PRIMITIVES

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $F'(x) = f(x)$.

Exemple

- La fonction $F: x \longmapsto 3x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f: x \longmapsto 3$
- La fonction $F: x \longmapsto 2\sqrt{x} - 5$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f: x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Théorème d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.
Mais une fonction non continue sur un intervalle I peut avoir une primitive sur I.

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas continue sur $[0; +\infty[$ car non continue en 0.
Mais elle admet sur $[0; +\infty[$ une primitive qui est la fonction $x \longmapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Ensemble des primitives d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. f admet une infinité de primitive sur I, et si F est l'une d'entre elles, toute autre primitive de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application

Déterminer une primitive de la fonction f suivante :

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin x$

Réponse

a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{F(x) = x^3 + k}$

b) f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f admet une primitive sur $]0; +\infty[$.

$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - \cos x + k}$

Primitive vérifiant une condition initiale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et, y_0 un réel quelconque.
Il existe une et une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$
Toute primitive de f s'écrit de la forme :
$G(x) = F(x) + c$
$G(x_0) = F(x_0) + c = y_0 \Leftrightarrow c = y_0 - F(x_0)$

D'où : $\boxed{G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0}$

Exemple : Soit $f(x) = \sin x - 1$.
Déterminons une primitive F de f vérifiant $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
$F(x) = -\cos x - x + c$
$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + c = 3 \Leftrightarrow c = 3 + \frac{\pi}{2}$

D'où : $\boxed{F(x) = -\cos x - x + 3 + \frac{\pi}{2}}$

Primitives de fonctions

Fonctions usuelles		Formules de primitives	
$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + k$	$u + v$	$U + V + k$
$ax + b$	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	au	$aU + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$u'\sin u$	$-\cos u + k$
$\cos x$	$\sin x + k$	$u'\cos u$	$\sin u + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u + k$

Exercices d'application

1) Trouver la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \qquad F(0) = 3$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1 \qquad F(1) = \frac{5}{6}$

c) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \qquad F(0) = -1$

2) Calculer les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2} \qquad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (3x^2+1)(x^3+x-2)^3 \qquad I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-6}} \qquad I =]2; 5[$

3) Primitive nécessitant une transformation

Exemple: Soit $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$

On pose : $u(x) = 2x - 3 \quad u'(x) = 2$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

D'où $F(x) = \frac{3}{2} \times (2\sqrt{2x-3}) + k$

$\boxed{F(x) = 3\sqrt{2x-3} + k \text{ sur } \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^2} - \sqrt{2} \qquad I =]0; +\infty[$

b) $f(x) = 2(3x-1)^5 \qquad I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \qquad I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{3x^2} \qquad I =]0; +\infty[$

Correction

1) Trouvons la primitive F de la fonction f

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \qquad F(0) = 3$

$F(x) = x^3 - x^2 + 2x + k$

$F(0) = 3 \Leftrightarrow k = 3$

$\boxed{F(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3}$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1 \qquad F(1) = \frac{5}{6}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + k$

$F(1) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 1 + k = -\frac{7}{6} + k$

$F(1) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} + k = \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = 2$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 2}$

c) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \qquad F(0) = -1$

$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$

$F(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1}$

2) Calculons les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2} \qquad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^2 - x + 3 \qquad u'(x) = 2x - 1$

$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ or $\text{prim}\left(\frac{u'}{u^2}\right) = -\frac{1}{u} + k$

$\boxed{F(x) = \frac{-1}{x^2-x+3} + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) $f(x) = (3x^2+1)(x^3+x-2)^3 \qquad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^3 + x - 2 \qquad u'(x) = 3x^2 + 1$

$f(x) = u'(x) \times u^3(x)$

$\text{prim}(u'u^n) = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}(x^3+x-2)^4 + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-6}} \qquad I =]2; 5[$

Soit $u(x) = x^2 + 5x - 6 \qquad u'(x) = 2x + 5$

$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \qquad \text{prim}\left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right) = 2\sqrt{u} + k$

$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x^2+5x-6} + k \text{ sur }]2; 5[}$

3) Calculons les primitives des fonctions :

a) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^2} - \sqrt{2} \qquad I =]0; +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{x^2} - \sqrt{2}$

$\text{prim}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + k$ et $\text{prim}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} + k$

$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{x} + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{x}\right) - x\sqrt{2} + k$ sur $]0; +\infty[$

$\boxed{F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{3x} - x\sqrt{2} + k \text{ sur }]0; +\infty[}$

b) $f(x) = 2(3x-1)^5 \qquad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = 3x - 1 \qquad u'(x) = 3$

$f(x) = \frac{2}{3} \times 3(3x-1)^5 = \frac{2}{3} \times u'(x) \times u^5(x)$

$F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}u^6(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6 + k$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6 + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \qquad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = \frac{\pi}{3} - 2x \qquad u'(x) = -2$

$f(x) = \frac{1}{-2} \times (-2)\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{2} \times u' \sin u$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) \text{ sur } \mathbb{R}}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{3x^2} \qquad I =]0; +\infty[$

$f(x) = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{x^2}{3x^2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3x} + k \text{ sur }]0; +\infty[}$