Chapitre 3

CONTINUITE

I . Continuité d'une fonction
II . Continuité d'une fonction composée
III . Image d'un intervalle par une fonction continue
IV . Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Bernhard BOLZANO (Prague, 5/10/1782- Prague, 18/12/1848)

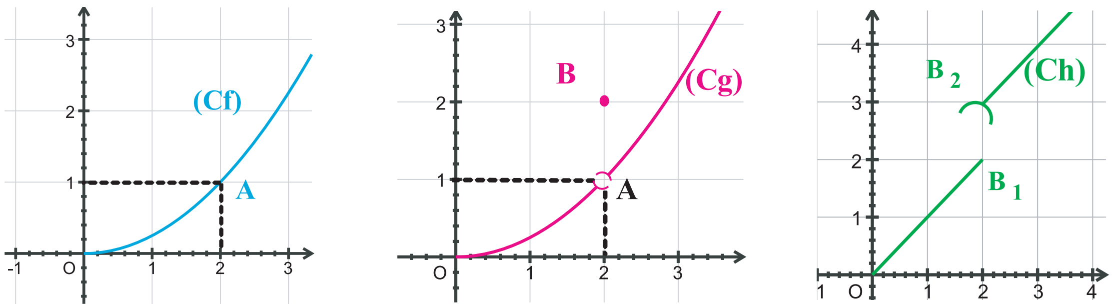
La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue, on ne passe pas brutalement de 12h à 12h 01s, il n'y a pas de saut.
C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques.

I.Continuité d'une fonction :

Activités préliminaires

Activité 1 :

Les figures suivantes sont des représentations graphiques de fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}_+$



1) Déterminer $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$
2) Trouver, si elle existe, la limite de chacune des fonctions précédentes au point 2.
3) Parmi les fonctions précédentes, quelles sont celles qui sont continues au point 2 ?
4) Choisir sur le graphique un intervalle J contenant $f(2)$ et voir s'il est toujours possible de trouver un intervalle ouvert I contenant 2 tel que $f(I) \subset J$.
Refaire le même travail pour g et h. Que remarque-t-on ?

Remarquez que la courbe C_f peut être tracée au voisinage du point A sans lever la main, ce qui n'est pas possible pour C_g *et* C_h.

Activité 2 :

1) Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité au point a :

- $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $a = -1$
- $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2} & si\ x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$, $a = 1$
- $\begin{cases} h(x) = 3x - 1 & si\ x \geq 1 \\ h(x) = x^2 + 2 & si\ x < 1 \end{cases}$, $a = 1$
- $\begin{cases} k(x) = \dfrac{1}{x+2} & si\ x < -2 \\ k(x) = -x & si\ x \geq -2 \end{cases}$, $a = -2$

2) Pour chacune des fonctions précédentes, préciser la limite à droite et la limite à gauche au point indiqué puis étudier la continuité à droite et la continuité à gauche en ce point.

Activité 3:

a) Soit la fonction $f : [1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x-1}$

Vérifier que f est continue sur $[1, +\infty[$

b) Soit la fonction $g : \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 & si\ x \geq 0 \\ g(x) = x - 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Vérifier que g est continue sur chacun des intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$

On remarque que g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas continue au point 0

On ne peut pas dire que g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais on dit qu'elle est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Activités de découverte

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ pour $x \neq 2$.

a)Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Soit m $\in \mathbb{R}$ et la fonction g_m telle que $\begin{cases} g_m(x) = f(x) & si\ x \neq 2 \\ g_m(2) = m \end{cases}$

•On suppose que $m \neq 4$. g_m est-elle continue au point 2 ?

•On prend $m = 4$. Montrer que g_4 est continue sur $\mathbb{R}$.

Toutes les fonctions g_m sont des prolongements de la fonction f, mais g_4 est le seul prolongement de f qui soit continu au point 2 : on l'appelle **prolongement par continuité de** f au point 2.

A retenir

Continuité en un point

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ $(a<b)$ ou $[a,+\infty[$.

On dit que f est continue à droite en a si : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]b,a]$ $(b < a)$ ou $]-\infty, a]$

On dit que f est continue à gauche en a si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Conséquence

Une fonction est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Continuité sur un intervalle

On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$.

On dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$ et si elle est continue à droite en a et continue à gauche en b.
De la même manière on définit la continuité d'une fonction f sur $[a,b[$, $]a,b]$,$[a,+\infty[$ $]-\infty\ ,a]$ ...

Prolongement par continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un point a de I.
Si f admet une limite finie ℓ au point a, alors la fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a)=\ell \end{cases}$$

est continue sur I.
On l'appelle **prolongement par continuité** de f au point a.

Opération sur les fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et continues sur I, alors

- $f+g$, $f.g$ et $|f|$ sont continues sur I.
- Pour tout réel k, la fonction $k.f$ est continue sur I.
- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Conséquences

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles ouverts déterminés par son ensemble de définition.

Applications

1 Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = E(x) - x$ $\qquad a = 2$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x-1 & si\ x > 3 \\ f(x) = x^2 - x - 1 & si\ x \leq 3 \end{cases}$ $\qquad a = 3$

2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles sur lesquels elle est continue :

$p(x) = \dfrac{1}{x+4}$; $q(x) = \sqrt{x^2-1}$; $r(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ et

$s(x) = E(x);\ x \in [-1,2]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

3 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et les intervalles ouverts sur lesquels elle est continue :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + x^2 - 4x - 3$ $\qquad$ b) $g(x) = x\sqrt{x-3}$

c) $h(x) = \dfrac{x+3}{\left|x^2 - 3x + 2\right|}$

d) $k(x) = \dfrac{x^2+1}{|x| - 3}$

4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ pour $x \neq 0$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

II.Continuité d'une fonction composée.

Activités de découverte

On donne la fonction u: $\mathbb{R} : \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 4$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

1) Déterminer l'expression de la fonction $h \circ u$ et donner son ensemble de définition.
2) Déterminer $u(3)$ puis $h \circ u(3)$ et étudier la continuité de u en 3 puis la continuité de h en $u(3)$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} (h \circ u)(x)$ et en déduire la continuité de $(h \circ u)$ au point 3.

A retenir

Soit f et g deux fonctions définies respectivemen€sur deux intervalles ouverts I et J et x_0 I tel que $f(x_0) \in J$.
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] & J \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x_0 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x_0) \arrow[r] & (gof)(x_0)
\end{tikzcd}$$

Si f est continue sur I, g est continue sur J et $f(I) \subset J$, alors gof est continue sur I.

Exemple

Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Le schéma suivant $x \square x^2 - 5x + 4 \square \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ permet de voir que $h = gof$ où

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ et $\quad$ $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \square x^2 - 5x + 4$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

f est une fonction polynôme qui s'annule aux points 1 et 4.
Le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Ceci nous permet d'affirmer que $f([4,+\infty[) \subset \mathbb{R}_+$ et $f(]-\infty,1]) \subset \mathbb{R}_+$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et g continue sur $\mathbb{R}_+$, on conclut que h est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$ et $[4,+\infty[$.

Applications

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, écrire sous la forme gof puis déterminer les intervalles sur lesquels elle est continue.

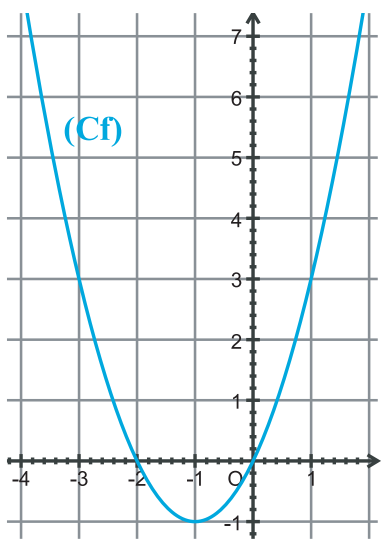
$h_1(x) = \sqrt{2x-1}$; $h_2(x) = \sin \pi x$; $h_3(x) = \left(|x|-1\right)^2$ et $h_4(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

III. Image d'un intervalle par une fonction continue :

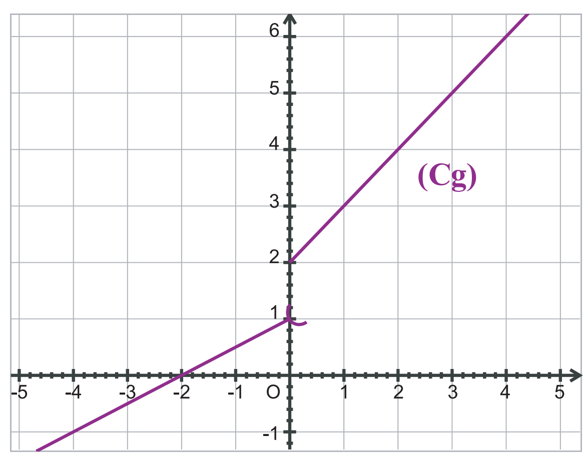
Activités préliminaires

Activité 1:

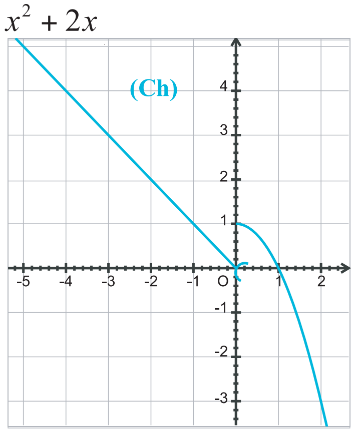
On donne les représentations graphiques des fonctions f, g et h suivantes :



$f(x) = x^2 + 2x$



$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x + 1 & si\ x < 0 \\ g(x) = x + 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} h(x) = -x & si\ x < 0 \\ h(x) = -x^2 + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) Déterminer graphiquement l'image de chacun des intervalles [-3,-1] ; [-2,1] et $[0, +\infty[$ par f

b) Déterminer graphiquement $g([-4,-1])$ et $g([-1,2])$. Que peut-on remarquer à propos de $g([-1,2])$? g est-elle continue sur [- 4, -1] ? sur [- 1, 2] ?

c) Déterminer $h([-1,2])$. h est-elle continue sur [- 1, 2] ?

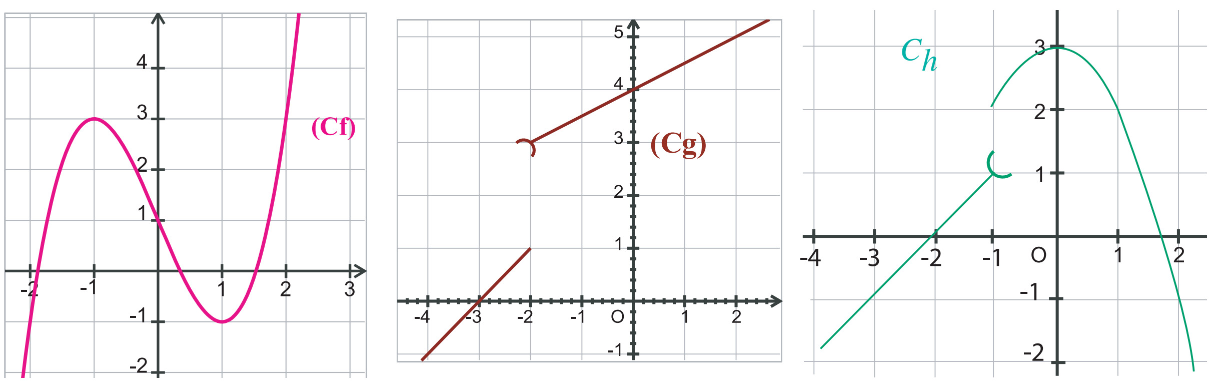
2) Déterminer, parmi les intervalles $[a, b]$ suivants, ceux où f est monotone. Pour chacun de ces intervalles, comparer $f([a, b])$ et $[f(a), f(b)]$.

[- 4 , - 2] ; [- 2 , 1] ; [- 3 , 1] ; [0 , 1].

Que peut-on conclure ?

Activité 2 :

On donne les représentations graphiques des fonctions suivantes :



1) a) Déterminer $f(-2)\lambda; f(2)$; $g(-2)$; $g(2)$; $h(-2)$ et $h(2)$

b) Choisir un réel intermédiaire entre $f(-2)$ et $f(2)$ et voir s'il existe un réel $c \in [-2, 2]$ tel que $f(c) = \lambda$

c) Faire de même pour g et h.

2) a) Etudier les variations de f sur [-2,1].

b) Déterminer $J = f([-2,1])$.

c) λ étant un élément de J , déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = \lambda$, $x \in [-2,1]$.

Activité 3 :

Soit f une fonction continue sur [1,4] telle que $f(1) . f(4) < 0$.

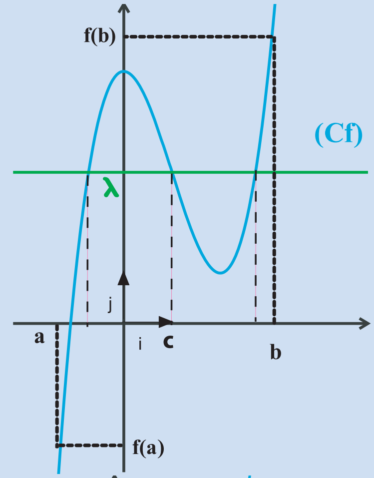
a) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses ? (Faire un dessin).

b) Vérifier graphiquement que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans [1,4]

A retenir

Théorème

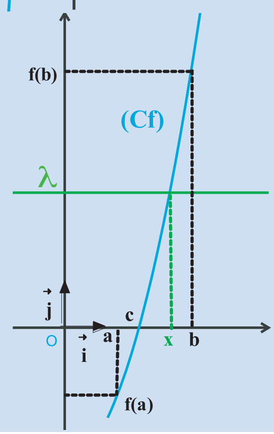
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.



Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[\ a\ ,\ b\ ]$, alors pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Autrement dit l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[\ a\ ,\ b]$



Cas particuliers

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \lambda$.
- Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$

Remarque

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de donner une valeur approchée des solutions d'équations qu'on ne peut pas résoudre par les procédés usuels (discriminant, …)

Le tableau suivant donne les images des différents types d'intervalles par des fonctions continues et strictement monotones :

Si f est croissante alors	Si f est décroissante alors
$f([a,b]) = [f(a),f(b)]$	$f([a,b]) = [f(b),f(a)]$
$f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$	$f([a,b[) = \ ]\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\ , f(a)]$
$f(]a,b]) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\ , f(b)]$	$f(]a,b]) = [f(b), \ \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$
$f(]a,b[) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\ , \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\ [$	$f(]a,b[) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\ , \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\ [$
$f(]-\infty, a]) = \ ]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\ f(a)]$	$f(]-\infty,a\ ]) = [f(a), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$
$f(]-\infty\ ,a\ [) = \ ]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x)[$	$f(]-\infty,a[) =]\lim\limits_{x \to a^-} f(x)\ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

$f([a,+\infty[) = [f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f([a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$f(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Applications

1 En considérant les courbes de l'activité n°1 déterminer chacun des ensembles suivants :

$f([-3,-1])$, $f(]-3,1[)$, $f([-1,+\infty[)$, $f([-2,0[)$, $g(]-\infty,0])$, $g(]1,2[)$, $h([-\frac{1}{2},0[)$, $h([0,\frac{1}{2}])$ et $h([1,+\infty[)$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+3x+1$.
a) Calculer $f(1)$ et $f(3)$. En déduire qu'il existe au moins un réel c tel que $f(c)= 17$.
b) Montrer qu'il existe au moins un réel a tel que $f(a)= -2$.

3 Montrer que l'équation $x^3+x-1= 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0,1]$ et donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-1} près.

4 Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos c = c$ et donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-1} près.

IV. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :

Activités de découverte

Activité 1:

Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes et déterminer celles qui sont des bijections.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x-3$

$g:\mathbb{R}\to[-2,+\infty[$, $x\mapsto x^2-2$

$h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-2$

$k:[0,\pi]\to[0,1]$, $x\mapsto \sin x$

$l:[0,\frac{\pi}{2}[\to[0,1]$, $x\mapsto \sin x$

BIJECTION
f étant une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, f est une bijection de I vers J si chaque élément de l'intervalle J a un antécédent et un seul dans I. On dit alors que la fonction f est une bijection de I sur J.

Exemple :

On considère la fonction $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \mapsto x^2$

f est une bijection. En effet , Soit $y \in \mathbb{R}_+$
L'equation $x^2 = y$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique qui est $x = \sqrt{y}$
Donc il existe un réel unique x tel que $f(x)=y$
Pour déterminer l'expression de f^{-1} il suffit d'exprimer y en fonction de x sachant que $x = f(y)$

Donc $x=f(y)$ signifie $\begin{cases} x = y^2 \\ x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ signifie $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$

Fonction réciproque d'une bijection:

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J.
La fonction réciproque de f, notée f^{-1}, est la fonction dénfinie sur J et à valeur dans I telle que :
$x \in J, y \in I$; ($y = f^{-1}(x)$ signifie $x = f(y)$)

Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :

Activité 2 :

1) On donne les fonctions suivantes :

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 2x$

et

$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 2x$

a) Représenter graphiquement f et g.
b) Compléter le tableau suivant par OUI ou NON

	Strictement monotone	Bijective de I sur son image	Continue sur I
f			
g			

Plus généralement f étant une fonction strictement monotone sur I, on admet que f est une bijection de I sur $f(I)$
De plus si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur $f(I)$

Activité 3 :

Soit f une fonction continue et stictement monotone sur un intervalle I .
1) Montrer que si f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) alors f^{-1} l'est aussi.
2) Soit $M(x,y)$ un point de (C_f). Soit (D) la droite d'équation $y = x$ et $M'(x',y')$ le point tel que $M' = S_D(M)$. Déterminer les coordonnées de M' en fonction de x et y et montrer que $M' \in C_{f^{-1}}$

Activité 4 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^n$.
où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

- La fonction réciproque de f est appelée fonction **racine n[ième]**.

La racine n [ième] d'un réel positif x est notée $\sqrt[n]{x}$ (Lire : racine enième de x). Ainsi :

$$x \in \mathbb{R}_+ \ , \ y \in \mathbb{R}_+ \quad ; \ y = \sqrt[n]{x} \ \Leftrightarrow \ x = y^n$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad ; \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

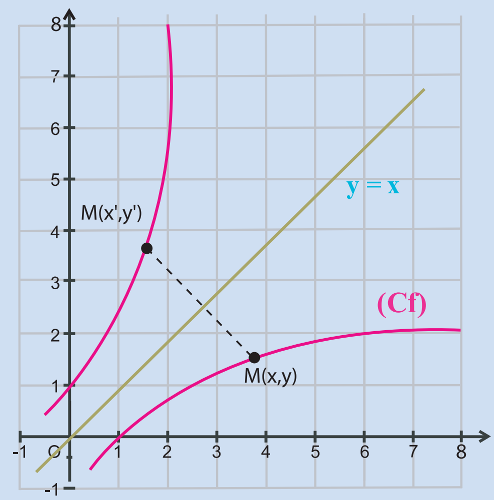
A retenir

Théorème 1

Toute fonction f strictement monotone sur un intervalle I, réalise une bijection de I sur $f(I)$; et si elle est continue sur I alors sa réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Théorème 2

Si f est une bijection de I sur $f(I)$ alors
- f et f^{-1} ont même sens de variation.
- Leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé sont symétriques parrapport à la droite d'équation $y = x$.



Fonction racine n[iéme]

La fonction puissance n[ième] $x \mapsto x^n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
Sa bijection réciproque est la fonction notée $\sqrt[n]{\ }$ et appelée fonction racine n[ième]

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

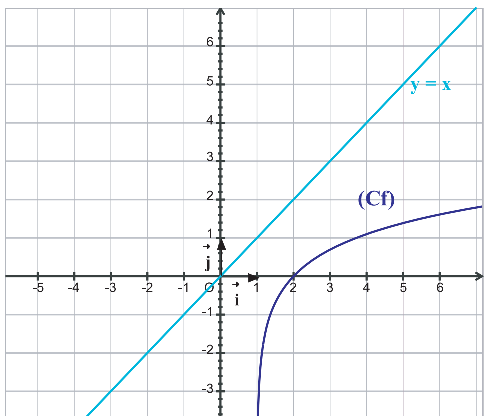
On a : pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

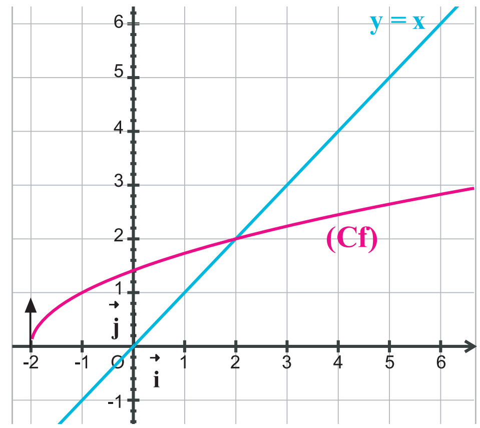
$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n$$

$$x = (\sqrt[n]{x})^n \qquad ; \qquad \sqrt[n]{y^n} = y.$$

Applications

1 Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans chacun des cas suivants :





2 On donne la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$

Montrer que f admet une fonction réciproque dont on donnera l'intervalle de définition

3 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) Représenter f graphiquement. Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) Soit $f_1 : [2, +\infty[\to [-1, +\infty[$ $\quad x \longmapsto f(x)$ *et* $f_2 :]-\infty, 2] \to [-1, +\infty[$ $\quad x \longmapsto f(x)$

Montrer que chacune des fonctions f_1 et f_2 est bijective et déterminer f_1^{-1} et f_2^{-1}

4 Simplifier les écritures suivantes :

$\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{7^{10}}$, $(\sqrt[8]{4})^4$.

Apprendre à chercher

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α appartenant à l'intervalle $[1,2]$

2) a) A l'aide de la calculatrice déterminer $f(1{,}1), f(1{,}2), f(1{,}3)$ …En déduire l'intervalle auquel appartient le réel α .

b) A l'aide de la calculatrice déterminer $f(1{,}21), f(1{,}22), f(1{,}23)$ …En déduire la valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près.

Programme de résolution de l'équation $f(x) = 0$

Soit la fonction f : $f(x) = x^3 + x - 3$. On admet que f admet un unique solution x_0 dans l'intervalle [1,2]. Le programme suivant permet de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0.

```
Program Dichotomie ;
Uses Wincrt ;
Var a,b:Real; n,c:integer;
 Function f(x : Real) : Real;
      begin
         f:= x*x*x+x-3 end;
  Function Dicotomie(a,b:Real;n:integer): Real;
      Var  m ,fm: Real; k:integer;s;boolean;
     Begin
         s:=f(a)<0;
        for k:=1 to n-1 do
          begin
             m:=(a+b)/2;fm:=f(m);
              if fm=0 then
                begin
                  dicotomie:=m;
                   exit
                end;
                 if s=(fm<0) then a:=m else b:=m
           end;
              dicotomie:=(a+b)/2
 End;
Begin
  clrscr;
  writeln('  ****** Résolution de l''équation x3+x-3 = 0  dans  [1,2] par DICHOTOMIE
******');
   repeat
    write ('Nombre d''_tapes : '); Readln(n);writeln;
     write ('Nombre de chiffres après la virgule : '); Readln(c);writeln;
    until (n>0) and (c>0);
    a:=1;b:=2;
 Writeln (' La valeur approchée de la solution xo de l''équation  x3+x-3 = 0  a 10-',c,' près
est= ');
   write('                x0 = ' ,dicotomie(a, b, n) :0:c) ;
End.
```

1 Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants:

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$, a = 0

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 5}$ a = 0

c) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} & si\ x > 1 \\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} & si\ \ 0 < x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ a = 1

d) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x+5} & si\ x \neq -5 \\ f(-5) = -6 \end{cases}$ a = -5

e) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ a = 1

f) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-4 + x^2}{x-2} & si\ x > 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 12} & si\ x \leq 2 \end{cases}$ a = 2

2 Calculer a, b et c pour que f soit continue en 3

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 3} & si\ x > 3 \\ f(x) = \dfrac{-4 + cx^2}{x - 2} & si\ x < 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

3 Soit λ un nombre réel et h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x - 2 + \lambda|x-2|}{|x-2|} & si\ x \neq 2 \\ h(2) = -3 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, h n'est pas continue au point 2

b) Déterminer λ pour que h soit continue à droite en 2.

c) Déterminer λ pour que h soit continue à gauche en 2.

4 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ f(4) = \lambda \end{cases}$$

Déterminer λ pour que f soit continue au point 4.

5 **a)** Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \rightarrow \dfrac{x}{\sin x}$

b) Est-il possible de prolonger f par continuité en 0 ? Et ailleurs ?

6 Est-il possible de prolonger par continuité en 0, les fonctions suivantes :

$f : x \mapsto x^2\,|1 + \dfrac{1}{x}|$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x}$

$h : x \mapsto x\,|1 + \dfrac{1}{x}|$ $\quad k : x \mapsto \dfrac{x^3 + |x|}{x}$?

7 Cochez la réponse correcte :

1) La fonction f telle que

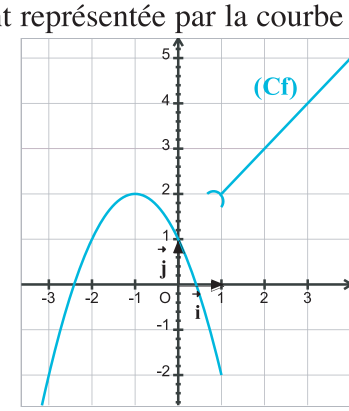
$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) est continue en 2

b) est continue à droite en 2

c) est continue à gauche en 2

2) f étant représentée par la courbe suivante



a) f est continue en 1

b) f est continue à droite en 1

c) f est continue à gauche en 1

3) La fonction $x \longmapsto E(x)$ est continue sur :

a) [2,3] **b)**]2,3] **c)** [2,3[

4) L'image de l'intervalle [-1,2] par la fonction $x \longmapsto x^2$ est

a) [1,4] **b)** [0,4] **c)** [-1,4]

5) L'équation $x^3 + 2x + 5 = 0$ a une solution dans l'intervalle

a)]0,1[b)]-1,2[c)]-2,-1[

8 Cochez la case correcte :

1) La composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$

☐ Vrai ☐ Faux

2) L'image d'un intervalle par une fonction décroissante est un intervalle

☐ Vrai ☐ Faux

3) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

☐ Vrai ☐ Faux

9 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et étudier sa continuité sur D_f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x^2-3x+6$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-3x-4}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$; d) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$

e) $f(x)=x^2+\sin x$

16 Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ si $x \neq 1$.

$f(1) = \dfrac{1}{2}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+|3x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

a) étudier la continuité à droite et la continuité à gauche de f au point $a = 0$

b) Donner les intervalles sur lesquels f est continue.

12 Mêmes questions que l'exercice n° 11 avec :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x+1+2|x+1|}{|x+1|} & si\ x \neq -1 \\ g(-1) = 3 & \text{et } a = -1 \end{cases}$$

13 Soit la fonction f définie par :

$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

a) Donner l'expression de f sur chacun des intervalles : $[0,1[$ et $[1,2[$.

b) Tracer la portion de la courbe représentative de f correspondant à l'intervalle [0,2].

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

14 On donne la fonction

$$f : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\frac{\pi}{x}$$

Donner les intervalles sur lesquels f est continue.

15 Mêmes questions que l'exercice n° 13 avec :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{E(x)}$$

16 Mêmes questions que l'exercice n° 14 avec :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^4}{x^3-3x^2-x+3}$$

17 On donne l'équation :

$(E) : x^3 -2x +1 = 0$

1) a) Montrer que (E) admet une solution α dans l'intervalle $[-2,-1]$

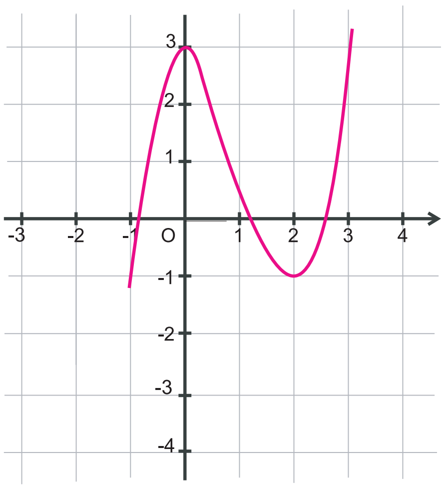
b) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de α.

2) En remarquant que (E) a une racine évidente, résoudre l'équation (E) et retrouver le résultat de la 1ère question.

18 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[-1,3]$. On désigne par C_f sa courbe représentative (voir figure ci-dessous)

a) Déduire de la courbe C_f qu'il existe trois réels de l'intervalle I tels que $f(x)= 0$.

b) Donner la valeur approchée de chacun de ces trois réels à 10^{-1} près par défaut.



19 On donne l'équation :

$(E) : x^4 -8x^2 +4 =0$

1) a) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que (E) admet une solution α dans l'intervalle $[2,3]$

b) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de α.

2) Résoudre l'équation (E) et retrouver les résultats de la 1ère question.

20 On donne la fonction f :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$$

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

c) Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 3x -6 = 0$ a une solution unique α et donner une valeur approchée de α par excès à 10^{-1} près.

21 On donne un intervalle $I = [a,b]$ et une fonction définie et continue sur $[a,b]$ telle que $f(I) = I$.

Soit g la fonction telle que $g(x) = f(x) - x$.

Montrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$.

Que peut-on conclure pour f ?

22 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(1+x\right)^3 + x$$

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1,0]$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

23 a) Montrer que l'équation $1- x -\sin x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que l'équation $x^4 - \frac{4}{x} = x$ admet une solution dans l'intervalle $[1,2]$

24 Répondre par vrai ou faux:

☐ Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ alors f est continue en a

☐ Si f est une fonction strictement croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

☐ La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ admet une fonction réciproque

☐ $\sin^{-1}$ étant la fonction réciproque de la fonction sin: $\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

alors $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

25 1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-2}+1$ détermine une bijection de son ensemble de définition vers un intervalle que l'on déterminera.
2) Déterminer l'expression de f^{-1}.
3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

26 1) Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

détermine une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
2) Trouver $f(\mathbb{R})$ et f^{-1}
3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

27 1) Etudier les variations de f et représenter graphiquement la fonction f telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$.
2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

28 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ sur un intervalle que l'on déterminera
2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x
3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

29 On considère la fonction f définie sur $I = \left[\frac{1}{4},+\infty\right[$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$

a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

30 Ecrire plus simplement chacun des réels suivants :

$\sqrt[6]{729}$, $\left(\sqrt[4]{11}\right)^8$, $\sqrt[5]{7^{10}}$, $\sqrt[7]{3^{28}}$

31 a étant un réel positif et n, p des entiers naturels non nuls, montrer que

a) $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$; b) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

c) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; d) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

e) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

Maths et culture

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (5 Octobre 1781 - 18 Décembre 1848) était un mathématicien tchèque de langue allemande, né en 1781 et mort en 1848 à Prague. Étudiant en philosophie et en mathématiques, il devint prêtre en 1805. Il enseigna alors les sciences de la religion à Prague et consacra le reste de son temps aux mathématiques. Ses travaux portèrent essentiellement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des principaux contributeurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie.

Il est connu pour le théorème de Bolzano, ainsi que pour le théorème de Bolzano-Weierstrass, développé conjointement avec Karl Weierstrass.

Théorème de Bolzano

Soit f une fonction **continue** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Si f change de signe entre a et b, alors il existe $x \in [a,b]$ telque $f(x)=0$