SECONDAIRE
T^{le} A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THÈME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 28 heures **Code :**

Leçon 1 : ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

En vue de diversifier ses activités et mobiliser des ressources financières, le comité de gestion scolaire (COGES) d'un lycée a créé une imprimerie. Celle-ci fabrique et vend chaque jour un nombre **x** d'articles. Le coût de production unitaire **C(x)** exprime le coût de production par article produit et vendu et est défini par la fonction **C telle que :**

$$\mathbf{C}(x)= \boldsymbol{x - 10 + \frac{900}{x}}.$$

Le bénéfice global de l'imprimerie est modélisé par la fonction **B telle que :**

$$\mathbf{B}(x)= \boldsymbol{-x^2 + 110x - 900}\ .$$

Le président du COGES souhaite déterminer le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal mais il ne sait comment s'y prendre . Ta classe est informée du problème et décide de l'aider.

B-CONTENU DE LA LEÇON

I-FONCTION POLYNÔME

1- Limite d'une fonction polynôme en un point

Activité

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-x}{2x-2}$

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f
2-Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$									

3) De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x prend dans D_f , des valeurs suffisamment proches de 1?

REPONSES ATTENDUES

1) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2)

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0,45	0,495	0,4995	0,49995	╳	0,50005	0,5005	0,505	0,55

3) $f(x)$ se rapproche du nombre 0,5 lorsque x prend dans D_f , des valeurs suffisamment proches de 1.

<u>CONCLUSION</u>

On dit que 0,5 est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 ou que 0,5 est la limite de f en 1.

Et on note : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0,5$

On admet les propriétés 1 et 2 suivantes :

<u>Propriété 1</u>

Lorsqu'une fonction admet une limite en un point ou à l'infini, cette limite est unique.

<u>Propriété 2</u>

-La limite d'une fonction polynôme $\boldsymbol{P}$ en un point $\boldsymbol{a}$ est égale à l'image de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{P}$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$

-En particulier, la limite d'une **constante** $\boldsymbol{k}$ en un réel $\boldsymbol{a}$ est **la constante** $\boldsymbol{k}$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

f est une fonction qui admet une limite en a ($a \in \mathbb{R}$),

1) la limite de f en a peut prendre deux valeurs différentes……..

2) la limite de f en a ne peut prendre qu'une seule valeur……

Solution

Exercice 1

1°) faux ; 2) vrai

Exercice 2

Complète les égalités suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; 2) $\lim\limits_{x \to 3}(x-3)(3x+8) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; 3) $\lim\limits_{x \to -1}(-13)$

Solution

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1) = 9$; 2) $\lim\limits_{x \to 3}(x-3)(3x+8) = \mathbf{0}$; 3) $\lim\limits_{x \to -1}(-13) = \mathbf{-13}$

Exercice de maison

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 4}(-2x + 10x^3)$

2- Limite d'une fonction polynôme à l'infini

ACTIVITE

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2$

1) Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous

x	40	40×10^3	40×10^5	40×10^8
$f(x)$				

2) Que deviennent les images $f(x)$ lorsque x prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ?

REPONSES ATTENDUES

x	40	40×10^3	40×10^5	40×10^8
$f(x)$	1602	40002	4000002	4000000002

2) Les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut lorsque x prend des valeurs de plus grandes.

CONCLUSION

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou que $+\infty$ est la limite de f en $+\infty$

Et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On admet les propriétés 1 et 2 suivantes :

Propriété1

*k est un nombre réel, a est un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$

***Cas n est pair**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases} \quad ; \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases}$$

***Cas n est impair**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases} \quad ; \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = -\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = +\infty \; si \; a < 0 \end{cases}$$

Propriété 2

La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la limite de son monôme de plus haut degré

Exercices de fixation 1

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^2 = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = -\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = -\infty$.

Solution

Exercice 1

1) V ;2) F ; 3) F ; 4) F

Exercice de fixation 2

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 + 2x$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 + 10$

Solution

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2 + 10) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$

Exercice de maison

Détermine les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 + 2x + x^5$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 100$

II- FONCTION RATIONNELLE

1-Limite d'une fonction rationnelle

1-1 -Limite d'une fonction rationnelle en un nombre où elle est définie.

Propriété **(admise)**

Soit f une fraction rationnelle et a un élément de l'ensemble de définition de f.

On a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

EXERCICE DE FIXATION

Détermine les limites suivantes

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2}$; 2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x-2}$

REPONSES ATTENDUES

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ 2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(-1)^2}{(-1)-2} = -\frac{1}{3}$

1-2 -Limite d'une fonction rationnelle en un nombre où elle n'est pas définie.

a)-Limite à gauche en a et à droite en a de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$

ACTIVITE

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f
2-Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$									

3-Que deviennent les images f(x) lorsque x prend dans D_f des valeurs suffisamment proches de 1

a) Lorsque $x < 1$ b) Lorsque $x > 1$

REPONSES ATTENDUES

1-$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ **2-**

x	0,9	0,99	0,999	0,0009	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10000		10000	1000	100	10

3)a – Lorsque $x < 1$ et que x est proche de 1, $f(x)$ devient négative et de distance à zéro de plus en plus grande.

b-Lorsque $x > 1$ et que x est proche de 1, $f(x)$ devient de plus en plus grande.

<u>CONCLUSION</u>

Lorsque $x < 1$ et que x est proche de 1 , $f(x)$ tend vers $-\infty$,

On dit que $-\infty$ est la limite de $f(x)$ **lorsque x tend vers 1 à gauche en 1**.

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$

Lorsque $x > 1$ et que x est proche de 1 , $f(x)$ tend vers $+\infty$,

On dit que$+\infty$ est la limite de $f(x)$ **lorsque x tend vers 1 à droite en 1**.

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$

On admet la propriété suivante :

<u>Propriété</u>
Soit a un nombre réel. On a :
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty$

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ ……………. b) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{x-4} = +\infty$……………… ; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{x-5} = -\infty$

<u>Solution</u>

a) V, b) F, c) F

Exercice 2

Détermine les limites suivantes

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} \frac{1}{x-7}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2}$

<u>Solution</u>

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} \frac{1}{x-7} = +\infty$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2} = -\infty$

EXERCICE DE MAISON Détermine les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ <}} \frac{1}{x+4}$

b) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

Propriété (admise)

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus hauts degrés.

Exercices de fixation

Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3}$

Solution

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^3}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x}{4} = -\infty$$

Exercices de maison

Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^3 - 2x + 3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{17x^2 - x^2 + 5}{4x^3 - 2x + 3}$

III- Opération sur les limites

1- limite d'une somme de fonctions

a désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et l' sont des nombres réels.

Propriété

Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$\boldsymbol{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] =}$	$\boldsymbol{l + l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**on ne peut conclure**

Exercices de fixation

Exercice 1

l est un nombre réel. On donne : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) + h(x)] = 0$, b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + h(x)] = l$,c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + h(x)] = -\infty$

Solution

a) F , b) F , c) V

Exercice 2

Détermine dans chaque cas les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -2}[\frac{2x+3}{x+1} + x - 8]$

b) $\lim_{x\to +\infty}[x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}]$

Solution

a) $\lim_{x\to -2}[\frac{2x+3}{x+1} + x - 8] = -9$ car $\mathbf{\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+1} = 1}$ **et** $\mathbf{\lim_{x\to -2} x - 8 = -10}$

b) $\lim_{x\to +\infty}[x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}] = +\infty$

car $\mathbf{\lim_{x\to +\infty} x^2 + 2x + 5 = \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$ **et** $\mathbf{\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0}$

2) Limite d'un produit de fonctions

On admet les propriétés suivantes :

Propriété

Si : $\lim_{x\to a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si : $\lim_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

Exercices de fixation

Exercice1

l est un nombre réel. On donne : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} h(x) = l$

Répond par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

a) On ne peut conclure pour la limite de $f \times g$

b) On ne peut conclure pour la limite de $f \times h$

c) $\lim_{x\to +\infty}[f(x)\times h(x)] = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty}[g(x)\times h(x)]$ est toujours égale à $+\infty$

Solution

1) a) V b) F c) V d) F

Exercice2

Détermine $\lim_{x \to +\infty} [\frac{x+6}{x-4} \times (6-x)]$

Solution

$\lim_{x \to +\infty} [\frac{x+6}{x-4} \times (6-x)] = -\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+6}{x-4} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} (6-x) = -\infty$

<u>Exercice de maison</u>

Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x) \times g(x)$ sachant que $f(x) = \frac{x^2+6}{x-4}$ et $f(x) = \frac{-x^3+6x+4}{x+2}$

3) Limite d'un inverse d'une fonction

<u>Propriété</u>

Si $\lim_{x \to a} g(x) =$	l avec $l \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$
alors $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4) Limite de quotients

<u>Méthode pour calculer</u> $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$

Pour calculer $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, on peut procéder comme suit :

On écrit d'abord $\lim_{x \to a} f(x) \times \frac{1}{g(x)}$

On calcule $\lim_{x \to a} f(x)$, puis $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$

On en déduis alors la valeur de $\lim_{x \to a} f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ qui est égale à $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>

l est un nombre réel. On donne : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ avec $l \neq 0$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) On ne peut conclure pour la limite de $\frac{g}{f}$,

b) On ne peut conclure pour la limite de $\frac{f}{g}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ est toujours égale à $+\infty$

Solution

1) a) V b) F c) V d) F

Exercice 2

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ >}} \frac{x-8}{x-6}$ sachant que $f(x) = x - 8$ et $h(x) = x - 6$

Solution

$$\lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} \frac{x-8}{x-6} = \lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} (x-8) \times \frac{1}{x-6}$$

$$= -\infty \qquad \text{Car } \lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} f(x) = -2 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} \frac{1}{g(x)} = +\infty$$

Exercice de maison

Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x^2+6x-10}{x+4}$

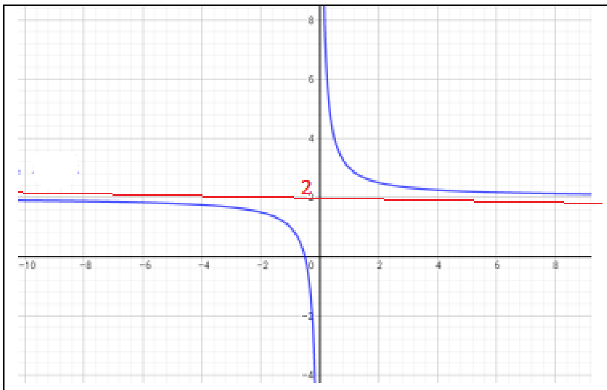
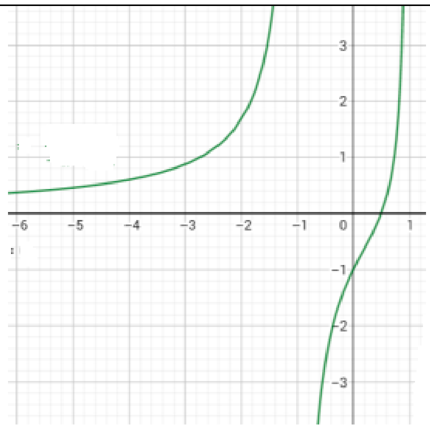
4-Asymptote verticale, horizontale, oblique

a) Asymptote parallèle à la droite des abscisse ou asymptote horizontale

Définition

Lorsque la fonction f admet une limite finie b en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),on dit que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), la droite d'équation $y = b$

Illustration graphique

	
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en$+\infty$ et en $-\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$

Exercice de fixation

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ .On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

1) La représentation graphique de la fonction f n'admet d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$:

La droite d'équation $y = 3$.

3) La représentation graphique de la fonction f n'admet d'asymptote horizontale en $+\infty$: $x = 1$

Solution

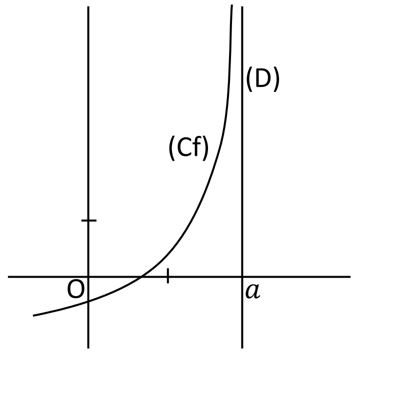
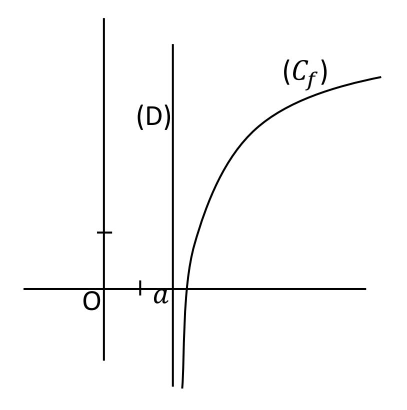
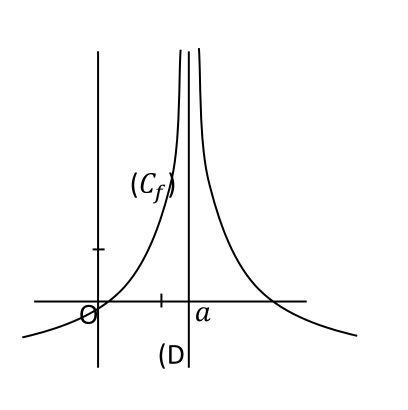
1. F ; 2 . V ;3 F

b) Asymptote parallèle à la droite des ordonnées ou asymptote verticale

Définition

Lorsque la fonction f admet une limite infinie ($-\infty$ ou $+\infty$) en a ,on dit que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale en a : la droite d'équation $x = a$

Illustration graphique

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$
La droite (D) d'équation
$x = a$ est asymptote à (C_f)</td>
<td>$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$
La droite (D) d'équation
$x = a$ est asymptote à (C_f)</td>
<td>$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
La droite (D) d'équation
$x = a$ est asymptote à (C_f)</td>
</tr>
</table>

<u>Exercice de fixation</u>

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3x-4}{x-5}$ et (C_f)sa courbe représentative.

On admet que $\lim_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $y = 3$.

3) La représentation graphique de la fonction f n'admet pas d'asymptote verticale.

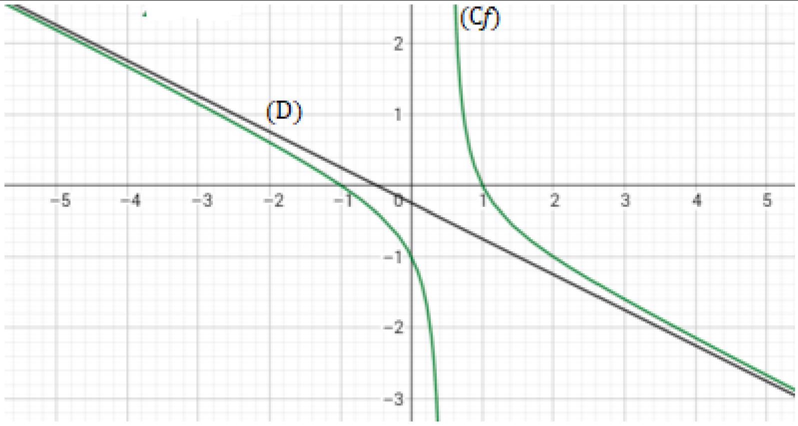
<u>Solution</u>

1. V ; 2 . F ;3 F

c) <u>Asymptote oblique</u>

On admet la propriété suivante :

La droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)



La droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en$+\infty$.

Exercice de fixation

On considere la fonction f definie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+2}$ et (C_f) sa courbe representative.
Justifie que la droite (D) d'equation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution

On sait que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
Calculons
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$
De même $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$
Donc la droite (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice de maison

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - 8 + \frac{1}{x-3}$

1) Calcule $\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$ puis interpréter les résultats.
2) a)Justifie $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 8)] = 0$

   b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
3) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en -∞.

IV- DERIVATION

1) Dérivée de fonctions élémentaires

Propriété

Fonction f	**Ensemble de définition f**	**Dérivée f'**	**Ensemble de définition f'**
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec n entier et $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ n entier et $n \geq 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ des fonctions f, g, h, k, l, m et k suivantes :

$f(x) = -6$, $g(x) = 8x$, $h(x) = x^2$, $l(x) = x^3$, $m(x) = \frac{1}{x}$, $k(x) = \frac{1}{x^3}$

Solution

$f'(x) = 0$, $g'(x) = 8$, $h'(x) = 2x$, $l'(x) = 3x^2$, $m'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $k'(x) = \frac{-3}{x^4}$

2) Dérivées et opérations sur les fonctions

<u>Propriété</u>

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et n un entier naturel non nul.

On a :

$u + v$ est dérivable sur I et	$(u + v)' = u' + v'$
kv est dérivable sur I avec k une constante réel et	$(ku)' = ku'$
$u \times v$ est dérivable sur I et	$(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$
u^n est dérivable sur I et	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$

$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I où u ne s'annule sur I et	$-\frac{1}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I où v ne s'annule sur I et	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

Exercice de fixation

Calcule la dérivée sur $[1;+\infty[$ de chacune des fonctions f et g définies respectivement par :

$f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 8$ et $g(x) = \frac{x-4}{5x+3}$.

Solution

f est dérivable sur $[1;+\infty[$,

Pour tout $x \in [1;+\infty[: f'(x) = (-5x^3 + 7x^2 - 8)'$

$$f'(x) = -15x^2 + 14x$$

g est dérivable sur $[1;+\infty[$, on a :

Pour tout $x \in [1;+\infty[, g'(x) = \frac{1\times(5x+3)-5(x-4)}{(5x+3)^2} = \frac{20}{(5x+3)^2}$

Exercice de maison

f est une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
2) Justifier que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$

V- Dérivée et sens de variation – Extremum relatif d'une fonction

1) Dérivée et sens de variation

Propriété (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f' est positive sur K si et seulement si f est croissante sur K.
- f' est négative sur K si et seulement si f est décroissante sur K.
- f' est nulle sur K si et seulement si f est constante sur K.

2) Extremum relatif d'une fonction

Propriété (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K. $x_0$un nombre réel appartenant à K.
$f(x_0)$ est un extrémum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercice de fixation

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$
4) Etudie le signe de la fonction dérivée f'(x) suivant les valeurs de x.
5) Déduis-en le sens de variation de f.
6) Dresse le tableau de variation puis détermine les extrêmes relatifs de f.

Solution

1) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

3) f est dérivable sur $]-\infty\,; 0[$ et sur $]0\,; +\infty[$
Pour tout $x \in]-\infty; 0[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

4) Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f'(x) > 0$

Pour tout $x \in]-1\,; 0[, f'(x) < 0$

Pour tout $x \in]0\,; 1[, f'(x) < 0$

Pour tout $x \in]1\,; +\infty[, f'(x) > 0$

5) Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,; -1[$

Pour tout $x \in]-1\,; 0[, f'(x) < 0$ donc f est continue et strictement décroissante sur $]-1\,; 0[$

Pour tout $x \in]0\,; 1[, f'(x) < 0$ donc f est continue et strictement décroissante sur $]0\,; 1[$

Pour tout $x \in]1\,; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]1\,; +\infty[$

7) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

-4 est un maximum relatif de f sur $]-\infty; -1[$; 0 est un minimum relatif de f sur $]0; +\infty[$

VI- <u>Droite tangente a une courbe ; Théorème des valeurs intermédiaires</u>

1) Équation de la tangente à une courbe en un point

<u>Définition</u>

La tangente à la courbe (C_f) d'une fonction au point A d'abscisse a est la droite :
-passant par A
-de coefficient directeur le nombre dérivée $f'(a)$

<u>Conséquence</u>

Une équation de la tangente à la courbe (C_f) d'une fonction au point A d'abscisse a est
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

<u>Exercice de fixation</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2$
Sachant que $f'(1) = 2$ et que $f(1) = -3$, déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

2) <u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>

<u>ACTIVITE</u>

Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$

x à 0,1 près	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$ à 0,01 près	$-1{,}12$	$-0{,}70$	$-0{,}18$	0,73	1,15

Les valeurs de $f(x)$ passent des négatives aux positives.

Sachant que f est continue sur $[1; 2]$, existe-t-il un réel α dans $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$? Si oui, où semble se placer α ?

Solution

Oui car f est continue sur $[1; 2]$ et les valeurs de $f(x)$ passent des négatives aux positives, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses. Et α semble se trouver entre 1,7 et α car $f(1{,}7) < 0$ et $f(1{,}8) > 0$.

Nous admettons la propriété suivante

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b éléments de I.

Si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α comprise entre a et b.

Exercice de fixation

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = x^3 - 12x + 10$

Sachant que f est strictement décroissante sur $[0; 1]$,

Démontre que sur [0 ; 1], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

Solution

f est décroissante sur $[0; 1]$, donc continue sur $[0; 1]$ et $f(0)=10$ puis $f(1) = -1$,

alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; 1]$.

On a : 0,8 et 0,9 sont éléments de [0 ; 1] puis $f(0{,}8)=0{,}912$ et $f(0{,}9)=-0{,}071$

Comme $f(0{,}8)\times f(0{,}9) < 0$, alors $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

3- **encadrement de α** tel que : $f(\alpha) = 0$ **par la méthode de dichotomie ou par balayage**

a) Méthode de **Dichotomie**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,; b]$, tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires

Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\,; b]$, tel que : $f(\alpha) = 0$

Cette méthode consiste à diviser l'intervalle $[a\,; b]$ en deux intervalles $\left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}\,; b\right]$, puis on calcule $f(\text{a})$, $f(\frac{a+b}{2})$ et $f(b)$

- Si $f(\text{a}) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$ alors $\alpha \in \left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$,puis on répète la même méthode à l'intervalle $\left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$ jusqu'à trouver la précision cherchée.

- Si , $f(\text{a}) \times f(\frac{a+b}{2}) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}\,; b\right]$

On répète cette méthode dans l'intervalle trouvé jusqu'à arriver à la précision cherchée.

Exercice de fixation

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = x^3 – 12x + 10$

Sachant que sur [0 ; 1], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, donner un encadrement de α par la méthode de dichotomie

Solution

On a

f est continue sur $[0\,;1]$, $f(0) = 12$ et $f(1) = -1$

Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}125$, $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

b) **Méthode par balayage**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\,;b]$, tel que : $f(\alpha) = 0$

On calcule $f(\mathrm{a} + 0{,}1)$; $f(\mathrm{a} + 0{,}1)$; $f(\mathrm{a} + 0{,}1)$;…

On s'arrête lorsqu'on a un résultat de signe contraire au précédent. On déduit un encadrement de α

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$

Sachant que sur [1 ; 2], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, donne un encadrement de α par la méthode de balayage

Solution

f est continue et croissante sur $[1\,;2]$ on a :

x à 0,1 près	1,1	1,2	1,3	1,	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$ à 0,01 près	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Comme $f(1{,}7) \times f(1{,}8) < 0$ alors $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

C- SITUATION COMPLEXE

Le comité de gestion scolaire (COGES) d'un lycée veut construire une salle de classe dont le coût de réalisation est estimé à 5 179 000F CFA. Pour cela, il lui faut mobiliser des ressources financières. Il crée alors une imprimerie dont la capacité journalière est entre 30 et 100 articles. Toute la production journalière est vendue.

Chaque article est vendu à 4000 F CFA. Le bénéfice global de l'imprimerie après six mois d'exercice est modélisé par la fonction $\boldsymbol{B}$ **telle que** $\boldsymbol{B(x) = -x^2 + 7200x - 7\,760\,000}$, où $\boldsymbol{x}$ désigne le nombre d'articles vendus durant les six mois.

Ce bénéfice doit servir à la réalisation des travaux de construction.

Le président du COGES a reçu l'information selon laquelle la classe pourra être construite, lorsque le bénéfice sera maximal. Préoccupé, il te sollicite.
Détermine le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal et réponds à la préoccupation du président du COGES.

Solution

Pour répondre à la préoccupation du président du COGES, nous allons étudier la fonction B et déterminer son maximum.

- Etude de la fonction B

Considérons la fonction B définie sur $[0;+\infty[$, par $B(x) = -x^2 + 7200x - 7760000$.

B est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $B'(x) = -2x + 7200$.
$\forall x \in [0;3600[$,$B'(x) > 0$, alors B est strictement croissante sur$]0;3600[$.
$\forall x \in]3600;+\infty[$,$B'(x) < 0$, alors B est strictement décroissante sur$]3600;+\infty[$.

x	0		3600		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	0		$-$
$B(x)$			5200000		
	-7760000	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

- Déterminons le maximum de la fonction

Le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal est 3600 et ce bénéfice est $5200000F\ CFA$.

Répondons à la préoccupation du président du COGES

5200000 >5170000, donc le bénéfice maximal permettra la construction de cette classe.

D- EXERCICES

Exercice 1

Complète le tableau suivant

Limites	Interprétation graphique
$\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$	
	La droite d'équation y = 6 est asymptote horizontale à (C_f) en +∞
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$	
	La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$	

Solution

Limites	Interprétation graphique
$\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$	La droite d'équation x=-3 est asymptote verticale à (C_f) .
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$	La droite d'équation y = 6 est asymptote horizontale à (C_f) en +∞
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$	La droite d'équation y = 4 est asymptote horizontale à (C_f) en -∞
$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$	La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$	La droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

Exercice 2

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 5} (2x + 1)$; 2) $\lim_{x \to -53} 2020$; 3) $\lim_{x \to 4} (-x + 10x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to -2} (3\,x^3 - x^2 + 2x - 1)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 3x^2 + 2x + 2021)$.

Solution

1) $\lim\limits_{x\to 5}(2x + 1)$ = 11 ;

2) $\lim\limits_{x\to -53} 2020$ = 2020 ;

3) $\lim\limits_{x\to 4}(-x + 10x^3)$ = 636

4) $\lim\limits_{x\to -2} (3\,x^3 - x^2 + 2x - 1)$ = - 33;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 3x^2 + 2x + 2021)$ = 2021.

Exercice

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^3 + 2x + x^5)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x - 100)$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4 - 6x^3 + 1)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^2 + x^3 - 99x + 7)$.

Solution

1) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-3x^3 + 2x + x^5) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x - 100) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4 - 6x^3 + 1) = \lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4) = -\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x^2 + x^3 - 99x + 7) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$.

Exercice 3

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{x^3}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ >}} \frac{1}{x+4}$.

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{x^3}{x-2} = -\infty$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5} = -\infty$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ >}} \frac{1}{x+4} = +\infty$.

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x^2-1}{x^2-5x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-20x^3+75}{4x^3-2x-90}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^4-x^2+5}{-4x^4+2x-7}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2+5}{-2x-1}$

Solution

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x^2-1}{x^2-5x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-20x^3+75}{4x^3-2x-90} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-20x^3}{4x^3} = -5$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^4-x^2+5}{-4x^5+2x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{4x} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2+5}{-2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{x^3}{2}) = +\infty$

Exercice 5

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)$ sachant que $f(x) = \frac{x^2+6}{x-4}$ et $g(x) = \frac{-x^3+6x+4}{x+2}$.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6}{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+6x+4}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = -\infty$

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ >}}\frac{x^2+6x-10}{x+4}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{x^2-5x+7}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}}\frac{x^2-5x+7}{x-2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\ >}}\frac{2x^2-x+1}{x-5}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{x^2-x-1}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\frac{x^2-x-1}{x+1}$

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ >}}\frac{x^2+6x-10}{x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to-4\\ >}}(x^2+6x-10)\times\frac{1}{x+4} = -\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ >}}(x^2+6x-10) = -18$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ >}}\frac{1}{x+4} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{x^2-5x+7}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}(x^2-5x+7)\times\frac{1}{x-2} = +\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}(x^2-5x+7) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{1}{x-2} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}}\frac{x^2-5x+7}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}}(x^2-5x+7)\times\frac{1}{x-2} = -\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}}(x^2-5x+7) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}}\frac{1}{x-2} = -\infty$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{2x^2-x+1}{x-5} = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} (2x^2-x+1)\times\frac{1}{x-5} = +\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} (2x^2-x+1) = 46$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{1}{x-5} = +\infty$

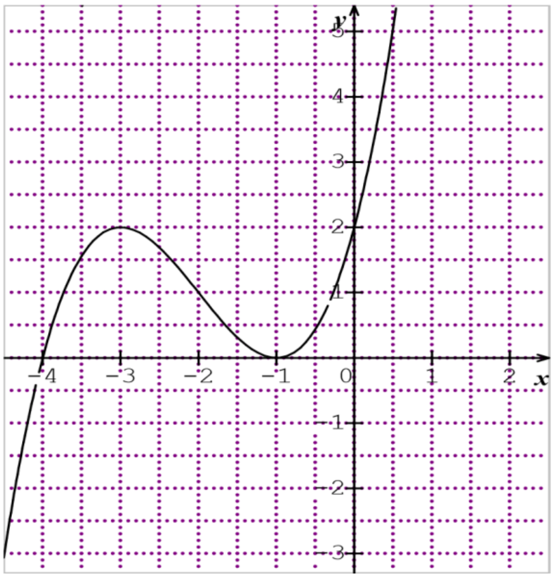
5) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to\\ >}} -1\ \ (x^2-x-1)\times\frac{1}{x+1} = +\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to\\ >}} -1\ (x^2-x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to\\ <}} -1\ \ (x^2-x-1)\times\frac{1}{x+1} = -\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to\\ <}} -1\ (x^2-x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{1}{x+1} = -\infty$

Exercice 7



Sur la figure ci- contre, on donne la représentation graphique d'une fonction f dérivable et définie sur IR.

1. Par lecture graphique, Précise les variations de f.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. On suppose que (C_f) admet un centre de symétrie.
   Précise par lecture graphique les coordonnées de ce centre de symétrie

4. Précise l'extrémum relatif de f sur $]-\infty\,;-1[$ puis sur $]-3\,;+\infty[$

5. Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$:

   a) $x\in\mathbb{R}, f(x)=1$
   b) $x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 1$
   c) $x\in\mathbb{R}, f(x)\leq 0$

Solution

1) f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.
   f est strictement décroissante sur $]-3\,;-1[$.

2) tableau de variation de f.

3) le centre de symétrie de (C_f) est le point de coordonnées $(-2\,;1\,)$.

4) f est croissante sur $]-\infty\,;-3[$ puis décroissante sur $]-3\,;-1[$ donc 2 est le maximum relatif
   de f sur $]-\infty\,;-1[$.
   f est décroissante sur $]-3\,;-1[$ puis croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc 0 est le minimum relatif
   de f sur $]-3\,;+\infty[$.

5) a) $S=\{-\ 3,75\,;\ -2\,;\ -0\,,25\,\}$.
   b) $S=\ [-\ 3,75\,;\ -2\,]\ \cup\ [-0,25\,;\ +\infty\,[$.
   c) $S=\,]-\infty\,;\ -4\,]\ \cup\ \{-\,1\,\}$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$

1. Justifie que l'ensemble de définition de D_f de f est $D_f =]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; +\infty[$

2.a) Calcule les limites de f à gauche et à droite en -1.

b) Donne l'interprétation graphique de ces résultats.

3. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Démontre que pour tout $x \in D_f, f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$.

5.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudie la position relative de (C_f) et (D).

6-a) Démontre que pour tout $x \in D_f, f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

b) Etudie le signe de $f'(x)$ puis déduis-en les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

7. Démontre que le point A $(-1\,;\,1)$ est centre de symétrie de (C_f).

8. a) Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1,8	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$										

b) Trace(C_f) sur $[-3\,;\,2]$.

Solution

1) $x \in D_f$ si et seulement si $x + 1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq -1$

donc $D_f =]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; +\infty[$

2) a) Limite de f à gauche en -1.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2+3x+3) \times \frac{1}{x+1} = -\infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2+3x+3) = 1$

Limite de f à droite en -1

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2+3x+3) \times \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2+3x+3) = 1$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f).

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

4) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$

5) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\,f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} (\,f(x) - (x+2)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f)en $-\infty$ et en $+\infty$

b) On a $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x+1}$

Or pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-1\right[$, $\frac{1}{x+1} < 0$ et pour tout $x \in \left]-1\,;\,+\infty\right[$, $\frac{1}{x+1} > 0$ donc sur $\left]-1\,;\,+\infty\right[$, (C_f) est au-dessus de (D) et sur $\left]-\infty\,;\,-1\right[$, (C_f) est en dessous de (D)

6-a) Pour tout $x \in D_f$ $f'(x) = \frac{(x^2+3x+3)'(x+1)-(x^2+3x+3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) On a $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ or pour tout réel $x \neq 1$, $(x+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+2)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	

Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-2\right[\cup \left]0\,+\infty\right[$, $f'(x) > 0$
Pour tout $x \in \left]-2\,;\,-1\right[\cup \left]-1;0\right[$, $f'(x) < 0$
Par suite f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-2\right[$ et sur $\left]0\,+\infty\right[$
Et est strictement décroissante sur $\left]-2\,;\,-1\right[$ et sur $\left]-1;0\right[$

e) le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

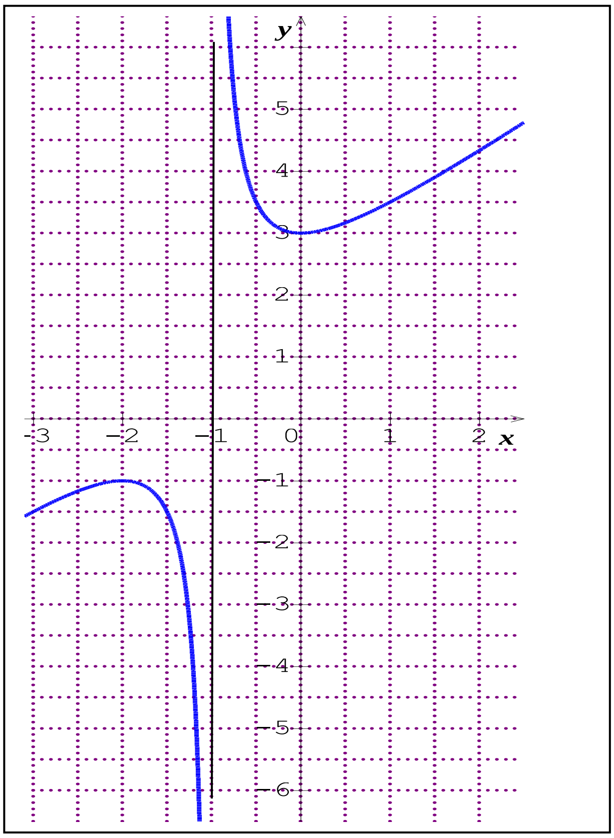
7) On a $f(-1+x) + f(-1-x) = -1+x+2+\frac{1}{-1+x+1} - 1 - x + 2 + \frac{1}{-1-x+1}$
$= 2 = 2 \times 1$

Donc le point A $(-1\,;\,1)$ est centre de symétrie de (C_f).

8) a) on a :

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1,8	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	-1,5	-1	-1,5	-1,05		6,2	3,5	3	3,5	4,33

b) Courbe (C_f)



Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - 8 + \frac{1}{x-3}$ et (C) sa courbe représentative.

4) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)$ puis interprète les résultats.
5) a) Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-8)] = 0$.

   b) Déduis - en que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
6) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en -∞ .
7) Détermine les positions relatives de (C) et de (D).

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} x - 8 + \frac{1}{x-3} == -\infty$. Car $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}(x-8) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} (x - 8 + \frac{1}{x-3}) = +\infty$. Car $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}}(x-8) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

Donc la droite d'équation x= 3 est asymptote verticale à (C) .

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-8)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-8)] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x-8)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-8)] = 0$; donc la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

4) on a $f(x)-(x-8)=\frac{1}{x-3}$.

Pour tout $x \in]-\infty -3[$, $\frac{1}{x-3} > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty - 3[$.

Pour tout $x \in]-3 + \infty[$, $\frac{1}{x-3} < 0$ donc (C) est en-dessous de (D) sur $]-3 + \infty[$.

SECONDAIRE
T^{le} A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

DUREE :24 heures **CODE :**

LEÇON 2 : PROBABILITÉS

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la kermesse de leur Lycée, les élèves d'une classe de terminale désirent proposer le jeu suivant à un stand :
« Une urne contient trois boules rouges numérotées 100, 200 et 300 et deux boules blanches numérotées 2 et 5, toutes indiscernables au toucher.
Les règles du jeu sont les suivantes :
Le joueur mise x francs CFA et tire successivement avec remise deux boules de l'urne. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue. Sinon, le joueur remporte le montant en francs CFA égal au nombre obtenu par le produit des numéros apparus sur les boules tirées »
Pour ne pas être perdants, ces élèves souhaitent déterminer la mise minimale du joueur pour que le jeu leur soit avantageux.
Ensemble, ils s'organisent pour déterminer la mise nécessaire.

B - CONTENU DE LA LEÇON

I. EXPÉRIENCES ALEATOIRES

1 Expériences aléatoires, éventualité ,univers

a) **Expérience aléatoire (Présentation)**

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
Les résultats possibles sont finis et connus *(1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6).*
On ne peut pas prévoir d'avance le résultat (1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6).

• On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire**, c'est à dire une expérience dont l'issue ne peut être connue d'avance.

Chaque résultat possible est appelé **éventualité**.

• L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω .

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé a six faces non truqué numéroté de 1à 6
6 est une éventualité
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ est l'univers

Exercice de fixation

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie
Ecris en extension l'univers Ω des éventualités

Solution

$\Omega = \{ (P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F) \}$

b) Evénement

On appelle **événement** tout sous ensemble de l'univers.

Remarque

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) . Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$)

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé non truqué à six faces numéroté de 1 à 6
On peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair » .
On a : $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$

Remarque :un événement A est réalisé si l'issue de l'expérience appartient à A.

Exercice de fixation

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
Ecris en extension l'événement B « obtenir face au premier lancer »

Solution

$B = \{ (F,P) ; (F,F) \}$

2 VOCABULAIRE DES PROBABILITES

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.

A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste	Exemples
Ω	Ensemble de référence	Univers	On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé cubique de faces numérotées de 1 à 6 et à noter le numéro de la face supérieure. L'univers Ω est {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}.
{} ou $\varnothing$	Ensemble vide	Événement impossible	L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 » est impossible. C=$\varnothing$
$\omega \in$ **Ω**	ω appartient à **Ω**	ω est une éventualité, un résultat ou une issue de l'expérience aléatoire	3 est un résultat dans un lancer de dé
$A \subset$ **Ω**	A est un sous ensemble de **Ω**	A est un évènement	« obtenir un multiple de 3 » est un évènement.
$\omega \in$ **A**	ω appartient à **A**	ω réalise A ou que A est réalisé lorsque le résultat ω appartient à A	Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair» ; 2 réalise A.
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B, c'est que la réalisation de A entraine celle de B	Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair» et B : « obtenir un multiple de 6 » B implique A
A ∩ B	Intersection de A et B	Evènement « A et B » Il ne se réalise que si A et B se réalisent à la fois.	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ». A ∩ B ne se réalise que lorsqu'on obtient à la fois un nombre pair et

			un multiple de 3, c'est-à-dire 6. A ∩ B = {6}
A∪B	Réunion de A et B	Evènement « A ou B » Il ne se réalise que si l'un au moins des évènements A et B se réalise	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ». A∪B se réalise que lorsqu'on obtient un nombre pair ou un multiple de 3, c'est-à-dire 6. A∪B ={2 ; 3 ; 4 ; 6}
A ∩ B = ∅	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre impair».
$\overline{A}$	Complémentaire de A.	Evènement contraire de A ; A se réalise si et seulement $\overline{A}$ ne se réalise pas.	A : « obtenir un nombre pair » L'évènement contraire de A est :« obtenir un nombre impair » ;

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

1) Deux événements contraires sont incompatibles

2) Un événement qui ne se réalise jamais est appelé événement certain

3) Deux événements incompatibles sont contraires

4) le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé cardinal

Solution

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai

II. PROBABILITE SUR UN ENSEMBLE FINI

1 Définition

On note $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \dots \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre P_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $P_1 + P_2 + \cdots . + P_n = 1$
- La probabilité P d'un événement A, notée P (A), est la somme des probabilités P_i des éventualités qui constituent A.

Remarque :

La probabilité P(A) d'un évènement A est telle que : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Exercice de fixation

On lance un dé pipé tel que $P(1) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$ et $P(2) = P(6) = \frac{1}{4}$

Calcule $P(5)$

Solution

On a $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

D'où $3P(1) + 2P(2) + P(5) = 1$ donc $P(5) = 1 - 3 \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4}$ par suite $P(5) = \frac{1}{8}$

2- Propriétés

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P (\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P (\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P (A) \leq P (B)$
- $P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles , $P (A \cup B) = P (A) + P (B)$
- $P (\overline{A}) = 1 - P (A)$

Exercice de fixation

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et deux événements A et B tels que
$P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$

1) Calcule $P(A \cup B)$

2) Calcule $P(\bar{A})$; $P(\bar{B})$ et $P (\overline{A \cup B})$

Solution

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}7$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

et $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

3- Equiprobabilité

Propriété

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités w_i , on a :

$$P_i = P(\{w_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

$$= \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré » ; « boule tirée de l'urne au hasard » ; « boules indiscernables au toucher » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exercice de fixation

On place dans un sac 5 pièces de $500\ F$, 10 pièces de 250 F et 15 pièces de 25 F.

Les pièces sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément 4 pièces du sac.

1) Calcule la probabilité de l'événement C :≪ n'avoir choisi aucune pièce de 25 F ≫

2) Calcule la probabilité $l'événement\ D$:≪ d'avoir obtenu uniquement des pièces de 250 F ≫

3) Calcule la probabilité $l'événement\ E$:≪ d'avoir obtenu au moins une pièce de $500\ F$ ≫

4) Calcule la probabilité $l'événement\ F$:≪ d'avoir obtenu au moins une pièce de chaque valeur ≫

Corrigé

$Card(\Omega) = C_{30}^4 = 27\ 405$

1) $P(C) = \frac{C_{15}^4}{C_{30}^4} = \frac{1365}{27405} = \frac{13}{261}$; 2) $P(D) = \frac{C_{10}^4}{C_{30}^4} = \frac{210}{27405} = \frac{2}{261}$

3) $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{C_{25}^4}{C_{30}^4} = 1 - \frac{12650}{27405} = \frac{14755}{27405} = \frac{2951}{5481}$

4) $P(F) = \dfrac{C_5^2 \times C_{10}^1 \times C_{15}^1 + C_{10}^2 \times C_5^1 \times C_{15}^1 + C_{15}^2 \times C_5^1 \times C_{10}^1}{C_{30}^4} = \dfrac{10\ 125}{27405} = \dfrac{75}{203}$

Série A1 seulement

III. VARIABLES ALEATOIRES

1 Définition

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans ℝ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté { X = x }, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est noté Ω'.

Exemple :

Avec l'exemple de départ, on peut définir une variable aléatoire X de la façon suivante :

- X = 0 si le nombre est pair
- X = 1 si le nombre est impair

L'ensemble des valeurs prises

par X est Ω' = { 0 ; 1 }

2 - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

(on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition

Soit $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \ \dots \ \omega_n \}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
$\Omega' = \{ x_1 , x_2 \ \dots \ , x_m \}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i = P (X = x_i)$

Remarque

On a : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n = 1$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i	0	1
$p_i = P (X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3 Espérance, variance, écart type d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous :

x_i	w_1	w_1	…	w_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre noté $E(X)$défini par :
$$E(X) = p_1 w_1 + p_2 w_2 + \cdots + p_n w_n$$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre V(X) défini par :
$$V(X) = p_1 {w_1}^2 + p_2 {w_2}^2 + \cdots + p_n {w_n}^2 - (E(X))^2$$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre noté σ défini par : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Remarque

$E(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X sur un grand nombre de parties.

Lorsque X représente un gain algébrique d'un joueur

- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est équitable.
- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est favorable au joueur
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est défavorable au joueur.

Exercice de fixation

Une urne contient 5 boules : 2 noires et 3 rouges.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées

1) Justifie que $\Omega' = \{ 0 ; 1 ; 2 \}$
2) Détermine la loi de probabilité de X.
3) a) Calcule l'espérance mathématique
b) calcule la variance et l'écart type

Solution

1) On ne tire aucune boule noire $X = 0$

On tire une boule noire $X = 1$

On tire deux boules noires $X = 2$

Donc $\Omega' = \{0\,;1\,;2\,\}$

2) $card\ (\Omega) = C_5^2 = 10$

$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

Ainsi la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	total
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

3) a) L'espérance mathématique

On a $E(X) = p_1w_1 + p_2w_2 + \cdots + p_nw_n$

$$E(\,X\,) = \left(0 \times \frac{3}{10}\right) + \left(1 \times \frac{6}{10}\right) + \left(2 \times \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

b) La variance

$$V(X) = p_1{w_1}^2 + p_2{w_2}^2 + \cdots + p_n{w_n}^2 - (\,E(X)\,)^2$$

$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(1^2 \times \frac{6}{10}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{100}{100} - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

L'écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$

donc $\sigma = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

C – <u>SITUATION COMPLEXE</u>

Pour l'organisation d'une kermesse dans le quartier, le président désire proposer le jeu suivant à un stand :

« Une urne contient trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard, une boule de l'urne.

Les règles du jeu sont les suivantes :

Si la boule tirée est :

- rouge, le joueur gagne 100f.
- verte, le joueur gagne 20f.
- jaune, le joueur gagne 30f.
- bleue, le joueur gagne mf où m est un réel strictement positif.

Pour participer et gagner au jeu Mariam souhaite déterminer la valeur minimale de m pour être sûr de gagner en moyenne au moins 45 F. Elle te sollicite pour l'y aider.

À l'aide d'une production argumentée, détermine la valeur minimale de m pour être sûr de gagner en moyenne au moins 45 F.

Solution

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain dans ce jeu
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	20	30	m	100
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Elle souhaite avoir $E(X) \geq 45$
On a $E(X) = \frac{4}{10} \times 20 + \frac{3}{10} \times 30 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 100 = \frac{270 + 2m}{10}$

$$E(X) \geq 45 \Leftrightarrow \frac{270 + 2m}{10} \geq 45$$
$$\Leftrightarrow 2m \geq 180$$
$$\Leftrightarrow m \geq 90$$

La valeur minimale de m est donc 90 F

D- EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

On lance un de pipe tel que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$et $P(6) = 3P(1)$

Calcule la probabilité d'apparition de chaque face

SOLUTION

On a $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
D'où $5P(1) + 3P(1) = 1$ donc $P(1) = \frac{1}{8}$

par suite $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{8}$ et $P(6) = \frac{3}{8}$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous

x_i	-15	0	15	30
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1) Calcule l'espérance mathématique.
2) Calcule la variance et l'écart type.

Solution

1) $E(X) = -15 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 15 \times \frac{3}{8} + 30 \times \frac{1}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$.

2) $V(X) = (-15)^2 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + (15)^2 \times \frac{3}{8} + (30)^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{1800}{8} - \frac{225}{4} = \frac{1350}{8}$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1350}{8}}$

Exercices de renforcement

Exercice 3

Lors d'une kermesse scolaire, un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Yasmine participe à ce jeu.

1. Justifie que Yasmine peut effectuer 1140 tirages possibles.

2. On considère les évènements A , B , C et D suivants et on note $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$ leurs probabilités respectives.

A : « Yasmine tire exactement une boule noire »
B : « Yasmine tire exactement deux boules noires »
C : « Yasmine tire exactement trois boules noires »
D : « Yasmine tire au moins une boule noire »

a) Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

b) Justifie que $P(D) = \frac{137}{228}$

Solution

1) Le nombre de tirages possibles est effectuer C_{20}^{3} soit 1140

2) a) $P(A\ ) = \frac{C_5^1 \times C_{15}^2}{1140} = \frac{105}{228} = \frac{35}{76}$, $P(B\ ) = \frac{C_5^2 \times C_{15}^1}{1140} = \frac{15}{114} = \frac{5}{38}$; $P(C\ ) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{1}{114}$

b) $P(\overline{D}\ ) = \frac{C_{15}^3}{1140} = \frac{91}{228}$ donc $P(D) = 1 - P(\overline{D}\ ) = \frac{137}{228}$

Exercice 4

Un chariot de desserts comporte 10 vanille, 3 fraise, 4 chocolat, 5 menthe, 6 caramel. Un enfant qui aime autant tous les gâteaux choisit au hasard 4 gâteaux.

Détermine la probabilité des événements suivants

1. A : « il ne choisit que de la vanille »
2. B : « il ne choisit qu'une seule sorte de desserts »
3. C : « il choisit un à la fraise et 3 chocolats »

4 . D : « il choisit au moins un à la vanille »

Solution

Le nombre de tirages possibles est effectuer C_{28}^{4} soit 20 475

1. $P(A\ ) = \frac{C_{10}^4}{20\,474} = \frac{210}{20\,475} = \frac{14}{1\,365}$, 2. $P(B\ ) = \frac{C_5^4 + C_{10}^4 + C_6^4 + C_4^4}{20\,475} = \frac{231}{20\,475} = \frac{11}{975}$;

3. $P(C\ ) = \frac{C_3^1 \times C_4^3}{20\,475} = \frac{12}{20\,475} = \frac{4}{6\,825}$

4. Calculons d'abord la probabilité de l'événement $\overline{D}$: « ne pas choisir de gâteau à la vanille »

$P(\overline{D}\ ) = \frac{C_{18}^4}{20\,457} = \frac{3060}{20\,457} = \frac{204}{1\,365}$

Par suite $P(D) = 1 - P(\overline{D}\ ) = \frac{1\,161}{1\,365}$

Exercice d'approfondissement

Exercice 5

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité

Le test relève que

Sur 100 personnes considérées comme malade, 98 ont un test positif.

Sur 100 personnes considérées comme saines, 1 seule a un test positif.

On note $f(x)$ la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

On admet que : pour tout x élément de $[\ 0; 1\ ]$, $f(x) = \frac{98\,x}{97\,x+1}$

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.

1. Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%)
2. Détermine la proportion x à partir de laquelle le test est fiable.

Solution

1. On a $f(0{,}05) = \frac{98 \times 0{,}05}{97 \times 0{,}05 + 1} = 0{,}8376$

   Comme 0,83 < 0,95, alors le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade

2. On résout inéquation : $f(x) \geq 0{,}95$

$$\frac{98\,x}{97\,x+1} \geq 0{,}95$$

Comme $97\,x + 1 \geq 0$ (car $0 \leq x \leq 1$)

$$98\,x \geq 0{,}95(97\,x + 1)$$

$$x \geq \frac{19}{117} \quad \text{or} \quad \frac{19}{117} = 0{,}162$$

On en déduit que le test est fiable si au moins 17% de la population est malade

Terminale A Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : Fonctions numériques

LEÇON 3 : LOGARITHME NEPERIEN

Durée : 12 heures **Code :**

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin-chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0{,}325)^n$.

Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la proportion d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%. Il sollicite ta classe.

Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, la classe décide de s'informer sur la résolution de ce type d'inéquation auprès de son professeur de Mathématiques.

B. RESUME DE LA LECON

I. Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction dont la dérivée sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

b) Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $]0;+\infty[$
- **ln 1 = 0** (l'image de 1 par la fonction ln est 0)
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\mathbf{\ln'(x)} = \frac{1}{x}$.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}$	
$\ln(1)=0$	
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	

L'image d'un nombre réel négatif par la fonction ln existe.	

Solution

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}$	Faux
$\ln(1)=0$	Vrai
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	Vrai
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	Faux
L'image d'un nombre négatif par la fonction ln existe.	Faux

2.Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>

Exprime en fonction de $ln2$ et $ln3$ chacun des nombres suivants :

$A = \ln(24)$ $\qquad B = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ $\qquad C = \ln(3^5) - ln(2^4)$

Solution

On a : $A = \ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = ln2^3 + ln3 = 3ln2 + ln3$

$B = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = ln2 - ln3$

$C = \ln(3^5) - ln(2^4) = 5ln3 - 4ln2$

<u>Exercice 2</u>

Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(k)$ où k est un nombre réel strictement positif.

$D = \ln(5) + \ln(3)$ $\qquad E = \ln(2) - \ln(0{,}1)$ $\qquad F = 4\ln 5$

Solution

On a : $D = \ln(5) + \ln(3) = ln(5 \times 3) = \ln(15)$

$E = \ln(2) - \ln(0{,}1) = \ln\left(\frac{2}{0{,}1}\right) = \ln(20)$

$F = 4\ln 5 = ln(5^4) = \ln(625)$

II. Limites, sens de variation et représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

1. Limites de référence.

Propriété

(1) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. (3) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} x\ln x = 0$

(2) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x = -\infty$ (4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

<u>**Exercice de fixation**</u>

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} (x + lnx)$ 2) $\lim_{x\to+\infty} (x + lnx)$ 3) $\lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{lnx}{x})$ 4) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} x(1 + lnx)$

Solution

1) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} (x + lnx) = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} lnx = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} (x + lnx) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (1 - \frac{lnx}{x}) = 1$

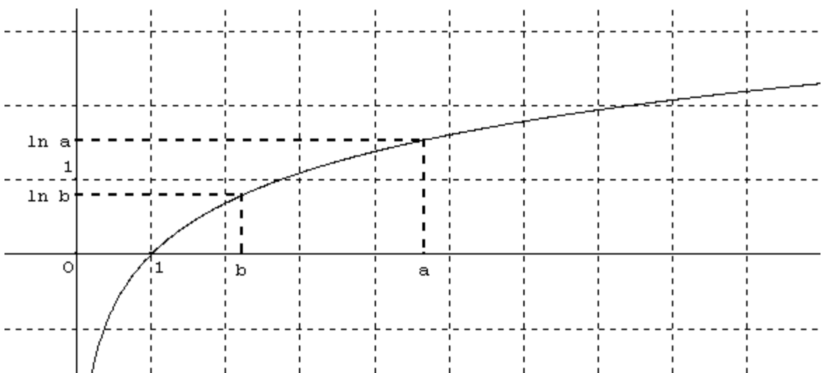
4) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} x(1 + lnx) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} (x + xlnx) = 0$ car $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} x\, lnx = 0$

2. Dérivée et sens de variation de la fonction logarithme népérien.

- Pour tout $x > 0$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- Courbe représentative de la fonction ln :



Exercice de fixation

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + lnx$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f
2. Calcule $f'(x)$.
3. Etudie le sens de variation de f .

Solution

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ donc $D_f =]0; +\infty[$
2. pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
3. Sens de variation de f .
   Pour tout $x \epsilon]0; +\infty[$, $2 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$
   D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice de maison

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + lnx$.
1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f et calcule$f'(x)$.
2. Etudie le sens de variation de de f.

III. Résolution d'équations et d'inéquations comportant la fonction ln.

1. Propriété

Propriété :

Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$
- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$

Conséquences :

Pour tout nombre réel x strictement positif :

- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$;
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$;
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.

Remarque

Il existe un seul nombre réel noté e appartenant à $]2; 3[$ tel que : $\ln(e) = 1$ avec $e \simeq 2{,}718$.

2. Exemples de résolution d'équations

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $\ln(2x - 1) = \ln(x + 5)$; 2. $\ln(x - 2) = 1$; 3. $(lnx)^2 + lnx - 6 = 0$

Solution

<table>
<tr>
<td>1) $\ln(2x-1)=\ln(x+5)$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow 2x-1>0\ et\ x+5>0$
$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\ et\ x>-5$
$V=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-1)=\ln(x+5)$
$\Leftrightarrow 2x-1=x+5$
$\Leftrightarrow x=6$
Comme $6\ \epsilon V$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{6\}$</td>
<td>2) $\ln(x-2)=1$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow x-2>0$
$\Leftrightarrow x>2$
$V=]2;+\infty[$

$\ln(x-2)=1$
$\Leftrightarrow \ln(x-2)=\ln e$
$\Leftrightarrow x-2=\mathrm{e}$
$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}+2$
Comme $\mathrm{e}+2\ \epsilon\ V$
$S_{\mathbb{R}}=\{e+2\}$</td>
<td>3) $(lnx)^2+lnx-6=0$
$x\epsilon V \Leftrightarrow x>0$ donc $V=]0;+\infty[$
Posons : $X=lnx$.
L'équation devient : $X^2+X-6=0$
Résolution de cette équation :
$\Delta=1+(-4)\times(-6)=25=5^2$
$X=\frac{-1-5}{2}=-3$ ou $X=\frac{-1+5}{2}=2$
On obtient :
$(lnx)^2+lnx-6=0$
$\Leftrightarrow$X=-3 ou X=2
$\Leftrightarrow lnx=-3\ ou\ lnx=2$
$\Leftrightarrow x=e^{-3} ou\ x=e^2$
Comme $e^{-3}\ et\ e^2$ sont éléments de V
$S_{\mathbb{R}}=\{e^{-3};e^2\}$</td>
</tr>
</table>

Exercices de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\ln(2-\mathrm{x})=0$; b) $\ln(2\mathrm{x}^2+3)=\ln(7\mathrm{x})$; c) $2-\ln\mathrm{x}=0$; d) $(\ln\mathrm{x}-2)(\ln\mathrm{x}+1)=0$
e) $(lnx)^2-2lnx-3=0$

3. Exemples de résolution d'inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. $\ln(2x-3)<1$; 2. $(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$

Solution

<table>
<tr>
<td>1) $\ln(2x-3)<1$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow 2x-3>0$
$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$
$V=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-3)<1 \Leftrightarrow \ln(2x-3)<\ln(e)$
$\Leftrightarrow 2x-3<e$
$\Leftrightarrow x<\frac{3+e}{2}$
$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{3+e}{2}\right[$
$S_{\mathbb{R}}=\mathrm{V}\cap\left]-\infty;\frac{3+\mathrm{e}}{2}\right[$
$=\left]\frac{3}{2};\frac{3+\mathrm{e}}{2}\right[$</td>
<td>2) $(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow x>0$ donc $V=]0;+\infty[$

$(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$
Posons $lnx=\mathrm{X}$, . On a: $\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6\geq 0$
$\Delta=25-24=1$
X = 2 ou X = 3
Etudions le signe de $\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$
<table>
<tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
$\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6\geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{X}\epsilon]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$
$(lnx)^2-5lnx-6\geq 0 \Leftrightarrow lnx\ \epsilon]-\infty;2]$ ou $lnx\ \epsilon[3;+\infty[$
$\Leftrightarrow lnx\leq 2$ ou $lnx\geq 3 \Leftrightarrow x\leq \mathrm{e}^2$ ou $x\geq e^3$
$\Leftrightarrow x\in]-\infty;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[$
$S_{\mathbb{R}}=V\cap(]-\infty;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[)$
$=]0;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[$</td>
</tr>
</table>

Exercice de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\ln\mathrm{x}-3\geq 0$ b) $2(lnx)^2-3lnx-2\leq 0$.

IV. Dérivée et primitives

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positif sur un intervalle K, alors $ln(u)$ est dérivable sur K et on a : $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

Exercice de fixation

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur I. Détermine la fonction dérivée.

1) $f(x)=\ln(5x+2)$, $I=]0;13[$

2) $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$, $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

Solution

1) Pour $x \in]0; 13[$, $f'(x) = \frac{5}{5x+2}$

2) Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x-1}$

Exercice de maison

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur I. Détermine leur fonction dérivée.

1)$f(x) = \ln(x^2 + 2)$, $I = \mathbb{R}$ 2)$f(x) = \ln(-3x)$, $I =]-2; -1[$

2)$f(x) = \ln(-3x^2 + 5x - 2)$, $I = \left]\frac{2}{3}; 1\right[$

2. Primitives

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitives sur K, la fonction ln(u)+ α (α∈ℝ)

Point méthode

Fonctions	**Primitives**
$\boldsymbol{f: x \longmapsto \frac{1}{x}, (x > 0)}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto ln(x) + k,}$ k ϵ ℝ
$\boldsymbol{f: x \mapsto \frac{a}{cx+d}, c \neq 0 \; et \; cx + d > 0}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto \frac{a}{c} ln(cx + d) + k}$; k ϵ ℝ
$\boldsymbol{f: x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u(x) > 0}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto ln(u(x)) + k}$; k ϵ ℝ

Exercice de fixation

Détermine sur I les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$ b)$f(x) = \frac{2}{-3x+7}$ $et \; I = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$,

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$, $I =]0; +\infty[$

Solution

a) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$, sont les fonctions F telles que : F(x) = ln (x) + α (α∈ℝ)

b) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle : $f(x) = \frac{2}{-3x+7}$ $et \; I = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$

Les primitives de f sur $\left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$ sont les fonctions F telles que : F(x) = $-\frac{2}{3}$ln (−3x + 7) + α (α∈ℝ).

c) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ $et \; I =]0; +\infty[$

Soit $u(x) = x^2 + x + 3$ et $u'(x) = 2x + 1$

On a : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et pour $x \epsilon]0; +\infty[$, $u(x) > 0$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions F telles que : F(x) = ln $(x^2 + x + 3)$ + α (α∈ℝ).

Exercice de maison

Détermine sur I les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $f(x) = -\frac{1}{x}$ +2 et $I =]0; +\infty[$ b)$f(x) = \frac{1}{2x-3}$ $et \; I = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

c) $f(x) = \frac{-4x+5}{-2x^2+5x-3}$, $I = \left]1; \frac{3}{2}\right[$.

C- SITUATION COMPLEXE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0{,}325)^n$.
Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%.Ne sachant pas faire , il sollicite ta classe.
En te basant sur tes connaissances mathématiques, détermine ce nombre minimum d'élèves.

Solution
Pour déterminer le nombre le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98% :

- je vais résoudre une inéquation en utilisant la fonction logarithme ln et une de ses propriétés algébriques
- je vais conclure.

Résolvons dans IN l'inéquation : $1-(0{,}325)^n \geq 0{,}98$

$1-(0{,}325)^n \geq 0{,}98$
$\Leftrightarrow -(0{,}325)^n \geq 0{,}98-1$
$\Leftrightarrow (0{,}325)^n \leq 0{,}02$
$\Leftrightarrow ln(0{,}325)^n \leq \ln(0{,}02)$
$\Leftrightarrow nln(0{,}325) \leq \ln(0{,}02)$
$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}325)}$
$\Leftrightarrow n \geq 3{,}48$ donc la valeur minimale de n est 4.

Conclusion
le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 0,98 est 4.

D. EXERCICES

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1
Justifie que pour tout nombre réel > 1 , on a : $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(x^2-1)$

Exercice 2
Résous dans ℝ chacune des équations proposées :
a) $\ln(3-x)=2$ b) $\ln(x^2-6)=\ln(5x)$ c) $1-\ln x=0$
d) $(\ln x-2)(\ln x-1)=0$ e) $\ln^2(x)-4\ln(x)+3=0$

Exercice 3
Résous dans ℝ les inéquations suivantes d'inconnue *x*.
a) $\ln(x+1)\geq 1$; b) $\ln(-x+2)\leq 0$; c) $\ln(-2x+3)\geq\ln(x)$; d) $\ln(x^2+1)\geq \ln(-x+2)$
e) $\ln(x)+\ln(x+1)\geq 0$; f) $(\ln x-2)(\ln x-1)\leq 0$

Exercice 4
Détermine la limite des fonctions suivantes en *a* :
a) $f(x)=\ln(x)-3x$ et $a=0$; b) $g(x)=-x-3-\ln(x)$ et $a=+\infty$;
c) $h(x)=x-2-\ln(x)$ et $a=+\infty$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = x - 3 - \ln(x)$ b) $f(x) = -x + 2 + \ln(x)$ c) $f(x) = \ln(-3x + 4)$

d) $f(x) = -3x + 2 - \ln(x)$ e) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x - 1)$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur K

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$ et $K =]0; +\infty[$ b) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ et $K =]1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$ et $K =]1; +\infty[$ d) $f(x) = -5 + \frac{1}{x}$ et $K =]0; +\infty[$

Exercice7

Soit la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = -3x + \ln(x)$

Détermine la limite de *f* en +∞ puis en 0

Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes ;

a) Calcule la dérivée.
b) Etudie les variations.

f(x) = -x+ln(x) ; g(x) = ln(- 3x^2 -2x+ 5) ; $h(x)$ = -3 x – 1 –ln(x)

Exercice 9

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par : *f*(x) = 3-x-ln(x).

a) Calcule les limites de *f* en 0 et en+∞.
b) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
c) Etudie les variations de *f* et dresse son tableau de variation.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soit *f* la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = 2 - x + \ln(x)$.

1) a-Calcule la limite de *f* en +∞ .
   b-Calcule la limite de *f* en en 0, puis donne une interprétation graphique du résultat.
2) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
3) Etudie les variations de *f*.
4) Dresse le tableau de variation de *f* sur]0 ; +∞[.
5) Démontre que l'équation *f*(x) = 0 admet une solution unique a sur [3 ; 4].
6) Trace la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 11

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : *f*(x) = 1 + x –ln(x).

1) Calcule la limite de *f* en +∞ et en 0.
2) Calcule la dérivée *f'* de *f* sur ℝ.
3) Etudie les variations de *f*.
4) Dresse le tableau de variation de *f*.
5) Trace (C_f), représentation graphique de *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 12

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x - \ln(x)$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.
2. Calcule la limite de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

   b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

4. a) On admet que f est dérivable sur $]\mathbf{0};+\infty[$. Calcule $f'(x)$.
   b) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.
6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $]0;3]$

<u>Exercice type Bac</u>
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-2x+1+lnx$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).
1. Justifie que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ puis donne une interprétation graphique de cette limite.
3. Calcule la limite de f en $+\infty$.
2. a) Vérifie que pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-2x+1}{x}$
   b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$.
      Déduis-en les variations de f sur $]0;+\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f.
4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$									

5. Construis (C) sur l'intervalle $]0;4]$.

Solution
1. Justifions que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ puis donnons une interprétation graphique de cette limite.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(-2x+1+lnx)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(-2x+1)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(lnx)=-\infty\end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à la courbe (C).

2. Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x+1+lnx)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)=-2\end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

3. a) Vérifions que pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-2x+1}{x}$
Pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f(x)=-2x+1+lnx$

Donc pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=-2+\frac{1}{x}=\frac{-2x+1}{x}$.

   b) Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$.

Pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x+1$.

$f'(x) = 0$ équivaut à $-2x + 1 = 0$

équivaut à $\quad x = \frac{1}{2}$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- Pour tout $x \epsilon \left]0; \frac{1}{2}\right[, f'(x) > 0$.
- Pour tout $x \epsilon \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 0$.

Variations de f

- f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$
- f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

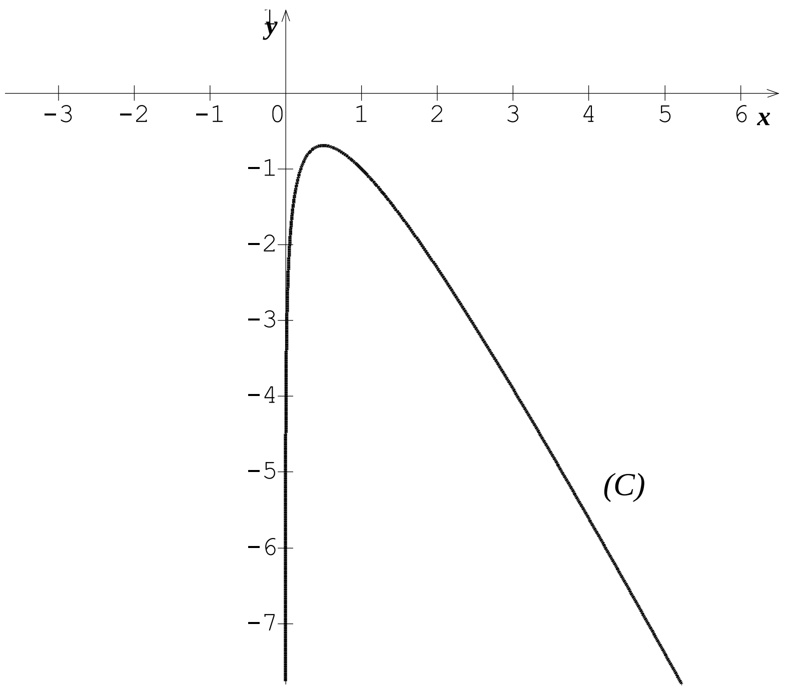
c) Dressons le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-ln2$	$\searrow$	$-\infty$

2. Recopions et complétons le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-3,2	-0,7	1	-1,6	-2,3	-3,1	-4	-4,7	-5,6

5.Construction (C) sur l'intervalle $]0; 4]$.



Thème : Fonctions numériques

LEÇON 4 : FONCTION EXPONENTIELLE

Durée : 12 heures **Code :**

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction :

$\mathrm{P(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}21\mathrm{t}}$.

Le responsable du magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres mais ne sait pas quand. Il te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'il devra consacrer à la publicité. Tu portes le problème à ta classe. Ensemble, elle décide de trouver le nombre de jour qu'il faudra.

B- CONTENU DE LA LECON

I- Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition

La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

b) Autre notation :

Pour tout nombre x réel , $\exp(x)$ se note également e^x : $\exp(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^x$.

c) Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b,
  $\ln(a) = b$ équivaut à $a = e^b$.
- $\mathrm{e}^0 = 1$; $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- Pour tout nombre réel a, $\mathrm{e}^a > 0$.
- Pour tout nombre réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) = a$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln a} = a$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction $x :\mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	
Le nombre e^{-10} est négatif.	
Le nombre e^0 est égal à 0.	
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à ln12.	
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	

Solution

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction $x :\mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	vrai
Le nombre e^{-10} est négatif.	Faux
Le nombre e^0 est égal à 0.	faux
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à ln12.	Faux
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	vrai

Exercice 2

Ecris chacun des nombres A, B, C et D suivants sous forme de nombre rationnel.

$A = \ln(e^8)$ $\quad B = \ln(e^{-5})$ $\quad C = e^{\ln 3}$ $\quad D = e^{-\ln 2}$

Solution

$A = \ln(e^8)$ $= 8$	$B = \ln(e^{-5})$ $= -5$	$C = e^{ln3}$ $= 3$	$D = e^{-ln2}$ $= e^{ln\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$

2. Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous nombres réels *a* et *b*, r un nombre rationnel

$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$(e^a)^r = e^{a\times r}$; $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

Exercice de fixation

Ecris chacun des nombres E, F et G suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

$E = e^6 \times e^{-4}$ $\quad F = (e^{-2})^4$ $\quad G = \frac{e^4}{e^{-5}}$

Solution

$E = e^6 \times e^{-4}$ $= e^{6+(-4)}$ $= e^2$	$F = (e^{-2})^4$ $= e^{-2\times 4}$ $= e^{-8}$	$G = \frac{e^4}{e^{-5}}$ $= e^{4+5}$ $= e^9$

II- Limites, sens de variations et représentation graphique de la fonction exponentielle

1. Limites de référence

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 - e^x)$

<u>Solution</u>

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3)$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 3 = 3$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x = 2 \times 0 = 0$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x})$

$$= -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty \end{cases}$$

2. <u>Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle</u>.

<u>Propriété</u>

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$

$(e^x)' = e^x$ et **$e^x > 0$**.
La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur$\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Exercice de fixation</u>

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + e^x$.

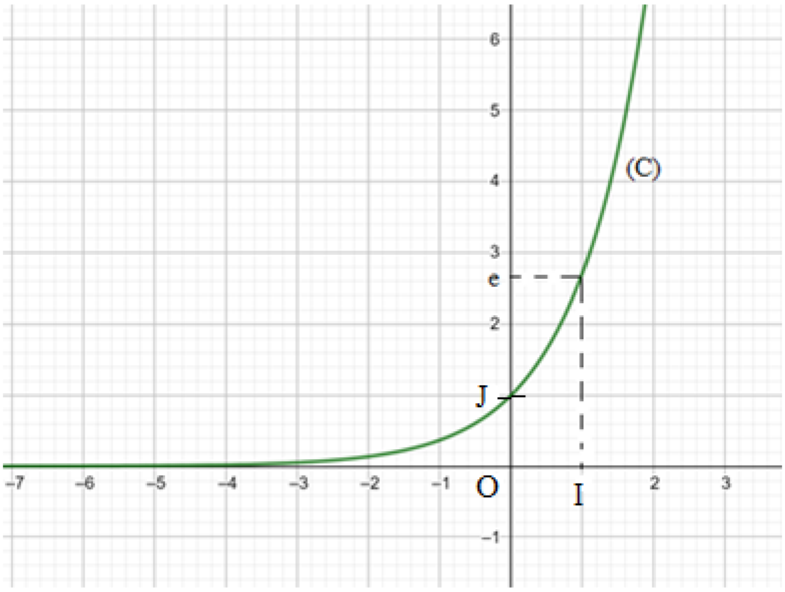
1. Calcule :$f'(x)$.
2. Donne le sens de variation de *f*.

<u>Solution</u>

1. Pour tout *x* élément de$\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 + e^x$.
2. Pour tout *x* élément de$\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. <u>Représentation graphique de la fonction exponentielle</u> <u>népérienne</u>

Notons (C) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation y = 0, c'est-à-dire l'axe (OI), est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.



III - **<u>Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction exponentielle nepérienne</u>.**

1. <u>Propriété</u>

<u>Propriété :</u>

Pour tous nombres réels a et b :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

2. <u>Exemples de résolution d'équations</u>

Résous dans ℝ chacune les équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

<u>Solution</u>

1) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$	2) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$	3) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$
$e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	$e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	$e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^{x})^2 + e^{x} - 6 = 0$ Posons**:** $X = e^{x}$. Donc $X > 0$ L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \frac{-1-5}{2}$ ou $X = \frac{-1+5}{2}$ X=-3 ou X=2, e^{x} = - 3 est impossible car $e^{x} > 0$ pour tout réel x, $e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$

3. Exemples de résolution d'inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les inéquations suivantes :
1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

Solution

<table>
<tr>
<td>1) Ensemble de validité V:
V= $\mathbb{R}$

$e^{2x-1} < 8$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$
$\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$
$\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$
$S_{\mathbb{R}} = V \cap \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$
$= \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$</td>
<td>2) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$

$e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$
Posons $e^{x} = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$
$\Delta = 25 - 24 = 1$
$X = 2$ ou $X = 3$
Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$
<table>
<tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$X^2 - 5X + 6$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
</table>
$X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$
On a : $e^{x} \in]-\infty; 2]$ ou $e^{x} \in [3; +\infty[$
$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$ ou $e^{x} \geq 3$
$\Leftrightarrow x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 2]$ ou $x \in [\ln 3; +\infty[$
$S_{\mathbb{R}} = V \cap ( ]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[ )$
$=]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$</td>
</tr>
</table>

IV - Dérivées et primitives

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^{u} est dérivable sur K et on a :
$(e^{u})' = u'e^{u}$

Exercice de fixation

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la fonction dérivée de f.

1) $f(x) = e^{-4x+3}$
2) $f(x) = e^{x+3} - 2x + 5$
3) $f(x) = (2x + 1)e^{x}$

Solution

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{-4x+3}$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 + e^{x+3}$
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{x} + (2x + 1)e^{x}$
$f'(x) = (2x + 3)e^{x}$

2. Primitives (Terminale A1 uniquement)

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $u'e^{u}$ a pour primitive sur K, la fonction $e^{u} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Point méthode

Fonctions	Primitives
$\mathbf{f: x \longmapsto e^{x}}$,	$\mathbf{F: x \longmapsto e^{x} + k}$, $k \in \mathbb{R}$
$\mathbf{f: x \longmapsto e^{ax+b}}$, $\mathbf{a \neq 0}$	$\mathbf{F: x \longmapsto \frac{1}{a} e^{ax+b} + k}$; $k \in \mathbb{R}$
$\mathbf{f: x \to\longmapsto u'(x)e^{u(x)}}$	$\mathbf{F: x \longmapsto e^{u(x)} + k}$; $k \in \mathbb{R}$

Exercice de fixation

Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{x}$, b) $f(x) = e^{-3x+7}$, c) $f(x) = xe^{x^2}$

Solution

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sur$\mathbb{R}$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = e^{x} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $f(x) = e^{-3x+7}$ sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+7} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$
On a: $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{2} u'(x)e^{u(x)}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

C – SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après *t* jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.
Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres mais ne sait pas quand. Il te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'il devra consacrer à la publicité.

Détermine le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

Solution

- Pour déterminer le nombre de jours je vais utiliser la fonction exponentielle népérienne.
- Détermination du nombre de jours en utilisant une équation faisant intervenir la fonction exponentielle.
- Résolution de l'équation dans ℝ: $1 - e^{-0,21t} = \frac{90}{100}$.

$e^{-0,21t} = 0,1$ équivaut à $-0,21t = \ln 0,1$

équivaut à $t = \frac{\ln 0,1}{-0,21} \approx 10,96$

Comme t est un entier naturel, on prend t = 11.

- Conclusion : le grand magasin fera la publicité pendant 11 jours.

D- EXERCICES

1- Exercices d'application

Exercice 1

Simplifie l'expression suivante $A = \frac{e^{5x} \times e^{-2x}}{e^{-x+2}}$.

Solution

$A = \frac{e^{5x} \times e^{-2x}}{e^{-x+2}} = \frac{e^{5x-2x}}{e^{-x+2}} = e^{5x-2x+x-2} = e^{4x-2}$

Exercice 2

Résous dans ℝ.

(E) : $\frac{x(e^x-1)}{x^2+1} = 0$; (I) : $\frac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} \geq 0$

Solution

- Résolution de (E)

(E) équivaut à $\frac{x(e^x-1)}{x^2+1} = 0$ équivaut à $x(e^x - 1) = 0$

équivaut à $x = 0$ ou $e^x - 1 = 0$

équivaut à $x = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{ 0 \}$

Résolution de (I):

Posons $f(x) = \frac{x^2+x-2}{e^{2x}-1}$

x	$-\infty$ -2	0	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$e^{2x} - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$S_{\mathbb{R}} = [-2; 0[\cup [1; +\infty[$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur$\mathbb{R}$.
Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$; b) $f(x) = x + 2 - e^{x}$; c)$f(x) = (1 - x)e^{x}$.

Solution

a) $f'(x) = -2e^{-2x+1}$; b) $f'(x) = 1 - e^{x}$; c) $f'(x) = -e^{x} + (1 - x)e^{x} = -xe^{x}$

Exercice 4

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = (2x + 1)e^{x} + \frac{1}{x}$, $a = +\infty$

b) $f(x) = 2 \times \frac{e^{x}-1}{x} + x^{2}$, $a = 0$.

Solution

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x + 1)e^{x} + \frac{1}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(2 \times \frac{e^{x}-1}{x} + x^{2}\right) = 2$ car $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (A1 seulement)

a) $f(x) = e^{4x}$; B) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$; c) $f(x) = x - \frac{3}{4} + 3e^{-2x+1}$

Solution

$a)$ $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$; b) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 5x$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{2} - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}e^{-2x+1}$

Exercices de renforcement

Exercice 6

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Choisis la réponse juste.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Pour tout $x\neq0$, l'expression $\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{x}+1}$ est égale à	$\frac{e^{x}-1}{1-e^{-x}}$	$\frac{e^{x}-1}{1+e^{-x}}$	$\frac{e^{x}-e^{-x}}{1-e^{-x}}$
2	L'équation: $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2-x-1} = e^{3x-4}$ a pour solution	x =1 et x= -3	x = -1 et x= 3	x = 1 et x= 3
3	La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $e^{x} - 2x$	$+\infty$	$-\infty$	0

4	La dérivée de la fonction f définie pour tout réel x, par : $f(x) = xe^{-2x}$ est :	$f'(x) = 2xe^{-2x}$	$f'(x) = (2x-1)\,e^{-2x}$	$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

Solution

1. B ; 2. C ; 3. A ; 4.C

Exercice 7

Simplifie les expressions suivantes :

a) $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$; b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Solution

a) $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2 = e^{4x} \times e^{-2x} = e^{4x-2x} = e^{2x}$

b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})$
$= (2e^{-x})(2e^x) = 4e^{-x}e^x = 4$

Exercice 8

Etudie le signe de chacune des expressions suivantes :
B $= e^{2x} + e^x - 2$; C$= e^x - 2e^{-x} + 1$

Solution

- **Signe de** B.

$B = e^{2x} + e^x - 2$

Posons $e^x = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 + X - 2$
$\Delta = 1 + 8 = 9$
$X = -2$ ou $X = 1$
Etudions le signe de $X^2 + X - 2$

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$X^2 + X - 2$		+	0	-	0	+	

$X^2 + X - 2 \geq 0 \Leftrightarrow X \epsilon]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$
On a : $e^x \epsilon]-\infty; -2]$ ou : $e^x \epsilon [1; +\infty[$
$e^x \leq -2$ est impossible ou $e^x \geq 1$ équivaut à $x \geq \ln 1$
Pour $x \in [0; +\infty[$, $e^{2x} + e^x - 2 > 0$
Pour $\in]-\infty; 0]$, $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

- **Signe de C**

C$= e^x - 2e^{-x} + 1 = \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x}$

Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de C est le même que celui de B

(Terminale A1 uniquement)

Exercice 9

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+2}$; b) $f(x) = \frac{xe^x}{x+1}$.

Solution

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 1$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{e^x} = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2} = \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = 2 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$;

b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

c) $f(x) = (2x-3)e^{-x^2+3x+1}$

Solution

a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 5x$; b) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$; c) $F(x) = -e^{-x^2+3x+1}$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 11

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$
   b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.
4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
   b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5. a) On admet que f est dérivable sur$\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
   c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$
   d) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.
6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $[-3\,;2]$

Solution

1. l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - x + e^x)$
$= +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x = +\infty$
3. a) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = 1 - x + e^x = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x + e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$
   car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

4.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On a : $f(x) - (-x + 1) = e^x$ donc le signe de $f(x) - (-x + 1)$ est celui de e^x, or pour tout réel x, $e^x > 0$ par suite (C) est « au-dessus » de (Δ) sur$\mathbb{R}$.

5.a) pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -1 + e^x$

b) $f'(x) = 0$ équivaut à $-1 + e^x = 0$
équivaut à $e^x = 1$
équivaut à $x = 0$

c) $f'(x) > 0$ équivaut à $-1 + e^x > 0$
équivaut à $e^x > 1$
équivaut à $x > 0$

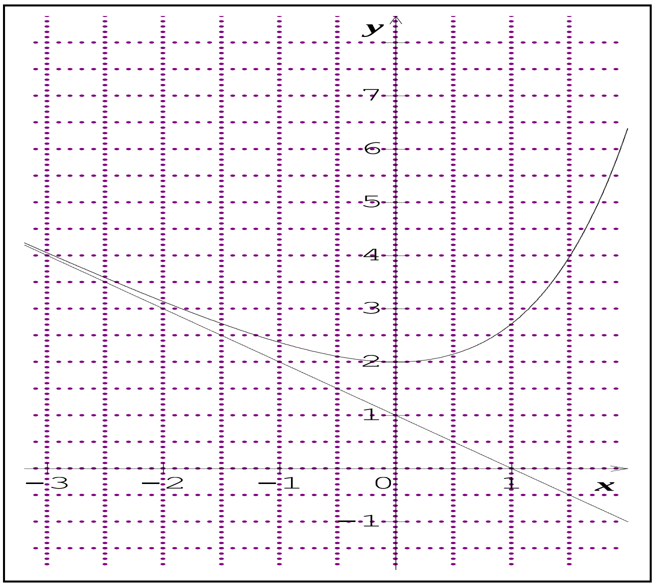
d) Pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur$]0;\ +\infty[$.
Pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur$]-\infty; 0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

6. on a

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4,05	3,39	2,39	2	2,78	6,59

7. Construction de (C) et (Δ) sur $[-3\,;2]$



Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = (-2x+3)e^x$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).
1. Justifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.
2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$
b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty\,;2]$.
Déduis-en les variations de f sur $]-\infty\,;2]$.
c) Dresse le tableau de variation de f.
3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
Détermine les coordonnées respectives des points A et B.
4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4		1,8		3,3			$-7,4$

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

Solution

1 Justifions que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
On a $(-2x+3)e^x = -2x\,e^x + 3e^x$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0$
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Interprétation graphique :

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à(C) en $-\infty$

2. a) Vérifions que pour tout élément x de$]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$

Pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$ f est dérivable.

$$f'(x) = -2e^x + (-2x+3)e^x$$
$$= (-2x+3-2)e^x$$
$$f'(x) = (-2x+1)e^x$$

b) Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$ sur$]-\infty\,;2]$.

Le signe de la dérivée est celui de$(-2x+1)$.

- $(-2x+1) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$
- $(-2x+1) \geq 0$ équivaut à $x \leq \frac{1}{2}$ soit $x \in\ ]-\infty;\frac{1}{2}]$
- $(-2x+1) < 0$ équivaut à $x > \frac{1}{2}$ soit $x \in\ ]\frac{1}{2};+\infty[$

Variation de f sur $]-\infty\,;2]$

Pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

Pout tout $x \in\ ]\frac{1}{2};+\infty[$, $f'(x) < 0$ f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

c) le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		+	0	+	
f(x)	0	↗	3,3	↘	

3. Déterminons les coordonnées respectives des points A et B.

- Posons :A $(x_A; y_A)$

A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses équivaut à y_A=0

Soit $(-2x_A+3)e^{x_A}$ =0

C'est-à-dire $(-2x_A+3) = 0$

$$x_A = \frac{3}{2}$$

Donc A $(\frac{3}{2}; 0)$

- Posons : B $(x_B; y_B)$

B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées équivaut à x_B=0

Soit $(-2\times 0+3)e^0 = y_B$

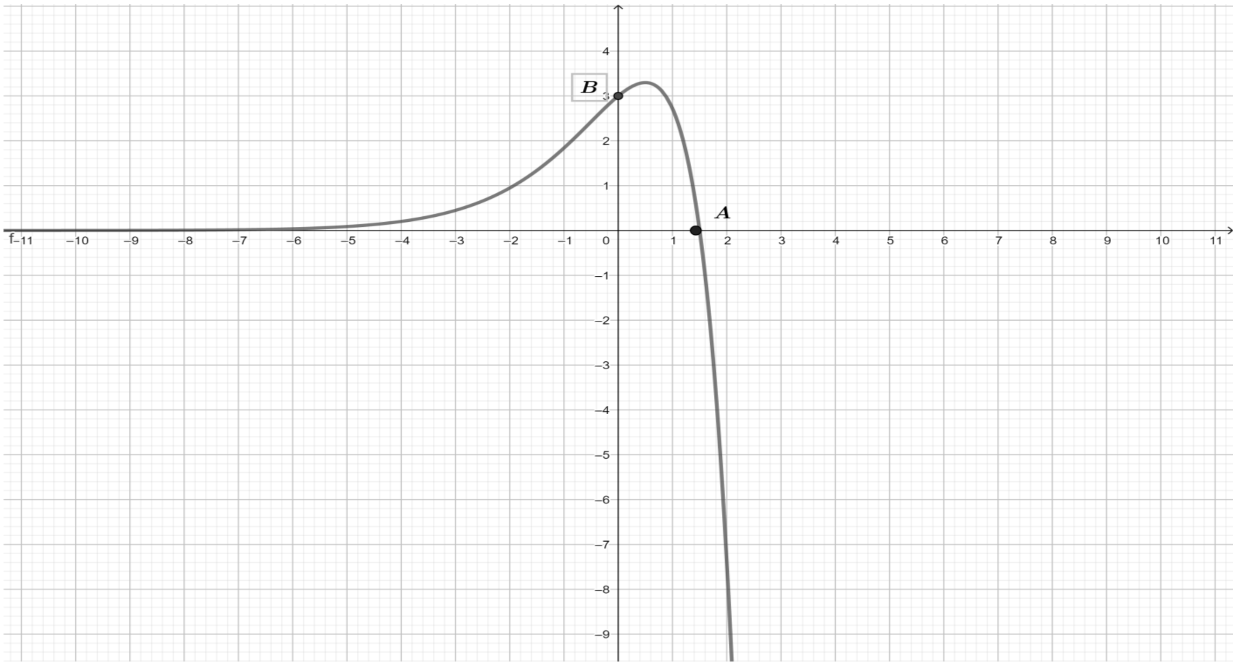
C'est-à-dire $y_B = 3$

Donc B $(0; 3)$

4. Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	0,2	0,4	0.9	1,8	3	3,3	2,7	0	$-7,4$

Construction


B
A
f

Thème : ORGANISATION DES DONNEES

Leçon 6 : STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Durée : 18 heures **Code :**

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des recherches pour un exposé, des élèves d'une classe de Terminale ont été accrochés par les informations suivantes :
La prévision météorologique est une science en pleine évolution. Elle a pour objectif de prédire un ensemble de paramètres comme la pluviométrie, la pression atmosphérique, la température, etc.
Le tableau suivant donne les pluviométries et températures moyennes de septembre 2018 à août 2019 dans une ville.

	Sept 2018	Oct. 2018	Nov. 2018	Déc 2018	Jan 2019	Fév. 2019	Mar 2019	Avr. 2019	Mai 2019	Juin 2019	Juillet 2019	Août 2019
Pluviométrie (en mm)	13	23	49	49	50	64	79	48	40	10	5	6
Température (en °C)	23	17	14	10	10	11	13	15	17	23	27	28

Dans l'affiche la température moyenne d'octobre 2019 était de 32 °C. Les élèves veulent connaitre la pluviométrie du mois d'octobre 2019. Un des élèves affirme que la pluviométrie n'est pas liée à la température et qu'on ne peut savoir la pluviométrie d'octobre. Ce que réfute certains. Toute la classe ayant été saisi, décide de chercher à savoir si la pluviométrie est liée à la température et si c'est le cas, de prévoir la pluviométrie d'octobre 2019.

B. CONTENU DE LA LECON

I. Présentation de la série statistique double

1. Définition
On considère deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population de *n* individus.
On note : x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_p les valeurs(ou les modalités) du caractère X ; y_1, y_2 , y_3 ,…, y_q les valeurs du caractère Y et n_{ij} l'effectif du couple (x_i ,y_j).
On appelle série statistique double de caractère (X, Y), l'ensemble des triplets (x_i , y_j ,n_{ij}).

Exemple
Une étude statistique porte sur une population de 100 ménages. Deux caractères X et Y sont étudiés :
- le caractère X est le nombre d'enfants,
- le caractère Y est le nombre de pièces de l'appartement occupé.

On obtient le tableau suivant qui représente la série statistique de caractère (X, Y).

Y \ X	1	2	3	4
0	6	3	1	0
1	4	11	3	1
2	1	10	16	3
3	0	5	13	5
4	0	1	4	8
5	0	0	1	4

Sur la 1ère ligne, sont inscrites les valeurs du caractère Y ; soit $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = 3$; $y_4 = 4$.
La 1ère colonne affiche les valeurs du caractère X qui sont : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$.
Les nombres du tableau qui ne sont pas sur la 1ère ligne et la 1ère colonne, représentent les différents effectifs n_{ij} des couples (x_i, y_j).
Ainsi considérons le nombre 6 dans ce tableau. On constate qu'il est dans la colonne de la valeur 1 du caractère Y et dans la ligne de la valeur 0 du caractère X. On dit alors qu'il y a 6 ménages qui n'ont aucun enfant et qui occupent un appartement d'une pièce.
On dit que l'effectif du couple (0 ; 1) est 6.

Combien de ménages ont deux enfants et occupent un appartement de trois pièces ?
On va donc considérer la ligne ayant la valeur 2 du caractère X et la colonne ayant la valeur 3 du caractère Y. L'intersection de cette ligne et de cette colonne donne 16.
16 ménages ont donc deux enfants et occupent un appartement de trois pièces.
On dit que l'effectif du couple (2 ; 3) est 16.
Exercez-vous à la maison avec le reste des n_{ij}.
Le tableau ci-dessus est un tableau à double entrée appelé tableau de contingence.

2. Tableau de séries marginales (*Série A1 seulement*)

Reprenons l'exemple précédent.
Il est question de trouver l'effectif de chaque modalité du caractère X et l'effectif de chaque modalité du caractère Y.

Y \ X	1	2	3	4	Total
0	6	3	1	0	10
1	4	11	3	1	19
2	1	10	16	3	30
3	0	5	13	5	23
4	0	1	4	8	13
5	0	0	1	4	5
Total	11	30	38	21	100

Considérons le caractère X.
Pour trouver l'effectif de la valeur 0, on additionne tous les n_{ij} qui se trouvent sur la ligne de la valeur 0 du caractère X c'est-à-dire : 6 + 3 + 1+ 0 = 10.

Quel est l'effectif de la valeur 3 du caractère X ?

Pour trouver l'effectif de la valeur 3 du caractère X, on additionne tous les n_{ij} qui se trouvent sur la ligne de la valeur 3 du caractère X c'est-à-dire : 0 + 5 + 13 + 5 = 23.

On procède de la même manière pour trouver l'effectif des autres modalités du caractère X. Ainsi à chaque valeur du caractère X, on a son effectif dans la dernière colonne.
D'où le tableau linéaire associé à X :

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	10	19	30	23	13	5

La série ainsi obtenue est appelée série marginale du caractère X.

En faisant de même avec les colonnes, on obtient :
L'effectif de la modalité 1 du caractère Y en additionnant les n_{ij} de la colonne où se trouve cette modalité. Soit 6 + 4 + 1 + 0 + 0 + 0 = 11.
On obtient ainsi l'effectif de chaque modalité du caractère Y dans la dernière ligne du tableau.

D'où le tableau linéaire associé à Y :

y_i	1	2	3	4
n_i	11	30	38	21

La série ainsi obtenue est appelée série marginale du caractère Y.

• Dressons le tableau des fréquences marginales du caractère X.
On rappelle que la fréquence est l'effectif de la modalité sur l'effectif total.
On obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	$\frac{10}{100}$	$\frac{19}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{5}{100}$

De la même manière, définis le tableau des fréquences marginales du caractère Y.

y_i	1	2	3	4
f_i	$\frac{11}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{21}{100}$

3. Nuage de points

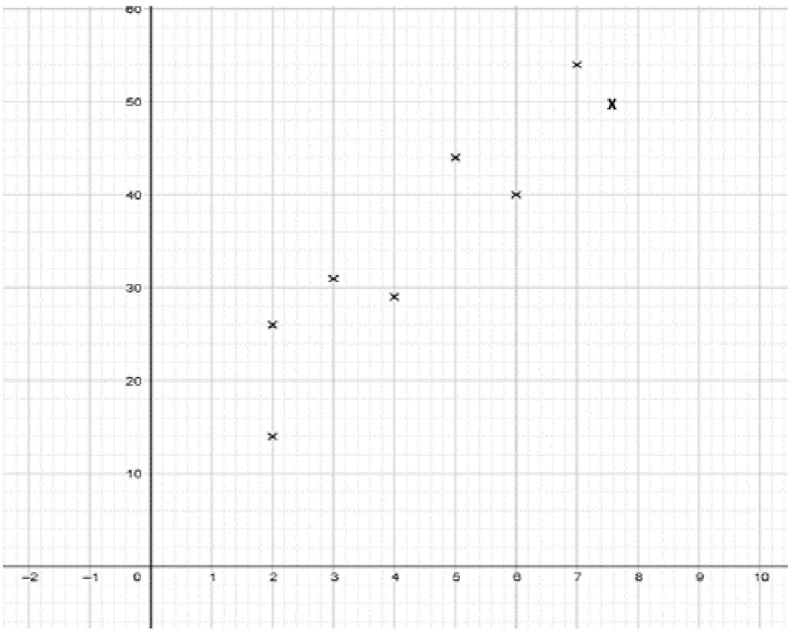
<u>Définition</u>
On considère deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population de *n* individus.
On note x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_p les valeurs du caractère X,
y_1 , y_2 , y_3 ,…, y_q les valeurs du caractère Y,
On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X, Y), la représentation dans un repère orthogonal des points de couple de coordonnées $(x_i; y_j)$ d'effectifs non nuls.

Exercice de fixation
Le tableau suivant donne le nombre d'exploitations agricoles d'une région selon leur superficie en hectares.

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Représente le nuage de points associé à cette série.

Solution



Remarque

Dans la suite, les séries doubles considérées seront comme la série de l'exemple précédent ; c'est-à-dire l'effectif n_i de chaque couple $(x_i\ ,y_i)$ vaut 1.

4. Point moyen

Définition

On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ le point G de coordonnées $(x_G; y_G)$ telles que :

$x_G = \overline{X} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; $y_G = \overline{Y} = \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$.

Exercice de fixation

Détermine les coordonnées du point moyen du nuage de points de la série statistique suivante :

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution

C'est le point de coordonnées $(\overline{X}\ ;\overline{Y})$.

On a : $\overline{X} = \frac{2+2+3+4+5+6+7+7{,}6}{8} = \frac{36{,}6}{8} = 4{,}575$

et $\overline{Y} = \frac{14+26+31+29+44+40+54+50}{8} = \frac{288}{8} = 36.$

Donc G(4,575 ; 36).

Exercice de maison

On considère la série statistique double suivante :

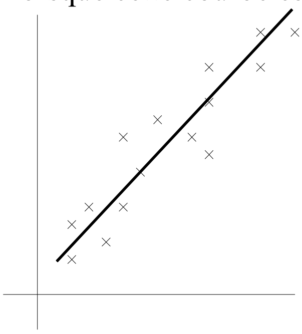
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	160	110	100	72	36	29	20	10	3

1) Représente le nuage de points de cette série statistique.
2) Détermine les coordonnées du point moyen de cette série statistique.

II. Ajustement

1. Présentation

Soit un nuage de points associé à une série statistique double représenté dans un repère orthogonal.
Faire un ajustement de ce nuage de points, c'est trouver une courbe qui passe le plus près « possible » du maximum de points de ce nuage.
Lorsque cette courbe est une droite, on dit que l'ajustement est affine ou linéaire.



Exemple d'ajustement par une droite.

2. Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

a. Droite d'ajustement

Pour déterminer la droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points, on peut procéder comme suit :

- On range la série statistique double (X; Y) suivant les valeurs croissantes des x_i.
- Si le nombre n de points du nuage de points est pair, on partage la série statistique en deux séries statistiques de même effectif :

$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \cdots, (x_p; y_p)$ et $(x_{p+1}; y_{p+1}), (x_{P+2}; y_{P+2}), \cdots, (x_n; y_n)$, tel que p= $\frac{n}{2}$.

- Si le nombre n de points du nuage de points est impair, alors on partage le nuage de points en deux sous-nuages d'effectif $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+1}{2} - 1$.
- On détermine le point moyen G_1 du premier sous-nuage et le point moyen G_2 du deuxième sous-nuage.
- La droite (G_1G_2) est la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.

Remarque :

- La droite (G_1G_2) passe par le point moyen G du nuage de points.

Exercice de fixation

Partage la série statistique ci-dessous en deux séries et détermine le point moyen de chacune d'elles.

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution

Les valeurs du caractère X sont rangées dans l'ordre croissant.
L'effectif total de la série est 8.
On va partager la série en deux séries d'effectif 4 chacune.

Série 1

X	2	2	3	4
Y	14	26	31	29

Point moyen G_1
G_1 ($\overline{X_1}$;$\overline{Y_1}$) avec $\overline{X_1} = \frac{2+2+3+4}{4} = 2{,}75$ et $\overline{Y_1} = \frac{14+26+31+29}{4} = 25$
Donc : $G_1(2{,}75 ; 25)$

Série 2

x_i	5	6	7	7,6
y_i	44	40	54	50

Point moyen G_2
G_2 ($\overline{X_2}$;$\overline{Y_2}$), avec $\overline{X_2} = \frac{5+6+7+7{,}6}{4} = 6{,}4$ et $\overline{Y_2} = \frac{44+40+54+50}{4} = 47$.
Donc : $G_2(6{,}4 ; 47)$

b. Equation

Soit $G_1(\overline{X}_1; \overline{Y}_1)$ et $G_2(\overline{X}_2; \overline{Y}_2)$ les points moyens des sous-nuages.
On détermine une équation de la droite (G_1G_2) à l'aide d'un vecteur directeur ou du coefficient directeur.

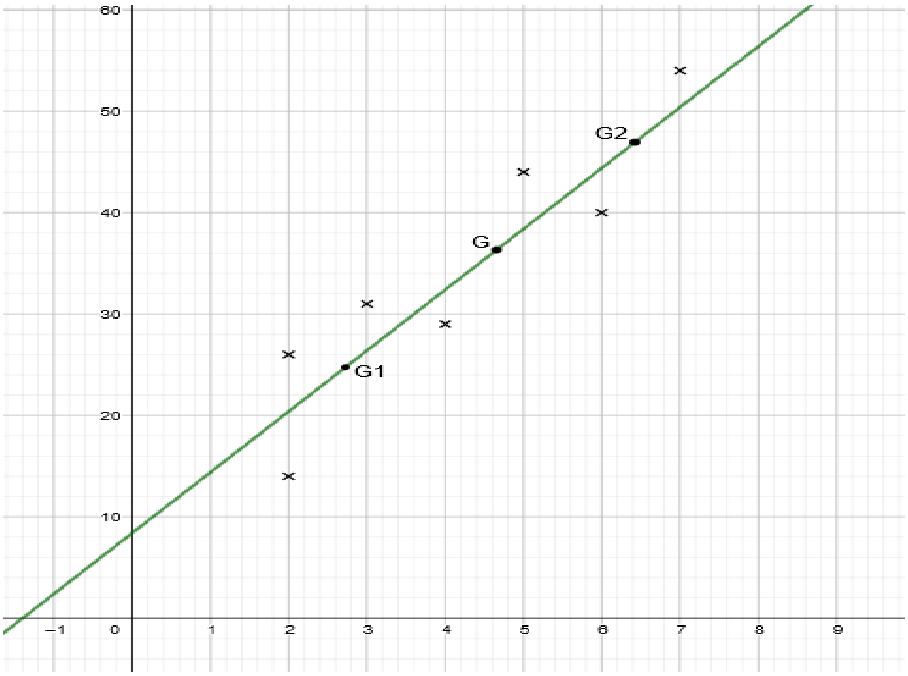
Exercice de fixation

On considère la série statistique précédente.

Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire du nuage de points par la méthode de Mayer.
Trace cette droite.

Solution

C'est la droite (G_1G_2) avec $G_1(2{,}75 ; 25)$ et $G_2(6{,}4 ; 47)$.
Elle a pour équation $y = ax + b$;
avec $a = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y}_1}{\overline{X_2} - \overline{X}_1}$ ou $a = \frac{\overline{Y_1} - \overline{Y}_2}{\overline{X_1} - \overline{X}_2}$ et $b = \overline{Y}_1 - a \times \overline{X}_1$ ou $b = \overline{Y}_2 - a \times \overline{X}_2$.
D'où $a = \frac{47-25}{6{,}4-2{,}75} = \frac{440}{73}$ et $b = 25 - \frac{440}{73} \times 2{,}75 = \frac{615}{73}$
Donc (G_1G_2) : $y = \frac{440}{73}x + \frac{615}{73}$



3. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés (*Série A1 seulement*)

a. Covariance

Définition

On appelle covariance de la série statistique double de caractère (X ; Y), le nombre réel noté Cov(X ; Y) tel que :

$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$ ou $\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}$.

Exercice de fixation

Calcule la covariance de la série statistique suivante sachant que G(4,575 ; 36).

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution

La covariance de cette série statistique est telle que: $\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}$.

On a:

$\text{Cov}(X, Y) = \frac{2\times14+2\times26+3\times31+4\times29+5\times44+6\times40+7\times54+7{,}6\times50}{8} - 4{,}575 \times 36$

$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1503}{8} - 164{,}7$.

Donc : $\text{Cov}(X, Y) = 23{,}675$

b. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X ; Y) la covariance de la série statistique (X ; Y).

On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X ; Y), le nombre réel noté r tel que : $r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Rappel : $\mathrm{V(X)} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{\mathrm{X}})^2$ et $\mathrm{V(Y)} = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\overline{\mathrm{Y}})^2$.

Exercice de fixation
Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique suivante.

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution
Le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique est tel que: $r = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}\sqrt{\mathrm{V(Y)}}}$

On a:

- $\mathrm{V(X)} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{\mathrm{X}})^2 = \frac{2^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+(7{,}6)^2}{8} - 4{,}575^2$
  $\mathrm{V(X)} = \frac{200{,}76}{8} - 4{,}575^2 \approx 4{,}16$

- $\mathrm{V(Y)} = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\overline{\mathrm{Y}})^2 = \frac{14^2+26^2+31^2+29^2+44^2+40^2+54^2+50^2}{8} - 36^2$
  $\mathrm{V(Y)} = \frac{11626}{8} - 36^2 = 157{,}25$

Donc : $r = \frac{23{,}675}{\sqrt{4{,}16 \times 157{,}25}} \approx 0{,}92$

Remarques

- Le coefficient de corrélation linéaire permet de voir la dépendance linéaire des deux caractères X et Y.
- Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que COV(X, Y) et on a : $-1 \leq r \leq 1$.
- Si $|r|$ est proche de 1, c'est-à-dire en pratique : $0{,}87 \leq r \leq 1$ ou $-1 \leq r \leq -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

Exercice de fixation
Interprète le coefficient de corrélation linéaire de l'exercice de fixation précèdent.

Solution
On sait que : $r = 0{,}92$.
Comme $0{,}87 \leq r \leq 1$, il y a une forte corrélation entre la superficie et le nombre d'exploitations agricoles de cette région.

c. Droites de régressions

Propriété
Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X, Y) la covariance de X et Y.
On suppose qu'il y a une forte corrélation entre les caractères X et Y .

i. Droite de régression de Y en X.
La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ est appelée la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

ii. Droite de régression de X en Y.

La droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(Y)}}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$ est appelée la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.

Exercice de fixation

On considère la série statistique suivante :

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

On sait que: $\text{Cov}(X,Y) = 23{,}675$,V(X)=4,6 ; V(Y)= 157,25 et 0,87$\leq r \leq 1$.

1. Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés ; (On donnera les arrondis d'ordre 2 de a et b.).

2.Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y par la méthode des moindres carrés. (On donnera les arrondis d'ordre 2 de a'et b')

Solution

Comme 0,87$\leq r \leq 1$, il y'a une bonne relation entre X et Y.

1.Déterminons la droite d'ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés.

C'est la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(X)}}$ et $b = \overline{\text{Y}} - a\overline{\text{X}}$

$a = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(X)}} = \frac{23{,}675}{4{,}16} = 5{,}69$ et $b = \overline{\text{Y}} - a\overline{\text{X}}$ = 36 – 5,69 ×4,575 = 9,97

Donc (D) : $y = 5{,}69x + 9{,}97$

2. Déterminons la droite d'ajustement linéaire de X en Y par la méthode des moindres carrés.

C'est la droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(Y)}}$ et $b' = \overline{\text{X}} - a\overline{\text{Y}}$

$a' = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(Y)}} = \frac{23{,}675}{157{,}25} = 0{,}15$ et $b' = \overline{\text{X}} - a\overline{\text{Y}}$ = 4,575 – 0,15×36 = –0,825

Donc : (D') : $x = 0{,}15y - 0{,}83$

Remarques

- Les droites (D) et (D') passent par le point moyen G du nuage de points.
- Si r est le coefficient de corrélation linéaire on a :

- $aa' = r^2$ et $|r| = \sqrt{aa'}$
- Si a > 0 et a' > 0, alors $r = \sqrt{aa'}$.
- Si a < 0 et a' < 0, alors $r = -\sqrt{aa'}$.
- Si $r^2 = 1$, alors $a = \frac{1}{a'}$ et les deux droites sont confondues.

III. Estimation

• La droite d'ajustement tracée du nuage de points permet graphiquement une estimation de y connaissant x (resp. x connaissant y).

• L'équation de la droite d'ajustement permet de calculer une estimation de y connaissant x (resp. x connaissant y).

Exercice de fixation

On considère la série statistique suivante :

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Soit (D) : $y = 5{,}69x + 9{,}97$, la droite de régression de y en x.

En considérant que la tendance se poursuit ainsi, détermine le nombre d'exploitations agricoles pour une superficie de 9 h

Solution

Par la méthode de Mayer

Une superficie de 9 ha correspond à $x = 9$.

En utilisant l'équation de la droite de Mayer, on a : $y = 6 \times 9 + 8{,}4 = 62{,}4$.

Donc pour une superficie de 9 ha, le nombre d'exploitations est estimé à 63.

Par la méthode des moindres carrés

Série A1 seulement: Avec l'équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, on a : $y = 5{,}69x + 9{,}97$,

$y = 5{,}69 \times 9 + 9{,}97 = 61{,}8$

Donc pour une superficie de 9 ha, le nombre d'exploitations agricoles est estimé à 62.

C. SITUATION COMPLEXE

Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club littéraire d'un lycée au cours de l'année civile 2020.

Mois	Janv	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

Une Organisation Non Gouvernementale promet d'octroyer une aide financière considérable au club si le nombre d'adhérents dépasse les 3000 élèves. L'élève de la Terminale A qui dirige le club désire connaître la date à laquelle ce don pourra se faire. Il te sollicite pour l'aider.

Détermine la date (mois et année) probable de la réception de ce don.

Solution.

- **Pour trouver la date, nous allons utiliser les statistiques à deux variables,**
- **Je détermine la droite de régression linéaire,**
- **J'estime la date.**

Résolution pour les classes de TA2

- Partageons la série en deux sous séries

S_1

Mois	Janv	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550

S_2

Mois	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Rang x_i	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1600	1500	1790	1940	2060	1980

- **Je calcule la moyenne de chaque sous série**

Pour la série S_1
$\overline{x}_1 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$; $\overline{y}_1 = \frac{1100+1160+1220+1370+1620+1550}{6} = 1338{,}33$
Donc $G_1(3{,}5; 1338{,}33)$
Pour la série S_2
$\overline{x}_2 = \frac{7+8+9+10+11+12}{6} = 9{,}5$; $\overline{y}_2 = \frac{1600+1500+1790+1740+2060+1980}{6} = 1778{,}33$
Donc $G_2(9{,}5; 1778{,}33)$

- **Je détermine une équation de la droite de régression par la méthode de Mayer**

  Elle a pour équation $y = ax + b$;

$$a = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y}_1}{\overline{X_2} - \overline{X}_1} = \frac{1778{,}33 - 1338{,}33}{9{,}5 - 3{,}5} = \frac{440}{6} = 73{,}33$$
$$b = \overline{Y}_2 - a \times \overline{X}_2 = 1778{,}33 - 73{,}33 \times 9{,}5 = 1081{,}66$$

Donc $y = 73{,}33x + 1081{,}66$

- Je déduis le rang du mois pour $y = 3000$

$y = 3000$ équivaut à $x = \frac{3000-1081{,}66}{73{,}33} = 26{,}16$
Le rang cherché est sensiblement égal à 27.

- Je donne la date (mois et année) probable de la réception de ce don.

La date probable de la réception de ce don est mars 2022.

Résolution pour les classes de TA1

- **Je détermine une équation de la droite de régression de Y en X.**

Soit (D) cette droite.
Une équation de (D) est sous la forme: $y = ax + b$ *avec* $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

- Les coordonnées du point moyen G
On a:
$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{78}{12} = 6{,}5$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{18890}{12} = 1574{,}167$$

- La variance de X
$$V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{X}}^2$$
$$V(X) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2}{12} - 6{,}5^2$$
$$\mathrm{V(X)} = \frac{650}{12} - (6.5)^2 = 11{,}917$$

- La variance de Y

$$V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{n} - \overline{Y}^2$$

$$V(Y) = \frac{1100^2 + 1160^2 + 1220^2 + 1370^2 + 1620 + 1550^2 + 1600^2 + 1500^2 + 1790^2 + 1940^2 + 2060^2 + 1980^2}{12} - (1574{,}167)^2$$

$$V(Y) = \frac{30889500}{12} - (1574{,}167)^2 = 96123{,}256$$

- La covariance de X et Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1100 + 2320 + 3660 + 5480 + 8100 + 9300 + 11200 + 12000 + 16110 + 19400 + 22660 + 23760}{12} - 6{,}5 \times 1574{,}167$$

$$\mathrm{COV}(X, Y) = \frac{135090}{12} - 6{,}5 \times 1574{,}167 = 1025{,}4145$$

- Une équation de la droite (D): $y = ax + b$

$$a = \frac{1025{,}4145}{11{,}917} = 86{,}046$$

$$b = 1574{,}167 - 86{,}046 \times 6{,}5 = 1014{,}868$$

D'où (D): $\boldsymbol{y} = 86{,}046x + 1014{,}868$

- Je déduis le rang du mois pour $y = 3000$

$y = 3000$ équivaut à $x = \frac{3000-1014{,}868}{86{,}046} = 23{,}071$

Le rang cherché est sensiblement égal à 24.

- Donne la date (mois et année) probable de la réception de ce don.

La date probable de la réception de ce don est Décembre 2021.

D. EXERCICES

1. Exercices de renforcement

Exercice 1

Dans le tableau ci-dessous, on donne la taille moyenne (en cm) des nouveau-nés en fonction du nombre de l'âge gestationnel (en semaines).

Âge gestationnel (semaines)	30	31	32	33	34	35	36	37
Taille (cm)	47,5	48,5	49	49,7	50	50,5	50,8	51,2

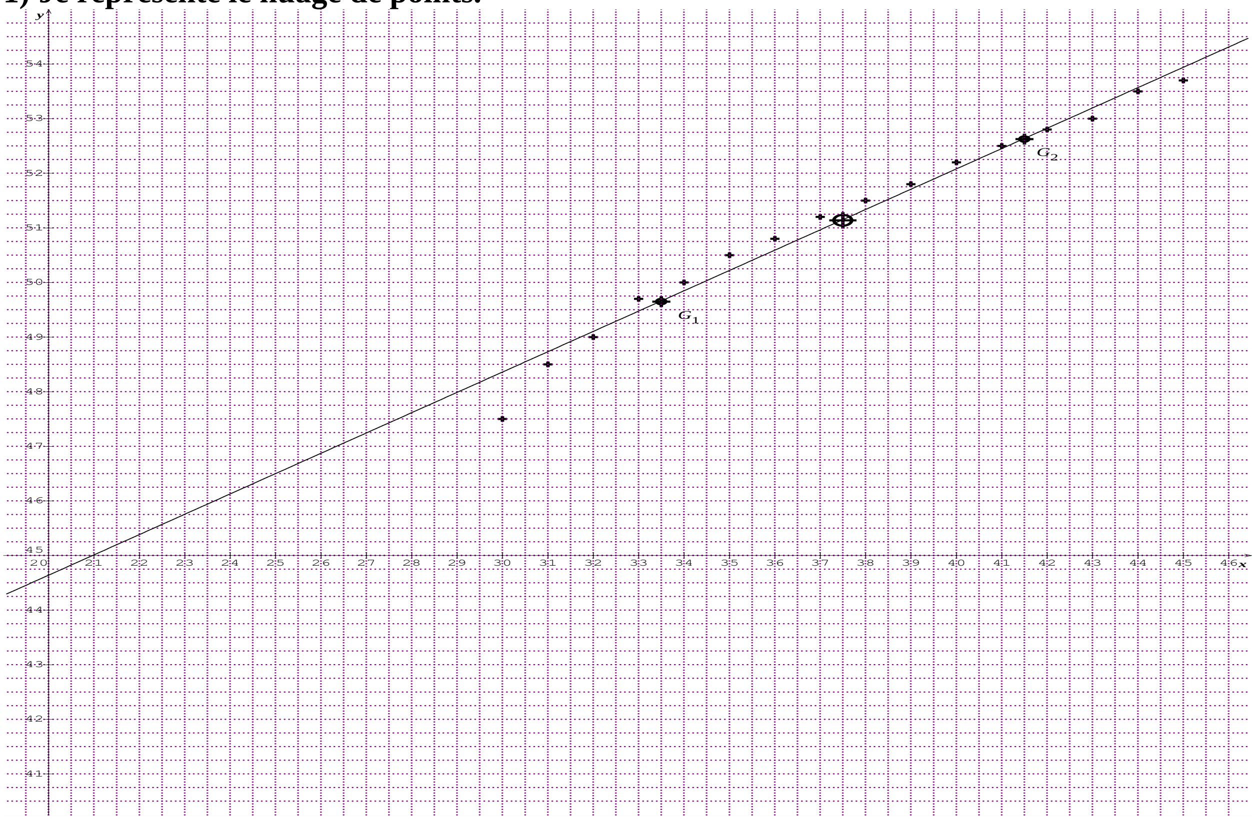
Âge gestationnel (semaines)	38	39	40	41	42	43	44	45
Taille (cm)	51,5	51,8	52,2	52,5	52,8	53	53,5	53,7

1) Représente le nuage de points dans un repère orthogonal en prenant comme unités :
En abscisses : 1 cm pour 1 semaine (commencer la graduation à 20 semaines).

En ordonnées : 2 cm par unité (commencer la graduation à 45 cm).
2) On se propose de tracer la droite d'ajustement de ce nuage de points.
a) Calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 ;
b) Trace la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2.
3) Détermine une équation de cette droite d'ajustement.

SOLUTION

1) Je représente le nuage de points.



2.a) Je calcule les coordonnés des points moyens G_1 et G_2

On a:

$\overline{X_1} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{30+31+32+33+34+35+36+37}{8} = 33{,}5$

$\overline{Y_1} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{47{,}5 + 48{,}5 + 49 + 49{,}7 + 50 + 50{,}5 + 50{,}8 + 51{,}2}{8} = 49{,}65$

$\overline{X_2} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45}{8} = 41{,}5$

$\overline{Y_2} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{51{,}5 + 51{,}8 + 52{,}2 + 52{,}5 + 52{,}8 + 53 + 53{,}5 + 53{,}7}{8} = 52{,}625$

Donc: $\boldsymbol{G_1}(\mathbf{33{,}5};\ \mathbf{49{,}65})$ et $\boldsymbol{G_2}(\mathbf{41{,}5};\ \mathbf{52{,}625})$

b) Tracé de la droite (G_1G_2): *(Voire nuage de points).*

***3)* Je détermine une équation de la droite (G_1G_2).**

Une équation la droite (G_1G_2) est sous la forme: $y = ax + b$ avec $a = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}}$ et $b = \overline{Y_1} - a\overline{X_1}$

$a = \frac{52{,}625 - 49{,}65}{41{,}5 - 33{,}5} = 0.372$ et $b = 49{,}65 - 0.372 \times 33{,}5 = 37{,}188.$

D'où **(G_1G_2):** $\boldsymbol{y = 0.372x + 37{,}188}$

Exercice 2

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires X (en millions de francs) réalisé au cours des 6 derniers mois par un site de vente en ligne en fonction du nombre de commandes Y reçues.

Nombre de commandes (x_i)	6 400	8 350	9 125	9 600	10 050	12 000
Chiffre d'affaires mensuel (y_i)	250	320	335	350	370	400

<u>Partie A</u>

1) Représente le nuage de points associé à cette série statistique (X, Y).
2) Détermine les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3) a) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire du nuage de points par la méthode de Mayer.
   b) Trace cette droite.
4) En considérant que la tendance se poursuit ainsi, détermine le chiffre d'affaires pour 15 000 commandes reçues.

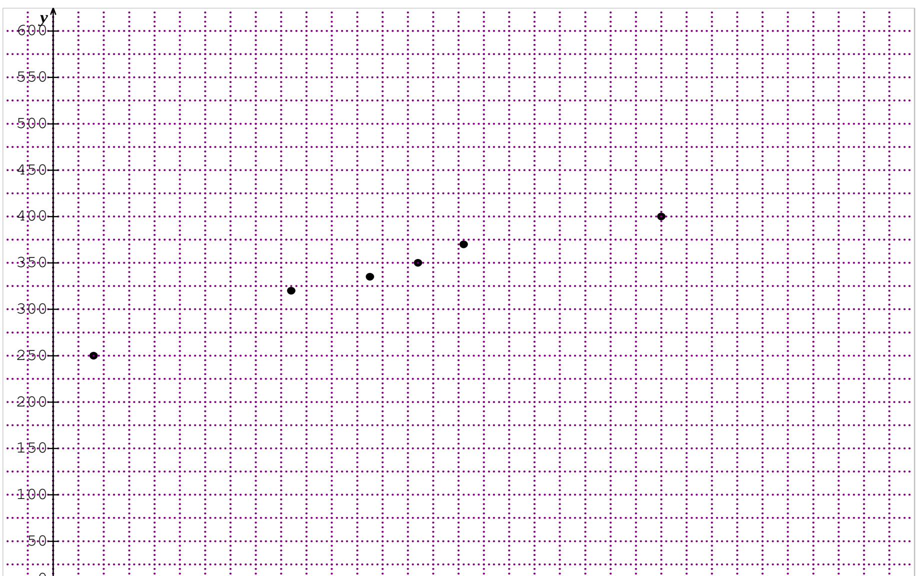
<u>Partie B</u> (Série A1 seulement)

1) Calcule la covariance de la série statistique (X, Y).
2) Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y).
3) Interprète le coefficient de corrélation linéaire.
4) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X du nuage de points par la méthode des moindres carrés.
5) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y du nuage de points par la méthode des moindres carrés.
6) En considérant que la tendance se poursuit ainsi, détermine le chiffre d'affaires pour 15 000 commandes reçues.

SOLUTION
<u>Partie A</u>

1) Je représente le nuage de points associé à la série

Nombre de commandes (x_i)	6 400	8 350	9 125	9 600	10 050	12 000
Chiffre d'affaires mensuel (y_i)	250	320	335	350	370	400



2) **Je détermine les coordonnées du point moyen**.

Soit G($\bar{X}$; $\bar{Y}$) le point moyen . On a :

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6400 + 8350 + 9125 + 9600 + 10050 + 12000}{6} = 9254{,}17$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{250 + 320 + 335 + 350 + 370 + 400}{6} = 337{,}5$$

Donc : G(9254,17 ; 337,5)

3.a) Je détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire du nuage de points par la méthode de Mayer

Série 1

x_i	6400	8350	9125
y_i	250	320	335

S

Soit $G_1(\bar{X}_1; \bar{Y}_1)$ le point moyen de la série 1. On a :

$$\bar{X}_1 = \frac{6400 + 8350 + 9125}{3} = 7958{,}33$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{250 + 320 + 335}{3} = 301{,}66$$

Ainsi : G_1 (7958,33 ; 301,66).

Série 2

x_i	9600	10050	12000
y_i	350	370	400

Soit $G_2(\bar{X}_2; \bar{Y}_2)$ le point moyen de la série 2. On a :

$$\bar{X}_2 = \frac{9600 + 10050 + 12000}{3} = 10550$$

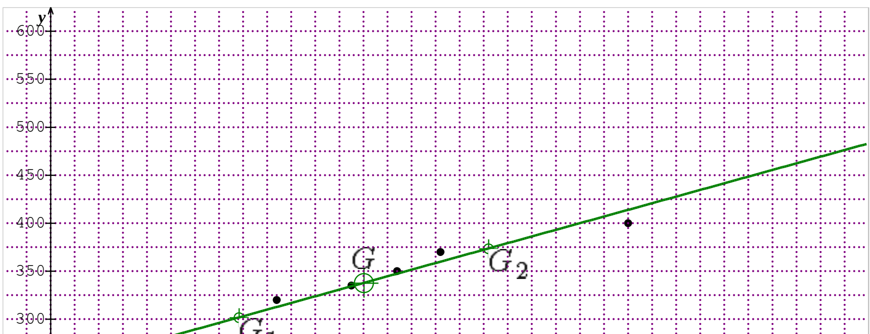
$$\bar{Y}_2 = \frac{350 + 370 + 400}{3} = 373{,}33$$

Ainsi : $G_2(10550 ; 373{,}33)$

(G_1G_2): $y = ax+b$ avec a = $\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{301{,}66 - 373{,}33}{7958{,}33 - 10550}$ = 0 ,028 et b = $\bar{Y}_2 - a\,\bar{X}_2 = 78$

C'est-à-dire (G_1G_2): y = 0,028x + 78

b) Tracé de la droite d'ajustement linéaire



4) Je détermine le chiffre d'affaires pour 15 000 commandes reçues.

Une commande de 15 000 correspond à x = 15 000.
L'équation de la droite de Mayer est : $y = 0{,}028x + 78$.
On remplace x par 15 000 dans cette équation, on obtient $y = 498$.
Le chiffre d'affaires est d'environ 498 000 000 francs.

<u>Partie B</u> (Série A1 seulement)

1) Je calcule la covariance de la série (X ; Y)
Pour calculer les moyennes, les variances et la covariance, on peut se servir du tableau suivant :
On a:

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j}{n} - \overline{\mathrm{X}}\,\overline{\mathrm{Y}}$$

$$COV(X,Y) = \frac{6400 \times 250 + 8350 \times 320 + 9125 \times 335 + 9600 \times 350 + 10050 \times 370 + 12000 \times 400}{6}$$

$$= \frac{19207375}{6} - 9254{,}17 \text{ x } 337{,}5 = 77\,947{,}9$$

2) Je calcule le coefficient de corrélation r

$$V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{X}}^2$$

$$V(X) = \frac{6400^2 + 8350^2 + 9125^2 + 9600^2 + 10050^2 + 1200^2}{6} - (9254{,}167)^2$$

$$= \frac{531\,110\,625}{6} - (9254{,}167)^2 = 2\,878\,824{,}824$$

Donc $V(X) = 2\,878\,824{,}824$

$$V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{Y}}^2$$

$$V(Y) = \frac{250^2 + 320^2 + 335^2 + 350^2 + 370^2 + 400^2}{6} - (337{,}5)^2$$

$$V(Y) = \frac{696\,525}{6} - (337{,}5)^2 = 2\,181{,}254$$

Donc
$V(Y) = 2\,181{,}254$

$$r = \frac{\mathrm{COV(X,\ Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}\sqrt{\mathrm{V(Y)}}} = \frac{77\,947{,}9}{\sqrt{2\ \ 878\,824{,}824} \times \sqrt{2181{,}254}} = 0{,}98$$

3) J'interprète le coefficient de corrélation linéaire r

On remarque que : 0,87$\leq r < 1$, ainsi, on peut conclure qu'il y a une forte corrélation entre le nombre de commandes reçues et le chiffre d'affaires réalisé au cours des 6 derniers mois.

4) Je détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Yen X par la méthode des moindres carrés

Puisqu'il y a une forte corrélation entre les commandes reçues et le chiffre d'affaires alors,

(D) a pour équation : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(X)}}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

$a = \frac{77947,9}{2878824,824}$ = 0,027 et b = 337,5- 0,027 x 9254, 17 = 87,63

Soit (D) : y = 0,027x + 87,63

5) **Je détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y par la méthode des moindres carrés**

La droite (D') a pour équation : $x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(Y)}}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

$a' = \frac{77947,9}{2181,254} = 35,735$ et b' = 9254,17-35,735 x 337, 5 = -2806,39

Soit (D'): x = 35,735y - 2806,39

6) Je détermine une estimation du chiffre d'affaires pour 15 000 commandes reçues

Ici, x = *15 000* et en utilisant l'équation de la droite de régression de Y en X, on a :

$y = 0,027 \times 15000 + 87,63$

$y = 492,63$

Pour 15 000 commandes reçues, le site de vente en ligne fera un chiffre d'affaires d'environ 492 630 000 francs.

2. Exercices d'approfondissement

EXERCICE 1

Un chef d'entreprise reçoit de la part de ses collaborateurs la demande d'obtenir des véhicules de fonction plus confortables et plus puissants. Il sollicite alors son comptable afin que celui-ci examine la demande et sa faisabilité.

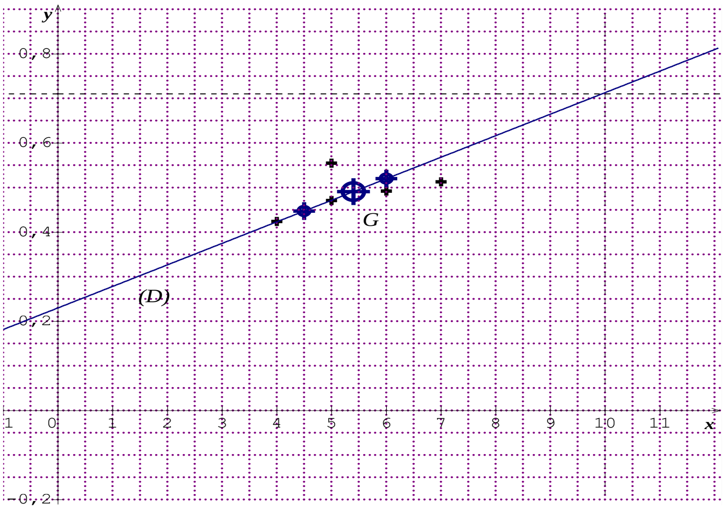
Le comptable utilise le tableau ci-dessous, donnant le prix de revient kilométrique (PRK) des véhicules d'une puissance fiscale de 4 à 8 CV et en fait une projection sur les véhicules plus puissants.

Puissance fiscale des véhicules (CV)	4	5	6	7	8
Prix de revient kilométrique (PRK)	0,424	0,471	0,492	0,513	0,555

1) Représente cette série statistique par un nuage.
2) Calcule les coordonnées du point moyen G.
3) On admet que la droite d'ajustement de cette série a pour équation : $y = 0,03x + 0,311$
 a. Justifie que le point G appartient à cette droite.
 b. Trace cette droite dans le repère précédent.
4) En utilisant la droite d'ajustement, détermine le prix de revient d'une voiture de 10 CV. (Laisser apparents les traits nécessaires à la lecture).
5). Le comptable fixe le prix de revient kilométrique maximum à 0,650 €.
Calcule la puissance maximale du véhicule qui correspond à cette exigence.

SOLUTION

1) Je représente le nuage de cette série statistique.



2) Je calcule les coordonnées du points moyen G

On a: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4+5+6+7+8}{5} = 6$

$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{0{,}424 + 0{,}471 + 0{,}492 + 0{,}513 + 0{,}555}{5} = 0{,}491$

Donc G(6; 0,491)

3.a) Je justifie que le point G appartient à la droite d'ajustement (D) de cette série.

On a: (D): $y = 0.03x + 0.311$

Pour x = 6 on a: $y = 0.03 \times 6 + 0.311 = 0.491$.

Donc le point G appartient à la droite (D).

3.b) Tracé de (D): *(Voir nuage de point)*

4) Graphiquement pour $\boldsymbol{x = 10}$, $\boldsymbol{on\ trouve\ \ y = \ 0{,}71}$

Donc le prix de revient kilométrique d'une voiture de 10 CV est 0.71 €.

5) Je calcule la puissance maximale du véhicule qui a un prix de revient kilométrique de 10 CV.

On a: (D): $y = 0.03x + 0.311$.

Pour $y = 0.650$ $on\ a$: $x = \frac{0.650-0.311}{0.03} = 11.3$

Donc la puissance maximale du véhicule qui a un prix de revient kilométrique de 0.650 € est de 11.3 CV.

EXERCICE 2 (*Série A1 seulement*)

La consommation d'une voiture, *z*, est donnée en fonction de sa vitesse, *x*, par le tableau suivant :

x (en km/h)	80	90	100	110	120
z (en litres/ 100 km)	4	5	6,5	8	10

1) Examine la proportionnalité des deux grandeurs variables : consommation et vitesse. Justifie ta réponse.

2) Complète le tableau ci-dessus, après l'avoir reproduit, par une ligne : *y* = ln *z* dont on donnera les valeurs approchées à 6 décimales (les meilleurs possibles).

3) Dans un repère d'origine 0 (x_0 = 70 ; y_0 = 1,30 en prenant comme unités 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 0, 10 en ordonnée, représente le nuage de points (*x*, *y*).

4) Détermine une équation de la droite d'ajustement des points de coordonnées *(x, y)* du nuage, par la méthode des moindres carrés. Donne cette équation sous la forme y = $Ax + B$, avec les valeurs approchées de A et B (les meilleures possibles) à 3 décimales.
5) Estime *y* pour une vitesse de 140 km/h.
Estime la consommation aux 100 km pour cette vitesse de 140 km/h, à 0,5 L près comme dans le tableau initialement donné.

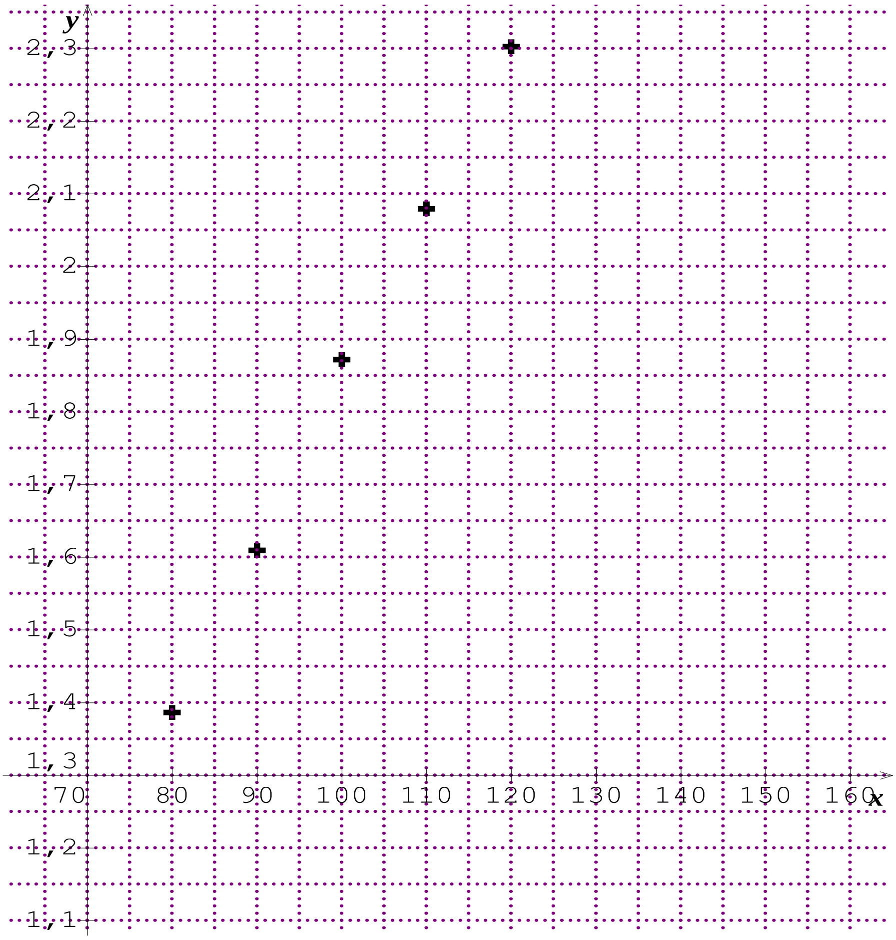
SOLUTION

1) On a: $80 \times 5 = 400 \quad alors\ que\ 90 \times 4 = 360$
Don ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

2) Je complète le tableau

x (en km/h)	80	90	100	110	120
z (en litres/ 100 km)	4	5	6,5	8	10
y = ln(z)	1,386294	1,609438	1,871802	2,079442	2,302585

3) Je représente le nuage de points



4) Je détermine une équation de la droite d'ajustement des points de coordonnées (*x, y*) du nuage de points par la méthode des moindres carrés.

- Les coordonnées du points moyen G

On a: On a: $\overline{\mathrm{X}} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{500}{5} = 100$

$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{\sum y_j}{n} = \frac{9{,}249561}{5} = 1{,}8499122$

Donc G(100; $\mathbf{1{,}8499122}$)

- La variance de X

On a: $V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{X}}^2$

$$V(X) = \frac{80^2 + 90^2 + 100^2 + 110^2 + 120^2}{5} - 100^2$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{51000}{5} - (100)^2 = 200$$

- La variance de Y

On a: $V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{Y}}^2$

$$V(Y) = \frac{80^2 + 90^2 + 100^2 + 110^2 + 120^2}{5} - (1{,}8499122)^2$$

$$= \frac{17{,}641743}{5} - (1{,}8499122)^2 = 0{,}106173$$

- La covariance de X et Y

On a: $\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j}{n} - \overline{\mathrm{X}}\,\overline{\mathrm{Y}}$

$COV(X,Y) = \frac{80\times1{,}386294+90\times1{,}609438+100\times1{,}871802+110\times2{,}079442+120\times2{,}302585}{5}$ −100 x 1,8499122

$COV(X,Y) = \frac{947{,}98196}{5}$ - 100 ×1,8499122 = 4,605172

- Le coefficient de corrélation linéaire

On a: $r = \frac{\mathrm{COV(X,Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}\sqrt{\mathrm{V(Y)}}} = \frac{4{,}605172}{\sqrt{200}\times\sqrt{0{,}106173}} = 0{,}999364$

Il y a une bonne corrélation entre X et Y.

Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est sous la forme $y = ax + b$

avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

$$a = \frac{4{,}605172}{200} = 0{,}023 \;\; et \;\; b = 1{,}8499122 - 0.023 \times 100 = -0{,}45$$

D'où $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{y = 0{,}023x - 0{,}45}$

5) Je donne une estimation de y pour une vitesse de *140 km/h*

Pour $\boldsymbol{x = 140}$ ***on a***: $\boldsymbol{y = 0.023 \times 140 - 045 = 2{,}77}$.

* J'estime la consommation aux 100 km pour cette vitesse de 140 km /h à 0,5 L.

On a: $y = ln(z)$ donc $z = e^y$.

Donc pour $\boldsymbol{y = 2{,}77}$ **on a :** $\boldsymbol{z = e^{2{,}77} = 15{,}959}$

Donc pour une vitesse de **140 km/h** la consommation aux 100 km sera d'environ **16 L**.

4. Situation complexe

Dans le cadre des recherches pour un exposé, des élèves d'une classe de Terminale ont été accrochés par les informations suivantes :
La prévision météorologique est une science en pleine évolution. Elle a pour objectif de prédire un ensemble de paramètres comme la pluviométrie, la pression, la température, etc.
Le tableau suivant donne les pluviométries et températures moyennes de septembre 2018 à août 2019 d'une ville.

	Sept 18	Oct. 18	Nov. 18	Déc 18	Jan 19	Fév. 19	Mars 19	Avril 19	Mai 19	Juin 19	Juillet 19	Août 19
Pluviométrie (en mm)	13	23	49	49	50	64	79	48	40	10	5	6
Température (en °C)	23	17	14	10	10	11	13	15	17	23	27	28

La température moyenne d'octobre 2019 était de 32 °C.
Ils décident alors de chercher à savoir si la pluviométrie est liée à la température et dans ce cas, prévoir la pluviométrie d'octobre 2019.
À l'aide des outils mathématiques au programme, justifie que la pluviométrie est liée à la température et détermine une estimation de la pluviométrie d'octobre 2019.

SOLUTION :
Pour répondre à ces questions, je vais utiliser la méthode des moindres carrés appliquée à la statistique à deux variables.

Soit:
- X la variable représentant la pluviométrie et prenant les valeurs x_i *(avec* i $\in \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ 12\}$.
- Y la variable représentant la Température et prenant les valeurs y_i *(avec* i $\in \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ 12\}$.

1) Je dresse le tableau des calculs.

	Sept. 18	Oct. 18	Nov. 18	Déc 18	Jan 19	Fév. 19	Mars 19	Avril 19	Mai 19	Juin 19	Juillet 19	Août 19	Totaux
x_i	13	23	49	49	50	64	79	48	40	10	5	6	436
y_i	23	17	14	10	10	11	13	15	17	23	27	28	208
x_iy_i	299	391	686	490	500	704	1027	720	680	230	135	168	6030
x_i^2	169	529	2401	2401	2500	4096	6241	2304	1600	100	25	36	22402
y_i^2	529	289	196	100	100	121	169	225	289	529	729	784	4060

$$\mathrm{Cov}(X, Y)$$

2) **Je calcule les coordonnées du point moyen G**.
On a: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{436}{12} \approx 36{,}333$ et $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{208}{12} \approx 17{,}333$.
Donc $G(36{,}333;\ 17{,}333)$.

3) Je calcule :

- La variance de X

On a: $V(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$

$$V(X) = \frac{13^2 + 23^2 + 49^2 + 49^2 + 50^2 + 64^2 + 79^2 + 48^2 + 40^2 + 10^2 + 5^2 + 6^2}{12} - 36.333^2$$

$V(X) = \frac{22402}{12} - 36.333^2 \approx 546{,}746\ .\quad Donc\ \ V(X) = 546{,}746$

- La variance de Y

On a: $V(Y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{Y}^2$

$$V(Y) = \frac{23^2 + 17^2 + 14^2 + 10^2 + 10^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 23^2 + 27^2 + 28^2}{12} - 17.333^2$$

$V(Y) = \frac{4060}{12} - 17.333^2 \approx 37{,}9$. Donc $V(Y) = 37{,}9$

- La covariance de X et Y

On a: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{X}\,\bar{Y} = \frac{6030}{12} - 36{,}333 \times 17{,}333 \approx -127{,}26.$

Donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = -127{,}26$

4) Je calcule le coefficient de corrélation linéaire r

On a: $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{-127{,}26}{\sqrt{546{,}746 \times 37{,}9}} \approx -0{,}884.$ Donc $r = -0{,}884$

Je remarque que: $0{,}87 \leq |r| < 1$.

Donc il y a une bonne corrélation linéaire entre les variable X et Y.

Conclusion : La pluviométrie est liée à la température.

5) Je détermine une estimation de la pluviométrie d'octobre 2019 sachant que la température moyenne d'Octobre 2019 était de 32 °C.

Ici on a $y = 32$. Je doit chercher à déterminer la valeur de x en utilisant l'équation de la droite de régression de Y en X.

Soit (D) cette droite.

L'équation réduite de (D) est sous la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

On a: $a = \frac{-127{,}26}{546{,}746} = -0{,}233$ et $b = 17{,}333 + 0.233 \times 36{,}333 = 25{,}798$

D'où (D): $y = -0{,}233x + 25{,}798$

Donc pour $y = 32$, on a: $x = \frac{y - 25{,}798}{-0.233} = \frac{32 - 25{,}798}{-0.233} \approx -26{,}62.$

Conclusion : Pour une température moyenne de 32 °C en Octobre 2019, la pluviométrie d'Octobre 2019 est quasi-nulle.

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
Tle A
MATHEMATIQUES

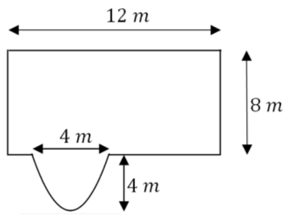
CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : fonctions numériques

LEÇON 8 : PRIMTIVES ET CALCUL INTEGRAL

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le ministère a entrepris la construction d'une piscine dans l'enceinte d'un lycée d'excellence. L'entreprise chargée de l'ouvrage a affiché une image accompagnée d'un schéma de ce que sera cette piscine (voir image ci-contre).



Rimon élève de TA1 et amateur de natation, veut comparer la taille de la piscine de son lycée à celle du lycée professionnel de la ville. Il tente de calculer son aire mais n'y arrive pas. Il pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer l'aire totale de la piscine en construction.

B- RESUME DE COURS

I- NOTION DE PRIMITIVES

1) Primitives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle ***primitive*** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F sur I. On a : **pour tout $\boldsymbol{x} \in$ I,** $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Remarque :

Si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive de f sur I est de la forme $x \longmapsto F(x) + c$ où c est un élément de $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$. On donne les fonctions F, G, H et P dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$; $P(x) = x^2 + 5x + x^3$.

Parmi les fonctions F, G, H et P cite celles qui sont des primitives de f.

Solution :
$F'(x) = 2x$; $G'(x) = 2x + 5$; $H'(x) = 2x + 5$ et $P'(x) = 2x + 5 + 3x^2$
On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ et $H'(x) = f(x)$.
Donc G et F sont des primitives de f.

2) La primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un nombre donné

<u>Propriété</u> :
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel .
Il existe une primitive de f et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

<u>Exercice de fixation</u>
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par $G(x) = x^2 - x$.
Détermine la primitive H de g qui prend la valeur 5 en -1

Solution :
Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $H: x \longmapsto G(x) + c$
$H(x) = x^2 - x + c$. Comme $H(-1) = 5$, on a :$2 + c = 5$. Donc $c = 3$.
D'où $H(x) = x^2 - x + 3$.

3) Les primitives des fonctions de usuelles

Fonctions f	Primitives de f $(c \in \mathbb{R})$	Sur l'intervalle
$x \longmapsto a\, ; (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\, ; (n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}; (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$x \longmapsto \dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \longmapsto x^r\, ;\ (r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0; +\infty[$ si $r > 0$ $]0; +\infty[$ si $r < 0$

<u>Exercice de fixation</u>
Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f
a) $f(x) = x^2$; $b)$ $f(x) = \frac{1}{x^5}$; $c)$ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; d)$f(x) = -3$.

Solution :
$a)F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$; $b)F(x) = -\frac{1}{4x^4} + c$; $c)F(x) = -3x^{-\frac{1}{3}} + c$; d) $F(x) = -3x + c$

6) primitives et opérations sur les fonctions

a) primitives de $u + v$

Propriété
Si U et V sont des primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle K, alors la fonction $(U + V)$ est une primitive sur K de la fonction $(u + v)$.

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto x^4 + x^3$.

Solution
f est la somme des fonctions $x \longmapsto x^4$ et $x \longmapsto x^3$
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto x^4$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{5}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto x^3$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^4}{4}$. On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}$.

b) Primitives de $\boldsymbol{au}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$

Propriété
Si U est une primitive de la fonction u sur un intervalle K, alors pour tout nombre réel a, la fonction (aU) est une primitive sur K de la fonction (au).

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}^*$de la fonction $f : x \longmapsto -\frac{5}{2x^2}$.

Solution
$f$est le produit de $-\frac{5}{2}$ par la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$
Une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \longmapsto \frac{-1}{x}$.
On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{5}{2x}$.

c) Primitives de $\boldsymbol{u' \times u^m}$, $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{\boldsymbol{-1}\})$

Propriété
$\boldsymbol{m}$ étant un nombre rationnel différent de -1,
Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors une primitive sur K de la fonction $u'u^m$ est la fonction $\frac{u^{m+1}}{m+1}$.

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto 2x(x^2+1)^8$.

Solution
La dérivée de la fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ est la fonction $x \longmapsto 2x$
Donc la fonction f est de la forme $x \longmapsto u'(x)(u(x))^8$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{(x^2+1)^9}{9}$.

5) Les primitives des fonctions du type :$\boldsymbol{x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}}$

<u>Propriété</u>
u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas.
La fonction $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive $x \longmapsto \ln(u(x))$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement positive et $x \longmapsto \ln(-u(x))$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement négative.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur K de la fonction f définie ci-dessous :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; $K =]0\,;+\infty[$;

2) $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$; $K =]3\,;+\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+5}$; $K = \mathbb{R}$

Solution :

1) La fonction $u: x \longmapsto x$ est dérivable et positive sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in]0\,;+\infty[$, $u'(x) = 1$;

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est une fonction du type $x \longmapsto \ln x + c \ \ (c \in \mathbb{R})$

2) La fonction $u: x \longmapsto 3 - x$ est dérivable et négative sur $]3\,;+\infty[$ et pour $x \in]3\,;+\infty[$, $u'(x) = -1$;

Pour $x \in]3\,;+\infty[$, $f(x) = -\frac{5\,u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $]3\,;+\infty[$ est une fonction du type $x \longmapsto -5\ln(-3+x) + c \ \ (c \in \mathbb{R})$

3) La fonction $u: x \longmapsto x^2 + 3x + 5$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 3$;

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto \ln(x^2+3x+5) + c \ \ (c \in \mathbb{R})$

6) Les primitives des fonctions de chacun des types : $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est une primitive sur K de la fonction $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur K de la fonction f définie ci-dessous :

1) $f(x) = e^x$, $K = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$, $K = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 4e^{4x+5}$, $K = \mathbb{R}$

Solution

1) La fonction $u: x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 1$;

Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto e^x + c \ \ (x \in \mathbb{R})$

2) La fonction $u: x \longmapsto x^2 + 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x + 3$;

Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto e^{x^2+3x-1} + c \ \ (x \in \mathbb{R})$

3) La fonction $u: x \longmapsto 4x+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 4$;
Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type
$x \longmapsto e^{4x+5} + c \ (x \in \mathbb{R})$

II. Intégrale

1) Définition et notation

Définition

Soit f une fonction **continue sur un intervalle K**, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K.
Le nombre réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas de F. Il est appelé **intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de f.**

Notation :

On note :
• $\int_a^b f(x)dx$ **et on lit « intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{f(x)dx}$ »**
ou
• $[F(x)]_a^b$ et on lit : " $F(x)$ pris entre a et b".
Donc, on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exercice :

Calcule les intégrales suivantes: $\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{x}^2\mathrm{dx}$; $\mathrm{P} = \int_0^1 \mathrm{z}^2\mathrm{dz}$; $\mathrm{J} = \int_3^1 (1-\frac{1}{\mathrm{t}})\mathrm{dt}$

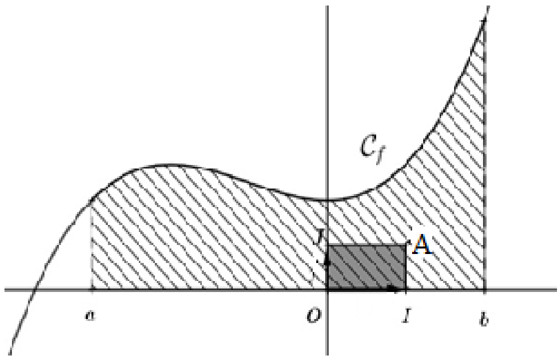
Solution :

• Considérons la fonction f continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = x^2$.
Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
Donc $I = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$.
• $\mathrm{P} = \mathrm{I} = \frac{1}{3}$ car la variable z est muette
• Considérons la fonction f continue sur $[1; 3]$ et définie par $f(\mathrm{t}) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right)$
Une primitive de f est la fonction F définie par $\mathrm{F}(\mathrm{t}) = \mathrm{t} - \ln \mathrm{t}$.
Donc : $\mathrm{J} = \int_3^1 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) \mathrm{dt}$
$= [\mathrm{t} - \ln\mathrm{t}]_3^1$
$= (1 - \ln 1) - (3 - \ln 3)$
$= 1 - 3 + \ln 3$
$\mathrm{J} = -2 + \ln 3$

2) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Propriété

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$ et $(\mathrm{C_f})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
$\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \mathrm{f(x)dx}$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathrm{C_f})$, l'axe (OI), les droites d'équations $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ et $\mathrm{x} = \mathrm{b}$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIAJ :1u. a = OI×OJ

On a : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$ u. a

Exercice de fixation :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2x + 1$. f est continue et positive sur [0 ; +∞[

1) Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

Solution

1) L'unité d'aire en cm² est 2×3 cm².

$\mathcal{A}$ = ($\int_0^5 (2x + 1)dx$)×6 cm².

= $6 \times [x^2 + x]_0^5$ cm².

= 6 (25 + 5) cm².

= 180 cm²

3) Calcul d'aire

a) Aire du plan limité par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f une fonction continue positive sur $[a; b]$, (C_f) sa courbe représentative.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On a $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx\,.ua$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par : f (x) = x^2. f est continue et positive sur ℝ

Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 3.

Solution

$\mathcal{A} = \int_1^3 (x^2)dx \ en\ (u.a)$

L'unité d'aire en cm² est 2×4 cm², donc $\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 (x^2)dx$)×8 cm²

$\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 x^2 dx$)×8 cm²

= 8 × $[\frac{1}{3}x^3]_1^3$ cm²

= 8 (9− $\frac{1}{3}$) cm²

$\mathcal{A}$ = $\frac{208}{3}$ cm²

b) Aire du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tel que : $f \geq g$ sur $[a; b]$; (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations : $x = a\ \ et\ \ x = b.$

On a: $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right) ua.$

Exercice de fixation

Soit les fonctions f et g définies par : f$(x) = x + 2\ \ et\ \ g(x) = x^2$

On désigne par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de $f\ et\ g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique: $2cm$

Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations : $x = -1\ \ et\ \ x = 2$

Solution

Etudions le signe de $g(x) - f(x)$.

$g(x) - f(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc pour tout $x \in [-1; 2]$, $g(x) - f(x) < 0$.

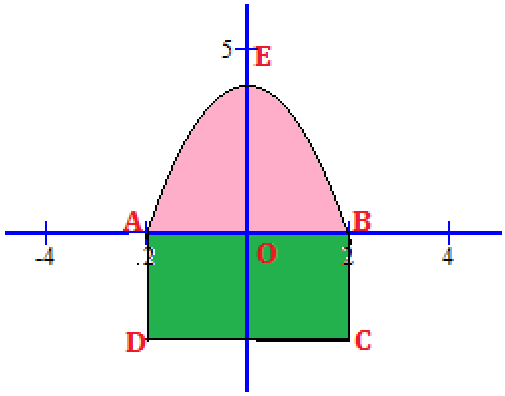
L'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est $\int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx \times 4\ cm^2$.

Or $\int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$.

L'aire cherchée est : $\mathcal{A} = \frac{9}{2} \times 4\ cm^2 = 18\ cm^2$.

C-SITUATION COMPLEXE

Un de vos camarades de classe rend visite à l'ancien professeur de mathématiques de son père à la retraite. Il remarque les formes géométriques particulières de la terrasse de celui-ci (voir figure ci-contre) : la partie en vert est délimitée par un rectangle de largeur 2 m et de longueur 4m et la partie en rose est délimitée par une parabole et par un segment [AB]. Amusé par le regard de votre camarade, l'ancien professeur de mathématique le met au défi et lui demande de calculer l'aire totale de la terrasse en vue de lui donner une idée du coût des travaux de revêtement de cette terrasse.



Il lui présente le plan de la terrasse en précisant que pendant la construction, il a veillé à ce que la parabole qui apparait dans le plan ait pour équation $y = -x^2+4$ dans le repère orthonormé d'origine O et d'unité 1m, avec A (-2,0) et B(2,0).
Aide ce camarade a relevé ce défi.

Solution

Pour calculer l'aire totale de la terrasse, on va :

- calculer l'aire de la partie ABCD
- calculer l'aire ABE délimitée par la parabole
- additionner les deux aires calculées précédemment.

1) Calculons l'aire ABCD

L'aire ABCD =AB×AD = 4×2 = 8 m^2

2) Calculons l'aire ABE

l'aire ABE=$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8-\frac{8}{3}\right) - \left(-8+\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ m^2$.

3) l'aire de la terrasse est : $\frac{32}{3} + 8 = \frac{56}{3}\ m^2$.

Conclusion

L'aire de la terrasse du professeur à la retraite est : $\frac{56}{3}\ m^2 \approx 18{,}66\ m^2$.

D- EXERCICES

Exercice 1

Réponds par V (vrai) ou F (faux) à chacune des affirmations suivantes

AFFIRMATIONS	REPONSES
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction définie par : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	

La primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction définie par $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1 est la fonction définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
Une primitive sur un intervalle I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction $u \times v$	

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants détermine toutes les primitives sur I de la fonction f

$a)\ f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$; $\mathrm{I} = \left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$ $\quad b)\ f(x) = (3x+2)(3x^2+4x-7)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 3

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 - e^x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.

1) Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Calcule la limite en $-\infty$ de $f(x)$.

b) Montre que la droite (D) d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Trace (D) et (C).

5) Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de la partie Δ du plan limitée par (C), la droite (D), les droites d'équations $\mathrm{x} = -2$ et $\mathrm{x} = 0$.