CHAPITRE I : NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$

I. ETUDE ALGEBRIQUE

1. Forme algébrique

L'écriture $\boldsymbol{z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}}$ est appelée forme algébrique du nombre complexe **z**.
a est la partie réelle de **z** noté **Re(z)** et *b* est la partie imaginaire de **z** noté **Im(z).**

Propriétés

Soient **z** et **z'** deux nombres complexes.

- **z** est réel $\Leftrightarrow \mathbf{Im(z) = 0}$ et **z** est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathbf{Re(z) = 0}$.
- $\mathbf{z = z'} \Leftrightarrow \mathbf{Re(z) = Re(z')}$ et $\mathbf{Im(z) = Im(z')}$.
  En particulier $\mathbf{z = 0} \Leftrightarrow \mathbf{Re(z)} = 0$ et $\mathbf{Im(z) = 0}$.

2. **Conjugué d'un nombre complexe**.
   le conjugué du nombre complexe $\mathbf{z} = \boldsymbol{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}}$ **est** $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Propriétés

Soit z un nombre réel tel que $\boldsymbol{z = a + ib}$. On a :

- $\bar{\bar{z}} = z$. $\quad . z + \bar{z} = 2Re(z) \quad . z - \bar{z} = 2i\, Im(z) \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$ et $z \neq 0$.

Propriétés

$$\forall \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$$

- $\overline{\boldsymbol{z + z'}} = \bar{\boldsymbol{z}} + \bar{\boldsymbol{z}}'$. $\quad \overline{-\boldsymbol{z}} = -\bar{\boldsymbol{z}} \quad \overline{\boldsymbol{zz'}} = \bar{\boldsymbol{z}}\,\bar{\boldsymbol{z}}'$
- $\overline{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}\right)} = \frac{\mathbf{1}}{\bar{\boldsymbol{z}}}$ $(z \neq 0)$ $\quad \overline{\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z'}}\right)} = \frac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\bar{\boldsymbol{z}}'}$ $(z' \neq 0)$ $\quad \overline{\boldsymbol{z^n}} = \bar{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{n}} (z \neq 0)$

3. Module d'un nombre complexe

Le module de $\boldsymbol{z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}}$ est le réel positif : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés

$\forall \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}$ **et** $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z^n| = |z|^n$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|\frac{z}{z'}\right|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$(inégalité triangulaire)

II. ETUDE TRIGONOMETRIQUE

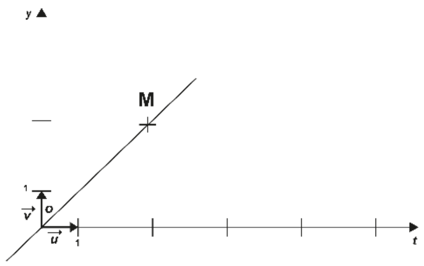
1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- **Argument d'un nombre complexe non nul**

Soit **z** un nombre complexe non nul et **M** son point image dans le plan complexe.
On appelle argument de **z** toutes mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, on note $\arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

θ est tel que : $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$



Exemple 1 : soit $z = 1 - i$, déterminer un argument de z.

- **Interprétation géométrique**

Si z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$, arg(z) est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{w})$.
$A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan alors
$\arg(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
si A, B et C sont des points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C avec $A \neq B, A \neq C$ alors
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes, d'arguments respectifs θ et θ'

- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}; z \neq 0$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$,
  $k \in \mathbb{Z}, \quad z' \neq 0$.

- **Formule de MOIVRE :** $\forall\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

2. **Forme géométrique :**

$z \in \mathbb{C}$, et $r = |z|$, θ un argument z. la forme trigonométrique de z est l'écriture
$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Forme algébrique
$z = a + ib$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$

Forme trigonométrique
$Z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)$; $r > 0$

$a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$

Remarque :
Forme exponentielle d'un nombre complexe : $z = re^{i\theta}$
Forme polaire d'un nombre complexe : $z = [r, \theta]$

Formule de EULER :
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et de façon générale
$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$

Ces formules sont utilisées pour linéariser $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$

Exemple 2 : linéariser $\sin^3\theta$

3. **Racines n-ièmes d'un nombre complexe**

Soit z un nombre non nul et n entier naturel ($n \geq 2$)
On appelle racine n-ième de z tout nombre complexe u tel que $u^n = z$
$z = re^{i\theta}$ et $u = \rho e^{i\alpha}$, on a donc :
$u^n = z \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\alpha}\right)^n = re^{i\theta}$

$$u^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \ ; \ k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Donc les racines $n^{\text{ième}}$ de z sont les nombres complexes $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
Les points images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$
Exemple 3 : Déterminer les racines cubiques de 1.

III. UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

1. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

- **Racines carrées d'un nombre complexe**

Soit à déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$

On a : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ et $|z^2| = x^2 + y^2$, $|3 - 4i| = 5$

$$z^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

(S) : a deux solution (2,-1) et (-2, 1), les racines carrées de $3 - 4i$ sont $2 - i$ et $-2 + i$

- **Equation du 2^{nd} degré**

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ $\quad a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ

- Si $\Delta = 0$ alors(E) a une solution double $-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solution distinctes $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Exemple :
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_1): $z^2 + z + 1 = 0$,
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_2) : $iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

- **Equations se ramenant au 2^{nd}degré**

Soit l'équation $(E): z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$
1. Démontrer que $z_1 = 5i$ est solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. **Géométrie et nombres complexes**
- **Configuration du plan et nombres complexes**

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A	$AB = AC$ et mes $\widehat{A} = \theta$ $0 < \theta < \pi$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}ou\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$ $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Triangle ABC équilatéral	$AB = AC$ et mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}}ou\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$AB = AC$ et mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	mes $\widehat{A} = mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Exemple : Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(1+i), B(-1+4i), C(3+i)$
1. Placer les points A, B, C
2. Donner la nature du triangle ABC
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC est un triangle.

- **Les lieux géométriques et nombres complexes**

Soients $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux nombres complexes et R un nombre réel positif

L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

- ✓ $|z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R
- ✓ $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle de centre $A(x_A\ , y_A)$ et de rayon R
- ✓ $|z - z_A| = \ |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice d'application

Déterminer le lieu des points M(z) vérifiant : $|z - 1 + 2i| = 3$

IV. TRANSFORMATIONS PONCTUELLES DANS LE PLAN COMPLEXE :

Le plan P est muni du repère orthonormé$\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Une transformation du plan est une application.

$$F: P \longrightarrow P$$
$$M \rightarrow M'$$

Si z désigne l'affixe du point M et z' celle du point M', la transformation complexe correspondant à F est une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Le tableau ci-dessous résume quelques-unes d'entre elles.

F : P → P	f : z ↦ z'
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a	$z' = z + a$
Rotation de centre O et d'angle θ	$z' = az = (\cos\theta + i\sin\theta)z = e^{i\theta}z$ $\lvert a\rvert = 1, \cos\theta = \dfrac{Re(a)}{\lvert a\rvert}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(a)}{\lvert a\rvert}$
Homothétie de centre O et de rapport k	$z' = kz \quad (k \in R; k \neq 1)$
Homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ et de rapport k $(k \in R; k \neq 1)$	$z' = kz + b, (k \in R; k \neq 1)$
Symétrie orthogonal d'axe (OI)	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonal d'axe (OJ)	$z' = -\bar{z}$
Similitude direct de rapport $k > 0$, d'angle θ, de centre O	$z' = az = k(\cos\theta + i\sin\theta)z = ke^{i\theta}z$
Similitude direct de rapport $k > 0$, d'angle θ, de centre ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$	$z' = az + b = k(\cos\theta + i\sin\theta)z + b = ke^{i\theta}z + b$ $\lvert a\rvert = k, \cos\theta = \dfrac{Re(a)}{\lvert a\rvert}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(a)}{\lvert a\rvert}$

Exemple :

Soit
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto (1-i)z + 2 - 3i$$

1. Soit f associé à la similitude directe S. Caractériser la similitude S.
2. Trouver l'image de la droite (D) d'équation $x - 2y + 1 = 0$
3. Trouver l'image de la droite $C = \{M \in P / \ |\bar{z} - 1 + i| = 3\}$

V. <u>INVERSION COMPLEXE</u>

Définition

La transformation du plan associée à la transformation complexe $f: z \mapsto \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) est appelée inversion complexe

Expression analytique

Soit M(z) et M'(z') l'image de M par l'inversion complexe (z non nul).

On pose z=x+iy et z'=x'+iy'. On a :

$z' = \frac{1}{z}$ *équivaut* à $\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

Propriété

L'inversion complexe est involutive c'est-à-dire si M'est l'image de M alors M est l'image de M' par l'inversion complexe.

z= $\frac{1}{z'}$ *équivaut* à $\begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \frac{-y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}$

<u>**NB**</u> **:** l'image d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle.

<u>**Exercice résolu**</u>

Quelle est l'image par l'inversion complexe de :

- ✓ La droite (D_1) : -2x + y = 0 privée de O
- ✓ La droite (D_2) : 2x – 3y + 2 = 0
- ✓ La droite (D_3) : x = 3

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1 :

Déterminer les formes trigonométriques, exponentielles et polaires des complexes :

$z_1 = -2i$; $z_2 = -5$; $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $\quad z_4 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4(1+i)}{-\sqrt{3}-i}$

EXERCICE 2 :

Soit le nombre complexe $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)$

1) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe Z

2) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z

3) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

EXERCICE 3 :

a. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$

Mettre z sous trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans C l'équation $z^3 + 8 = 0$ (On remarquera que cette équation a une racine évidente réelle).
En déduire les solutions dans C de l'équation $(iz-1)^3 + 8 = 0$

EXERCICE 4 :

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = e^{2ix} + e^{-2ix}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ b) $z_2 = e^{2ix} - e^{-2ix}, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

c) $z_3 = e^{4ix} + e^{2ix}, x \in [0; \pi]$ d) $z_4 = 1 - e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$

EXERCICE 5 :

cRésoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Utiliser les résultats pour factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes de la variable z, en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}$ des mêmes polynômes :

$(E_1): z^2 + 1 = 0$; $(E_2): z^3 + 8 = 0$; $(E_3): z^5 - 1 = 0$;

EXERCICE 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation

(E) : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ d'unité 2 cm. A est le point d'affixe $-2-i$. On considère l'application f du plan P privé de A dans P, qui à tout point M du plan distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+2+i}$. On pose $= x + iy$, avec x et y réels .

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit un nombre imaginaire pur .

3. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit un nombre réel.
4. Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2})$

EXERCICE N°8

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan F qui a pour écriture complexe :

a. $z' = z + 3i$ b. $z' = 2z + 3i$ c. $z' = -2iz + 4 + i$

d. $z' = -iz - 6i$ e. $z' = iz + 5$ f. $z' = (1 + i)z - i$.

EXERCICE N°9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan.

Posons : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$.

M' est l'image de M par la transformation du plan F définie par : $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$.

1. Déterminer l'écriture complexe de F.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de F.

EXERCICE 10 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v)

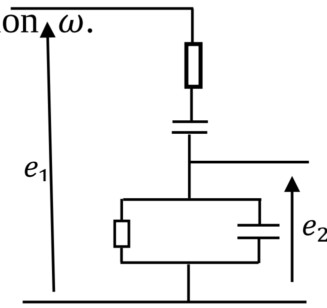
1. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2
   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK.
   On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K.
   a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique
   b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.
   c. Justifier que $z_K = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_H = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout M d'affixe z différent de 0 associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$

2.
   a. Déterminer et placer les points images de B et C par f.
   b. Déterminer les points invariants par f.
3.
   a. Montrer que pour tout point M distinct de O, on a : $OM \times OM' = 4$
   b. Déterminer arg(z') en fonction de arg(z)
4. Soient K' et H' les images respectives de K et H par f.
   a. Calculer OK' et OH'.
   b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Problème

On considère le filtre ci-contre.



À l'entrée de ce filtre, on applique une tension sinusoïdale e_1 de pulsation ω.
À la sortie, on recueille une tension sinusoïdale e_2 de pulsation ω.
On désigne par T la fonction de transfert définie par $\omega \longmapsto \mathrm{T}(\omega)$.
L'application des lois de l'électricité permet d'écrire :
$\mathrm{T}(\omega) = \frac{1}{1+\frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}}$ avec $Z_1(\omega) = R + \frac{1}{jC\omega}$ et $Z_2(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$
R et C sont des constantes réelles strictement positives.

1. Démontrer que : $\mathrm{T}(\omega) = \frac{1}{3+j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$.

2. On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan décrit par le point M d'affixe $\mathrm{T}(\omega)$ lorsque ω parcourt $]0; +\infty[$.

a) On considère la fonction $h: \omega \longmapsto RC\omega - \frac{1}{RC\omega}$, $\omega \in]0; +\infty[$.

Etudier les variations de la fonction h et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Quel est l'ensemble (D) décrit par m d'affixe $z = 3 + jh(\omega)$.

c) Quel transformation associe au point m d'affixe $z = 3 + jh(\omega)$ le point M d'affixe $Z = \mathrm{T}(\omega)$?

En déduire l'ensemble (E) d'écrit par le point M.

d) Tracer sur une même figure les ensembles (D) et (E). On prendra pour unité graphique :6 cm.

On représentera le point m_0 d'affixe $3+j$ et son image M_0 par la transformation déterminée plus haut.