalité.

NB illustrer le nuage des points et le point moyen.

II- Point moyen

On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i de coordonnées (x_i ; y_i) le point G de coordonnées (x_G ; y_G) telles que : $X_G = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \, et Y_G = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

III- Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Ajuster un nuage de points c'est déterminer une courbe qui passe par le plus prés possible des points du nuage. Ce type d'ajustement permet d'estimer la valeur du caractère (y_i) pour des valeurs de (x_i) autres que celles associées aux points du nuage. Les bons ajustements sont ceux dont les droites passent par le point moyen du nuage.

Méthode de Mayer : Pour déterminer la droite de Mayer :

- On partage la série statistique initiale en deux sous séries disjointes formées des points à abscisses croissantes, la différence des effectifs des deux sous séries est égal à 0 si l'effectif total est pair et à 1 si l'effectif total est impair.
- On détermine les points moyens $G_1(\bar{X}_1;\ \bar{Y}_1) et G_2(\bar{X}_2;\ \bar{Y}_2)$ de chaque sous série.
- La droite de Mayer est la droite passant par les points $G_1\ et G_2$ dont une équation cartésienne est $y = ax + b\ avec\ a = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}\ et\ b = \bar{y}_1 - a\bar{x}_1\ ou\ b = \bar{y}_2 - a\bar{x}_2$.

EXERCICE D'APPLICATION :

La production de la société SODECOTON a été relevée pendant 10 ans à partir de la premièreannée de fonctionnement. Les années sont notéesx_i et la production exprimée en milliers de tonnes est notéey_i. On a obtenu le tableau ci-dessous :

Numéroannée (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,5	10,5	11,5	11

1) Représenter le nuage de points de la série double (x ; y) dans un repère orthogonal (o ; i ; j).
2) Calculer les coordonnées du point moyen G.
3) Calculer les coordonnées de $G_1 et G_2$ points moyens partiels.
4) Montrer que les points $G;\ G_1 et G_2$ sont alignes.
5) Que représente la droite (G_1G_2) pour cette série statistique ?
6) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
7) A la quantième année, la production pourra atteindre 19168 tonnes ?

CHAPITRE : PROBABILITES

INTERET :

Les probabilités constituent un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Les probabilités forment donc un tout cohérent dont les concepts et méthodes interviennent dans de nombreux domaines des sciences, des technologies ou encore la biologie.

MOTIVATION :

Dans ce chapitre, les élèves doivent acquérir des connaissances sur les outils de l'analyse combinatoire et du calcul des probabilités pour résoudre les problèmes et situations de vie.

LECON 1: ANALYSE COMBINATOIRE 100 MINUTES

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Utiliser les formules du dénombrement
- Résoudre les problèmes concrets où intervient le dénombrement

SITUATION PROBLEME :

Un jeu consiste à tirer 3 billes parmi 6. Boris fait un tirage successif en remettant à chaque fois la boule tirée ; Christian fait aussi un tirage successif sans toutefois remettre la boule tirée et Samuel tire simultanément ses trois boules. Parmi ces trois joueurs, lequel effectue le plus grand nombre de tirages ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Un sac contient 6 billes numérotées de 1 à 6. On tire successivement 3 fois de suite une bille du sac en remettant à chaque fois la bille tirée avant d'effectuer le tirage qui suit.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

SOLUTION :

Nombre de tirages possibles : $6 \times 6 \times 6 = \cdots$ … … … … ..

RESUME :

- Le nombre de p-uplets ou de p-listes d'un ensemble fini à n éléments est $n^p = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p\ fois}$.
- Le nombre d'arrangements de p-éléments dans un ensemble à n éléments est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
- Le nombre de combinaisons de p-éléments dans un ensemble à n éléments est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

REMARQUES :

- $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $C_n^p = C_n^{n-p}$

- Tout tirage successif avec remise fait appel aux p-uplets.
- Tout tirage successif sans remise fait appel aux arrangements.
- Tout tirage simultané fait appel aux combinaisons.

Exemples :

1. Le nombre de 3-listes de l'ensemble $\{1; 5; 7; 8\}$ est 4^3
2. Le nombre de tirages successifs et sans remise de 3 boules dans une urne contenant 10 boules est $A_{10}^3 = 720$
3. Le nombre de tirages simultanés de 3 boules dans une urne contenant 10 est C_{10}^3.......

SOLUTION SITUATION PROBLEME :

Nombre de tirages de Boris : $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216\ tirages$

Nombre de tirages de Christian : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120\ tiarges$

Nombre de tirages de Samuel : $C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3!} = 20\ tiarges$

Donc Boris a effectué le plus grand nombre de tirages.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Lors du congrès d'une association ayant 20 membres, on veut designer un bureau constitué d'un président, un secrétaire, un trésorier et un censeur. Cette association compte 08 femmes.

I. Dans le cas où il y'a cumul de poste,

1. Combien de bureaux différents peut-on former ?

2. Combien de bureaux sont constitués de femmes ?

II. Il n'ya pas de cumul de poste

1. Combien de bureaux peut-on former ?

2. Combien de bureaux contiennent deux hommes ?

3. Combien de bureaux contiennent au plus deux hommes ?

III. Une urne contient 5 boules blanches, 4 rouges et 3 bleues. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Combien y a-t-il de manières de tirer :

1. Aucune boule rouge ?

2. Exactement une boule rouge ?

3. Exactement deux boules rouges ?

4. Trois boules rouges ?

5. Trois boules quelconques ? que remarque-t-on ?

6. Trois boules de couleurs différentes deux à deux ?

7. Au moins une boule rouge ?

LECON 2: PROBABILITES 100 MINUTES

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Utiliser le vocabulaire adéquat dans les calculs des probabilités
- Calculer la probabilité d'un évènement
- Utiliser les propriétés des probabilités
- Résoudre les problèmes concrets où interviennent les probabilités

SITUATION PROBLEME :

Samuel lance un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sa petite sœur Ange lui dit qu'il a plus de chance d'obtenir un nombre pair qu'un nombre multiple de 3. Ange a-t-elle raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une expérience consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à noter le numéro qui apparait sur la face supérieure du dé.

1. Peut-on dire quel nombre apparaitra sur la face supérieure du dé ? pourquoi ?
2. Comment appelle-t-on ce type d'expérience ?
3. Citer 3 expériences aléatoires dans la vie courante.
4. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles.
5. On pose : **A : ‘’ le nombre obtenu est pair’’** ; **B : ‘’ le nombre obtenu est un multiple de 3 ‘’**

   Déterminer les résultats favorables pour A et B.

SOLUTION :

1. Non car……. (le prof écoute d'abord les réponses que chaque élève va proposer et puis donne la bonne réponse)

2. C'est une expérience Aléatoire

3. Trois expériences Aléatoires : une femme qui va donner naissance à un bébé, …… ;(les élèves citent et le prof les fait noter les trois qu'ils auront mieux assimiler)

4. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

5. nombre de résultats favorables :

$$Card\ A = C_6^3 \qquad et \qquad Card\ B = C_6^2$$

RESUME :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience ayant plusieurs issues et dont le résultat ne peut être prévu à l'avance.
- L'**univers** désigne l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Chaque résultat de l'univers est appelé **éventualité.**
- Un **évènement** est un ou plusieurs résultats possibles de l'univers.
- **L'évènement certain** d'une expérience aléatoire est l'univers.
- **Un évènement impossible** est un évènement qui n'est pas réalisé par l'expérience aléatoire. On le note $\emptyset$.
- **Un évènement élémentaire** est un évènement formé d'une seule éventualité de l'épreuve. Soient A et B deux évènements.
- L'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B est noté $\boldsymbol{A \cap B}$.
- L'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B est noté $\boldsymbol{A \cup B}$**.**
- Les évènements A et B sont incompatibles ssi $\cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ **.**
- Les évènements A et B sont dits **contraires** ssi B est l'évènement qui se réalise quand A ne se réalise pas. On note $B = \bar{A}$ ou encore $A = C_{\Omega}^{B}$.

Exemple : dans le cas de notre activité, $A \cap B = \cdots$; A ∪ B=…

Définition :

Soit **Ω** l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle **équiprobabilité** toute expérience aléatoire dans laquelle tous les évènements élémentaires de Ω ont la même probabilité.

Exemple : dans le lancer du dé parfait, nous avons 6 évènements élémentaires. La probabilité de chaque évènement est de $\frac{1}{6}$. Il y'a donc **équiprobabilité**.

Remarque : dans une expérience aléatoire à n éventualités, la probabilité d'un évènement élémentaire est de $\frac{1}{n}$.

Propriété :

Soit A un évènement. Alors la probabilité de l'évènement A en situation d'équiprobabilité est donné par :

$$\mathbf{p(A)} = \frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}} = \frac{\textbf{Card A}}{\textbf{Card }\boldsymbol{\Omega}}$$

Autres Propriétés :

- La probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1.
- La probabilité d'un évènement certain est 1 ($p(\Omega) = 1$).
- La probabilité d'un évènement impossible est nulle ($p(\emptyset) = 0$).
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

SOLUTION SI TUATION PROBLEME :

Probabilité de tirer un nombre pair : $p(A) = \frac{C_3^1}{C_6^1} = 0{,}5$

Probabilité de tirer un nombre multiple de 3 : $p(B) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = 0{,}3333$

Donc Ange a raison.

EXERCICES :

Une urne contient 5 boules rouges ; 3 boules blanches et 2 boules noires.

I. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. Calculer la probabilité des évènements :

a) A : ‘’ Obtenir des boules tricolores ‘’

b) B :’’ Obtenir 3 boules Rouges ‘’

c) C : ‘’ obtenir des boules unicolores ‘’

d) D : ‘’ Obtenir au moins une boule noire ‘’

II. Répondre aux mêmes questions sachant qu’on tire successivement et avec remise 3 boules de l’urne.

<u>EXERCICE 2 :</u>

On tire deux cartes dans un jeu de 52.

I. La seconde carte est tirée après la remise de la première dans le jeu.

1. Combien de tirages -peut-on avoir ?

2. Quelle est la probabilité de tirer 2 as ?

3. Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

II. Le tirage est exhaustif.

1. Combien de tirages peut-on avoir ?

2. Quelle est la probabilité de tirer deux cœurs ?

3. Quelle est la probabilité de tirer au moins 1 cœur ?

<u>EXERCICE 3 :</u>

Cinq personnes sont témoins d’un fait et parmi elles, deux seulement sont des menteuses mais on ignore les quelles. On questionne deux témoins de façon indépendante. Quelle probabilité a-t-on :

1. D’obtenir une version véridique des faits ?

2. D’obtenir deux versions fausses ?

3. D’obtenir deux versions contradictoires ?