2. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1. Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

1.1. Fonction et ensemble de définition

Définition

On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles une application qui à tout élément x d'une partie D de $\mathbf{R}$ associe un réel et un seul noté $f(x)$

Le réel $f(x)$ est appelé image de x par f

La partie D est appelée ensemble de définition de la fonction

Notation

$$f : D \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Exemple

La fonction identité $x \mapsto x$ est définie sur $D = \mathbf{R}$

La fonction élévation au carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $D = \mathbf{R}$

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{\,0\,\}$

La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $D = \mathbf{R}_+ = [\,0;+\infty\,[$

Remarque

Il ne faut pas confondre l'être mathématique appelé fonction (et désigné par *f*) avec l'être mathématique (désigné par $f(x)$ ou par *y*) qui est le réel associé par f à un élément donné de *x*.

1.2. Courbe représentative d'une fonction

Définition

Soit *f* une fonction définie sur *D*

La courbe représentative de f dans un repère est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ avec $x \in D$

On dit que $y = f(x)$ est une équation de cette courbe dans le repère considéré

1.3. Restriction de f

Définition

Soit *f* une fonction définie sur *D*, et *A* une partie de $\mathbf{R}$ telle que $A \subset \mathbf{R}$

On appelle restriction de *f* à *A* la fonction g telle que

$$\begin{aligned} &A \subset D \to \mathbf{R} \\ &x \mapsto g(x) \quad \text{telle que } \forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Exemple

Soit *f* la fonction $\begin{aligned} &\mathbf{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\to \mathbf{R} \\ &x \mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$

et *g* la fonction définie sur $A =]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$

Nous dirons que *g* est la restriction de *f* à $A =]0; +\infty[$

© Gérard Hirsch – Maths54

1.4. Image et antécédent

Définition

Soit *f* une fonction définie sur *D*, et *A* une partie contenue dans *D*, alors $f(A)$ désigne l'ensemble des images des éléments de *A*.

Si $y = f(x)$, on dit que *y* est l'image de *x* par *f*, mais aussi que *x* est un antécédent de *y*.

2. Opérations sur les fonctions

2.1. Egalité de deux fonctions

Définition

f et *g* sont deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g

Les deux fonctions *f* et *g* sont égales $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ \forall\ x \in D_f, \quad f(x) = g(x) \end{cases}$

2.2. Somme de deux fonctions

f et *g* sont deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g

On définit sur $D = D_f \cap D_g$ la somme $f + g$ par $\forall x \in D \qquad f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$

Remarque

On peut aussi écrire la somme de deux fonctions $\forall x \in D \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

© Gérard Hirsch – Maths54

2.3. Produit d'une fonction par un réel

Définition

f une fonction définie sur D et pour tout réel k, le produit d'un réel k par la fonction f est noté : $k\,f$ et se définit par $\begin{array}{l}\forall k\in\mathbf{R}\\ \forall x\in D\end{array}\quad k\,f : x\mapsto kf(x)$

Remarque

On peut aussi écrire le produit $k\,f$ d'un réel k par une fonction f

$$\begin{array}{l}\forall k\in\mathbf{R}\\ \forall x\in D\end{array}\qquad (k\,f)(x)=k\,f(x)$$

Dans le cours d'algèbre, on dira que :

Muni de ces deux lois, l'ensemble (E) des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur une partie D de $\mathbf{R}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

2.4. Produit de deux fonctions

Définition

On définit sur $D=D_f\cap D_g$ le produit $f\,g$ par $\forall x\in D \qquad f\,g:\ x\mapsto f(x)\,g(x)$

Remarque

On peut aussi écrire le produit de deux fonctions $\forall x\in D \qquad (f\,g)(x)=f(x)\,g(x)$

Toujours dans le cours d'algèbre, on dira :

L'ensemble (E) possède une structure d'anneau commutatif unitaire (l'élément neutre étant la fonction constante égale à 1 sur D).

© Gérard Hirsch – Maths54

Attention

(E) n'est pas un anneau d'intégrité (c'est-à-dire que le produit de deux fonctions peut être nul sans qu'aucune des deux fonctions soit identiquement nulle) comme le montre l'exemple suivant :

$$f\ : x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \in [\,0\,;1\,] \\ x & si \quad x \in]\,1\,;2\,] \end{cases} \text{ et } g\ : x \mapsto \begin{cases} x & si \quad x \in [\,0\,;1\,] \\ 0 & si \quad x \in]\,1\,;2\,] \end{cases}$$

Le produit $f\ g \quad x \mapsto 0 \qquad si \quad x \in [\,0\,;2\,]$ est la fonction nulle sur $[\ 0\ ;2\,]$ bien que ni f ni g ne soit la fonction nulle.

2.5. Quotient de deux fonctions

Définition

On définit sur $D = D_f \cap D_g$ le quotient $\dfrac{f}{g}$ tel que pour tout x de D tel que $g(x) \neq 0$ par

$$\frac{f}{g}\colon x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

On peut aussi écrire le quotient de deux fonctions tel que pour tout x de D tel que $g(x) \neq 0$ par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ deux fonctions définies sur l'intervalle $]-1;1[$

La somme $f+g\ : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ est définie sur $]-1;1[$

Le produit $f\ g\ : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}.\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x^2-1}$ est défini sur $]-1;1[$

Le quotient $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}} = \dfrac{x-1}{x+1}$ est défini sur $]-1;1[$

© Gérard Hirsch – Maths54

Remarque

le quotient $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est même défini sur $\left]-1;1\right]$

3. Composition de deux fonctions

Définition

f et g sont deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g

On appelle D l'ensemble des éléments x de D_f tels que $f(x) \in D_g$

La composée $g \circ f$ ("*g* rond *f*") est la fonction d'ensemble de définition D telle que $(g \circ f)(x) = g\left[\, f(x) \,\right]$

Dans l'écriture $g \circ f$ la première application est *f* et la seconde est *g*

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ *et* $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

On a $D_f = \mathbf{R}$ et $D_g = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \left\{\, 0 \,\right\}$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 - 1 \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \in D = \mathbf{R} - \left\{\, -1 \,;\, 1 \,\right\}$

la composée des deux applications *f* et *g* dans cet ordre est

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[(x^2-1)\right] = \frac{1}{x^2-1}$$

et donc
$$\begin{aligned} g \circ f \,:\, & \mathbf{R} - \left\{-1,1\right\} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\begin{aligned} f :\ & \left]-1;1\right] \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$

Calculer $f \circ f = f^2$

$$\forall x \in \left]-1;1\right[\qquad f^2(x) = (f o f)(x) = f\left[\frac{1-x}{1+x}\right] = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = x$$

et donc $\begin{aligned} f^2 :\ & \left]-1;1\right] \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x \end{aligned}$

Propriété

La composition des applications est associative $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

mais attention ! elle n'est pas commutative $g \circ f \neq f \circ g$

Exemple

Soit $\begin{aligned} f :\ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto 2x+3 \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g :\ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$

alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g\left[2x+3\right] = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

et $\forall x \in \mathbf{R}$ $(f \circ g)(x) = f\left[x^2\right] = 2x^2 + 3$

et donc $\begin{aligned} g \circ f :\ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$ *et* $\begin{aligned} f o g :\ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto 2x^2 + 3 \end{aligned}$

par conséquent $g \circ f \neq f \circ g$ (même si les deux compositions existent)

Attention

Il ne faut pas confondre le produit de deux fonctions et la composition de ces deux fonctions.

Exemple

Considérons les deux fonctions $f : x \mapsto x-1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, ces deux fonctions sont définies sur $D=\mathbf{R}$

La fonction produit $f\,g$ est la fonction $f\,g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$

La fonction composée $g \circ f$ est la fonction $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[(x-1)\right] = \dfrac{1}{(x-1)^2+1}$

Soit

$$\begin{aligned} g \circ f : \ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} \end{aligned}$$

4. Les formules de changement de repère (par translation)

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$ et (C) est la courbe représentative de $y=f(x)$ dans ce repère. Soit Ω le point de coordonnées (a,b) dans le repère $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$. alors

$\overrightarrow{O\Omega} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$

Quelle est l'équation de la courbe (C) dans le nouveau repère $(\Omega;\vec{i}\ ;\vec{j})$?

Désignons par (x,y) les (anciennes) coordonnées d'un point M du plan dans le repère $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$

Vectoriellement, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et par (X,Y) les (nouvelles) coordonnées du même point M dans le repère $(\Omega;\vec{i}\ ;\vec{j})$

De même, vectoriellement $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

La relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ donne par passage aux coordonnées

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

qui sont les formules de changement de repère (par translation)

5. Propriétés particulières de certaines fonctions (réduction de l'intervalle d'étude)

5.1. Imparité (Centre de symétrie)

Définition

Une fonction *f* est dite impaire si :

$$\begin{cases} x \in D \Leftrightarrow -x \in D & (\textit{le domaine } D \textit{ doit être symétrique par rapport à l'origine}) \\ f(-x) = -f(x) & \forall x \in D \end{cases}$$

La courbe représentative de *f* admet l'origine comme centre de symétrie

Remarque

1) Pour étudier une fonction impaire *f*, il suffit de l'étudier sur $E = D \cap [\,0;+\infty\,[$

Si (Γ) est la courbe représentative de la restriction de f à E, la courbe (C) représentant les variations de la fonction *f*, s'obtient en complétant (Γ) par symétrie par rapport à l'origine O.

2) Si $D = \mathbf{R}$, alors la condition $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ est automatiquement vérifiée

Exemple

Les fonctions suivantes sont impaires :

$x \mapsto x$ (identité) $\quad x \mapsto x^3$ (élévation au cube) $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\textit{sur } D = \mathbf{R}^*$ (inverse)

$x \mapsto \sin x$ (sinus) $\quad x \mapsto \tan x$ $\textit{sur } D = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ (tangente)

Plus généralement le point $I(\,a\,;\,b\,)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de *f* si :

$$\begin{cases} a+x\in D \Leftrightarrow a-x\in D \quad (\textit{le domaine } D \textit{ doit être symétrique par rapport à } a) \\ f(a+x)+f(a-x)=2b \qquad \forall x\in D \end{cases}$$

Remarque

Pour étudier une fonction admettant le point $I(a;b)$ comme centre de symétrie, il suffit de l'étudier sur $E = D\cap[\,a;+\infty\,[$

Si (Γ) est la courbe représentative de la restriction de *f* à *E*, la courbe (C) représentant les variations de la fonction *f*, s'obtient en complétant (Γ) par symétrie par rapport au point $I(a;b)$

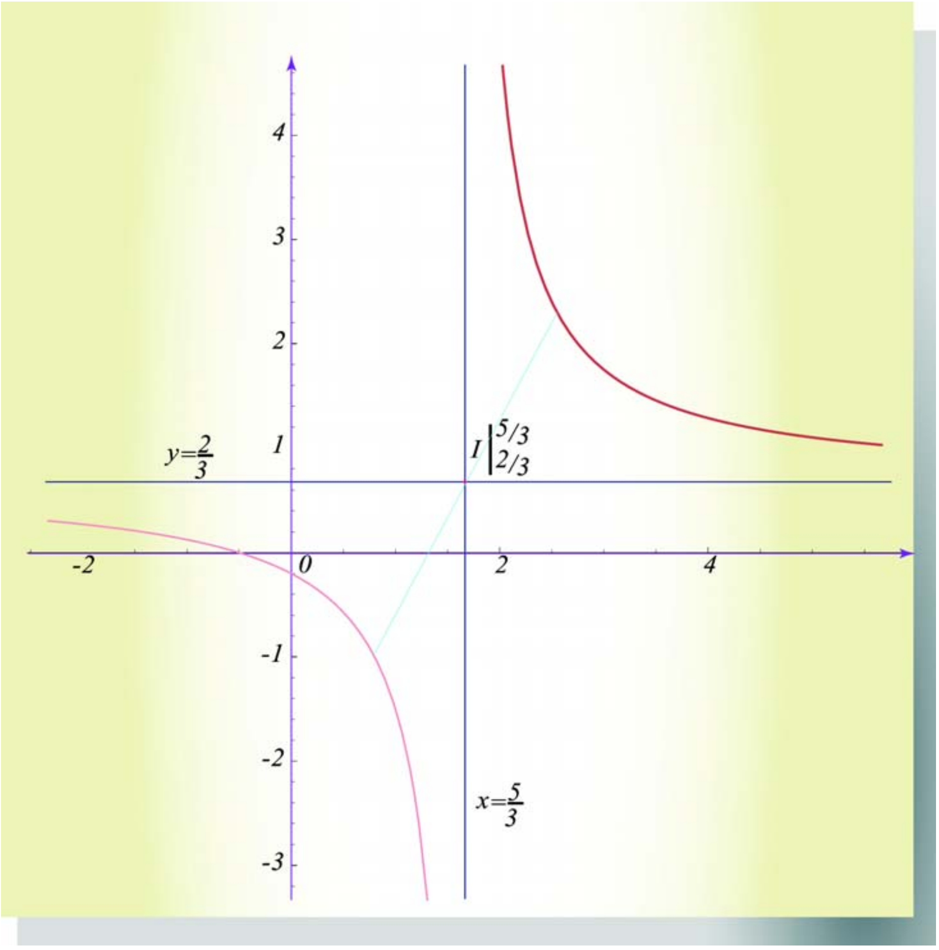
Exemple

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x-5}$ est définie sur $D = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$. Sa représentation graphique admet le point $I(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3})$ comme centre de symétrie.

En effet $f(\dfrac{5}{3}+x)+f(\dfrac{5}{3}-x) = \dfrac{2(\frac{5}{3}+x)+1}{3(\frac{5}{3}+x)-5} + \dfrac{2(\frac{5}{3}-x)+1}{3(\frac{5}{3}-x)-5} = \dfrac{\frac{13}{3}+2x}{3x} + \dfrac{\frac{13}{3}-2x}{-3x} = \dfrac{4}{3}$

L'étude de cette fonction s'effectue seulement sur l'intervalle $E = \left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[$

Représentation graphique de la fonction :



5.2. Parité (Axe de symétrie)

Définition

Une fonction f est dite paire si :

$$\begin{cases} x \in D \Leftrightarrow -x \in D \ \ (le\ domaine\ D\ \ doit\ \ être\ \ symétrique\ \ par\ rapport\ \ à\ l'origine) \\ f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D \end{cases}$$

En repère orthogonal ,la courbe représentative de f admet l'origine comme centre de symétrie

Remarque

Pour étudier une fonction paire f, il suffit de l'étudier sur $E = D \cap [\ 0;+\infty\ [$

Si (Γ) est la courbe représentative de la restriction de f à E, la courbe (C) représentant les variations de la fonction f, s'obtient en complétant (Γ) par symétrie par rapport à l'axe y'Oy

Exemple

Les fonctions suivantes sont paires :

$x \mapsto x^2$ (élévation au carré) $x \mapsto x^4$ (élévation à la puissance 4)

$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ (valeur absolue) $x \mapsto \cos x$ (cosinus)

Plus généralement, en repère orthogonal, la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f si :

$$\begin{cases} a + x \in D \Leftrightarrow a - x \in D \quad (le \ \ domaine \ \ D \ \ doit \ \ être \ \ symétrique \ \ par \ \ rapport \ \ à \ \ a) \\ f(a + x) = f(a - x) \qquad \forall x \in D \end{cases}$$

Remarque

Pour étudier une fonction admettant la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie de la courbe représentative de f, il suffit de l'étudier sur $E = D \cap [\, a; +\infty\, [$

Si (Γ) est la courbe représentative de la restriction de f à E, la courbe (C) représentant les variations de la fonction f, s'obtient en complétant (Γ) par symétrie par rapport à l'axe $x = a$.

Remarque

Pour un axe de symétrie, il est nécessaire que le repère soit orthogonal

Exemple

La fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 1$ est définie sur $D = \mathbf{R}$. Sa représentation graphique admet la droite d'équation $x = \frac{5}{4}$ comme axe de symétrie

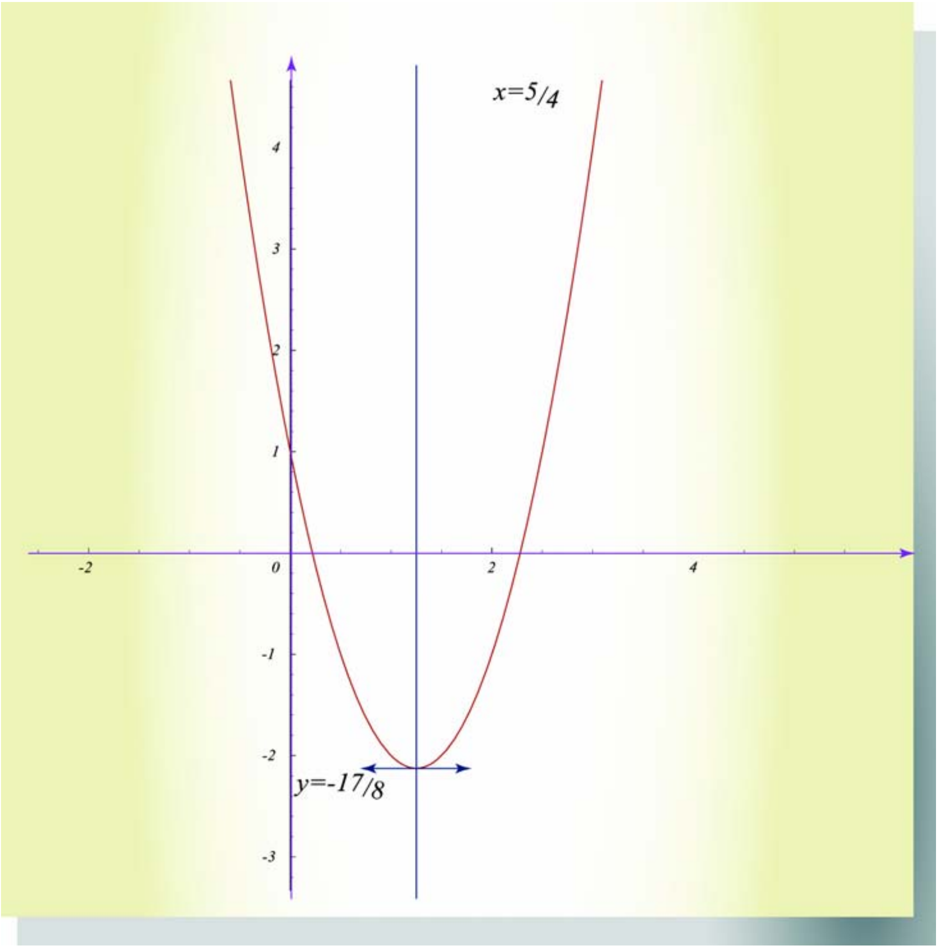
En effet $f(\frac{5}{4} + x) = 2(\frac{5}{4} + x)^2 - 5(\frac{5}{4} + x) + 1 = \frac{25}{8} + 5x + 2x^2 - \frac{25}{4} - 5x + 1 = -\frac{17}{8} + 2x^2$

© Gérard Hirsch – Maths54

et $f(\frac{5}{4}-x)=2(\frac{5}{4}-x)^2-5(\frac{5}{4}-x)+1=\frac{25}{8}-5x+2x^2-\frac{25}{4}+5x+1=-\frac{17}{8}+2x^2$

Puisque $f(\frac{5}{4}+x)=f(\frac{5}{4}-x)$,$\forall x\in\mathbf{R}$, la droite d'équation $x=\frac{5}{4}$ est bien axe de symétrie de la courbe représentative de f, et l'étude de cette fonction s'effectue seulement sur l'intervalle $E=\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$

Représentation graphique de la fonction :



Attention

La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires et donc n'admettent ni axe de symétrie, ni centre de symétrie.

Une calculette graphique permet de visualiser la représentation de la fonction

$f\ :\ x \mapsto \dfrac{-3x^2+10x-8}{x^2-4x+3}$ *définie sur* $\mathbf{R}-\{1,3\}$ qui n'admet ni axe de symétrie, ni centre de symétrie.

Remarque

Toute fonction *f* définie sur une partie *E* de $\mathbf{R}$ admettant le point 0 pour centre de symétrie est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et cette décomposition est unique.
En effet : si $f=g+h$ où g est paire et h est impaire, on a

$$f(x)=g(x)+h(x) \text{ et } f(-x)=g(x)-h(x)$$

d'où

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right] \quad \textit{et} \quad h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$$

Réciproquement, les fonctions g et h ainsi déterminées à partir de f sont respectivement paire et impaire et vérifient $f=g+h$

Exemple

La fonction $f\ :x\mapsto -2x^3+5x^2-x+1$ est définie sur $D=\mathbf{R}$

Cette fonction *f* est la somme

- de la fonction *g* paire $g : x \mapsto 5x^2+1$
- et de la fonction *h* impaire $h : x\mapsto -2x^3-x$

5.3. Périodicité

Définition

Une fonction *f* est dite périodique de période *T* (ou *T*-périodique) s'il existe un nombre *T* positif tel que :

$$\begin{cases} x\in D \Leftrightarrow x+T\in D \\ f(x+T)=f(x) \qquad \forall x\in D \end{cases}$$

Si T est une période pour f, tout multiple de T non nul (c'est à dire $2T$, $3T$,4T....) est aussi une période pour f. Dans les cas usuels, l'une des périodes positives est plus petite que toutes les autres; c'est ce nombre qui est appelé plus précisément période de la fonction f et sera noté T (et par conséquent T doit être le plus petit possible)

Il faut connaître la période des fonctions trigonométriques suivantes :

Si $\omega \neq 0$

- la fonction $x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$
- la fonction $x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$
- la fonction $x \mapsto \tan(\omega x + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{\pi}{|\omega|}$

Exemple

La fonction $f_1 : x \mapsto \sin(3x + \frac{\pi}{5})$ admet pour période $T = \dfrac{2\pi}{3}$

Pour déterminer la période de la fonction $f_2 : x \mapsto \cos^2 x$, il est nécessaire de linéariser cette expression trigonométrique, puisque $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, la fonction f_2 admet pour période $T = \pi$

De même la fonction $f_3 : x \mapsto \cos(\frac{x}{3})$ admet pour période $T = 6\pi$

Pour étudier une fonction f de période T, il suffit de l'envisager sur $E = D \cap [\, \alpha ; \alpha + T \,[$ avec α réel quelconque. Si (Γ) est la courbe représentative de la restriction de f à E, la courbe (C) représentant les variations de la fonction f, s'obtient en complétant (Γ) par les arcs de courbe qui s'en déduisent par les translations de vecteur $k\vec{V}$ avec $k \in \mathbf{R}$ et $\vec{V}(T ; 0)$

© Gérard Hirsch – Maths54

6. Propriétés globales d'une fonction

Toutes les fonctions f considérées dans ce paragraphe sont définies sur D

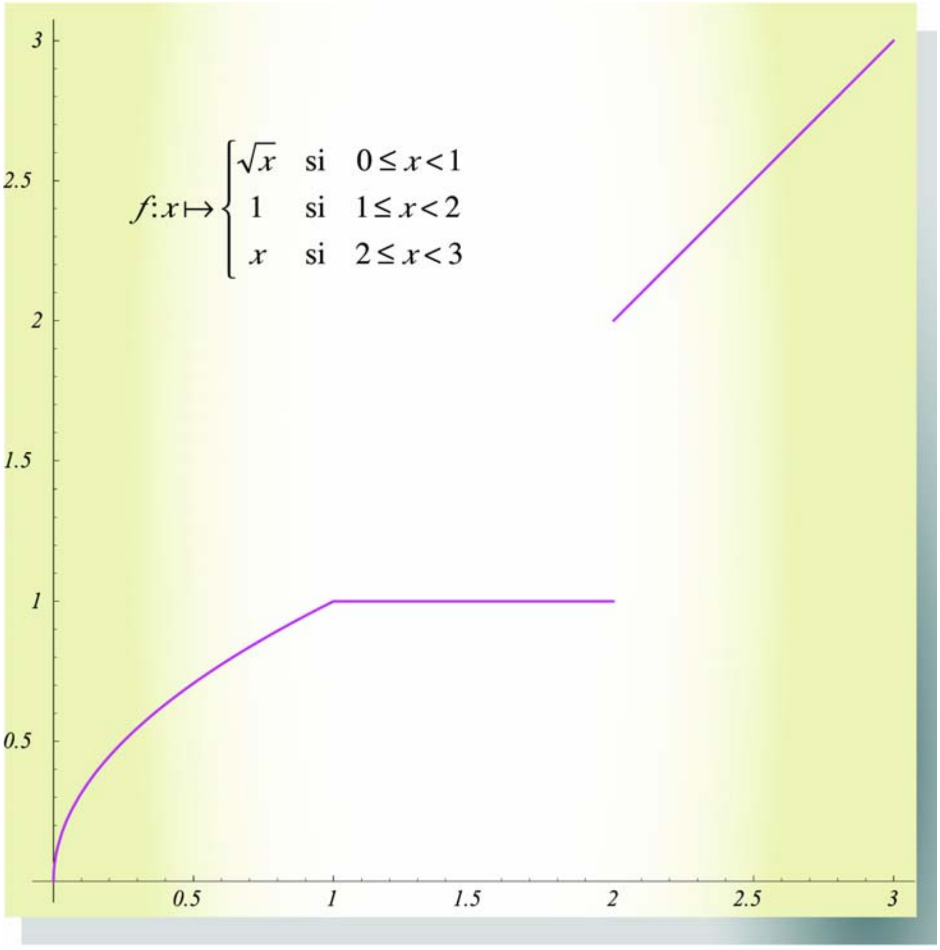
Soit I un intervalle contenu dans D

6.1. Fonction croissante

f est croissante si $\forall (x,x') \in I^2 \qquad x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')$

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \le x < 1 \\ 1 & si\ 1 \le x < 2 \\ x & si\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



Remarque

Cette fonction est croissante sur $[\,0,3\,]$ mais elle est discontinue en $x_0 = 2$

6.2. Fonction décroissante

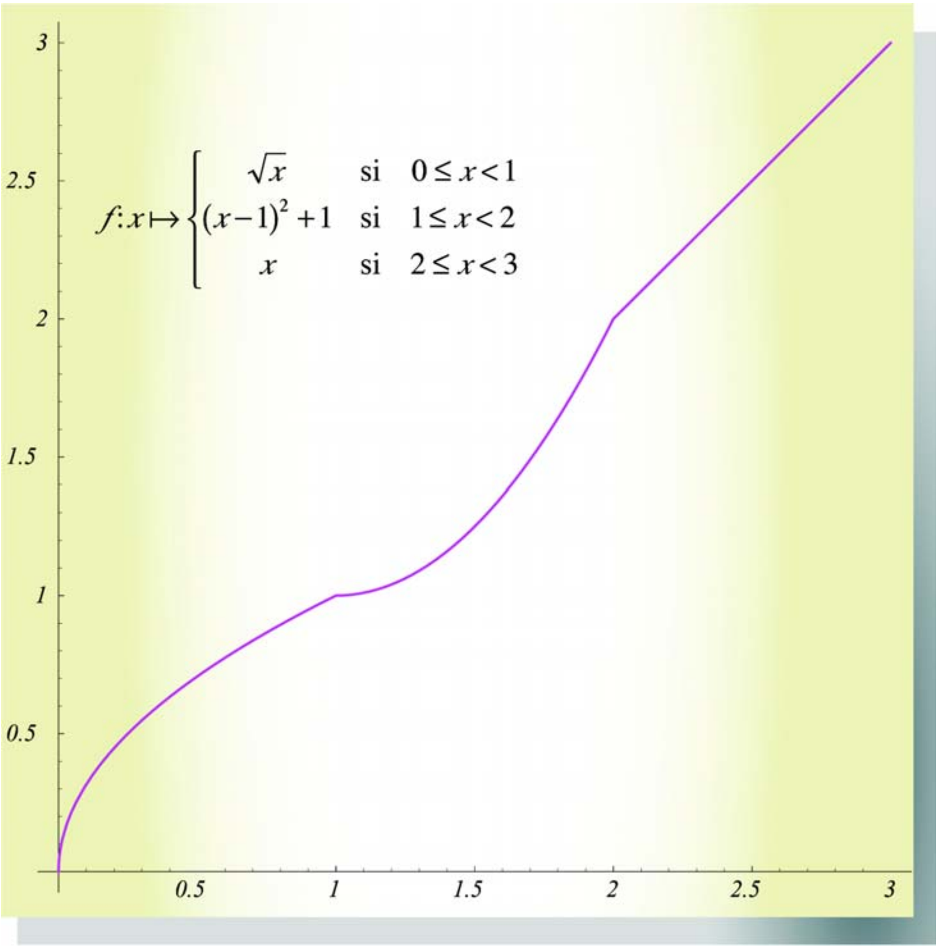
f est décroissante si $\forall (x,x') \in I^2 \qquad x \le x' \Rightarrow f(x) \ge f(x')$

6.3. Fonction strictement croissante

f est strictement croissante si $\forall (x,x') \in I^2 \qquad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

© Gérard Hirsch – Maths54

Exemple $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \le x < 1 \\ (x-2)^2 + 1 & si\ 1 \le x < 2 \\ x & si\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$



Remarque

Cette fonction est strictement croissante et continue sur $[\,0, 3\,]$

6.4. Fonction strictement décroissante

f est strictement décroissante si $\forall (x, x') \in I^2 \qquad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

6.5. Fonction monotone

f est monotone si f est croissante ou décroissante

6.6. Fonction strictement monotone

f est strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante

Remarque

Sur un intervalle donné, une fonction peut être ni croissante ni décroissante

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1 \quad sur \quad \left[-5 \ ; 3 \right]$ n'est ni croissante, ni décroissante

© Gérard Hirsch – Maths54