LECON1: Généralités sur les systèmes oscillants

SITUATION PROBLEME: La variation de température en °C en fonction du temps (en semaine) à l'Ouest-Cameroun pendant la saison pluvieuse de 2020 est donnée par : $T(t) = 15,6\sin(4\pi t + \pi) + 5,2\cos(4\pi t - \frac{\pi}{2})$.

a) cette variation de température représente-t-elle un phénomène périodique ? si oui, déterminer sa fréquence et sa période.
b) Quelle est la température maximale de la saison pluvieuse dans cette région du pays en 2020?
c) Définir système oscillant.

1. Définitions et exemples

- Un phénomène périodique est un phénomène qui se reproduit, identiquement à lui-même, à des intervalles de temps réguliers, successifs et égaux.

Exemple: l'apparition des jours et des nuits

- Un système oscillant est un système pouvant évoluer de façon alternative et périodique de part et d'autre d'une position d'équilibre.

Exemple de systèmes oscillants: un enfant sur une balançoire, les battements du cœur, un circuit électrique RC, un pendule élastique,…………………

2. Les caractéristiques d'un système oscillant

- **L'amplitude** : valeur maximale atteinte par la grandeur physique associée à partir d'une position moyenne.
- **La période** : notée T, est la plus petite durée au bout de laquelle le phénomène se reproduit identique à lui-même. Elle s'exprime en seconde (s).
- **La fréquence** : nombre d'oscillations par unité de temps. C'est l'inverse de la période. Elle s'exprime en Hertz (Hz), notée N ou f.
- **La pulsation** : notée ω, elle est liée à la fréquence par $\omega = 2\pi f$.
- **La phase** : grandeur physique liée à la pulsation par l'expression $\omega t + \varphi$ avec φ la phase à l'origine des dates t = 0 appelée phase initiale.

Remarque : Relations entre la période, la fréquence, la pulsation.

$T = \frac{1}{f}$, T en (s), f en (Hz) $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω en (rad/s) $\omega = 2\pi f$

- A tout système oscillant harmonique, on associe une grandeur physique sinusoïdale qui est une fonction sinusoïdale du temps de la forme : $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ avec a son amplitude. La grandeur $x(t)$ appelée élongation, peut également être notée $\theta(t)$, $u(t)$, $i(t)$, etc. pour représenter une telle fonction, on complète le tableau ci-dessous :

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$\omega t + \varphi$					
x					

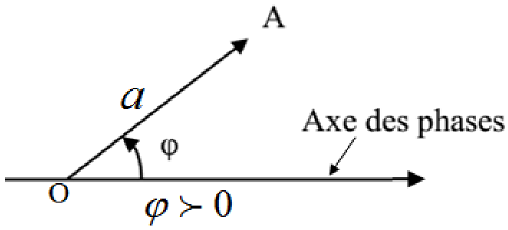
Exemple : représenter la fonction $x(t) = 4\cos(20\pi t + \frac{\pi}{4})$ sur deux périodes.

3. Représentation d'une fonction sinusoïdale par le vecteur de Fresnel

3.1. Principe de la représentation de Fresnel

Soit la fonction sinusoïdale x définie par : $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ ou par $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$.

La représentation de Fresnel consiste à associer à cette fonction sinusoïdale un vecteur $\overrightarrow{OA}$ dit vecteur de Fresnel dont les caractéristiques sont les suivantes :

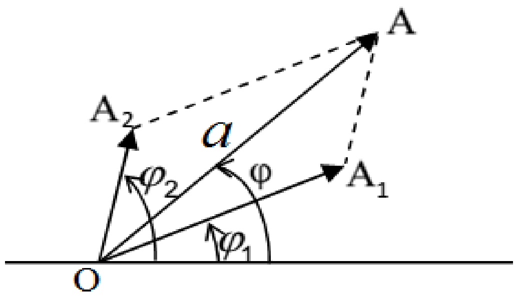


- La norme du vecteur $\overrightarrow{OA}$: elle correspond à l'amplitude de la fonction $x(t)$
- La direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{OA}$: le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle égale à φ avec l'axe des phases. O étant un point de cet axe.

EXEMPLE : Faites la construction de Fresnel de chacune des fonctions suivantes :

a) $x(t) = 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ en cm ; b) $u(t) = 20\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ en V ; c) $i(t) = 4\cos(100\pi t - \frac{\pi}{6})$ en A ; d) $y(t) = 2\sin(\omega t)$ en cm ; e) $x(t) = 5\cos(100\pi t + \pi)$ en m.

3.2. Application :sommes de deux grandeurs sinusoïdales



Soient deux fonctions sinusoïdales $y_1(t) = a_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = a_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. D'après le principe de superposition, la somme de deux grandeurs sinusoïdales est une grandeur sinusoïdale $y = y_1 + y_2$ avec $y(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer y revient donc à déterminer a et φ.

a) Méthode graphique : représentation de Fresnel

- On associe à la fonction y_1 le vecteur $\overrightarrow{OA_1}$, à y_2 le vecteur $\overrightarrow{OA_2}$ et à y le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
- On construit les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$.
- On mesure la norme du vecteur $\overrightarrow{OA}$ puis on ramène sa valeur à l'unité de départ pour avoir a
- On mesure l'angle entre l'axe des phases et $\overrightarrow{OA}$ en tenant compte du signe puis on convertit en radians pour avoir φ.

b) Méthode analytique : par calcul

La projection des vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ dans le repère (O,x,y) permet d'écrire :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \text{ et } \tan\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} \text{ soit } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}\right).$$

EXERCICE D'APPLICATION :

On considère les tensions sinusoïdales suivantes : $u_1 = 15\cos(120\pi t + \frac{\pi}{3})$ et $u_2 = 45\sin(120\pi t)$ en Volt.

a) Déterminer la somme $u = u_1 + u_2$ par la construction de Fresnel. Echelle 1cm pour 15V.

b) Retrouver le résultat ci-dessus par calcul.

4. Méthodes d'analyse des systèmes oscillants

4.1.Analyse à l'aide d'un oscilloscope

Un oscilloscope est un appareil électronique qui permet de visualiser un ou plusieurs signaux électriques.
La courbe obtenue à l'écran est appelée oscillogramme.

a) Description

l'écran d'un oscilloscope est divisé en carreaux appelés divisions : la direction horizontale correspond au temps et la direction verticale à une tension.

b) Mesure de la période et l'amplitude

pour effectuer une mesure on compte le nombre de divisions dans la direction de la grandeur mesurée puis on multiplie par l'échelle : la sensibilité verticale pour la tension et le balayage pour le temps.

c) Déphasage entre deux oscillogrammes de même période

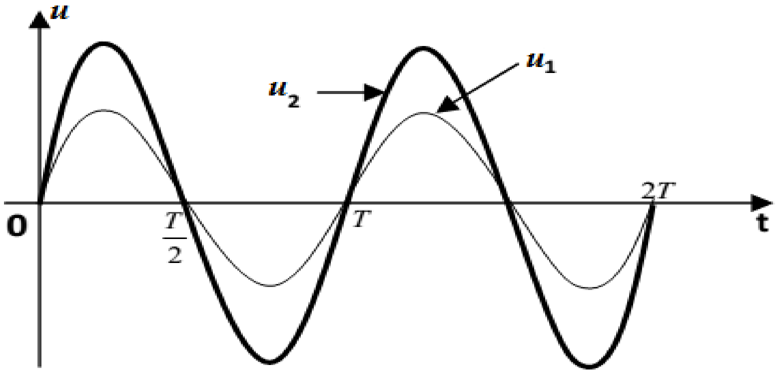
Soient deux oscillogrammes de grandeurs physiques associées: $u_1 = U_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2 = U_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$

Le déphasage entre u_2 par rapport à u_1 est noté $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

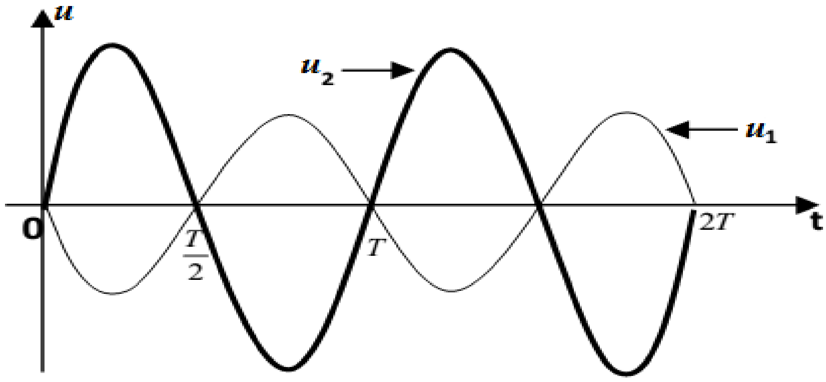
- Si $\varphi_2 - \varphi_1 \succ 0$ alors u_2 est en avance de phase sur u_1.
- Si $\varphi_2 - \varphi_1 \prec 0$ alors u_2 est en retard de phase sur u_1.

Cas particulier

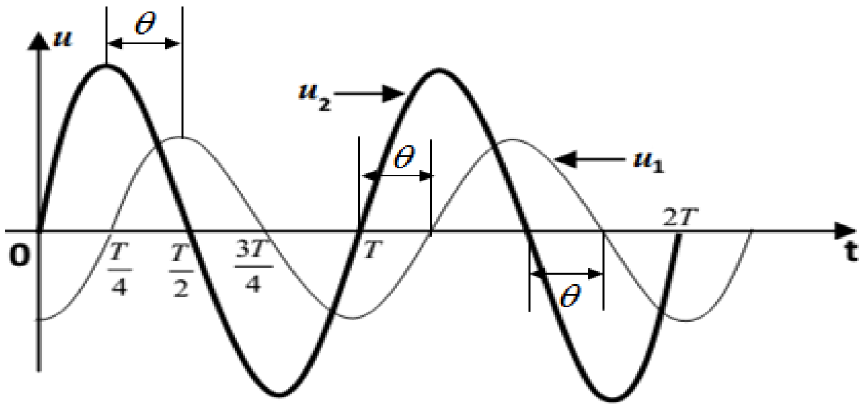
- $\varphi_2 - \varphi_1 = 2K\pi$ (K∈Z), u_2 et u_1 sont en phase.



- $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2K\pi$ (K∈Z), u_2 et u_1 sont en opposition de phase.



- $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + K\pi$ (K∈Z), u_2 et u_1 sont en quadrature de phase.



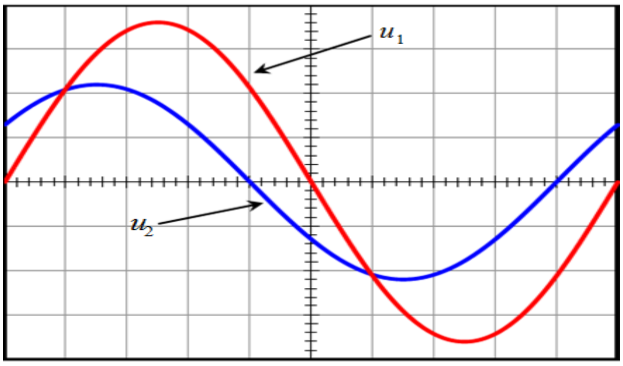
Remarques:

- Graphiquement, la fonction en avance de phase est celle qui atteint les sommets la première lorsque le temps augmente ou celle qui coupe l'axe de temps la première. Dans le dernier cas, u_2 est en avance de phase sur u_1. -

Au déphasage Δφ entre deux fonctions correspond un décalage horaire $\theta = \frac{|\Delta\varphi|}{\omega}$ qui représente le retard (ou l'avance) de l'une des fonctions par rapport à l'autre. Δφ en (rad), ω en (rad.s^{-1}) θ en (s).

EXERCICE D'APPLICATION:

Les élèves de la classe de terminale industrielle ont visualisé sur un oscilloscope bi courbe deux tensions $u_1 = a_1\cos(wt+\varphi_1)$ et $u_2 = a_2\cos(wt+\varphi_2)$ puis ont obtenu sur l'écran les courbes de la figure ci-contre avec :
-Balayage : 2ms/div; -sensibilité verticale u_1 : 1V/div et u_2 : 2V/div

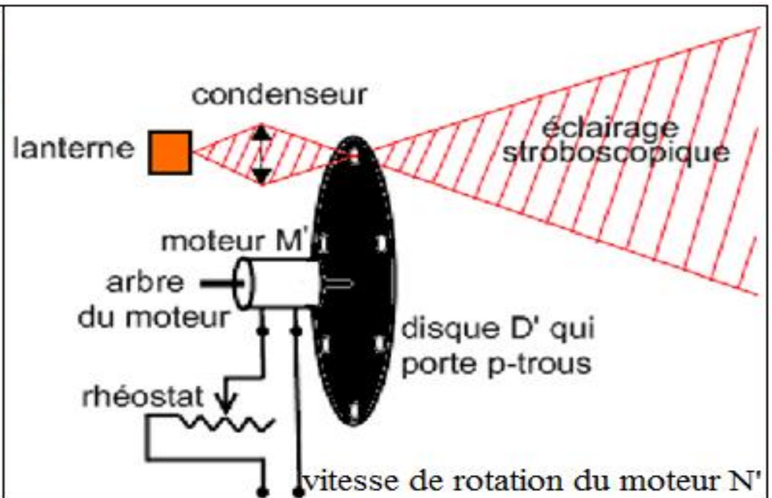


a) Déterminer graphiquement l'amplitude, la période et la pulsation des deux tensions u_1 et u_2. Ainsi que le décalage horaire θ entre u_1 et u_2.
b) Laquelle des deux tensions est en avance sur l'autre ? En déduire la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ entre les deux tensions.
c) Déterminer la phase initiale φ_2 puis en déduire φ_1 et les équations horaires de u_1 et u_2 .

4.2.Analyse à l'aide d'un stroboscope

a) Définitions

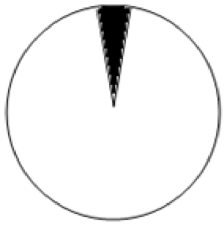
-La stroboscopie est une méthode d'étude des phénomènes périodiques très rapides à l'aide d'un stroboscope, en leurs donnant une apparence d'immobilité ou de ralenti.
-un stroboscope est une source de lumière intermittente qui émet périodiquement de brefs éclairs.
Son rôle est de mesurer la fréquence des mouvements périodiques.
-Fréquence des éclairs : C'est le nombre d'éclairs émis par le stroboscope pendant une seconde. Elle est notée f_e ou N_e et son unité est le hertz (Hz).
-Période des éclairs : C'est la durée qui sépare deux éclairs consécutifs du stroboscope. Elle se note T_e et son unité la seconde(s).



Stroboscope électronique	Stroboscope mécanique
- Fréquence des éclairs f_e réglable -Période des éclairs T_e réglable	- Fréquence des éclairs f_e réglable, f_e=N'.p -Période des éclairs T_e réglable

b) Etude expérimentale
L'étude expérimentale est basée sur la **persistance des impressions rétiniennes de l'œil :** une image reste « imprimée » sur la rétine pendant 0,1s. Ce temps étant très cours, l'œil a l'impression d'une lumière continue.
En effet, Quand l'œil humain regarde un objet, son image se forme sur la rétine et un mécanisme naturel transmet

cette image au cerveau. Lorsque cet objet disparait, son image « traine » sur la rétine pendant environ 0,1s avant de s'effacer. Autrement dit, si l'objet disparait et réapparait avant 0,1s, dans la même position, l'œil ne se rend pas compte de « l'effacement » et continu de voir l'objet immobile. Si par contre, sur une durée de 0,1s l'objet disparait et réapparait n fois, dans des positions différentes, l'œil le verra multiplier en n objets différents.
Pour mieux expliquer, prenons le cas simple d'un disque blanc portant un rayon noir qui tourne à la fréquence f et de période T :



- En éclairage continu (lumière du jour), on ne voit plus le rayon de façon distincte : le rayon nous paraît donc uniformément gris.
- Eclairons le disque avec un stroboscope de fréquence variable $f_é$ et de période $T_é$, notons que le rayon n'est vu uniquement que lorsqu'il est éclairé. On distingue alors quatre cas :

1^er^ cas : si $T_é = kT$ c'est-à-dire $f_é = \frac{f}{k}, k = 1;2;3;4;5;6.......$; $k \in \mathbb{N}^*$ alors, on observe **une immobilité apparente disque avec un rayon (un motif).**

Cela veut dire qu'entre deux éclairs consécutifs, le disque fait 1,2,3,4,5,6,……….,k tours complets. Le rayon est toujours éclairé dans la même position.

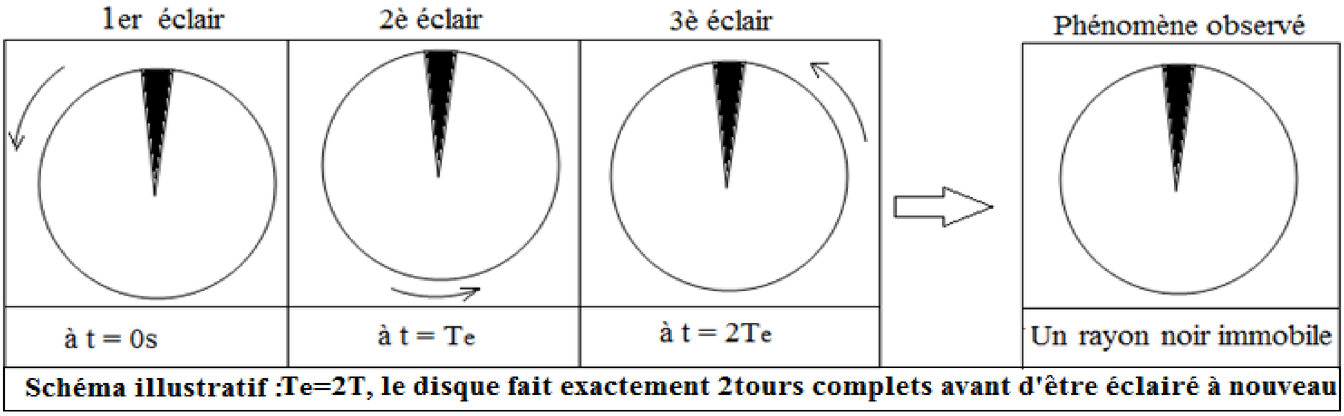


Schéma illustratif :Te=2T, le disque fait exactement 2tours complets avant d'être éclairé à nouveau

Remarque: la plus grande fréquence des éclairs pour laquelle on observe une telle immobilité correspond à la plus petite valeur de k soit k=1, $f_e = f$.

2^e^ cas : si $T_é = \frac{T}{k}$ c'est-à-dire $f_é = kf$, $k = 1;2;3;4;5;6.......$; $k \in \mathbb{N}^*$ alors, on observe **une immobilité apparente du disque avec k rayons (k motif)**

Cela veut dire qu'entre deux éclaires consécutifs (période $T_é$), le disque effectue $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6},......$; $\frac{1}{k}$ tours avec $k \geq 2$. Le rayon est donc éclairé k fois par tour.

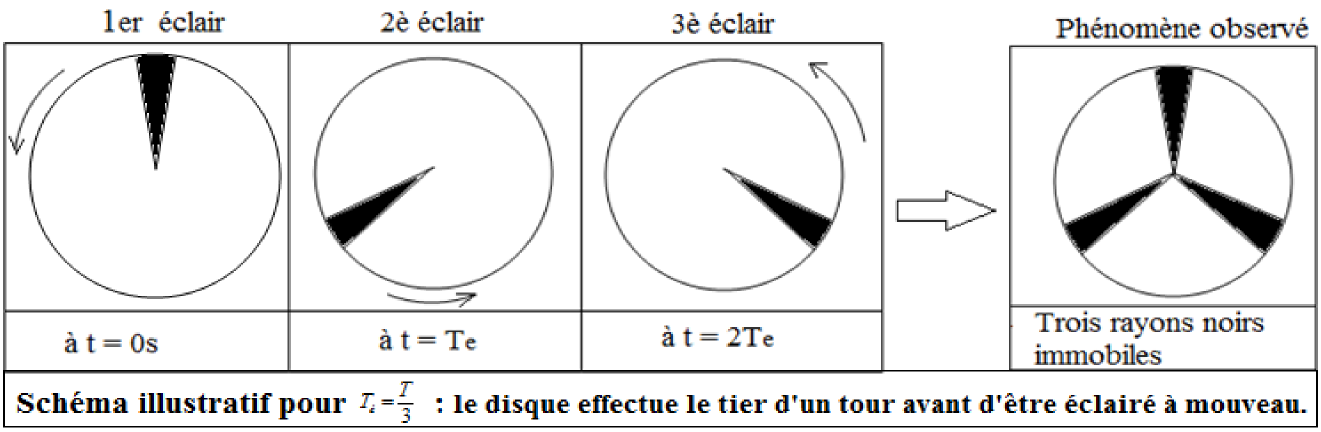


Schéma illustratif pour $T_é = \frac{T}{3}$: le disque effectue le tier d'un tour avant d'être éclairé à mouveau.

Remarque : si $T_é = k'T + \frac{T}{k}$ avec $k' \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, entre deux éclairs consécutifs, le disque effectue n tours complets + $\frac{1}{k}$ tours et le rayon éclairé k. on observe toujours **une immobilité apparente avec k rayons (k motif).**

3[e] cas : Si $T_é \approx kT$ avec $T_é \succ kT$ c'est-à-dire $f_é \approx \dfrac{f}{k}$($f_é \prec \dfrac{f}{k}$), $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6.......$; $k \in \mathbb{N}^*$ alors, on observe **un mouvement ralenti du disque portant un rayon(un motif) dans le sens réel (sens direct).**
Entre deux éclairs consécutifs, le disque a eu le temps de faire un peu plus que 1, 2, 3 ou k tours complets. Le rayon est éclairé lorsqu'il s'est légèrement déplacé de sa position précédente, dans le même sens que celui du mouvement du disque.

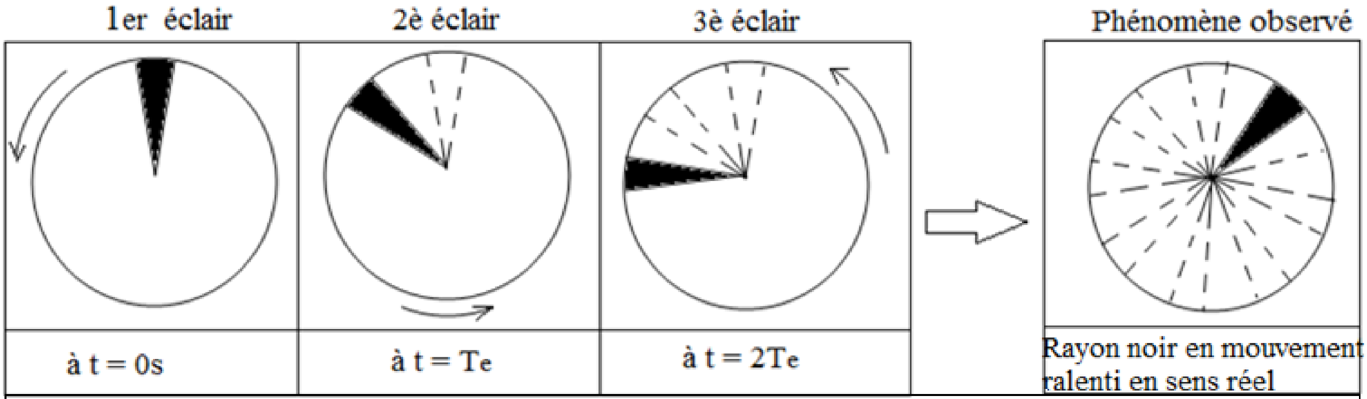


Schéma illustratif pour T=4s et Te=4,1s, le disque fait un peu plus que un tour complet

4[e] cas : Si $T_é \approx kT$ avec $T_é \prec kT$ c'est-à-dire $f_é \approx \dfrac{f}{k}$ ($f_é \succ \dfrac{f}{k}$), $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6.......$; $k \in \mathbb{N}^*$, on observe **un mouvement ralenti du disque portant un rayon (un motif) dans le sens inverse (sens indirect ou sens rétrograde).**
Entre deux éclairs consécutifs, le disque n'a pas eu le temps de faire complètement 1, 2, 3 ou k tours complets. Le rayon est éclairé lorsqu'il s'est légèrement déplacé de sa position précédente, dans le sens contraire de celui du mouvement du disque.

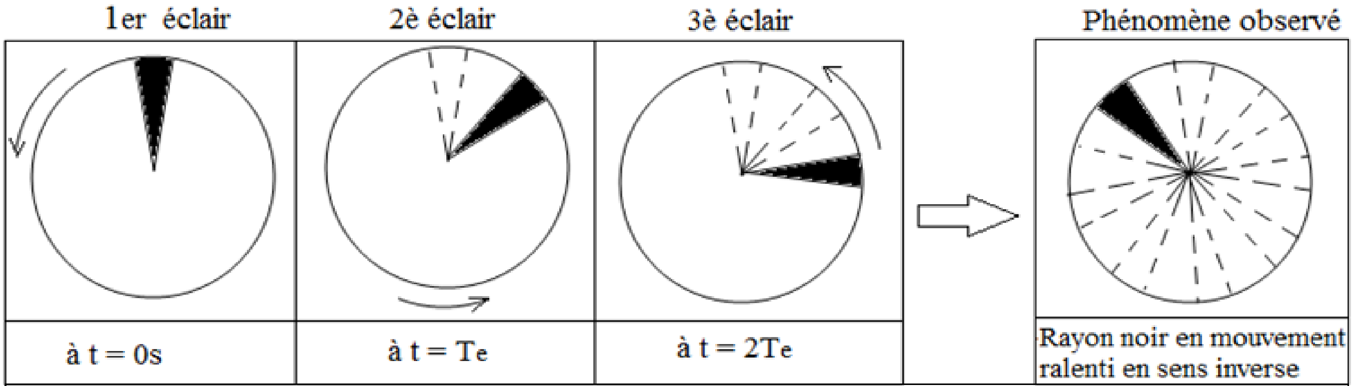


Schéma illustratif pour T=4s et Te=3,9s, le disque fait un peu moins que un tour complet

Remarques :

- Dans tous les cas, k est la partie entière du rapport des fréquences $f_é$ et f (la plus grande par la plus petite)
- Lorsque le disque possède initialement n rayons identiques régulièrement espacés, on détermine d'abord la fréquence f' de son mouvement périodique plus rapide (dit **phénomène stroboscopique** : $\dfrac{1}{n}$ tour du disque) soit $f' = nf$ avec f la fréquence de rotation du disque. Puis on travaille avec $f_é$ et f' sans oublier que dans ce cas le motif est n rayons identiques.
- Dans le cas d'un mouvement apparent ralenti, la fréquence apparente de ce mouvement est donnée par : $f_a = |kf_e - f|$.

Preuve : $T_é \approx kT$ avec $T_é \succ kT$ alors dans l'intervalle de temps $T_é$, le disque de période T, effectue $(k + \dfrac{1}{n})$tour ;on a donc $T_é = (k + \dfrac{1}{n})T$. Dans le même intervalle de temps $T_é$, le disque semble effectuer $\dfrac{1}{n}$ tour (mouvement apparent), o a donc $T_é = \dfrac{1}{n}T_a \Rightarrow \dfrac{1}{n} = \dfrac{T_é}{T_a}$ en remplaçant $\dfrac{1}{n}$ dans $T_é = (k + \dfrac{1}{n})T$ on obtient $T_é = (k + \dfrac{T_é}{T_a})T \Rightarrow T_é = kT + \dfrac{T_é T}{T_a}$ en divisant cette équation par $T_é T$ on obtient $\dfrac{1}{T} = \dfrac{k}{T_é} + \dfrac{1}{T_a} \Rightarrow f = kf_é - f_a$ d'où $f_a = f - kf_é$.

EXERCICE D’APPLICATION :

A) Une roue blanche comporte un rayon peint en noir. La tourne à la vitesse de 3000trs/min. On l’éclaire à l’aide d’un stroboscope d’un stroboscope de fréquence variable $f_é$.

1. Déterminer la plus grande fréquence des éclairs pour laquelle on observe une immobilité apparente avec un rayon.
2. Qu’observe-t-on lorsque la fréquence des éclairs $f_é$ est :

a) $f_é = 10H_z$;b) $f_é = 100H_z$; c) $f_é = 49H_z$; d) $f_é = 25H_z$;e) $f_é = 150H_z$;f) $f_é = 26H_z$; g) $f_é = 24H_z$;i) $f_é = 51H_z$

B) Sur un disque noir est peint trois rayons blancs identiques et régulièrement espacés.la fréquence de rotation du disque est $f = 28H_z$ ce disque est éclairé par un stroboscope dont la fréquence f_e peut varier de $10H_z$ à $100H_z$.

1. Trouver le mouvement stroboscopique et donner sa fréquence f'.

2. Déterminer pour quelles fréquences des éclairs :

a) Le disque paraît immobile avec unicité.

b) Le disque paraît immobile avec 6 rayons.

c) Le disque ralenti dans le sens réel et trouver la fréquence apparente pour $N_e = 78H_z$.

Exercice 1: Questions de cours