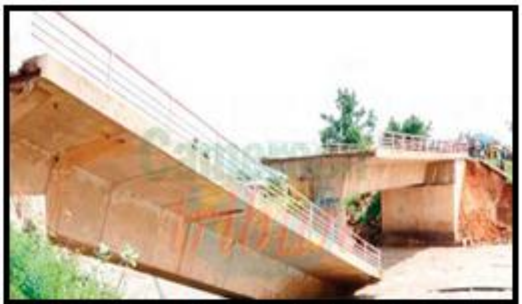
MODULE 2 : **MOUVEMEMENTS ET INTERACTIONS : EVOLUTIONS TEMPORELLES DES SYSTEMES MECANIQUES**

LECON5:Oscillateurs mécaniques

SITUATION PROBLEME:



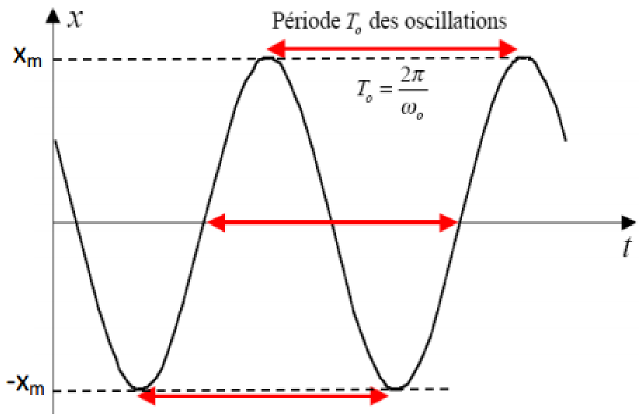
Rupture d'un point (Maroua)

Toute structure mécanique (ponts, poutres, amortisseurs d'un véhicule….) possède une ou plusieurs fréquences propres, et si la structure est soumise à une impulsion comme le vent, le passage d'un camion dans cas des poutres, des ponts,… ou soumise à des impulsions comme les trous, les bosses dans le cas des véhicules…. ; il peut y avoir des oscillations tellement violentes que cette structure se rompt ou qu'elle soit à l'origine de l'inconfort et l'insécurité des passagers.

a) Quel est le phénomène physique à l'origine de ces oscillations violentes ? expliquez-le.
b) Comment peut-on alors le définir ?

1. Généralités

- **Un mouvement périodique** est un mouvement qui se répète de manière identique à des intervalles de temps égaux.
- **Un oscillateur mécanique** est un système mécanique animé d'un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre.
- **La période du mouvement** est l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point et dans le même sens. Noté T (en seconde)
- **Une oscillation** est le mouvement effectué par le mobile pendant une période.
- **Oscillations :** mouvement de va et vient autour d'une position moyenne.
- **Vibration :** oscillations très rapides
- **La fréquence du mouvement** est le nombre d'oscillations effectuées pendant une seconde : $f = \frac{1}{T}$ en hertz (H_z).
- **La pulsation** ω est une caractéristique d'un mouvement périodique donnée par $\omega = 2\pi f$. Ainsi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$; ω en rad/s.
- **Un oscillateur libre** est un oscillateur qui n'est soumis à aucune excitation extérieure. C'est-à-dire une fois écarté de sa position d'équilibre, il est abandonné à lui-même.
- **Un mouvement rectiligne sinusoïdal** est un mouvement dont la trajectoire est une droite et la position ou l'élongation x une fonction sinusoïdale temps.



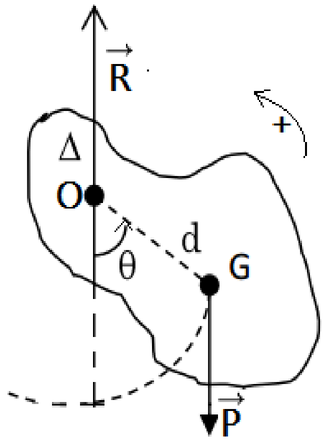
La loi horaire est donc de la forme : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi')$. Elle est solution de l'équation différentielle linéaire : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (à démontrer). x est l'élongation ou la position en mètres, ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur ; x_m l'amplitude ou valeur absolue de l'élongation maximale ($x_m \succ 0$) et φ la phase initiale en radians. $x \in [-x_m ; x_m]$

- **Un mouvement circulaire sinusoïdal** est un mouvement dont la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle et la position ou l'élongation θ une fonction sinusoïdale temps.
  La loi horaire est donc de la forme : $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi')$. Elle est solution de l'équation différentielle linéaire : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$. θ est l'élongation ou la position angulaire en radians, ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur ; θ_m l'amplitude. $\theta \in [-\theta_m ; \theta_m]$
- **Un oscillateur harmonique** est un oscillateur dont l'évolution temporelle est décrite par une fonction sinusoïdale.

On distingue les oscillateurs mécaniques en translation et les oscillateurs mécaniques en rotation.

2. Oscillateurs mécaniques en rotation

2.1. Le pendule pesant



a) Description

On appelle pendule pesant, tout système qui oscille autour d'un axe (Δ) horizontal ne passant pas par son centre d'inertie G. La position d'équilibre d'un pendule pesant est celle pour laquelle le centre d'inertie G se trouve à la verticale et en dessous de l'axe (Δ).

b) Etude dynamique

Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on l'abandonne à lui-même, il effectue des oscillations de rotation autour de l'axe (Δ). Sa position est repérée par l'angle θ (voir figure).

-système: pendule pesant de masse m

-référentiel : Terrestre supposé galiléen

-bilan : le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ de l'axe.

-RFD : $M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

Or $M_\Delta(\vec{P}) = -mgOG\sin\theta$ et $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ rencontre l'axe (Δ).

$\Rightarrow -mgOG\sin\theta + 0 = J_\Delta \ddot{\theta}$ soit $\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}\sin\theta = 0$: c'est l'équation différentielle du mouvement d'un pendule pesant. Cette équation différentielle, à cause du terme $\sin\theta$ est non linéaire et par conséquent n'admet pas de solution fonction sinusoïdale du temps. Il est donc évident que de façon générale, le pendule pesant n'est pas un oscillateur harmonique.

Mais pour des oscillations de faible amplitude cette équation devient linéaire. En effet pour $\theta_m \prec 10°$ on a $\sin\theta \simeq \theta$ (en radiants) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{mgOG}{J_\Delta}$.

Dans le cas des oscillations de faible amplitude, le pendule pesant est un oscillateur harmonique et son mouvement, circulaire sinusoïdal de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgOG}{J_\Delta}}$, de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgOG}}$ et fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgOG}{J_\Delta}}$. Le terme propre signifie que ces grandeurs dépendent uniquement des caractéristiques de l'oscillateur.

c) Etude énergétique

Ici, il est question de retrouver les résultats ci-dessus en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Considérons comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal passant par la position d'équilibre du centre d'inertie G(position la plus basse de G).

Par définition $E_m = E_C + E_P$:

- Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m, $E_m = 0 + E_P = mgOG(1-\cos\theta_m)$
- Dans une position quelconque, $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgOG(1-\cos\theta)$ en absence des forces de frottement, E_m=constante

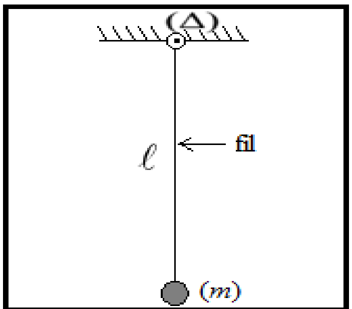
$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgOG(1-\cos\theta)\right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}J_\Delta\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + mgOG\frac{d(1-\cos\theta)}{dt} = 0$ or $\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2(\frac{d\dot{\theta}}{dt})\dot{\theta} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$

et $\frac{d(1-\cos\theta)}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\cos\theta}{d\theta} = \dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}J_\Delta(2\ddot{\theta}\dot{\theta}) + mgOG\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgOG\dot{\theta}\sin\theta = 0$ en divisant toute l'équation par $J_\Delta\dot{\theta}$ on retrouve l'équation différentielle de départ :

$\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}\sin\theta = 0$ pour des oscillations de faible amplitude on a : $\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}\theta = 0$.

On peut obtenir directement l'équation $\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}\theta = 0$ en utilisant l'approximation

$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ (θ en radians) dans l'expression de l'énergie mécanique (TAF).



Pendule simple dans sa position d'équilibre.

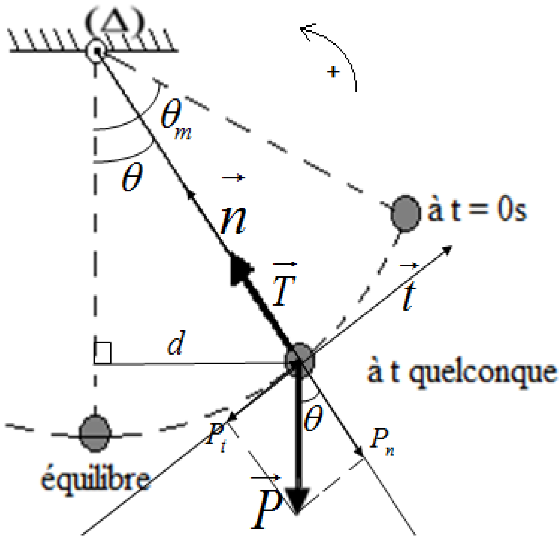
2.2.Pendule simple

a) Description

Un pendule simple est un oscillateur mécanique constitué d'un solide de masse m fixé à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ très grande devant les dimensions du

solide et dont l'extrémité supérieure est enroulée autour d'un axe horizontal (Δ).
Lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_m, puis lâché ; il oscille sous l'action de la pesanteur dans le plan vertical. Sa position à chaque instant est repérée par l'angle θ.

b) Etude dynamique



- Application du théorème de l'accélération angulaire au solide de masse m.
  - Système : pendule simple
  - Référentiel : Terrestre supposé galiléen
  - Bilan : le poids $\vec{P}$; la tension $\vec{T}$ du fil.
  - RFD : $M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

Or $M_\Delta(\vec{P}) = -Pd = -mg\ell\sin\theta$ et $M_\Delta(\vec{T}) = 0$ car $\vec{T}$ rencontre l'axe (Δ).

$\Rightarrow -mg\ell\sin\theta + 0 = J_\Delta\ddot{\theta}$ soit $\ddot{\theta} + \dfrac{mg\ell}{J_\Delta}\sin\theta = 0$ or $J_\Delta = m\ell^2 \Rightarrow$

$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$: c'est l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple.

- Application du théorème du centre d'inertie au solide de masse m.

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P}\begin{vmatrix} -P\sin\theta \\ -P\cos\theta \end{vmatrix} + \vec{T}\begin{vmatrix} 0 \\ T \end{vmatrix} = m\vec{a}\begin{vmatrix} a_t \\ a_n \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -P\sin\theta + 0 = ma_t \\ -P\cos\theta + T = ma_n \end{cases}$ la première équation devient $-mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta}$ car

$a_t = \dfrac{dV}{dt} = \ell\ddot{\theta}$. On retrouve ainsi l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$.

Pour des oscillations de faible amplitude ($\theta \prec 10°$) $\sin\theta \simeq \theta$: $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$ cette équation différentielle nous montre clairement que dans le cas des oscillations de faible amplitude, le pendule simple est un oscillateur harmonique. Son mouvement est circulaire sinusoïdale de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ et de loi horaire $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$. La phase initiale φ est déterminée en utilisant les conditions initiales.

c) Etude énergétique

- Montrons que l'énergie mécanique d'un pendule simple en absence de frottements est constante.

Considérons comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal passant par la position d'équilibre du solide.

On a $E_m = E_C + E_P$, à une position quelconque repérée par l'angle θ ; $E_C = \dfrac{1}{2}mV^2$ or $V = \ell\dot{\theta} \Rightarrow E_C = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ et

$E_P = mgz$, $z = \ell(1-\cos\theta) \Rightarrow E_P = mg\ell(1-\cos\theta)$ soit $E_m = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$.

$\dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)\right] \Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dfrac{d\dot{\theta}^2}{dt} + mg\ell\dfrac{d(1-\cos\theta)}{dt}$ or $\dfrac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2(\dfrac{d\dot{\theta}}{dt})\dot{\theta} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$ et

$\dfrac{d(1-\cos\theta)}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}.\dfrac{d\cos\theta}{d\theta} = \dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{1}{2}m\ell^2(2\ddot{\theta}\dot{\theta}) + mg\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta)$ or

$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow E_m = cte$: le pendule simple est un système conservatif en absence de frottements.

- En partant du fait que l'énergie mécanique d'un pendule simple est constante en absence de frottements, retrouvons l'équation différentielle du mouvement.

l'énergie mécanique est constante $\Rightarrow E_m = cte \Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)\right] = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}m\ell^2\dfrac{d\dot{\theta}^2}{dt} + mg\ell\dfrac{d(1-\cos\theta)}{dt} = 0$ or $\dfrac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2(\dfrac{d\dot{\theta}}{dt})\dot{\theta} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$ et $\dfrac{d(1-\cos\theta)}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}.\dfrac{d\cos\theta}{d\theta} = \dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow$

$\frac{1}{2}m\ell^2(2\ddot{\theta}\dot{\theta}) + mg\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow m\ell^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta) = 0$ Puisque $m\ell^2\dot{\theta} \neq 0$ d'où on obtient l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$.

Remarque:

- On retrouve les mêmes résultats en utilisant l'approximation $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ dans l'expression de l'énergie mécanique, pour des oscillations de faible amplitude (TAF).
- Deux systèmes mécaniques sont synchrones lorsqu'ils ont même fréquence c'est-à-dire même période.
- Lorsque la période des oscillations est indépendante de l'amplitude, les oscillations sont dites isochrones.
- Un pendule qui bat à la seconde a une période $T = 2s$.

d) Les lois du pendule simple

Ces lois ont été établies à partir d'expériences et sont vérifiable par l'expression de la période propre du pendule simple $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

➢ **Loi d'isochronisme de petites oscillations**

Pour des oscillations de faible amplitude ($\theta \prec 10°$), la période d'un pendule simple est indépendante de l'amplitude : on dit que les oscillations de faible amplitude sont isochrones.

➢ **Loi des masses**

La période T des oscillations d'un pendule simple ne dépend pas de la masse m du solide suspendu à l'extrémité du fil.

➢ **Loi des longueurs**

La période T des oscillations d'un pendule simple est proportionnelle à la racine carrée de la longueur ℓ du pendule.

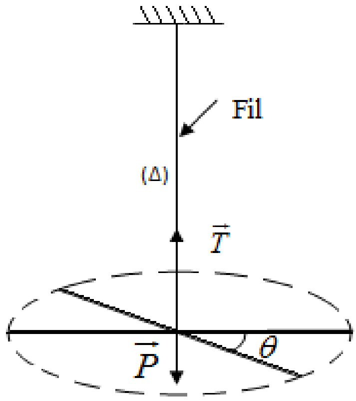
➢ **Influence de la pesanteur**

La période T des oscillations d'un pendule simple est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'intensité g de la pesanteur : c'est la loi du champ de pesanteur.

2.3.Pendule de torsion

a) Description

Nous prendrons comme exemple de pendule de torsion un système constitué d'une tige (t) de masse m, suspendue par son centre d'inertie G à un fil de torsion de masse négligeable de constante de torsion C. Lorsqu'on écarte la tige d'un angle θ_m par rapport à sa position d'équilibre autour de son axe de rotation (Δ) vertical puis lâché, elle oscille autour de (Δ) tout en restant dans le plan horizontal.



b) Etude dynamique

La tige de moment d'inertie J_Δ est repérée à chaque instant par l'angle θ et est soumise à l'action du couple de torsion de moment $M = -C\theta$ exercé par le fil.

- Système : pendule de torsion
- Référentiel : Terrestre supposé galiléen
- Bilan : le poids $\vec{P}$ de la tige, la tension $\vec{T}$ du fil et le couple de torsion de moment $M = -C\theta$
- RFD : $M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}) + M = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\Rightarrow 0 + 0 - C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$ car $M_\Delta(\vec{P}) = 0$ et $M_\Delta(\vec{T}) = 0$ soit $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$. C'est l'équation différentielle du mouvement.

Une solution de cette équation est de la forme $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ Le pendule de torsion a donc un mouvement circulaire sinusoïdale de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$ et de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$: c'est un oscillateur harmonique de rotation.

c) Etude énergétique

Le pendule est écarté d'un angle θ_m et lâché sans vitesse initiale. On a $E_m = E_C + E_{P_t}$:

- A l'instant initial : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$ car $E_C = 0J$ et $E_{P_t} = \frac{1}{2}C\theta_m^2$

- A un instant t quelconque : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$ or $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $\dot{\theta} = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow$

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \theta_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}C\theta_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ or } \omega_0^2 = \frac{C}{J_\Delta} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}C\theta_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right] \text{donc } E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

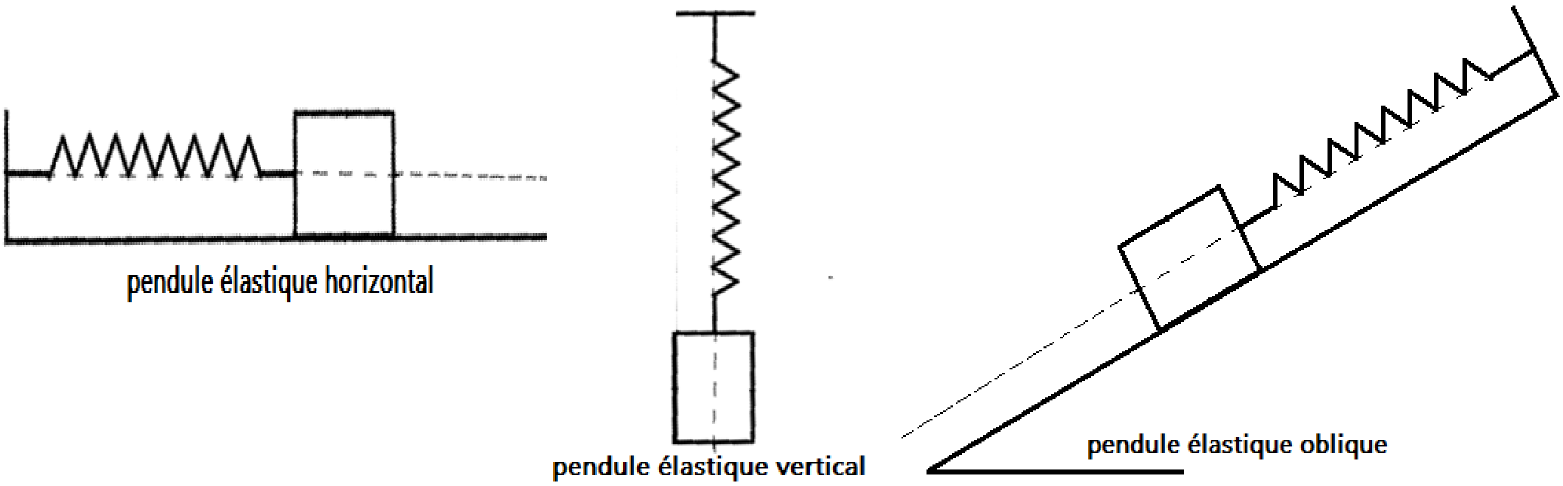
En absence de frottements l'énergie mécanique d'un pendule de torsion est constante. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude.

TAF : retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule de torsion ci-dessus en partant de la conservation de l'énergie mécanique.

3. Oscillateurs mécaniques en translation : pendule élastique

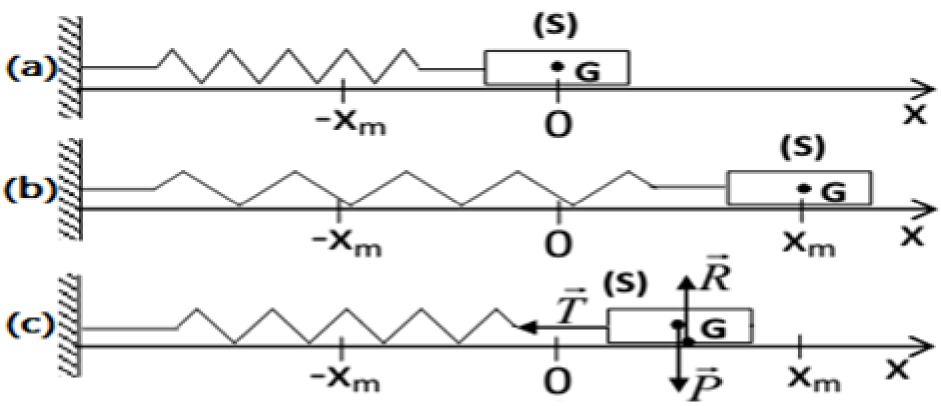
Un pendule élastique est constitué d'un solide (s) de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort (R)de masse négligeable, de raideur k. Le solide, déplacé de sa position d'équilibre oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre.

Dans la suite, nous allons étudier deux cas de figure : les pendules élastiques horizontal et vertical. Le pendule élastique oblique sera étudié dans le cadre des travaux dirigés.



3.1.Pendule élastique horizontal

A l'extrémité d'un ressort (R) horizontal, dont l'autre extrémité est fixe, est accroché un solide (s) qui se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Lorsqu'on écarte (s) de x_m de sa position d'équilibre, il oscille entre $-x_m$ et $+x_m$ sur l'axe x'x. Sa position à chaque instant est repérée par l'abscisse x comptée à partir de sa position d'équilibre O.



(a)=Ressort à vide : ni étiré, ni comprimé
(b)=Ressort étiré à l'élongation maximale avant le lâché.
(c)=Solide (s) dans une position quelconque x, ressort étiré de x.

a) Etude dynamique

- Système : solide (s)
- Référentiel : Terrestre supposé galiléen
- Bilan : le poids $\vec{P}$, la réaction normale du plan $\vec{R}$, la tension $\vec{T}$ ($\vec{T} = -kx\vec{i}$) du ressort
- Equilibre : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_e} = \vec{0}$ ($\vec{T_e}$: tension du ressort à l'équilibre)

La projection de cette relation sur l'axe x'x, donne $T_e = 0$. A l'équilibre la tension du ressort d'un pendule élastique horizontal est nulle, la longueur du ressort est donc sa longueur à vide.

- TCI : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$

Cette relation projetée sur x'x, donne $0+0-T=ma_x$ or $T=kx$ (x correspond à l'allongement du ressort) et $a_x=\ddot{x}$ $\Rightarrow -kx=m\ddot{x}$ soit $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$: c'est l'équation différentielle du mouvement. En posant $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, cette équation devient $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$. La loi horaire du mouvement solution de cette équation différentielle est de la forme $x=x_m\cos(\omega_0t+\varphi)$. Le mouvement du pendule élastique est donc rectiligne sinusoïdale, dont l'amplitude est x_m, la pulsation propre $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Ce pendule est un oscillateur harmonique.

b) Etude énergétique

On écarte le pendule de sa position d'équilibre de x_m puis on le lâche sans vitesse initiale. L'énergie mécanique du système est définie par $E_m=E_C+E_{P_e}$:

- A l'instant initial $E_m=\frac{1}{2}kx_m^2$ car $E_C=0J$ et $E_{P_e}=\frac{1}{2}kx_m^2$
- A un instant quelconque $E_m=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}kx^2$, V étant la vitesse du centre d'inertie et x sa position. Or

$x=x_m\cos(\omega_0t+\varphi)$ et $V=\dot{x}=-\omega_0x_m\sin(\omega_0t+\varphi)\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2\sin^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0t+\varphi)$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow$

$E_m=\frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0t+\varphi)\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}kx_m^2\left[\sin^2(\omega_0t+\varphi)+\cos^2(\omega_0t+\varphi)\right]\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}kx_m^2$.

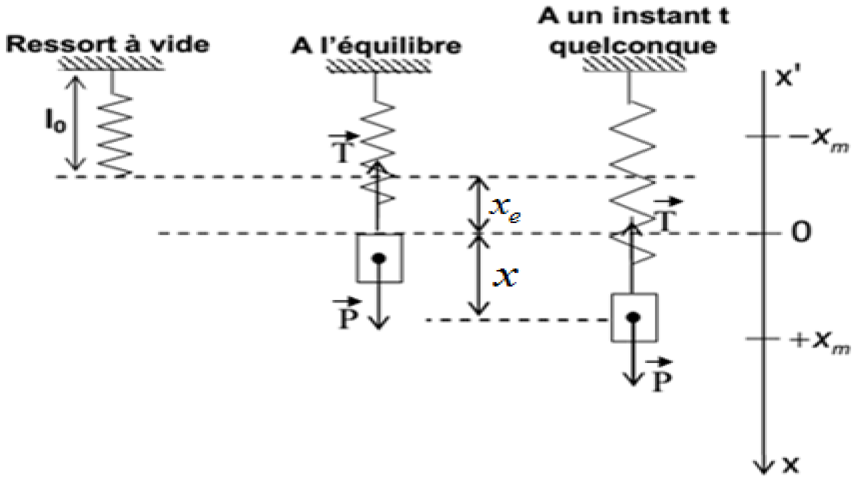
L'énergie mécanique du pendule au cours des oscillations est donc constante en absence de frottements et proportionnelle au carré de l'amplitude.

En considérant que l'énergie mécanique reste constante en absence des frottement, il est possible retrouver l'équation différentielle du mouvement :

A chaque instant, $E_m=E_C+E_{P_e}\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}kx^2$ or $V=\dot{x}\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ or $E_m=cst\Rightarrow\frac{dE_m}{dt}=0\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right]=0\Rightarrow\frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt}+\frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dt}=0\Rightarrow\frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x})+\frac{1}{2}k(2\dot{x}x)=0\Rightarrow m\dot{x}(\ddot{x}+\frac{k}{m}x)=0$ d'où $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$.

Remarque : Réciproquement, en considérant que l'équation différentielle du pendule est de la forme $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$, on peut montrer que son énergie mécanique reste constante. (TAF).

3.2.Pendule élastique vertical



a) Etude dynamique

-système : solide (s)

- référentiel : Terrestre supposé galiléen

-bilan : le poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du ressort

-équilibre : $\vec{P}+\vec{T_e}=\vec{0}\Rightarrow P-T_e=0\Rightarrow T_e=P\Rightarrow kx_e=mg\Rightarrow x_e=\frac{mg}{k}$. Donc à l'équilibre, la tension du ressort n'est pas nulle et son allongement est $x_e=\frac{mg}{k}$.

-TCI : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$ par projection sur l'axe x'x, on obtient $P-T=ma_x$ or $a_x=\ddot{x}$, $P=mg$ et $T=k(x+x_e)\Rightarrow$ $mg-k(x+x_e)=m\ddot{x}\Rightarrow mg-kx_e-kx=m\ddot{x}$ or $mg-kx_e=0$(équilibre)$\Rightarrow$ $-kx=m\ddot{x}$ soit $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$. On arrive à la même équation différentielle que le pendule élastique horizontal. Le pendule élastique vertical a un mouvement rectiligne sinusoïdal de loi horaire $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, d'amplitude x_m, la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. C'est donc un oscillateur harmonique.

b) Etude énergétique

Considérons comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal passant par la position d'équilibre O du solide.

On écarte le pendule de sa position d'équilibre de x_m puis on le lâche sans vitesse initiale. $E_m = E_C + E_{P_e} + E_{PP}$

- A l'instant initial, $x = x_m$ et $E_m = E_P = \frac{1}{2}k(x_m + x_e)^2 - mgx_m$ car $E_C = 0J \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 + \frac{1}{2}kx_e{}^2 + kx_m x_e - mgx_m \Rightarrow$ $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 + \frac{1}{2}kx_e{}^2$ car $kx_m x_e - mgx_m = x_m(kx_e - mg) = 0$ (équilibre)
- A un instant quelconque, $E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(x + x_e)^2 - mgx \Rightarrow$ $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}x_e{}^2 + kxx_e - mgx$ or $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$ (paragraphe étude énergétique pendule élastique horizontal) et $kxx_e - mgx = x(kx_e - mg) = 0$ (équilibre)$\Rightarrow$ $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 + \frac{1}{2}kx_e{}^2$. L'énergie mécanique d'un pendule élastique vertical en absence de frottements reste constante au cours des oscillations.

  Réciproquement, de la conservation de l'énergie mécanique, on retrouve l'équation différentielle du mouvement de départ. $E_m = cst \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$ or $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x + x_e)^2 - mgx \Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x + x_e)^2 - mgx\right] = 0$ $\Rightarrow$

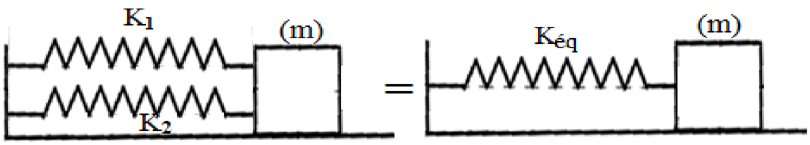
  $\frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{d(x + x_e)^2}{dt} - mg\frac{dx}{dt} = 0$ or $\frac{d\dot{x}^2}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x}$, $\frac{d(x + x_e)^2}{dt} = 2\dot{x}(x + x_e)$ et $\frac{dx}{dt} = \dot{x} \Rightarrow$

  $\frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k\left[2\dot{x}(x + x_e)\right] - mg\dot{x} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x + x_e) - mg\dot{x} = 0 \Rightarrow$ $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x + k\dot{x}x_e - mg\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Car $k\dot{x}x_e - mg\dot{x} = \dot{x}(kx_e - mg) = 0$ (équilibre).

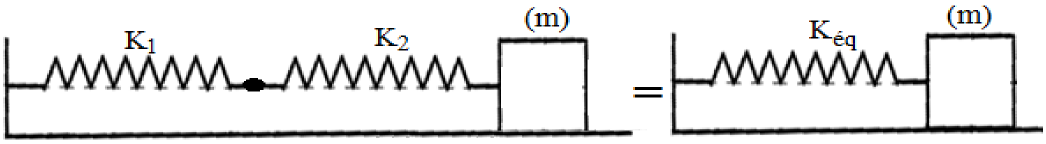
3.3.Associations des ressorts

a) En parallèle



Avec $K_{éq} = K_1 + K_2$

b) En série



Avec $\frac{1}{K_{éq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$

Soit $K_{éq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

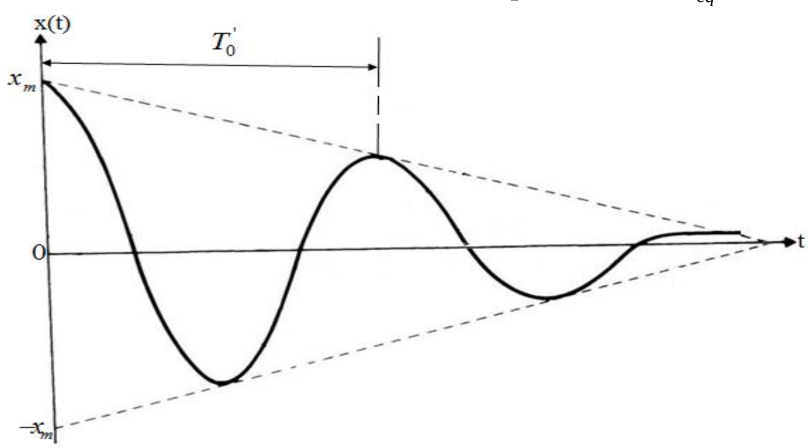
TAF : En recherchant l'équation différentielle du mouvement dans les deux cas, démontrer les expressions de $K_{éq}$.

4. Oscillations amorties

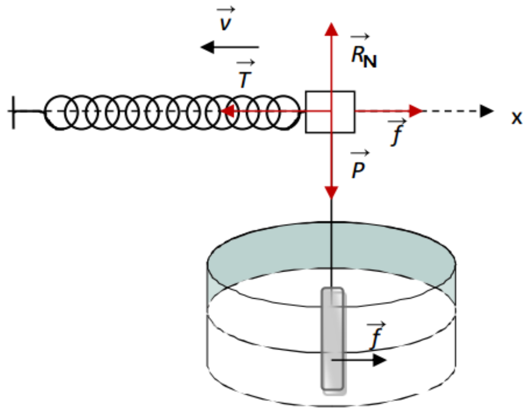
En physique, les oscillations amorties se traduisent par la diminution de l'amplitude du mouvement d'un oscillateur. Cette diminution à lieu en présence des forces de frottement :

4.1.Amortissements en présence des forces de frottement solide : frottements solide sur solide

Dans ce cas on obtient un mouvement sinusoïdal pseudo périodique de pseudo période $T_0^{'}$ sensiblement égale à la période propre T_0 avec une décroissance linéaire de l'amplitude.

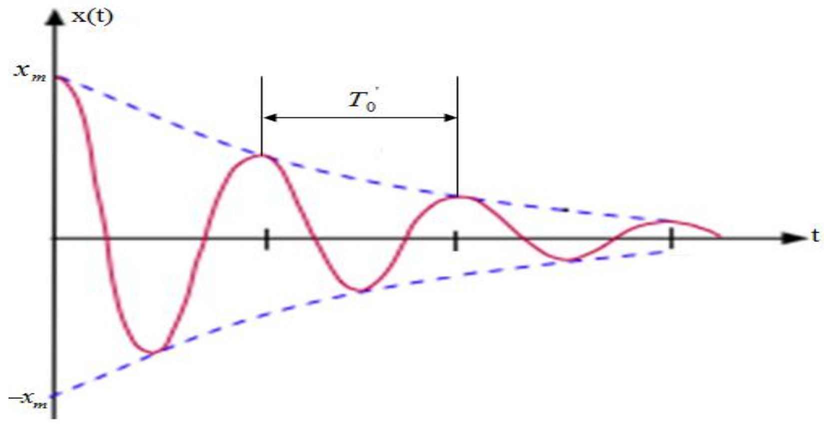


4.2. Amortissements en présence des forces de frottement visqueuse : frottements solide sur fluide (liquide)



la force de frottement visqueuse a pour expression $\vec{f} = -\alpha\vec{V}$, α est le coefficient de frottement et $\vec{V} = \dot{x}\vec{i}$ la vitesse

TCI : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\vec{a}$ la projection donne $0 - T + 0 + f = ma_x$ or $f = -\alpha\dot{x}$, $a_x = \ddot{x}$ et $T = kx \Rightarrow -kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$: c'est l'équation différentielle d'un pendule élastique amorti (amortissements fluides). Suivant les valeurs de α, cette équation admet trois solutions. Dans le cadre de notre programme nous nous attelons à la solution correspondante au mouvement sinusoïdal pseudo périodique de pseudo période $T_0^{'}$ sensiblement égale à la période propre T_0 avec une décroissance exponentielle de l'amplitude. Dans ce cas, on dit que l'oscillateur est dans un régime amorti pseudo périodique.



5. Notion d'oscillations forcées et de résonance

5.1. Oscillations forcées

On parle d'oscillations forcées lorsqu'un système oscille avec la fréquence f imposée par les impulsions reçues da la part d'un opérateur. Ainsi cet opérateur est appelé excitateur.

Exemple : la balançoire ; pour bien balancer, un opérateur lui communique des impulsions de fréquence f. cet opérateur impose cette période à la balançoire qui effectue donc les oscillations forcées.

5.2.Résonance

C'est un phénomène physique qui survient lorsque l'amplitude des oscillations d'un système augmente et devient très grande sous l'influence d'impulsions régulières, de fréquence proche de la fréquence propre dudit système $f = f_0$.

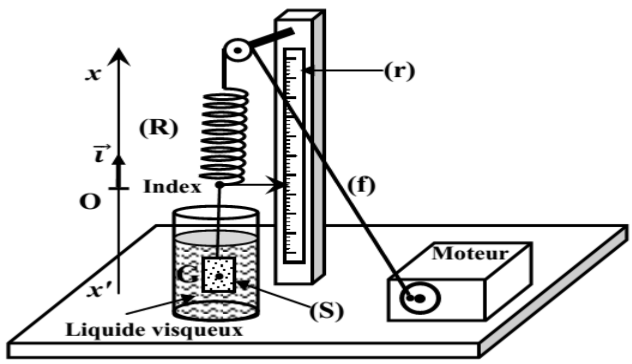
Le système, siège du phénomène de résonance est appelé résonateur.

Exemple : Etude expérimentale

Considérons le dispositif de la figure ci-dessous, permettant d'étudier les variations de l'amplitude x_m du mouvement de oscillateur en fonction de la fréquence f de l'excitateur.

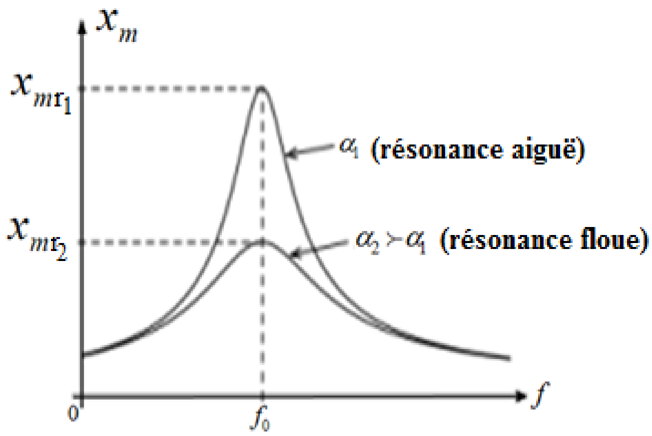
L'excitateur est le disque tournant à vitesse constante sur lequel est relié le fil.

Le résonateur est le pendule élastique



Pour deux séries de mesures correspondantes aux oscillations peu amorties et très amorties, on trace la courbe $x_m = g(f)$ appelées **courbes de résonance** :

- Si l'oscillateur est peu amorti, son amplitude devient très grande pour $f = f_0$: c'est le phénomène de résonance aiguë.
- Si l'oscillateur est plus amorti, son amplitude est moins important pour $f = f_0$: c'est le phénomène de résonance floue.



COLLEGE SAINT-JOSEPH : TD PHYSIQUE N°7 Tle C, D, TI

MODULE 2, Lecon8: Oscillateurs mécaniques

I- Questions de cours

Exercice 1:

1. Définir : oscillateur mécanique, période du mouvement, fréquence du mouvement, période propre, oscillations, vibrations, oscillations isochrones, oscillateur libre, oscillateur harmonique, oscillateur amorti, oscillateur forcé, résonance, excitateur, résonateur.
2. Enoncer les quatre lois du pendule simple
3. Quand dit-on que deux systèmes mécaniques sont synchrones ?
4. Répondre par vrai ou faux et justifier

4.1. Un oscillateur est en équilibre stable si, légèrement écarté de cet équilibre il tend à y revenir.

4.2. Un oscillateur harmonique possède une position d'équilibre.

4.3. Au cours des oscillations d'un pendule élastique non amortit, l'énergie potentielle se transforme intégralement en énergie cinétique et inversement.

4.4. La solution θ = f(t) n'est pas sinusoïdale pour l'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{mgl}{J_\Delta}\sin\theta = 0$ car J_Δ est une constante.

4.5. Les oscillations sont dites entretenues si à chaque instant on fournit à l'oscillateur une énergie égale à celle qu'il a perdue à cause des frottements.

4.6. Un pendule élastique peut être un oscillateur libre non amorti.

4.7. Pour qu'un pendule simple soit isochrone, il faut que ses oscillations soient de faible amplitude.

4.8. Le pendule simple est le seul oscillateur qui possède des oscillations isochrones.

4.9. Pour un pendule élastique horizontal, libre non amorti, lorsque l'énergie potentielle élastique est minimale, l'énergie cinétique est maximale.

4.10. Un oscillateur amorti peut être forcé par une excitation extérieure de fréquence quelconque.

4.11. La période de l'oscillateur forcé s'identifie à celle de l'oscillateur libre non amorti correspondant.

4.12. Un oscillateur libre amorti en régime pseudo périodique a exactement même période que celle de l'oscillateur libre non amorti correspondant.

4.13. Pour un oscillateur mécanique forcé, l'amplitude des oscillations ne dépend pas de la pulsation des impulsions délivrées par l'excitateur.

4.14. Le phénomène de résonance est lié à l'amortissement de l'oscillateur.

Exercice 2: Choisir la bonne réponse

1. La durée d'une oscillation est l'intervalle de temps qui sépare :

a)Deux passages du mobile par la même position.

b) Deux passages successifs du mobile par la même position.

c) Deux passages successifs du mobile par la même position en allant dans le même sens.

2. Un oscillateur libre non amorti est caractérisé par :

a)Son poids négligeable

b)La constance de l'amplitude de ses mouvements

c)La variation de son énergie mécanique

d)Son caractère dissipatif.

3. L'oscillateur libre amorti a une énergie mécanique décroissante. Il est donc :

a)Conservatif b) Dégressif c)Evolutif d) Dissipatif

4. La période propre des oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ dans le champ de pesanteur g s'écrit :

a) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ b) $T_0 = g\sqrt{\frac{\ell}{2\pi}}$ c) $T_0 = g\sqrt{\frac{2\pi}{\ell}}$ d) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

5. La période propre des oscillations d'un pendule élastique de masse m et de raideur k s'écrit :

a) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ b) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mg}{k}}$ c) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ d) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{mg}}$

6. La période propre des oscillations d'un pendule de torsion de moment d'inertie J_Δ et de constante de torsion C s'écrit : a) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$ b) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mC}{J_\Delta}}$ c) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{C}{mJ_\Delta}}$ d) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$

7. La période d'un pendule simple de longueur 1 m a pour valeur 2 secondes. Celle d'un pendule simple de longueur 25 cm a pour valeur :

a)1s ; b) ; 0,5s ; c) : 4s ; d) : 8s

8. Une masse de valeur inconnue est suspendue à un fil de longueur 1m en un lieu où g = 10ms^{-2}, puis à un ressort de raideur K = 4Nm^{-1}. Les deux oscillateurs ainsi obtenus ont la même période. La valeur de la masse est :

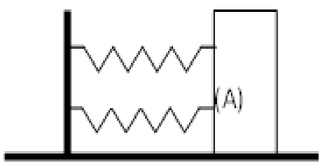
a) 0,40 kg ; b) 0,25kg ; c) quelconque

9. Un balancier ayant la forme d'une roue de moment d'inertie J_Δ est entraîné par un ressort spiral qui se comporte comme un fil de torsion de constante C = 4x10^{-5}N.m.rad^{-1}. Calculer J_Δ pour que le balancier ''batte la seconde''.

a) 10^{-4} kgm² ; b) 4x10^{-6} kgm² c) 10^{5} kgm²

10. Un pendule de longueur 0,1 m est constitué d'une bille d'acier de masse 0,3 kg suspendu à un fil. Il est place dans le vide. Combien vaut la pulsation des oscillations libres pour ce pendule ? (g=10 S.I) a) 0,62 rad/s b) 1 rad/s c) 1,59 rad/s d) 10 rad/s

11. On donne la figure ci-après constituée de deux ressorts de raideurs K_1 et K_2 et d'un solide A de masse m. Déterminer la période des oscillations de la masse m glissant sans frottement sur le plan horizontal.



a) T = $2\pi\sqrt{m(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2})}$; b) T = $2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$, c) n'existe pas

12. La période d'un pendule simple de longueur 50 cm, en un lieu où l'accélération de la pesanteur vaut 9,8 ms^{-2} est de : a) 2,1s ; b)1,4s ; c)1,9s.

13. Lorsqu'il y a amortissement, la pseudo-période des oscillations peut être :

a) supérieure ; b) inférieure ; c) égale à la période propre de l'oscillateur.

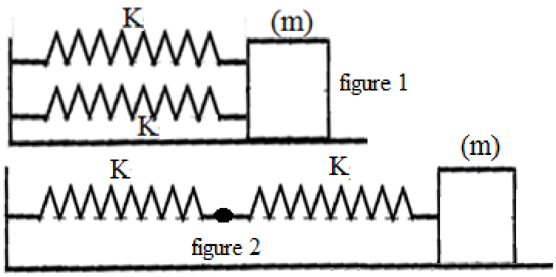
14. La période propre d'un pendule élastique dépend :

a) De l'amplitude des oscillations ? b) De la constante de raideur du ressort ?

c) De la vitesse initiale ? d) De la masse en oscillation ?

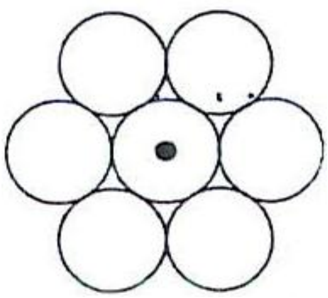
15. Un pendule élastique horizontal caractérisé par la constante de raideur k = 25 N.m^{-1} et la masse m = 300g, a une vitesse maximale de 0,80 ms^{-1}. L'amplitude du mouvement est :

a) x_m = 3,4 cm ; b) x_m = 7,5 cm; c) x_m = 8,8 cm



16. deux ressorts de même constante de raideur K, sont reliés come indiqué sur la figure ci-contre à la même masse M. le rapport de la période des ressorts montés en parallèle (figure1) sur ceux montés en série (figure 2) est : a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) 2

17. On considère 7 pièces de 100 Francs places en hexagone comme indiqué ci-contre. Chaque pièce de monnaie est un disque de masse m et de rayon r. Quel est le moment d'inertie du système de 7 pièces par rapport à un axe passant au milieu de la pièce centrale perpendiculaire à la pièce ?



a) (7/2) mr^2 b) (13/2)mr^2 c) (29/2)mr^2 d) (49/2)mr^2 e) (55/2)mr^2
f) aucune réponse n'est bonne.

Exercice 3:

1. Calculer les moments d'inertie des systèmes suivants :

1.1.Une sphère de masse m = 200g et de rayon R = 10cm. Moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) passant par son centre G.

1.2.Une pièce de monnaie de masse m = 40g et de diamètre D=3cm. Axe (Δ) perpendiculaire à l'une de ses faces et passant par son centre G.

1.3.Un Cerceau de rayon r = 10cm, de masse m = 200g par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

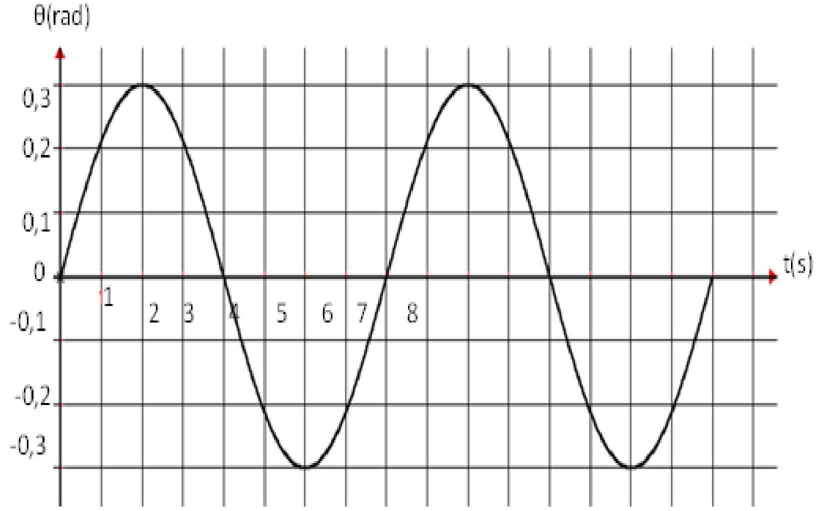
1.4. Tige de masse m = 200g, de longueur ℓ = 80cm. Axe (Δ) passant par l'une de ses extrémités.

1.5. Un triangle équilatéral constitué de trois tiges identiques de masse m=1kg et de longueur ℓ =1m sont soudées par leurs extrémités par rapport à un axe passant par un de ses sommets et perpendiculaire au plan du triangle.

2. Un pendule effectue 120 oscillations par minute. Quelles sont : sa période, sa fréquence et sa pulsation.

Exercice4

Le graphe du document 1 de l'annexe à remettre avec la copie représente les variations de l'angle que fait le fil d'un pendule simple avec la verticale de son point de suspension en fonction du temps.

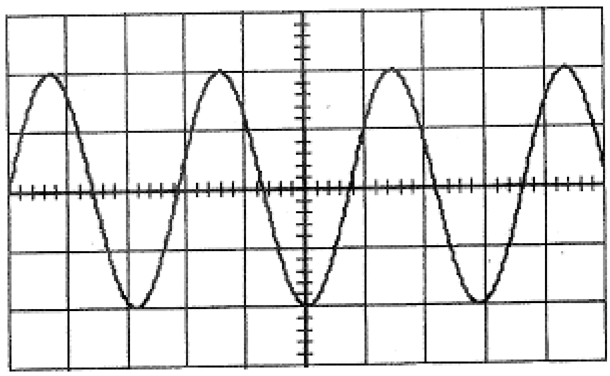


1. A partir du graphe, donner en justifiant, deux qualificatifs à cet oscillateur.
2. Lire sur le graphe, les valeurs de la période et de l'amplitude des oscillations de ce pendule.
3. Quelle est l'élongation à la date t=0 du pendule ?En déduire une expression de l'élongation du pendule en fonction du temps.
4. Ecrire l'expression de la période propre d'un pendule simple en fonction de sa longueur et de l'intensité de la pesanteur du lieu où la mesure est faite. En déduire la longueur du fil ℓ du pendule sachant que l'intensité de la pesanteur en ce lieu est g=9,8m/s^2.
5. On veut que le pendule précédent batte la seconde. Déterminer la nouvelle longueur du fil ℓ'.

Exercice 5:

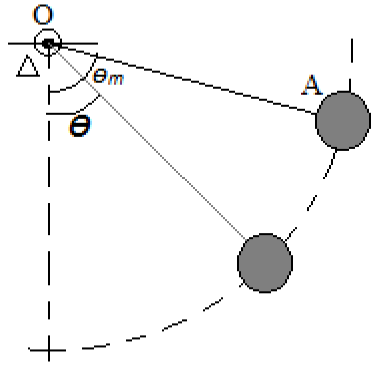
Le document ci-contre représente l'enregistrement des oscillations d'un pendule élastique horizontal de masse m=206g et de raideur k.

Echelle : sensibilité verticale : 1cm/div ; balayage : 0,5s/div.



1. Déterminer :
a) L'amplitude des oscillations ;
b) La période propre et la fréquence propre de l'oscillateur ;
c) La valeur de la raideur k du ressort ;
d) L'énergie mécanique ;
e) La valeur maximale de la vitesse.
2. Pour une élongation $x = 1,5cm$,calculer la valeur de la vitesse.
3. Etablir l'équation horaire du mouvement.
4. Représenter, sur un même graphique, les variations en fonction de l'élongation x :
a) De l'énergie potentielle ;
b) De l'énergie mécanique ;
c) De l'énergie cinétique.
5. Représenter, sur un même graphique, les variations en fonction du temps :
a) De De l'énergie potentielle ;
b) De l'énergie mécanique ;
c) De l'énergie cinétique.

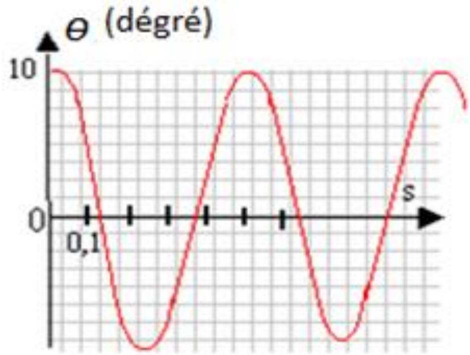
II- Pendules pesants



Exercice 6:

On considère une sphère de masse m et de rayon r, suspendue au point A à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur $l = 5r$.
L'autre extrémité du fil est reliée à un point O fixe. On écarte le système ainsi formé, d'un angle $\theta_m = 10°$ par rapport à la verticale à l'instant $t_0 = 0s$ et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Ce système effectue alors un mouvement oscillatoire. A t quelconque, il est repéré pas l'abscisse angulaire θ par rapport à la verticale.

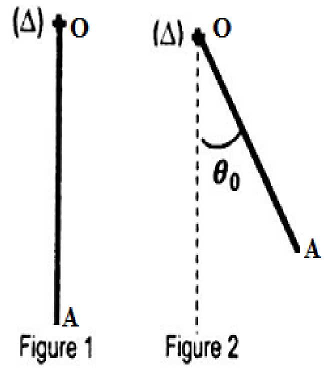
1. Quel nom donne-t-on à un tel système ? déterminer en fonction de r et m l'expression de son moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe (Δ) perpendiculaire au plan de la figure, passant par O.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique des solides en rotation et déterminer l'équation différentielle du mouvement du système.
3. En déduire l'expression de la période T en fonction de J_Δ, r et *m*. on supposera l'angle θ faible.
4. Un dispositif approprié a permis d'enregistrer les variations de θ en fonction du temps (voir figure ci-contre). Déduire la valeur de J_Δ, on donne : *r = 20cm et m= 150g.*



5. Déterminer la loi horaire du mouvement $\theta = f(t)$.
6. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant quelconque, déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du système à l' instant quelconque en fonction de θ, θ_m et r. En déduire l'expression de l'accélération normale a_n.

Exercice 7:

Une tige (t) homogène et de section constante OA de masse M et de 2R est suspendue à son extrémité O solidaire à un axe (Δ) horizontal autour duquel il peut se mouvoir librement dans le plan vertical (figure 1) son centre de gravité sera noté G. on néglige les frottements.



1. Exprimer OG en fonction de R.
2. Exprimer en fonction de R et M, le moment d'inertie J_Δ de la tige par rapport à l'axe (Δ).
3. On écarte la tige de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_0, puis on l'abandonne sans vitesse initiale (figure 2).

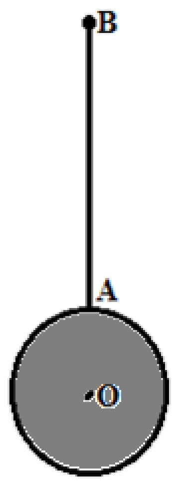
3.1. Expliquer pourquoi ce système est un oscillateur.

3.2. Déterminer dans le cas général l'équation différentielle du mouvement de la tige en fonction de R, g, θ et $\ddot{\theta}$.

3.3. Cet oscillateur est-il harmonique ? justifier votre réponse.

Exercice 8:

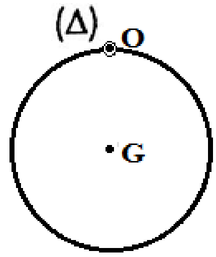
Soit un disque homogène de masse M=200g, de rayon R=10cm et centre O. Une tige homogène AB de longueur $\ell = 60cm$ et de masse m'=50g est soudée dans le prolongement d'un rayon OA du disque.
L'ensemble disposé verticalement est mobile autour d'un axe horizontal passant par B.



1. Calculer moment d'inertie du pendule pesant ainsi constitué par rapport à l'axe horizontal (Δ) passant par B. Quelle est la position de son centre d'inertie G?
2. On écarte alors le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on l'abandonne sans vitesse initiale.
   2.1. Etablir l'équation différentielle des oscillations de faible amplitude de ce pendule et en déduire la nature de son mouvement.
   2.2. Donner les expressions de la pulsation propre, la période propre et la fréquence propre. AN : $g=10m.s^{-2}$.
   2.3. Déterminer la loi horaire du mouvement de ce pendule. On donne $\theta_m = 8°$.
3. Montrer que le système {Disque-Tige-Terre}est conservatif. On prendra le niveau de référence de énergie potentille le plan horizontal passant par la position d'équilibre du centre d'inertie G.

Exercice 9:

Un cerceau homogène en bois est suspendu en O à un (Δ) horizontal, perpendiculaire au plan du cerceau. La masse du cerceau est m, son rayon est r et son moment d'inertie est J_Δ .



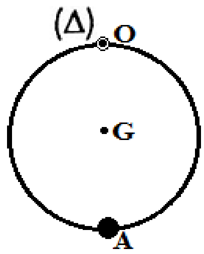
On donne : r = 20 cm; m = 0,1kg; g = 10 m s^{-2}.

On repère la position du cerceau par l'angle θ entre 0G et la verticale (G centre d'inertie du cerceau).

1-On écarte le cerceau d'un angle θ = 10° et on le lâche sans vitesse à l'instant initial (t = 0)

1-1-Donner la nature du mouvement et en déduire la période propre T_o des petites oscillations.

1-2-Quelle est la vitesse angulaire du cerceau lorsqu'il passe par sa position d'équilibre?



2-On accroche une bille ponctuelle en acier de même masse m que le cerceau en un point A diamétralement opposé à O (voir figure).

2-1- Quel est le nouveau moment d'inertie J'_Δ et la nouvelle distance OG' du nouveau centre d'inertie G' ?

2-2- Donner l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble et en déduire la nouvelle période T'_o.

2-3- On écarte l'ensemble d'un angle de 60° et on le lâche.

Déterminer la vitesse angulaire du système lors de son passage à sa position d'équilibre, en déduire la vitesse linéaire de la bille qui est au point A.

3-Un électro-aimant exerce sur la bille une force $\vec{F}$ vertical vers le bas et constante. On écarte l'ensemble d'un angle de 10° et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer la nature du mouvement et calculer la période T_0'' :

On donne F = 15 N.

Exercice 10:

Un système est constitué d'un grand cerceau de centre I, de rayon R = 10 cm et de masse M, puis d'un petit cerceau de centre J, de rayon $r = \frac{R}{2}$ et de masse $m = \frac{M}{2}$. Le petit cerceau est soudé au point K du grand cerceau tel que les points 0, I, J, K sont alignés. Les deux cerceaux sont solidaires et appartiennent à un même plan vertical (Figure 1).

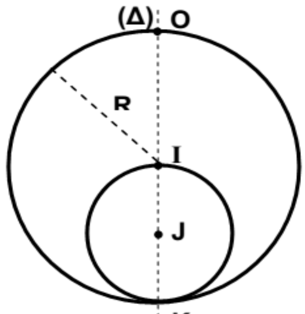


Figure 1 :

Le système ainsi constitué est mobile autour d'un axe fixe horizontal (Δ) passant par le point O du grand cerceau. O est diamétralement opposé à K.

1. Montrer que la position du centre d'inertie G du système par rapport à l'axe (Δ) est donnée par la relation $OG = \frac{7}{6}R$ et que le moment d'inertie du système par rapport à cet axe est $J_\Delta = \frac{13}{4}mR^2$.
2. On écarte le système d'un angle faible θ_m à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. La position du centre d'inertie G à un instant t quelconque est donnée par l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OG}$ avec le vecteur $\overrightarrow{OG_0}$ (position d'équilibre stable). (Figure 2).

2.1. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule en fonction de $\ddot{\theta}$,θ ,g et R.

2.2. Déterminer la longueur L du pendule simple synchrone à ce pendule pesant.

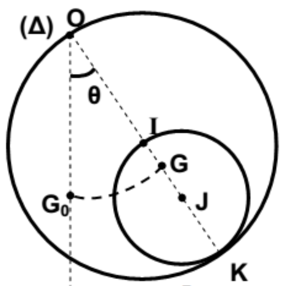


Figure 2 :

III- Pendules simples

Exercice 11:

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible et de longueur ℓ = 1m. A l'une des extrémités du fil est fixée une bille supposée ponctuelle de masse m = 20g. On écarte légèrement le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_m = 6° et on le lâche sans vitesse initiale. Le pendule oscille alors dans un plan vertical sans frottement. On prendra g = 9,8N.kg^{-1}.

1. En appliquant la RFD en rotation, déterminer la nature du mouvement du pendule.
2. Ecrire l'équation horaire du mouvement
3. Déterminer l'énergie mécanique du système (pendule + terre) à une position quelconque repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale du lieu. On prendra comme référence des énergies potentielles de pesanteur la position la plus basse de la bille.

4. En déduire de l'équation différentielle du mouvement de la conservation de l'énergie mécanique. Calculer la valeur constante de cette l'énergie mécanique.
5. Calculer la vitesse linéaire de la bille et la tension du fil au passage par la verticale du lieu.

Exercice 12:

Un pendule simple de longueur ℓ =1m est constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable. L'autre extrémité étant fixée à un axe horizontal (Δ). On prendra g = 9,8N/kg.

1. Exprimer et calculer la période propre de ce pendule non amorti dans le cas des faibles amplitudes.
2. En déduire les lois de ce pendule simple.
3. En réalité, ce pendule subit un amortissement solide assez faible.

3.1 Représentez la courbe d'évolution de l'amplitude de ce pendule en fonction du temps.

3.2 Comment nomme-t-on les oscillations effectuées par ce pendule ?

3.3 Quelles solutions peut-on envisager pour que ces oscillations redeviennent périodiques ?

Exercice 13:

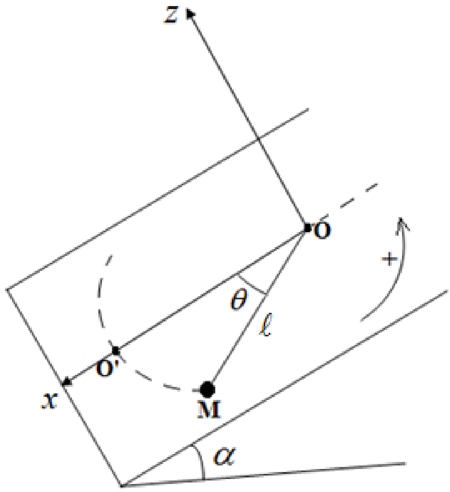
Pour déterminer expérimentalement la valeur de l'intensité de la pesanteur en un lieu donné on a mesuré, pour des longueurs ℓ différentes, la durée t, de 20 oscillations d'un pendule simple et on a obtenu les résultats suivants :

ℓ (m)	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60
t(s)	25,36	31,04	35,84	40,04	43,92	47,44	50,72

1. Déterminer la période T_0 des oscillations pour chaque valeur de la longueur de ce pendule simple non amorti.
2. Tracer le graphe T_0^2 = f(l) et vérifier la validité de la période propre théorique d'un pendule simple.
   Echelle : 2cm pour 0,4m et 1cm pour $1s^2$
3. En déduire la valeur du champ de pesanteur du lieu de l'expérience.

Exercice 14:

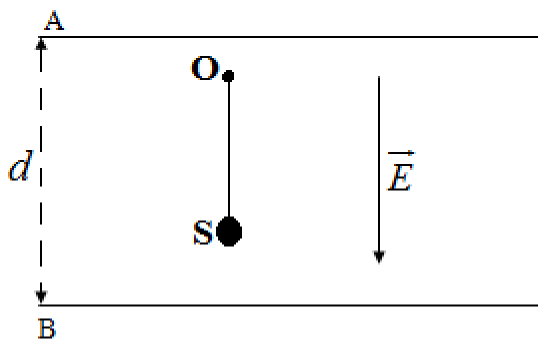
Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m attaché à un fil de masse négligeable, de longueur ℓ. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. L'ensemble peut se déplacer sans frottement sur un plan sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. Le champ de pesanteur est g .



1. En repérant la composante du poids inclus dans le plan incliné (et donc orthogonal à l'axe de rotation), calculer son moment par rapport à l'axe de rotation.
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, trouver l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations.
3. On lance le pendule depuis le point O' avec une vitesse V_0. Déterminer l'expression de l'angle maximal atteint par le fil, en supposant qu'il reste dans le plan incliné.

Exercice 15:

Une sphère conductrice S assimilable à un point matériel, de masse m=2g est suspendue à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil isolant, inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 10cm$. $g = 10m.s^{-2}$.



1. Calculer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule simple.
2. Le pendule est placé entre les armatures métalliques A et B, planes et horizontales, de grandes dimensions, distantes de d=20cm. Le point de suspension, O, est à 5cm de l'armature supérieure, A. On applique entre les deux armatures une différence de potentiel constante $U_{AB} = 2000V$ créant ainsi entre A et B un champ électrique vertical dirigé de haut en bas et d'intensité E. la sphère porte une charge $q = 2.10^{-7}C$.

2.1. Quelle est la nouvelle période des petites oscillations de ce pendule $T_0^{'}$?

2.2. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle de 90° avec une pince isolante et abandonné sans vitesse initiale. Quelle est la tension du fil au passage à la verticale ?

2.3. Au passage à la verticale, le fil casse. Quelles sont alors la nature et l'équation de la trajectoire de S ?

IV- Pendules de torsion

Exercice16:

Un disque homogène (D) de masse M=1,0Kg et de rayon R=10cm est suspendu en son centre de gravité G, à un fil de torsion de constante C. (fig.1)

On fait tourner le disque d'un angle θ_m dans le plan horizontal provoquant une torsion du fil du même angle puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

Le disque effectue alors un mouvement oscillatoire se rotation autour de l'axe (Δ) matérialisé par le fil. Un dispositif approprié a permis de représenter les variations de l'angle de torsion θ en fonction du temps.

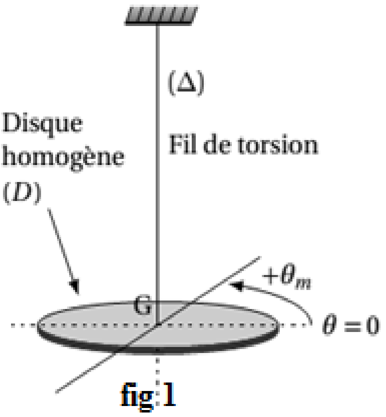


fig 1

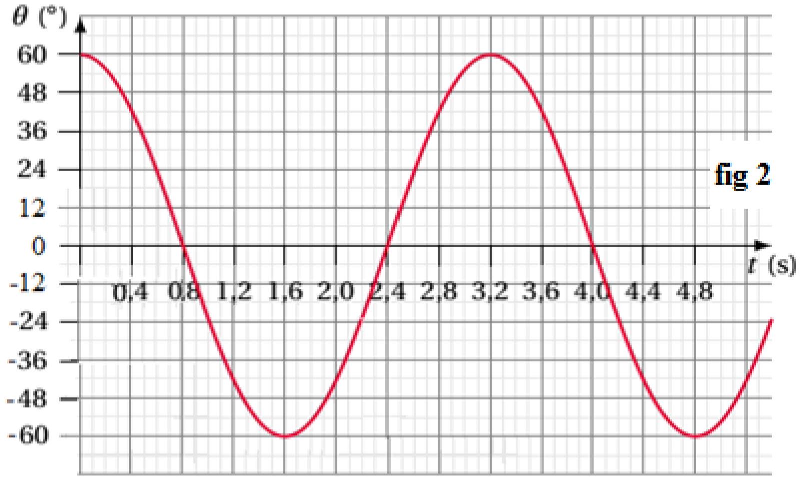
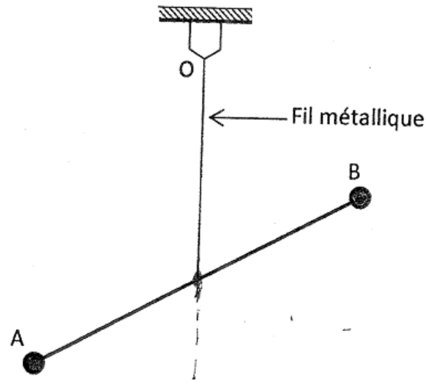


fig 2

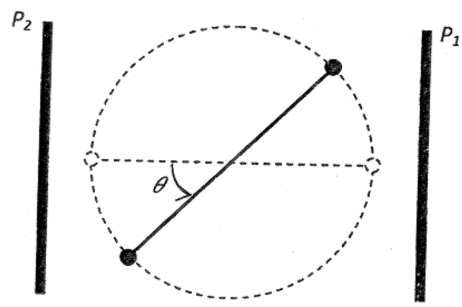
1. Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation (Δ) .
2. Faire le bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur le disque à une date quelconque de son mouvement.
3. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation au disque, déterminer l'équation différentielle du mouvement de ce dernier.
4. Montrer que la période propre des oscillations a pour expression : $T= 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2C}}$
5. Déterminer à partir du graphe de la fig.2, la valeur numérique de T_0, puis en déduire la constante de torsion C du fil.
6. Déterminer la loi horaire du mouvement de ce pendule.



Exercice17:

On considère un fil métallique vertical dont une extrémité est fixée à un support et dont l'autre extrémité supporte, en son milieu, une tige homogène AB de masse M=50Kg, de longueur L=15cm. La constante de torsion du fil est C=5.10^{-4}N.m/rad. On fixe, à chaque extrémité de la tige, une petite sphère ponctuelle de masse m=10g. L'ensemble peut osciller horizontalement, sans frottement, autour du fil de torsion.

1. Calculer le moment d'inertie J_Δ du système tige-sphères par rapport à l'axe de rotation (Δ) matérialisé par le fil.
2. On écarte, dans le plan horizontal, le système de sa position d'équilibre. Démontrer que le mouvement est sinusoïdal et calculer la période T_0 des oscillations.
3. On place le système entre les armatures verticales P_1 et P_2 d'un condensateur plan séparées d'une distance d=0,20m. la différence de potentiel entre les armatures est U_{P1P2}=-10KV. La tige isolante, est perpendiculaire aux plaques, à l'équilibre ; la torsion du fil est donc nulle. On charge l'une des sphères par une quantité d'électricité +q et l'autre par une quantité –q (q positif)



3.1. Représenter le vecteur champ électrique entre les armatures du condensateur puis déterminer son intensité E.

3.2. On écarte le système de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse. Il se met à osciller avec une période T différente de T_0.

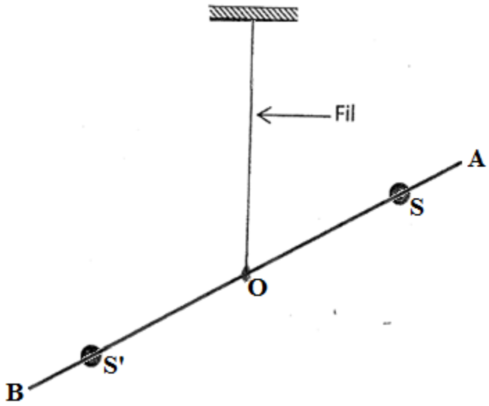
3.2.1. Reproduire le schéma du dispositif (vue de dessus) ci-contre et le compléter en indiquant le signe de la charge de chaque sphère, après avoir représenté les forces électriques appliquées sur chacune d'elle.

3.2.2. Etablir l'équation différentielle du mouvement pour des oscillations de faible amplitude et en déduire la période T en fonction de q, E, L,C et J_Δ.

3.2.3. On mesure la période T et on trouve T=3,16s. Déduire de cette expérience la valeur de q.

Exercice18:

On se propose de déterminer le moment d'inertie J_0 d'une tige homogène AB, par rapport à un axe passant par son centre d'inertie O. A cet effet, on la suspend par son centre d'inertie G à l'extrémité inférieure d'un fil de torsion vertical, de constante de torsion C. L'extrémité supérieure est fixé en un point d'un support horizontal. On place deux solides ponctuels S et S', de même masse m=10g, sur la tige, de part et d'autre de O, à la distance OS=OS'= x. Au cours de l'expérience, la tige demeure horizontale. On écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre d'un angle θ_m, on l'abandonne sans vitesse initiale, puis on note la durée Δt de 10 oscillations pour différentes valeurs de x. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :



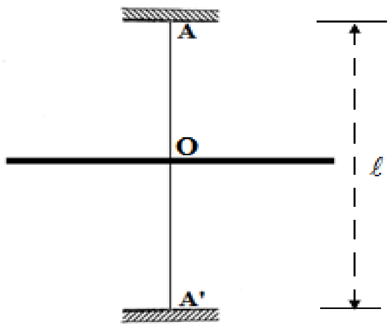
x (cm)	5	10	15	20	25
x^2 (cm^2)					
Δt (s)	102,1	107,7	116,5	127,8	141,0
$\frac{T_0^2}{4\pi^2}$ (s^2)					

1. Citer deux appareils de mesure utilisés lors de cette expérience.
2. Pourquoi mesure-ton la durée de 10 oscillations plutôt qu'une seule ?
3. Reproduire et compléter le tableau en prenant $\pi^2 = 10$.
4. On pose $y = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$; tracer la courbe $y = f(x^2)$. Echelle : 1cm pour 50cm^2 et 1cm pour 0,40s^2.
5. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir l'expression littérale de la période T_0 des oscillations en fonction de x, J_0, C et m.
6. Déterminer, à partir d'une exploitation graphique, les valeurs de J_0 et de C, en unités du système international.

Exercice19:

Un disque plat homogène, d'épaisseur négligeable, de rayon R=15cm est suspendu par son centre O à un fil de torsion, de constante de torsion C. C est inversement proportionnelle à la longueur ℓ du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point A.

On écarte le disque de sa position d'équilibre d'un angle $\frac{\pi}{3} rad$, le fil étant maintenu vertical, et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant t=0s. On constate alors que 20 oscillations de période T_0 ont une durée t=40,0s.



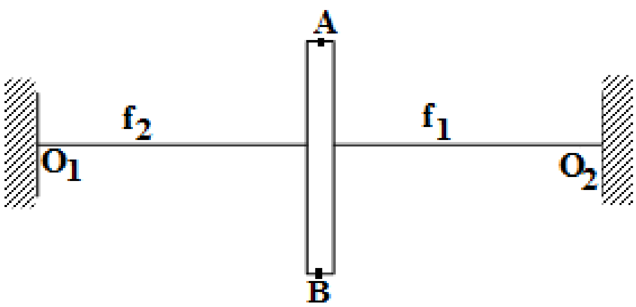
1. Déterminer la nature du mouvement du disque et écrire l'équation horaire de ce mouvement.
2. Calculer la constante de torsion C du fil sachant que le moment d'inertie du disque est $J = 2,25.10^{-3} kg.m^2$.
3. Le disque est maintenu à présent à la distance AO= x sur le fil dont les extrémités A et A' sont fixées (voir fig). Déterminer en fonction de T_0, ℓ et x la période T des oscillations du disque.
4. Pour quelle valeur de x, la période T est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette période ?

Exercice20:

On fixe sur une barre AB deux fils métalliques identiques f_1 et f_2. Les deux fils sont fixés respectivement aux points O_1 et O_2. Le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe est J_Δ.

On écarte la barre de la position d'équilibre de 90° et on l'abandonne sans vitesse initiale. La constante de torsion d'un fil est C.

C= 8.10^{-2} N.m rad^{-1}.



1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la nature du mouvement.
2. Sachant que la durée de 10 oscillations est t = 7,0s. Quel est le moment d'inertie de la barre AB.
3. Quelle est la vitesse linéaire maximale du point A situé à la distance $\ell = 20$cm de l'axe Δ.

V- Pendules élastiques

Exercice21:

On dispose d'un système {solide-ressort} constitué d'un mobile de masse m considéré comme un point matériel G accroché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 15 N.m^{-1}$.

A) Le système est installé sur une table à coussin d'air afin de négliger les frottements entre le mobile et la table. Ce mobile, assimilé à son centre d'inertie G, peut osciller horizontalement sans frottement sur une tige parallèle à l'axe Ox (figure 1). On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O coïncide avec la position de G lorsque le ressort est au repos.

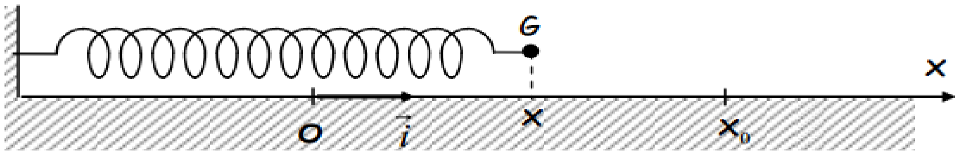


Figure 1

1. Equation différentielle associée au système{solide-ressort} et solution.
1.1. Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile. Recopier sur votre copie la figure en faisant apparaitre ces différentes forces.
1.2. Rappeler l'expression vectorielle de la tension du ressort en fonction de k, x et $\vec{i}$.
1.3. En appliquant le théorème du centre d'inertie au mobile, établir l'équation différentielle du mouvement.
1.4. Vérifier que $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.
1.5. Le mobile est écarté de sa position d'équilibre et lâché à l'instant t=0s, sans vitesse initiale, de la position $x_0 = 10cm$. Déterminer numériquement X_m et φ. En déduire la loi horaire du mobile.
2. Energie mécanique du système solide-ressort.
2.1. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m de la masse m du mobile en mouvement sur l'axe horizontal (Ox) en fonction de m, $\dot{x}$, k et x.
2.2. Le professeur réalise un enregistrement du mouvement du centre de gravité de la masse m à l'aide d'un dispositif d'acquisition des données. A partir de la position d'équilibre de la masse, il étire le ressort vert la droit et lâche la masse à t=0s sans lui communiquer de vitesse initiale. Le professeur obtient donc la courbe représentant les variations de l'abscisse x de G en fonction du temps, soit $x = f(t)$ (figure 2).

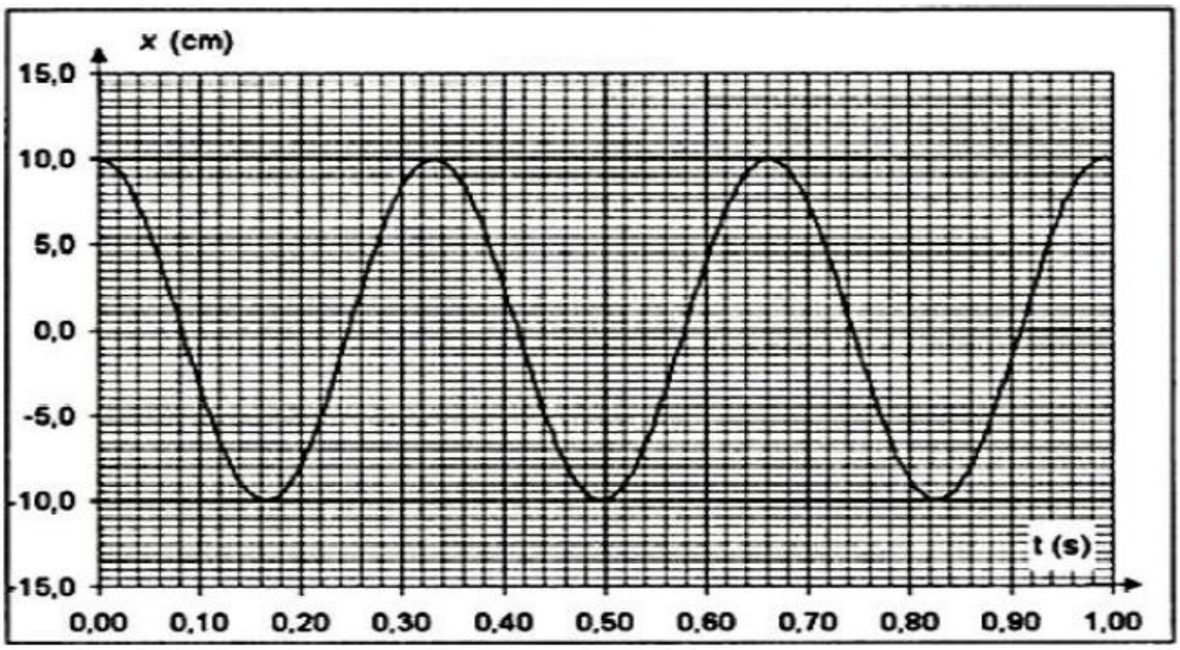


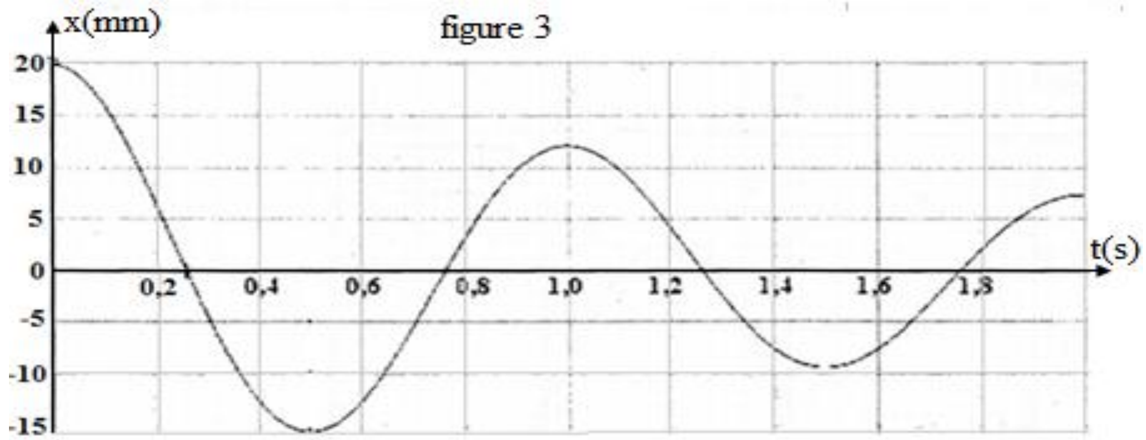
Figure 2

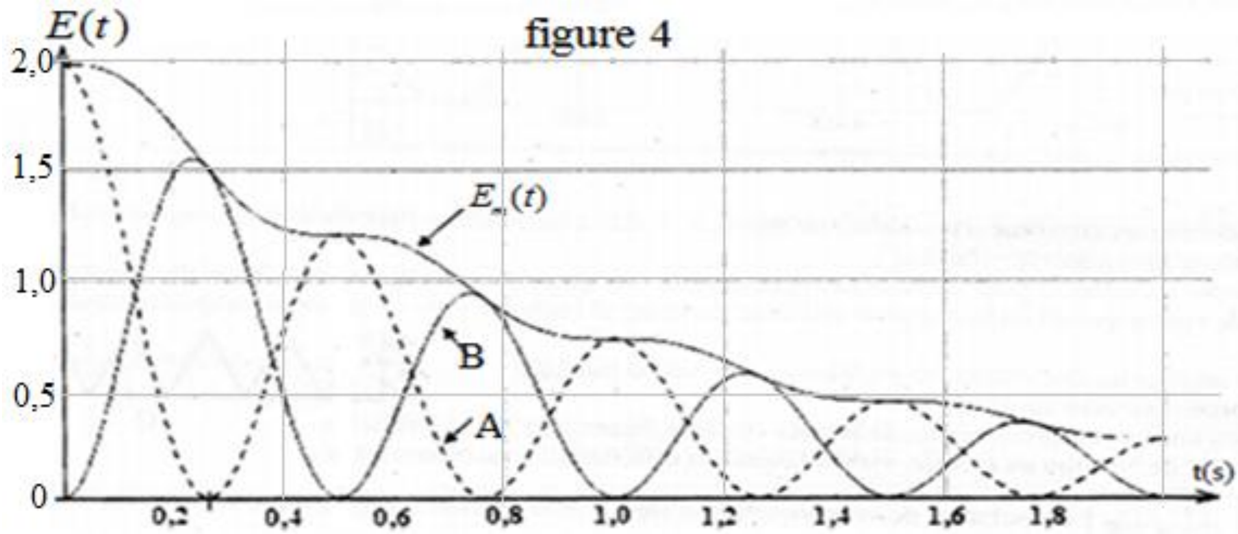
2.2.1. Comment peut-on qualifier ces oscillations ? Justifier votre réponse.
2.2.2. Déterminer la période propre T_0 et la pulsation propre ω_0 de ces oscillations.
2.2.3. En déduire de la question précédente la valeur de la masse m du mobile.
2.2.4. Vérifier que l'énergie mécanique est constante et calculer sa valeur.

B) On suppose maintenant que les frottements ne sont plus négligeables et peuvent être modélisés par une force dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse et dont le sens est opposé à celui du mouvement : $\vec{f} = -\alpha\vec{V}$ ($\alpha \succ 0$).

Le dispositif d'acquisition des données a permis de connaitre à chaque instant la position du mobile (figure3). Un logiciel de traitement fournit les courbes de variation, en fonction du temps,, de l'énergie mécanique (E_m), de l'énergie cinétique (E_C) et de l'énergie potentielle élastique (E_P) du système solide-ressort (figure 4).

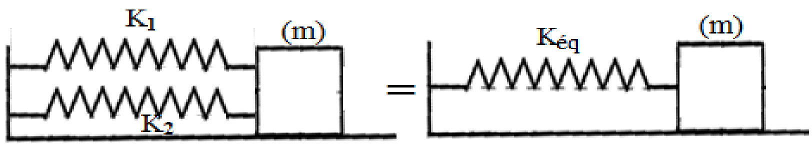
1. Que représente la grandeur α ? Donner sa dimension et son unité dans le SI.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble masse-ressort.
3. Montrer en utilisant la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps que la variation de l'énergie mécanique correspond au travail des forces de frottements.
4. Comment qualifie-t-on ce pendule élastique, ainsi que les oscillations correspondantes? Déterminer la période T.
5. Identifier par la lettre A ou B les courbes $E_C(t)$ et $E_P(t)$ de la figure 4 en justifiant les réponses.
6. Pourquoi l'énergie mécanique du système diminue-t-elle au cours du temps ?



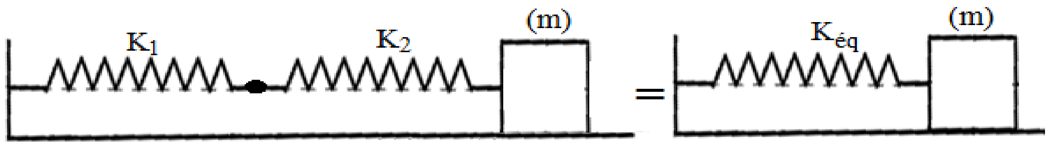


Exercice22:

a)



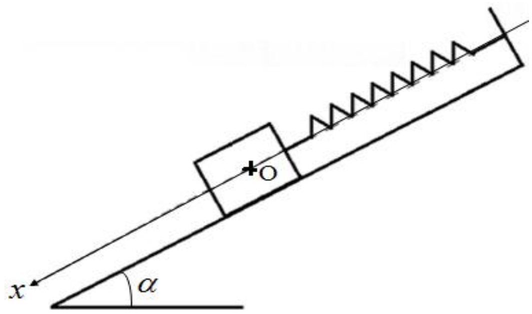
b)



On considère les systèmes ci-dessus. Dans chaque cas, on écarte le système de sa position d'équilibre puis on l'abandonne à lui-même. La position du système est repérée à chaque instant par l'abscisse x . Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire qu'en a) on a : $K_{éq} = K_1 + K_2$ et qu'en b) on a : $K_{éq} = \dfrac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

Exercice23:

Sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal, on dispose un ressort (R) de masse négligeable, de constante de raideur K et de longueur à vide ℓ_0 , fixé par l'une des extrémités à un butée fixe. A l'autre extrémité, on accroche un solide (S) de centre d'inertie G pouvant glisser sans frottement le long de la ligne de plus grande pente du plan incliné. On donne : m = 500g, g = 10 $N.kg^{-1}$, α = 30°, K = 20 $N.m^{-1}$



1. O est la position de G lorsque le solide (S) est en équilibre. Déterminer en fonction de K, m, g et α l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort lorsque (S) est au repos.

2. Calculer $\Delta\ell_0$.

3. On écarte (S) de sa position d'équilibre de $X_m = 6cm$, puis on le libère avec une vitesse initiale nulle. Sachant que l'axe du ressort reste parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné,

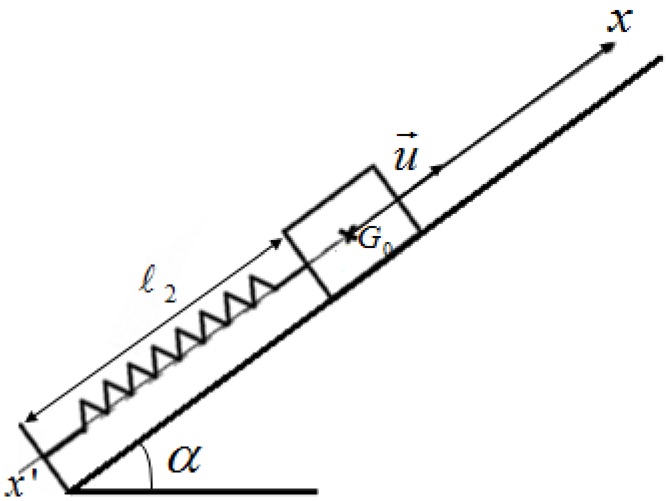
3.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S).

3.2. En déduire la période des oscillations du système.

3.3. Ecrire dans le repère (O,x) l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G de (S).

Exercice24:

Un solide S de masse m = 100g accroché à un ressort R de longueur à vide ℓ_0 = 12cm est astreint à se déplacer en translation sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (voir figure). La longueur du ressort correspondant à la position d'équilibre du ressort est ℓ_2 = 11,5cm.



1. Représenter les forces appliquées en G_0 en négligeant les frottements. Calculer α . AN : k =50N /m

2. On déplace légèrement le solide S de G_0 à G_M de façon que $\overrightarrow{G_0G_M} = x_m\vec{u}$ avec $x_m = 4,5cm$ et l'on abandonne sans vitesse à l'instant initiale t =0.

2.1. A l'instant t, le centre d'inertie du solide est G tel que $\overrightarrow{G_0G} = x\vec{u}$. Quelle est alors la tension $\vec{T}$ du ressort ?

2.2. Les forces de frottements sont proportionnelles à la vitesse du solide $\vec{f} = -\lambda\vec{V}$. Représenter les forces appliquées en G à l'instant t.

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S sur le plan incliné.

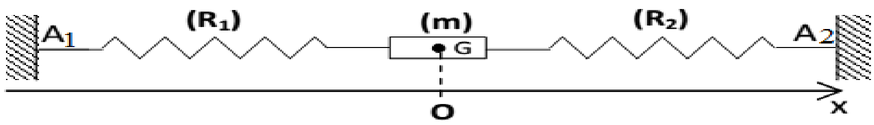
b- Déterminer à l'instant t l'énergie mécanique du système (Epp = 0J au plan horizontale passant par G_0).

c- Montrer que les frottements sont les seuls responsables de la perte d'énergie à partir de sa variation.

2.3. En considérant que les frottements sont négligeables (λ = 0), quelle est l'équation horaire du mouvement?

Exercice25:

Un palet de masse m = 700g, mobile sur une table horizontale à coussin d'air, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2 ; de masses négligeables, tendus entre deux points fixes A_1 et A_2 (voir figure ci-dessous)



Les ressorts de constante de raideur $k_1 = k_2 = 0,2N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_{o1} = l_{o2}$ = 18cm, ont pour longueur à l'équilibre du palet $l_1 = l_2$ = 25cm.

1. En l'absence des frottements, on écarte le palet de sa position d'équilibre O de telle sorte que son centre de gravité G se déplace vers A_1 de $\overline{OG}$ = -2cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant t = 0.

1.1 Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chaque ressort en fonction de l'abscisse x de G.

1.2 Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.

1.3 Exprimer et calculer la période propre du mouvement de G.

1.4 Ecrire l'équation horaire de G.

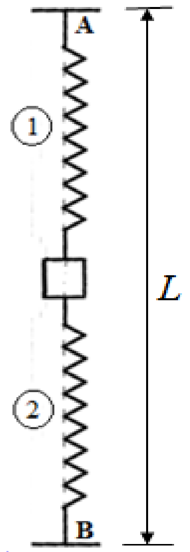
2. En réalité, il existe des frottements. On admettra qu'ils peuvent être représentés par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{V}$ où α est une constante positive et $\vec{V}$ le vecteur-vitesse de G.

2.1 Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.

2.2 Donner en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure de la courbe représentant l'amplitude de G en fonction du temps s'il s'agit d'un amortissement assez faible.

Exercice26:

Deux ressorts identiques, de longueur à vide $\ell_0 = 15cm$, de constante de raideur k=20N.m^{-1} sont tendus entre deux points A et B distants de L=45cm. Un solide de masse m=0,1kg, est fixé entre ces deux ressorts. (voir figure ci-contre)



1. Déterminer les longueurs des deux ressorts à l'équilibre.
2. Le solide est écarté verticalement de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance $a = 3cm$ et abandonné à lui-même. On prendra $g = 10m.s^{-2}$.

2.1. Par une étude dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement. On choisira l'axe x'Ox de sorte qu'il soit orienté vers le haut et que son origine O coïncide avec la position d'équilibre du disque.

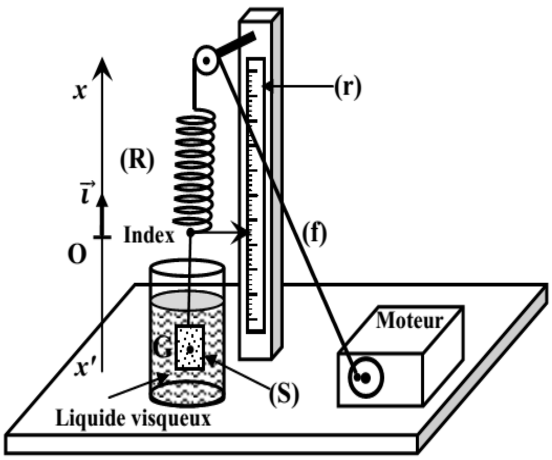
2.2. En déduire l'équation horaire du mouvement.

2.3. Retrouver l'équation différentielle par une étude énergétique. L'origine des énergies potentielles de pesanteur sera prise à la position du disque à l'équilibre.

Exercice27:

Pour l'étude expérimentale des oscillations d'un pendule élastique vertical, on réalise le dispositif de la figure ci-contre qui comporte :

- un ressort (R) de constante de raideur k et de masse négligeable, disposé verticalement tel que son extrémité supérieure soit attachée au fil (f) permettant de le mettre en liaison avec un disque tournant à vitesse constante.
- un récipient transparent contenant un liquide visqueux.
- un solide (S) de masse m est accroché à l'extrémité libre du ressort. Au cours de son mouvement, il baigne totalement dans le liquide et est soumis à des frottements de type visqueux.
- une réglette sur laquelle on peut repérer la position de l'index.



1. La position du centre de gravité G de la masse est définie par son abscisse **x** par rapport au repère $(O,\vec{i})$ d'axe $(x'x)$. L'origine O correspond à la position d'équilibre de G lorsque (S) est au repos.
2. Donner l'expression de la fréquence propre f_0 de l'oscillateur formé par (S) et (R).
3. Etablir une relation entre m, k, l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort lorsque (S) est au repos et l'intensité de la pesanteur g.
4. En déduire l'expression de f_0 en fonction de $\Delta\ell_0$ et g.
5. On mesure pour différentes valeurs de la fréquence f de rotation de l'excentrique entrainé par le moteur, l'amplitude X_m des oscillations du solide suspendu au ressort. Ce qui permet d'obtenir le tableau de mesures suivant :

f(Hz)	0	8	14	16	18	20	22	25	28	30	34	36	40	50
X_m(cm)	6,6	9,0	13,8	16,2	19,2	21,6	22,8	24	22,8	21	15	12,6	8,4	2,4

5.1. Identifier dans le dispositif ci-dessus, l'excitateur et le résonateur.

5.2. Les oscillations sont-elles libres ou forcées ? Justifier la réponse.

5.3. Représenter la courbe $X_m = g(f)$ de l'oscillateur. Echelle : 1cm pour 4cm et 1cm pour 5Hz.

5.4. Comment appelle-t-on cette courbe ?
5.5. Déterminer graphiquement la fréquence de résonance f_r ; puis déduire la fréquence propre f_0 du résonateur.
5.6. Déterminer la raideur k du ressort et son allongement $\Delta\ell_0$ à l'équilibre. On donne : m = 120g ; g = 9,8 m.s^{-2}.

VI- Oscillateurs articulés

Exercice28:

Un pendule pesant constitué d'une tige rectiligne homogène (t) de masse m=0,2kg de longueur $\ell = 20cm$. Ce pendule peut osciller sans frottement dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par le point O de son extrémité supérieure. On fixe à son extrémité inférieure, l'une des extrémités d'un ressort horizontal de masse négligeable et de constante de raideur k=50N.m^{-1}.
Initialement, la tige est immobile et verticale, et le ressort ni étiré, ni comprimé (figure 1).
On écarte la tige (t) de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on l'abandonne sans vitesse initiale. Soient θ l'élongation angulaire du mouvement de la tige mesurée à partir de sa position d'équilibre, x l'allongement du ressort au cours du mouvement et J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) (figure 2).

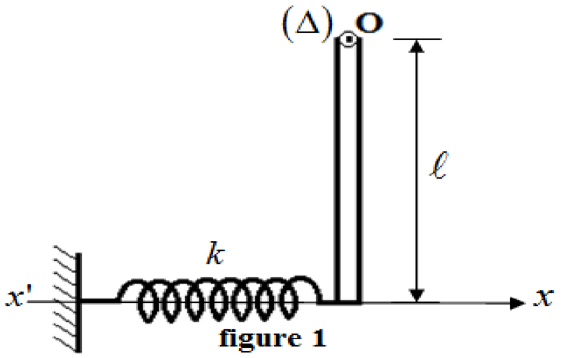


figure 1

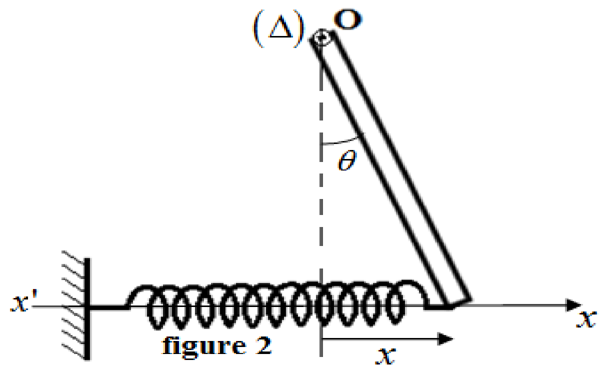
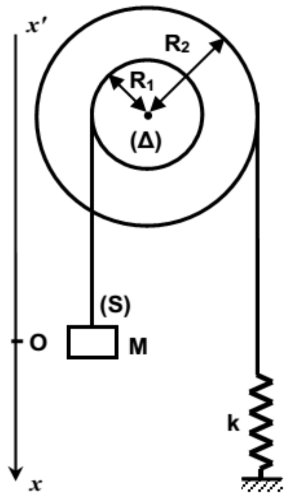


figure 2

1. Quel est la relation x, θ et ℓ.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique de rotation à la tige (t) et montrer que l'équation différentielle qui régit son mouvement dans le cas des oscillations de faible amplitude s'écrit :
$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$$
3. Retrouver cette équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique. On prendra comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal passant par la position d'équilibre du centre d'inertie G de la tige.
4. Exprimer et calculer est la longueur L d'un pendule simple synchrone à ce pendule pesant? prendre g = 9,8 m.s^{-2}.

Exercice29:



On considère deux poulies P_1 et P_2 accolées, homogènes de masse négligeables et de rayons respectifs R_1 et R_2. Elles tournent sans frottement autour d'un même axe (Δ). On enroule autour de P_1 un fil inextensible de masse négligeable et on suspend à l'une de ces extrémités un corps (S) de masse M. Sur l'autre poulie P_2 on enroule un autre fil inextensible, de masse négligeable, et on attache son extrémité à un ressort à spires non jointives de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Données : g =10 N/kg, M=0,2 kg, R_1 =5 cm, R_2 =10 cm, k =20 N/m.

1. Etablir l'expression de l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort à l'équilibre en fonction de m, R_1, R_2, k et g.

2. On déplace le corps (S) de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance x_m et on le lâche. On considère la position à l'équilibre comme origine des déplacements.

2.1. En appliquant les relations de la dynamique appropriées au corps (S), aux poulies et au ressort, montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement du corps (S) s'écrit : $\ddot{x} + \frac{kR_2^2}{MR_1^2}x = 0$.

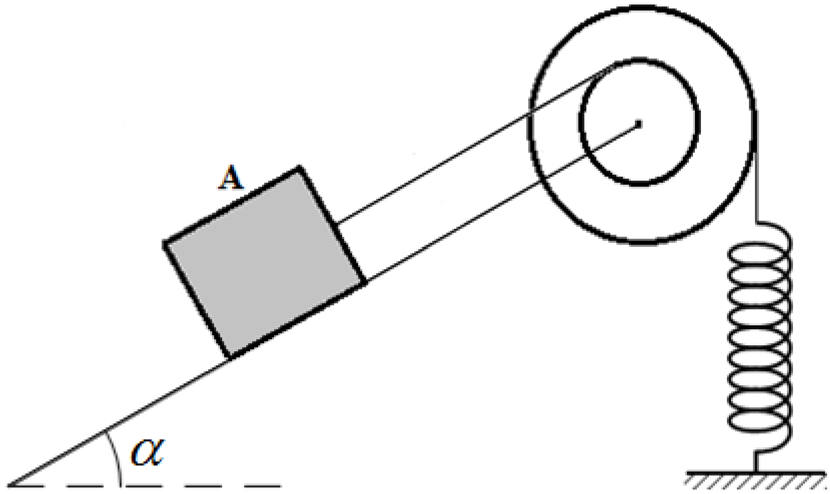
2.2. Retrouver cette équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique. Le niveau de référence des énergies potentielles de pesanteur est le plan horizontal passant par la position d'équilibre du corps (S).

2.3. Déduire la nature du mouvement se (S) puis donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule.

2.4. A la date t=0, (S) passe par le point d'abscisse $x_0 = 2cm$ avec une vitesse de valeur algébrique $V_0 = -0,2m/s$. Déterminer la loi horaire $x(t)$ de (S).

Exercice30:

Un corps A de masse m_A glisse le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'angle α=30° par rapport à l'horizontale. Le fil attaché au corps A reste parallèle à la ligne de plus grande pente. On détache le corps B qui tendait le fil, puis on enroule le fil sur une petite poulie à deux gorges, de moment d'inertie $J_\Delta = 6,8x10^{-4}$ kg.m^2 et de rayons R=15cm et r=8cm. L'extrémité de ce fil, issu de la gorge de la petite poulie, est ensuite attachée à un ressort à spires non jointives de masse négligeable ; ce ressort est fixé au sol et reste vertical (voir figure). Sa constante de raideur est K et il s'allonge de 1cm sous l'effet d'une force de 1N.



1. Déterminer l'expression de l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort à l'équilibre en fonction de m_A, R , r, α, K, et g . Calculer $\Delta\ell_0$

2. Le corps A, déplacé à partir de sa position d'équilibre de 2cm vers le bas le long du plan incliné, est abandonné sans vitesse initiale.

2.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du corps A par une étude :

a) Dynamique ;

b) Energétique.

2.2. En déduire que le corps A est un oscillateur harmonique et écrire l'équation horaire du mouvement.

VII- Evaluation des compétences : sécurité routière

Compétence visée: prévoir la vitesse critique d'un bus sur une route à ralentisseur type dos-d'âne et choisir son système de suspension {Ressort + d'amortisseur}.