# RESUMÉ DE COURS (MATHS)

+ exo corrigés.

2023

By Tehua
what. : 0505462346 13
Côte d'Ivoire
+ 225

Sommaire

# LES FONCTIONS NUMERIQUES

## I. Limites de fonctions

**Théorème**

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant un réel $a$ sauf peut être $a$.

On a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

( $l$ est fini ou infini)

**Opérations sur les limites**

| Lim de $f$ | Lim de $g$ | Lim de $f+g$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l+l'$ |
| $l$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | FI |
| **Lim de $f$** | **Lim de $g$** | **Lim de $f\times g$** |
| $l$ | $l'$ | $l\times l'$ |
| $l\neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| 0 | $\pm\infty$ | FI |
| **Lim de $f$** | **Lim de $g$** | **Lim de $\frac{f}{g}$** |
| $l$ | $l'\neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ |
| $\pm\infty$ | $l'\neq 0$ | $\pm\infty$ |
| $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | FI |
| $l\neq 0$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |
| 0 | 0 | FI |

**Asymptote à une courbe**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $(a\in\mathbb{R})$ alors la droite $(\Delta)$: $x = a$ est une **asymptote verticale** à $(C_f)$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ alors la droite $(D)$: $y = b$ est une asymptote **horizontale** à $(C_f)$.

Soit $(\Delta)$: $y = ax + b$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite $(\Delta)$ est une **asymptote oblique** à $(C_f)$.

**Limites et ordre**

Soit $a$ un réel et $I$ un intervalle ouvert contenant $a$, $f, g$ et $h$ trois fonctions définies sur $I$ sauf peut-être en $a$.

Si $\forall x\in I$ et $x\neq a$, on a : $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ alors $l\leq l'$

Si $\forall x\in I$ et $x\neq a$, on a : $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ alors $f$ admet une limite en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Si $\forall x\in I$ et $x\neq a$, on a : $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Si $\forall x\in I$ et $x\neq a$, on a : $f(x)\geq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

**Limites et composées de fonctions**

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(gof)(x) = l$

**Exemple** : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\frac{1}{x+1})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\frac{1}{x+1}) = 1$

**Branches infinies**

Soit $f$ une fonction numérique et $(C_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, I, J)$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(C)$ admet en $\infty$ une branche parabolique de direction $(OI)$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$ alors $(C)$ admet en $\infty$ une branche parabolique de direction $(OJ)$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ $(a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b$ $(b\in\mathbb{R})$ alors la droite $(\Delta)$: $y = ax + b$ est une **asymptote oblique à** $(C_f)$.

**Limites usuelles**

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si n est pair} \\ -\infty \text{ si n est impair}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ \text{ si n est pair} \\ 0^- \text{ si n est impair}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{x-a} = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{x-a} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Limites de fonctions polynômes et fonctions rationnelles**

Soit f la fonction polynôme définie par :

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n)$

Soit $Q$ la fonction rationnelle définie par : $Q(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$

$\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{a_nx^n}{b_mx^m})$

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ $(a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \infty$ alors $(C_f)$ admet en $\infty$ une **branche parabolique** de direction la droite $(\Delta)$: $y = ax$.

**Exercices d'application**

1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2+x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x} - x$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} + 2x$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2+x}$ $\quad$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

*Abonnez-vous à notre page **Nour-Maths** pour ne pas rater les prochaines publications*

2) Soit $f$ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter les résultats.

**Correction**

1) Calcul de limites

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

b) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{0}{0} = FI$

$\frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$

$\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+4) = 5$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{x+3} = 4$ et $\lim_{x\to4} \sqrt{x} = 2$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}} = 2$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$ Donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + 2x$

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2x = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} + 2x$

$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2x = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2x$

$f(x) = x(2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to-\infty} 2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + 2x = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \cos x \le 1$ et $\forall x \ge 0,\ x^2+x > 0$

$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+x} \le \frac{\cos x}{x^2+x} \le \frac{1}{x^2+x}$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x} = 0$

2) $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$.

Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$. D'où : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\forall x \in ]1;+\infty[\ ,\ \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} + \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \left(-1-\frac{1}{x}\right) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$

Par suite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(OI)$

## II. Continuité

**Continuité en un point**

**Soit f une fonction et $x_0$ un réel.**

$f$ est continue à gauche en $x_0$ si et seulement si :

$x_0 \in D_f$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$f$ est continue à droite en $x_0$ si et seulement si :

$x_0 \in D_f$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en $x_0$. C'est-à-dire :

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

**Exemple** : Etudions la continuité de $f$ en 0:

$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x} - 1 & si\ x \le 0 \\ \frac{x^3+1}{4x^2-1} & si\ x > 0 \end{cases}$

**Réponse**

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} [x\sqrt{2-x} - 1]$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$

$f(0) = 0\sqrt{2-0} - 1 = -1$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left[\frac{x^3+1}{4x^2-1}\right] = -1$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x)$

Donc $f$ est continue en 0.

**Théorème de continuité**

- Toute fonction dérivable en $x_0$ est continue en $x_0$.
- Toute fonction dérivable sur $I$ est continue sur $I$

NB : La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

**Exemples de fonctions continues**

- Les fonctions polynômes, cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrées est continue sur $[0;+\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue.

**Prolongement par continuité**

Soit $f$ une fonction de domaine de définition $D_f$ et $x_0$ un réel.

$f$ admet un prolongement par continuité en $x_0$ si et seulement si :

$x_0 \notin D_f$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R})$

La fonction g définie par :

$\begin{cases} g(x) = f(x);\ si\ x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est le prolongement par continuité en $x_0$.

**Exercices d'application**

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et déterminer son prolongement.

**Réponse**

$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} = \frac{3}{2}$

$1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1.

Soit g son prolongement : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} ;\ si\ x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$

**Fonction continue et bijection réciproque**

Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- $f$ réalise une bijection de I sur $f(I)$
- la bijection réciproque $f^{-1}$ de $f$ est de même sens de variation que $f$ sur $f(I)$.
- $(C_f)$ et $(C_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice $((\Delta): y = x)$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $m \in f(I)$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans I.

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a; b[$

**Exemple** :

Soit $f$ une fonction continue et strictement décroissante su $[-1; +\infty[$ . Justifier que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution dans $[-1; +\infty[$.

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $5$ | $-\infty$ |

**Réponse de l'exemple**

$f$ une fonction continue et strictement décroissante su $[-1; +\infty[$

donc f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers $f([-1; +\infty[) = ]-\infty; 5]$

De plus $-10 \in ]-\infty; 5]$. Par suite, l'équation $f(x) = -10$ admet une unique solution dans $[-1; +\infty[$.

$8 \notin ]-\infty; 5]$ donc l'équation $f(x) = 8$ n'admet pas une unique solution dans $[-1; +\infty[$.

## III- DERIVATION

### Etude de la dérivabilité en un point

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Dérivabilité en $x_0$** | $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \ (l \in \mathbb{R})$ <br> **$f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = l$** | $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ <br> **$f$ n'est pas dérivable en $x_0$.** | $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ <br> $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$ <br> $(l_1 \in \mathbb{R}$ **et** $l_2 \in \mathbb{R})$ <br> **Si $l_1 \neq l_2$ alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0$.** |
| **Conséquences graphiques** | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente de pente $l$** <br> $(T): y = l(x - x_0) + f(x_0)$ | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente verticale d'équation $x = x_0$** | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ deux demi-tangentes de pentes respectives $l_1$ et $l_2$.** <br> **Le point d'abscisse $x_0$ est anguleux.** |

**Exercice d'application**

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $x_0$ puis interpréter les résultats obtenus :

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x\ \ si\ x \leq 2 \\ -\frac{4}{x} + 2\ \ si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad x_0 = 2$

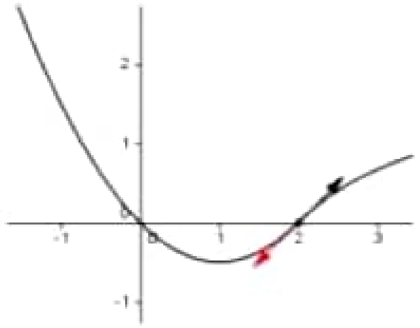
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 3\ \ si\ x \in ]-1; 0[ \\ 2\sqrt{x+1} - 3\ \ si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\ \ si\ x \in [0; 1] \\ \sqrt{x-1}\ \ si\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

**Réponse**

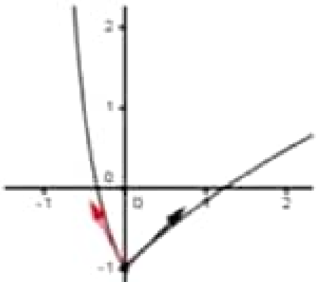
a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x & si\ x\le 2\\ -\frac{4}{x}+2 & si\ x>2\end{cases}$ $x_0=2$

- $f(2)=0$
- $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{2}x^2-x}{x-2}$
  $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{2}=1$
  Donc $f$ est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2)=1$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-2}$
  $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2}{x}=1$
  Donc $f$ est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=1$
- $f'_g(2)=f'_d(2)$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=1$
- $(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)$
  $(T): y=x-2$



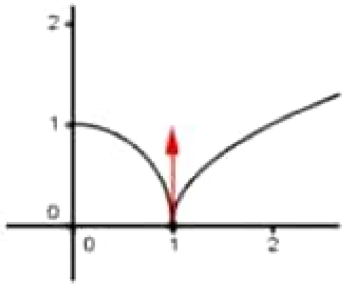
b) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+1}-3 & si\ x\in]-1;0[\\ 2\sqrt{x+1}-3 & si\ x\ge 0\end{cases}$

- $f(0)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{2}{x+1}-3+1}{x}$
  $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-2$
  Donc $f$ est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x}$
  $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$
  Donc $f$ est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$
- $f'_g(0)\ne f'_d(0)$ donc $f$ n'est pas dérivable en 0.
- $(C_f)$ admet une demi-tangente oblique à gauche en 0 d'équation
  $(T_g): y=f'_g(0)x+f(0)$
  $(T_g): y=-2x-1$
- $(C_f)$ admet une demi-tangente oblique à gauche en 0 d'équation
  $(T_d): y=f'_d(0)x+f(0)$
  $(T_d): y=x-1$



c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & si\ x\in[0;1]\\ \sqrt{x-1} & si\ x\in]1;+\infty[\end{cases}$

- $f(1)=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$
  $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$
  Donc $f$ n'est pas dérivable à gauche en 1
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
  $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$
  Donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 1.
- $f$ n'est pas dérivable en 1.
- $(C_f)$ admet à gauche et à droite au point d'abscisse 1, une asymptote verticale.



## Dérivée des fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k\ (k\in\mathbb{R})$ | 0 |
| $x$ | 1 |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $x^r\ (r\in\mathbb{Z}^*-\{1\})$ | $rx^{r-1}$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\tan x$ | $1+tan^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$ |

## Dérivée et opérations sur les limites

| | |
|---|---|
| $(u+v)'=u'+v'$ | $(ku)'=ku'\ (k\in\mathbb{R})$ |
| $(uv)'=u'v+uv'$ | $(u^n)'=nu'\times u^{n-1}$ |
| $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ | $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $(uov)'=[u'ov]\times v'$ | $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $(\cos u)'=-u'\sin u$ | $(\sin u)'=u'\cos u$ |
| $[\tan(u)]'=u'\times[1+\tan^2 u]=\frac{u'}{\cos^2 u}$ | |

**Dérivée et sens de variation**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si $\forall x\in I, f'(x)>0$, alors, $f$ est strictement croissante sur $I$.
- Si $\forall x\in I, f'(x)<0$, alors, $f$ est strictement décroissante sur $I$.
- Si $\forall x\in I, f'(x)=0$, alors $f$ est constante sur I.

**Dérivée d'une bijection réciproque**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, $f$ bijective de I vers J et $\forall x\in I, f'(x)\ne 0$ alors :
$f^{-1}$ est dérivable en J.
$\forall y\in J, (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

*Abonnez-vous à notre page **Nour-Maths** pour ne pas rater les prochaines publications*

# Résumé

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Etudier la continuité de $f$ en $x_0$** | Il suffit de vérifier que $x_0 \in D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en $x_0$.<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ alors f n'est pas continue en $x_0$. |
| **Montrer que f admet un prolongement par continuité en $x_0$** | Il suffit de vérifier que $x_0 \notin D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0$.<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors f est prolongeable par continuité en $x_0$.<br>**La fonction g définie par :** $\begin{cases} g(x) = f(x);\ si\ x \in D_f \\ g(x_0) = b \end{cases}$ **est le prolongement par continuité en $x_0$.** |
| **Etudier la dérivabilité de $f$ en $x_0$** | Il suffit de calculer : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors f est dérivable en $x_0$ et on a : $f'(x_0) = b$<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en $x_0$.<br>**<u>Interprétation graphique</u>** : $(C_f)$ admet une demi-tangente verticale au point $M(x_0; f(x_0))$. |
| **Montrer que la fonction f est paire** | Il suffit de montrer que : $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f\ et\ f(-x) = f(x)$<br>L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(C_f)$. |
| **Montrer que la fonction f est impaire** | Il suffit de montrer que : $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f\ et\ f(-x) = -f(x)$<br>L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe $(C_f)$. |
| **Montrer que le point $A(a; b)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$** | Il suffit de montrer que :<br>$(1)$: $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$ **ou** $(2)$: $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a - x) \in D_f;\ (a + x) \in D_f \\ f(a - x) + f(a + x) = 2b \end{cases}$ |
| **Montrer que la droite $(D): y = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(C_f)$** | Il suffit de montrer que :<br>$(1)$: $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$ **Ou** $(2)$: $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a - x) \in D_f;\ (a + x) \in D_f \\ f(a - x) = f(a + x) \end{cases}$ |
| **Etudier les variations de $f$** | ✓ On calcule $f'(x)$<br>✓ On étudie le signe de $f'(x)$ :<br>Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $I$<br>Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $I$ |
| **Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]a ; b[$ sur un intervalle $K$ à préciser** | Il suffit de dire que :<br>$f$ est continue et strictement monotone sur $]a; b[$ ; De plus $f(]a; b[) = J$ (**à déterminer**).<br>Donc $f$ réalise une bijection de $]a ; b[$ sur $K = J$ |
| **Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]a ; b[$** | ✓ Montrer que $f$ réalise une bijection de $]a; b[$ sur $f(]a; b[)$<br>✓ Vérifier que $0 \in f(]a; b[)$<br>**Comme $0 \in f(]a; b[)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]a ; b[$.** |
| **Donner une équation de la tangente $(T)$ au point d'abscisse $x_0$** | $(T)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ |
| **Etudier la position relative de $(C_f)$ par rapport à la droite $(D): y = ax + b$** | On étudie le signe de $[f(x) - (ax + b)]$.<br>✓ Si : $\forall x \in I$, $f(x) - (ax + b) > 0$ alors la courbe $(C_f)$ est au-dessus de **(D)** sur $I$.<br>✓ Si : $\forall x \in J$, $f(x) - (ax + b) < 0$ alors la courbe $(C_f)$ est en dessous de **(D)** sur $J$.<br>✓ Si $f(x) - (ax + b) = 0$ pour $x = x_0$ alors $(C_f)$ et **(D)** se coupent au(x) point(s) $A(x_0 ; f(x_0))$ |

## Exercice d'application

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

1) Etudier les variations de $f$ puis dresser son tableau de variations.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que $0 < \alpha < 1$

3) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

4) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

## Réponse

$f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

1) Variations de f

$f$ est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^2 + 3 = 3(2x^2 + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2) $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

Donc $f$ réalise une bijection de $]-\infty; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.

De plus, $0 \in ]-\infty; +\infty[$ , d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

On a : $f(0) = -1$ *et* $f(1) = 4$

$f(0) \times f(1) = -4 < 0$ donc $0 < \alpha < 1$.

3) Donnons une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-0,7$ | $-0,38$ | $-0,05$ | 0,3 |

On a : $f(0,3) \times f(0,4) < 0$, donc $0,3 < \alpha < 0,4$

Une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près est : 0,3.

4) Signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ − | 0 | + ↗ $+\infty$ |
| signe | - | | + |

$\forall x \in ]-\infty; \alpha], f(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha; +\infty[, f(x) \geq 0$

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par:
$f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

1) Etudier les variations de $f$ puis dresser son tableau de variations.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que $0 < \alpha < 1$

3) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

4) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

1) <u>Variations de f</u>

$f$ est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^2 + 3 = 3(2x^2 + 1)$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Tableau de variation</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $]-\infty; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$. De plus, $0 \in\ ]-\infty; +\infty[$ , d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$

On a : $f(0) = -1$ et $f(1) = 4$

$f(0) \times f(1) = -4 < 0$ donc $0 < \alpha < 1$.

3) Donnons une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près

| $x$ | $0$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-0,7$ | $-0,38$ | $-0,05$ | $0,3$ |

On a : $f(0,3) \times f(0,4) < 0$, donc $0,3 < \alpha < 0,4$

Une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près est : $0,3$.

4) Signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-$ $\nearrow$ | $0$ | $+$ $\nearrow$ | $+\infty$ |
| signe | | $-$ | | $+$ | |

$\forall x \in\ ]-\infty; \alpha],\ f(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha; +\infty[,\ f(x) \geq 0$

**Théorème**

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $m \in f(I)$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans I.

**<u>Corollaire</u>**

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a; b[$.

**Etudier la dérivabilité de $f$ en $x_0$:**

**a)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & si\ x\geq 0\\ x^2+\sqrt{1-x} & si\ x<0\end{cases}\qquad x_0=0$

**b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x} & si\ x\in\,]-\infty;0[\\ x\sqrt{x^4+8x} & si\ x\in[0;+\infty[\end{cases}\qquad x_0=0$

**a)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & si\ x\geq 0\\ x^2+\sqrt{1-x} & si\ x<0\end{cases}\qquad x_0=0$

**On a :** $f(0)=\sqrt{0+1}=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\sqrt{1-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}x+\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}x+\frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}x+\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}$$

**$f$ est dérivable à gauche et à droite de 0 mais comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ alors $f$ n'est pas dérivable en 0.**

**Interprétation**

$(C_f)$ admet deux demi-tangentes obliques à gauche et à droite du point $A(0;1)$ de coefficients directeurs respectifs $-\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{2}$ **Le point A est un point anguleux.**

**b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x} & si\ x\in\,]-\infty;0[\\ x\sqrt{x^4+8x} & si\ x\in[0;+\infty[\end{cases}\qquad x_0=0$

**On a :** $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^4+1-1}{x^2(\sqrt{x^4+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x^4+8x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^4+8x}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

**$f$ est dérivable à gauche et à droite de 0 et $f'_g(0)=f'_d(0)$ donc $f$ est dérivable en 0.**

$f'(0)=0$ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Dérivabilité en $x_0$** | $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ $(l\in\mathbb{R})$ **$f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0)=l$** | $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ **$f$ n'est pas dérivable en $x_0$.** | $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ $(l_1\in\mathbb{R}$ *et* $l_2\in\mathbb{R})$ **Si $l_1\neq l_2$ alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0$.** |
| **Conséquences graphiques** | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente de pente $l$** $(T): y=l(x-x_0)+f(x_0)$ | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente verticale d'équation** $x=x_0$ | **$(C_f)$ admet au point d'abscisse $x_0$ deux demi-tangentes de pentes respectives $l_1$ *et* $l_2$.** **Le point d'abscisse $x_0$ est anguleux.** |

**Etudier la continuité de $f$ en $x_0$:**

**a)** $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{2-x}-1 & si\ x\le 0\\ \frac{x^3+1}{4x^2-1} & si\ x>0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

**b)** $f(x)=\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} & si\ x\le 0\\ \sqrt{x+9} & si\ x>0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

**c)** $h(x)=\begin{cases} \frac{\cos 2x}{1-\cos x} & si\ x\in\ ]-\infty;\pi[\\ \sin(\frac{1}{6}x) & si\ x\in[\pi;+\infty[\end{cases}$ $\quad x_0=\pi$

---

**a)** $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{2-x}-1 & si\ x\le 0\\ \frac{x^3+1}{4x^2-1} & si\ x>0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[x\sqrt{2-x}-1\right]=-1$

$f(0)=0\sqrt{2-0}-1=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{x^3+1}{4x^2-1}\right]=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

**Donc $f$ est continue en 0.**

**b)** $f(x)=\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} & si\ x\le 0\\ \sqrt{x+9} & si\ x>0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2x-1}{x+1}\right]=\frac{2\times 0-1}{0+1}=-1$

$f(0)=\frac{2\times 0-1}{0+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x+9}\right]=\sqrt{9}=3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

**Donc $f$ n'est pas continue en 0.**

**c)** $h(x)=\begin{cases} \frac{\cos 2x}{1-\cos x} & si\ x\in\ ]-\infty;\pi[\\ \sin(\frac{1}{6}x) & si\ x\in[\pi;+\infty[\end{cases}$ $\quad x_0=\pi$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\left[\frac{\cos 2x}{1-\cos x}\right]=\frac{\cos 2\pi}{1-\cos\pi}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$

$f(\pi)=\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}\left[\sin(\frac{1}{6}x)\right]=\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=f(\pi)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\frac{1}{2}$

**Donc $f$ est continue en $\pi$ .**

---

- $f$ est continue à gauche en $x_0$ si et seulement si $x_0\in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$
- $f$ est continue à droite en $x_0$ si et seulement si $x_0\in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$
- $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en $x_0$.
  C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

# ETUDE DE FONCTION

**Voici quelques questions rencontrées lors d'une étude de fonction**

Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $D_f$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;I;J)$.

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Etudier la continuité de $f$ en $x_0$** | Il suffit de vérifier que $x_0 \in D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en $x_0$.<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ alors f n'est pas continue en $x_0$. |
| **Montrer que f admet un prolongement par continuité en $x_0$** | Il suffit de vérifier que $x_0 \notin D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0$.<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ alors f est prolongeable par continuité en $x_0$.<br>**La fonction g définie par :**<br>$\begin{cases} g(x) = f(x);\ si\ x \in D_f \\ g(x_0) = b \end{cases}$ **est le prolongement par continuité en $x_0$.** |
| **Etudier la dérivabilité de $f$ en $x_0$** | Il suffit de calculer : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$ $(b \in \mathbb{R})$ alors f est dérivable en $x_0$ et on a : $f'(x_0) = b$<br>✓ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en $x_0$.<br>**<u>Interprétation graphique</u>** : $(C_f)$ admet une demi-tangente verticale au point $M(x_0; f(x_0))$. |

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Montrer que la fonction f est paire** | Il suffit de montrer que :<br>$x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$ *et* $f(-x) = f(x)$<br>L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(C_f)$. |
| **Montrer que la fonction f est impaire** | Il suffit de montrer que :<br>$x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$ *et* $f(-x) = -f(x)$<br>L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe $(C_f)$. |
| **Montrer que le point $A(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe $(C_f)$** | Il suffit de montrer que :<br>$(1): \begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$<br>**Ou**<br>$(2): \begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a-x) \in D_f;\ (a+x) \in D_f \\ f(a-x) + f(a+x) = 2b \end{cases}$ |
| **Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(C_f)$** | Il suffit de montrer que :<br>$(1): \begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$<br>**Ou**<br>$(2): \begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a-x) \in D_f;\ (a+x) \in D_f \\ f(a-x) = f(a+x) \end{cases}$ |
| **Etudier les variations de f** | ✓ On calcule $f'(x)$<br>✓ On étudie le signe de $f'(x)$ :<br>○ Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $I$<br>○ Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $I$ |
| **Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.** | Valeurs de $x$ \| $D_f$<br>Signe de $f'(x)$ \|<br>Variations de $f$ \| |
| **Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]a\,;b[$ sur un intervalle $K$ à préciser** | Il suffit de dire que :<br>$f$ est continue et strictement monotone sur $]a;b[$ ;<br>De plus $f(]a;b[) = J$ **(à déterminer)**.<br>Donc $f$ réalise une bijection de $]a\,;b[$ sur $K = J$ |

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]a\,;b[$** | ✓ Montrer que $f$ réalise une bijection de $]a;b[$ sur $f(]a;b[)$<br>✓ Vérifier que $0 \in f(]a;b[)$<br>**Comme $0 \in f(]a;b[)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]a\,;b[$.** |
| **Donner une équation de la tangente $(T)$ au point d'abscisse $x_0$** | $(T)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ |
| **Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ par rapport à la droite $(D)$ d'équation : $y = ax + b$** | On étudie le signe de $[f(x) - (ax + b)]$.<br>✓ Si : $\forall x \in I$, $f(x) - (ax + b) > 0$ alors la courbe $(C_f)$ est au-dessus de **(D)** sur $I$.<br>✓ Si : $\forall x \in J$, $f(x) - (ax + b) < 0$ alors la courbe $(C_f)$ est en dessous de **(D)** sur $J$.<br>✓ Si $f(x) - (ax + b) = 0$ pour $x = x_0$ alors $(C_f)$ et **(D)** se coupent au(x) point(s) $A(x_0; f(x_0))$ |
| **Déterminer les coordonnées du point (ou des points) d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses.** | Soit $A(x_A; y_A)$ le(s) point(s) recherché(s) :<br>✓ $y_A = 0$.<br>✓ Pour trouver $x_A$ , on résout l'équation $f(x) = 0$.<br>**(Le nombre de solution de cette équation est égal au nombre de points où la courbe $(C_f)$ coupe l'axe des abscisses).** |
| **Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées.** | Soit $A(x_A; y_A)$ le point recherché ;<br>✓ $x_A = 0$<br>✓ $y_A = f(x_A) = f(0)$ |
| **Déterminer les coordonnées du point de la courbe $(C_f)$ où la tangente $(T)$ est parallèle à la droite $(D)$ d'équation $y = ax + b$** | Si la tangente $(T)$ et la droite $(D)$ sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur.<br>Or $\begin{cases}(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ (D): y = ax + b\end{cases}$<br>On a donc $f'(x_0) = a$.<br>On résout l'équation $f'(x) = a$<br>✓ La solution $x_K$ de cette équation est l'abscisse.<br>✓ L'ordonnée est $y_K = f(x_K)$ |

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(C_f)$ et de la droite $(D)$ d'équation $y = ax + b$** | On résout l'équation $(E)$ : $f(x) = ax + b$<br>Le nombre de solutions est égale au nombre de points d'intersection de $(C_f)$ et de $(D)$.<br>✓ Si $x_0$ est solution de l'équation $(E)$ alors $y_0 = f(x_0)$ ou $y_0 = ax_0 + b$<br>✓ $A(x_0; y_0)$ est le point d'intersection de … |
| **Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ $(a < b)$** | **1er cas** : $f(x) > 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$I$ est l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.<br><br>**2ème cas** : $f(x) < 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$I$ est l'opposé de l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$. |
| **Si $OI \times OJ = m$ cm²**<br>**Interpréter graphiquement l'intégrale $I = m\int_a^b f(x)dx$ $(a < b)$** | **1er cas** : $f(x) > 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$I$ est l'aire exprimée en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$. |
| **Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_a^b [f(x) - (ax + c)]dx$ $(a < b)$** | **1er cas** : $f(x) - (ax + c) > 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$I$ est l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, la droite $(D)$ : $y = ax + c$ les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$. |
| **Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$** | **1er Cas** : $f(x) > 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$A = \int_a^b f(x)dx \times U.a$<br>avec $U.a = OI \times OJ$<br><br>**2èmeCas** : $f(x) < 0$ $sur$ $[a\,;b]$<br>$A = -\int_a^b f(x)dx \times U.a$<br>avec $U.a = OI \times OJ$ |

| Questions | Méthodes |
|---|---|
| **Soit (*D*) : $y = ax + b$ Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, la droites (*D*) d'équations respectives $x = a$ et $x = b$** | **1er Cas** : $f(x) - (ax+b) > 0$ $sur$ $[a\,;\,b]$ $A = \int_a^b [f(x) - (ax+b)]dx \times U.a$ <br> **2ème Cas** : $f(x) - (ax+b) < 0$ $sur$ $[a\,;\,b]$ $A = \int_a^b [(ax+b) - f(x)]dx \times U.a$ |
| **Montrer que les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ des fonctions *f* et *g* sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (C'est-à-dire la droite (*OI*)** | Il suffit de montrer que : $f(x) = -g(x)$ |
| **Montrer que les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ des fonctions *f* et *g* sont symétriques par rapport au point O (l'origine du repère)** | Il suffit de montrer que : $f(-x) = -g(x)$ |

## Asymptotes et branches paraboliques

| NOTIONS | RESULTATS DES CALCULS | INTERPRETATION GRAPHIQUES |
|---|---|---|
| Asymptote verticale | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ | La droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à $(C_f)$ |
| Asymptote horizontale | $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ | La droite d'équation y= b est une asymptote (horizontale) à $(C_f)$ en $\infty$ |
| Asymptote oblique | $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ | La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à $(C_f)$ en $\infty$ |
| Branches paraboliques | ✓ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ <br> ✓ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ | ✓ $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction (*OI*) en $\infty$ <br> ✓ $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction (*OJ*) en $\infty$ |



**COMMENT JUSTIFIER LE SIGNE D'UNE FONCTION A L'AIDE DU TABLEAU DE VARIATION**

| Tableau de variation | Méthodes |
|---|---|
| $f(a) = 0$ <br> $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $+$ <br> $f(x)$ : $-\infty \nearrow +\infty$ | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$. Donc : <br> $\forall x < a$, on a : $f(x) < f(a)$ ; $f(x) < 0$ <br> $\forall x > a$, on a : $f(x) > f(a)$; $f(x) > 0$ |
| $f(a) = 0$ <br> $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $-$ <br> $f(x)$ : $+\infty \searrow -\infty$ | $f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$. Donc : <br> $\forall x < a$, on a : $f(x) > f(a)$ ; $f(x) > 0$ <br> $\forall x > a$, on a : $f(x) < f(a)$; $f(x) < 0$ |
| $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $+$ <br> $f(x)$ : $\nearrow 0$ | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ <br> Donc : <br> $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$. |
| $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $-$ <br> $f(x)$ : $0 \searrow$ | $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ <br> Donc : <br> $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ |
| $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $+$ <br> $f(x)$ : $0 \nearrow$ | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ Donc : <br> $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$ |
| $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $f'(x)$ : $-$ <br> $f(x)$ : $\searrow 0$ | $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ <br> Donc : <br> $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$. |

| Tableau de variation | Méthodes |
|---|---|

***f* admet un minimum positif sur *I***

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | |

**Remarque** :
Les limites, ici, n'étaient pas nécessaires.

**1ère méthode** :
$f(\alpha)$ est le minimum de $f$ sur $I$ ; Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) \geq f(\alpha)$.
De plus $f(\alpha) > 0$
Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) > 0$

**2ème méthode** :
$f$ admet sur $I$, un minimum (absolu) qui est strictement positif.
Donc : $\forall x \in I$ , on a : $f(x) > 0$

***f* admet un maximum négatif sur *I***

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | |

$f$ admet sur $I$, un maximum (absolu) qui est strictement négatif.
Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) < 0$

***Déterminer ou donner le signe de $f(x)$***

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha_1$ | | $m$ | | $\alpha_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | | $0$ | | | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $0$ | ↘ | $f(m)$ | ↗ | $0$ | ↗ |

$f(\alpha_1) = 0$ et $f(\alpha_2) = 0$
(L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions)
ICI, on a toujours : $f(m) < 0$

Il faut étudier le signe de $f$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,; m[$ et $]m\,; +\infty[$.

- ✓ **Sur $]-\infty\,; m[$**, $f$ est continue et strictement décroissante et $f(\alpha_1) = 0$.
  Donc :
  Si $x < \alpha_1$ alors $f(x) > f(\alpha_1)$ donc $f(x) > 0$.
  Si $\alpha_1 < x < m$, alors $f(\alpha_1) > f(x)$
  Donc $f(x) < 0$.
- ✓ **Sur $]m\,; +\infty[$**, $f$ est continue et strictement croissante et $f(\alpha_2) = 0$.
  Donc :
  Si $m < x < \alpha_2$, alors $f(x) < f(\alpha_2)$
  Donc $f(x) < 0$.
  Si $x > \alpha_2$, alors $f(x) > f(\alpha_2)$
  donc $f(x) > 0$.

***Déterminer le signe de $f(x)$***

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha_1$ | | $m$ | | $\alpha_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | | $0$ | | | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f(m)$ | ↘ | $0$ | ↘ |

ICI, on a toujours : $f(m) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha_1$ | | $m$ | | $\alpha_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | | $0$ | | | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f(m)$ | ↘ | $0$ | ↘ |
| Signe de $f(x)$ | $-$ | | | $+$ | | | $-$ |

**Conclusion** :

- $\forall x \in\, ]-\infty; \alpha_1[\, \cup\, ]\alpha_2;+\infty[$, $f(x) < 0$ ;
- $\forall x \in\, ]\alpha_1; \alpha_2[$, $f(x) > 0$

| Tableau de variation | Méthodes |
|---|---|

***Déterminer le signe de $f(x)$***

$f(e) = 0$ *et* $f(e^{-2}) \approx -2{,}2$

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(e^{-2})$ | ↘ | $-e$ | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(e^{-2})$ | ↘ | $-e$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |
| Signe de $f(x)$ | | $-$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Conclusion** :
$\forall x \in\, ]0\,; e[$, $f(x) < 0$.
$\forall x \in\, ]e\,; +\infty[$, $f(x) > 0$

***Déterminer le signe de $f(x)$***

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-e$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-e$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |
| Signe de $f(x)$ | | $-$ | \|\| | | $+$ | | |

***Démontrer le signe de $f(x)$***

$f(e) = 0$ *et* $f(e^{-2}) \approx -2{,}2$

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(e^{-2})$ | ↘ | $-e$ | ↗ | $+\infty$ |

- ✓ Sur $]0\,; 1]$, $f$ admet un maximum strictement négatif ;

**Donc : $x \in\, ]0\,; 1]$, $f(x) < 0$.**

- ✓ Sur $]1\,; +\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante avec $f(e) = 0$.
  $x \in\, ]1\,; e[ \iff 1 < x < e$,

**Donc $f(x) < 0$ sur $]1\,; e[$.**

- ✓ $x \in\, ]e\,; +\infty[ \iff x > e$,

**donc $f(x) > 0$ sur $]e\,; +\infty[$.**

**Conclusion** :
$\forall x \in\, ]0\,; e[$, $f(x) < 0$.
$\forall x \in\, ]e\,; +\infty[$, $f(x) > 0$

***Démontrer le signe de $f(x)$***

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-e$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

- ✓ On a $f(]0\,; 1[) = ]-\infty\,; -e[$ ;
  **Donc : $\forall x \in\, ]0\,; 1[$, on a $f(x) < 0$.**
- ✓ $e$ est le minimum de $f$ Sur $]1\,; +\infty[$ ;

**Donc $\forall x \in\, ]1\,; +\infty[$, on a : $f(x) \geq e > 0$.**

Conclusion :
$\forall x \in\, ]0\,; 1[$, $f(x) < 0$.
$\forall x \in\, ]1\,; +\infty[$, $f(x) > 0$

## Fonctions logarithme et exponentielle népérienne

| | Fonction logarithme $\ln x$ | Fonction exponentielle $e^x$ |
|---|---|---|
| Domaine de définition | $\mathcal{D}f = ]0;+\infty[$<br>Si on a : $f(x) = \ln u$, on a : $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / u > 0\}$ et on résout l'inéquation $u > 0$ | $\mathcal{D}f = ]-\infty;+\infty[$<br>Si on a : $f(x) = e^u$ on a : $D_f = D_u$ |
| Limites | $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$<br>$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ |
| Dérivée | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(e^x)' = e^x$ |

**Dérivées : Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies $I$ et $J$**

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad$ $(e^u)' = u'e^u$

**Les limites usuelles**

| Logarithme | exponentielle |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{R}$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad n \in \mathbb{R}$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
| $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad n \in \mathbb{R}$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{R}$ |

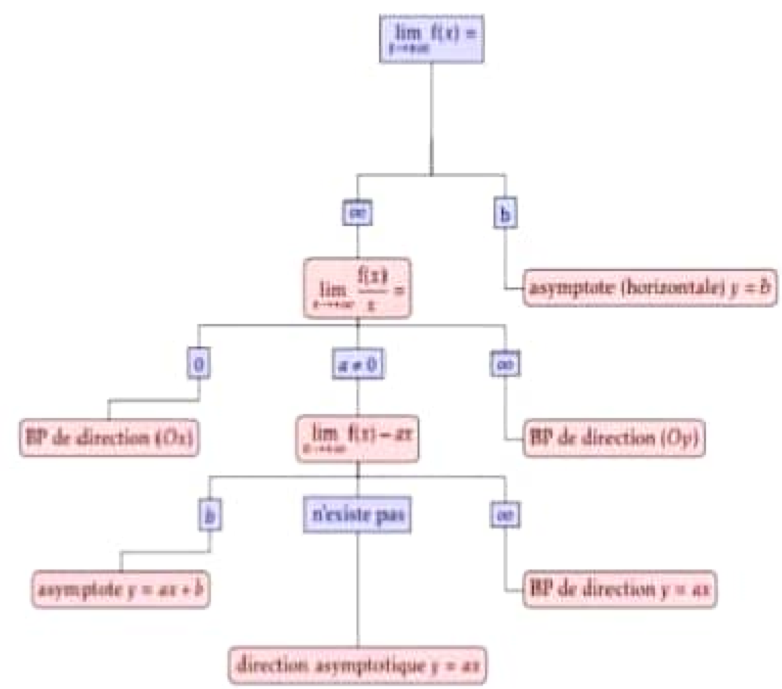
Nour-Maths TleD

## Image d'un intervalle par une fonction continue

| Intervalle | f est croissante sur $I$ | f est croissante sur $I$ |
|---|---|---|
| $I = [a;b]$ | $f(I) = [f(a); f(b)]$ | $f(I) = [f(b); f(a)]$ |
| $I = ]a;b[$ | $f(I) = ]\lim\limits_{x \to a^>} f(x); \lim\limits_{x \to b^<} f(x)[$ | $f(I) = ]\lim\limits_{x \to b^<} f(x); \lim\limits_{x \to a^>} f(x)[$ |
| $I = ]-\infty; a]$ | $f(I) = ]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); f(a)]$ | $f(I) = [f(a); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$ |
| $I = ]b; +\infty[$ | $f(I) = ]\lim\limits_{x \to b^<} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$ | $f(I) = ]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); \lim\limits_{x \to b^<} f(x)[$ |

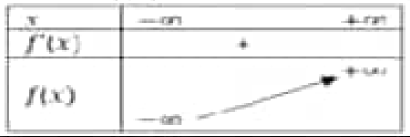
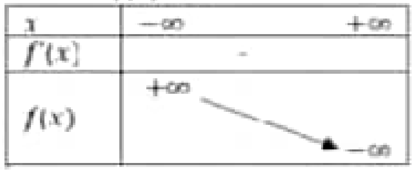
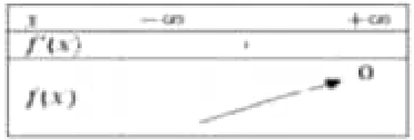
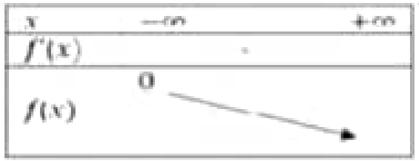
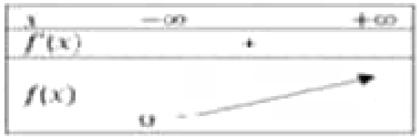
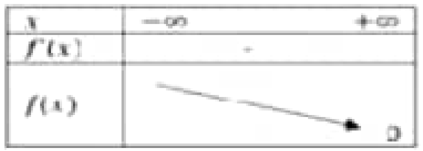
## Branches paraboliques

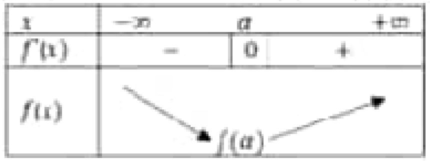
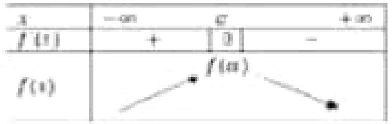
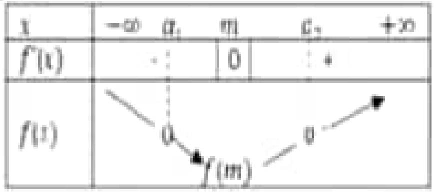
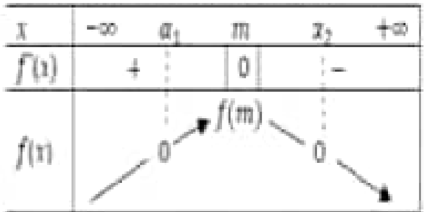
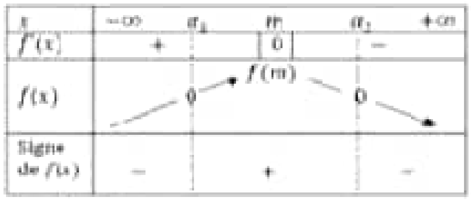
Diagramme de synthèse




75849395/71974219

# COMMENT JUSTIFIER LE SIGNE D'UNE FONCTION A L'AIDE DU TABLEAU DE VARIATION

| Tableau de variation | Méthodes |
|---|---|
| $f(\alpha) = 0$<br> | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(\alpha) = 0$ Donc :<br>$\forall x < \alpha$, on a : $f(x) < f(\alpha)$ ; $f(x) < 0$<br>$\forall x > \alpha$, on a : $f(x) > f(\alpha)$; $f(x) > 0$ |
| $f(\alpha) = 0$<br> | $f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(\alpha) = 0$ Donc :<br>$\forall x < \alpha$, on a : $f(x) > f(\alpha)$ ; $f(x) > 0$<br>$\forall x > \alpha$, on a : $f(x) < f(\alpha)$; $f(x) < 0$ |
|  | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$<br>Donc :<br>$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$. |
|  | $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$<br>Donc :<br>$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ |
|  | $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ Donc :<br>$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$ |
|  | $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$<br>Donc :<br>$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$. |

| Tableau de variation | Méthodes |
|---|---|
| ***f admet un minimum positif sur I***<br><br>**Remarque** :<br>Les limites, ici, n'étaient pas nécessaires. | **1ère méthode** :<br>$f(\alpha)$ est le minimum de $f$ sur $I$ ; Donc :<br>$\forall x \in I$, on a : $f(x) \geq f(\alpha)$.<br>De plus $f(\alpha) > 0$<br>Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) > 0$<br>**2ème méthode** :<br>$f$ admet sur $I$, un minimum (absolu) qui est strictement positif.<br>Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) > 0$ |
| ***f admet un maximum négatif sur I***<br> | $f$ admet sur $I$, un maximum (absolu) qui est strictement négatif.<br>Donc : $\forall x \in I$, on a : $f(x) < 0$ |
| ***Déterminer ou donner le signe de $f(x)$***<br><br>$f(\alpha_1) = 0$ et $f(\alpha_2) = 0$<br>(L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions)<br>ICI, on a toujours : $f(m) < 0$ | Il faut étudier le signe de $f$ sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ m[$ et $]m\ ;\ +\infty[$.<br>✓ **Sur $]-\infty$ ; $m[$**, $f$ est continue et strictement décroissante et $f(\alpha_1) = 0$.<br>Donc :<br>Si $x < \alpha_1$ alors $f(x) > f(\alpha_1)$ donc $f(x) > 0$.<br>Si $\alpha_1 < x < m$, alors $f(\alpha_1) > f(x)$<br>Donc $f(x) < 0$.<br>✓ **Sur $]m$ ; $+\infty[$**, $f$ est continue et strictement croissante et $f(\alpha_2) = 0$.<br>Donc :<br>Si $m < x < \alpha_2$, alors $f(x) < f(\alpha_2)$<br>Donc $f(x) < 0$.<br>Si $x > \alpha_2$, alors $f(x) > f(\alpha_2)$<br>donc $f(x) > 0$. |
| ***Déterminer le signe de $f(x)$***<br><br>ICI, on a toujours : $f(m) > 0$ | <br>**Conclusion** :<br>• **$\forall x \in ]-\infty; \alpha_1[ \cup ]\alpha_2; +\infty[$, $f(x) < 0$ ;**<br>• **$\forall x \in ]\alpha_1; \alpha_2[$, $f(x) > 0$** |

# DENOMBREMENT - PROBABILITE

## *Dénombrement*

### *Notion d'ensembles*

On appelle ensemble toute collection d'éléments bien définie.
Un ensemble est dit fini si l'on peut compter ses éléments.
Exemple : $E = \{1; 5; 8; 15\}$



### *Cardinal d'un ensemble fini*

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de l'ensemble E et noté $\boldsymbol{Card(E)}$.
Exemple : $E_1 = \{a; b; c\}$ $\qquad E_2 = \{\ \}$
$Card(E_1) = 3$ $\qquad Card(E_2) = 0$
$E_2$ est appelé ensemble vide.

### *Réunion et intersection*

Soient A et B deux ensembles finis de E.

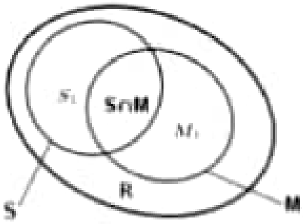
- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
  On note $\boldsymbol{A \cup B = \{x \in E \,/ x \in A \text{ ou } x \in B\}}$
- $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
  On note $\boldsymbol{A \cap B = \{x \in E \,/ x \in A \text{ et } x \in B\}}$.
  Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont **disjoints.**

$\mathbf{Card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$
Si A et B sont disjoints alors :
$\boldsymbol{Card(A \cup B) = card(A) + card(B)}$

Exemple :
Dans un groupe de 35 personnes, 20 pratiquent un sport, 15 jouent d'un instrument de musique et 7 ne font ni sport, ni musique.
Combien de personnes font à la fois du sport et de la musique ?

Réponse :
Soit Ω: l'ensemble total des personnes $card(\Omega) = 35$
S : Toutes les personnes qui le sport $card(S) = 20$
M : Ceux qui font la musique $card(M) = 15$
$S_1$: l'ensemble des personnes qui ne font que le sport
$M_1$: l'ensemble des personnes qui ne font que la musique.
R : Ceux qui ne font ni le sport ni la musique

On peut utiliser un diagramme :




$\Omega = S_1 \cup M_1 \cup (S \cap M) \cup R$

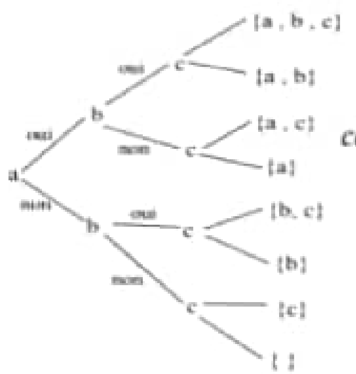
$card(\Omega) = card(S_1) + card(M_1) + card(S \cap M) + card(R)$
$7 + card(S_1) + card(M_1) + card(S \cap M) = 35$
Donc $card(S_1) + card(M_1) + card(S \cap M) = 28$
Or : $card(S_1) + card(M_1) + card(S \cap M) = card(S \cup M) \Leftrightarrow card(S \cup M) = 28$
Aussi : $card(S \cup M) = card(S) + card(M) - card(S \cap M)$
$card(S \cap M) = card(S) + card(M) - card(S \cup M)$
$card(S \cap M) = 20 + 15 - 28 = 7.$
Donc il y a 7 personnes qui font à la fois le sport et la musique.

### *Partition d'un ensemble*

Soit E un ensemble non vide. $A_1$ ; $A_2$ ; $A_3$ ; ... $A_n$ ; $n$ parties non vides de E. On dit qu'elles constituent une partition de E si et seulement si :

- Elles sont disjoints deux à deux ;
- Leur réunion est égale à E :
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E.$

L'ensemble constitué par toutes les parties de E se note : $\mathcal{P}(E)$.
Le nombre total de parties de E est :
$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$
Exemple : $E = \{a; b; c\}$




$card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$

$\mathcal{P}(E) = \{\{a; b; c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{a\}, \{b; c\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$

***Complémentaire***

Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
Il est noté : $C_E^A = \overline{A}$. $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$

***Produit cartésien***

Soit E et F deux ensembles non-vides.
Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples $(x\,;\ y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Il est noté $E \times F$.

<u>Exemple</u> : Soit $E = \{a; b\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$
Trouvons $E \times F$.

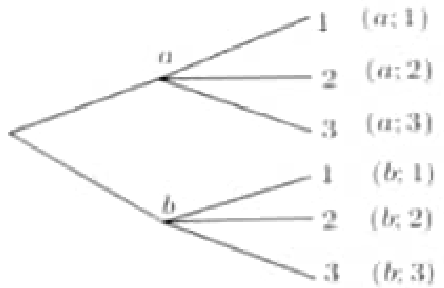
➢ Méthode du tableau

| E \ F | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | $(a;1)$ | $(a;2)$ | $(a;3)$ |
| $b$ | $(b;1)$ | $(b;2)$ | $(b;3)$ |

$E \times F = \{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$
$card(E \times F) = 6 = 2 \times 3$
$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$

➢ Méthode de l'arbre






Si $E_1\,;\ E_2\,;\ \ldots; E_n$ sont n ensemble finis alors
$Card\ (E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = CardE_1 \times CardE_2 \times \ldots \times Card\ E_n$

<u>Remarque</u> : $Card\ (E^n) = (Card\ E)^n$

***<u>Outils de dénombrement</u>***

➢ ***Factoriel n***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle factorielle n noté $n!$ le produit de tous les entiers naturels de 1 à n.
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
$0! = 1 \qquad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

➢ ***Anagramme d'un mot***

L'anagramme d'un mot est un mot formé à partir de toutes les lettres de ce mot.

Le nombre d'anagramme d'un mot donné est le nombre de mots distincts que l'on peut former avec toutes les lettres du mot initial.
<u>Exemple</u> :
Donnons le nombre d'anagramme des mots suivants : a) $LUNE$ b) $HOMME$ c) $FEMME$

a) Le nombre d'anagramme de $LUNE$ est :
$n = 4! = 24$
b) Le nombre d'anagramme de $HOMME$ est :
$n = \frac{5!}{2!} = 60$
c) Le nombre d'anagramme de $FEMME$ est :
$n = \frac{5!}{2!2!} = 30$

➢ ***Notion de p-listes ou p-uplets***

De façon générale, un p-uplet d'éléments de E est un élément de $E \times E \times \ldots \times E = E^p$.
Le nombre de p-listes d'éléments de E vaut $n^p$ où $n = card(E)$.

<u>Exercice d'application</u>

1) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
2) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

<u>Réponse</u>

1) Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble
$\Omega = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$
L'ensemble de ces 8-listes est donc : $10^8$

2) Un numéro de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble
$\Omega' = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
L'ensemble de ces 8-listes est donc : $9^8$

➢ ***Arrangement***

Soit E un ensemble fini de cardinal $n$ avec $(n \geq 1)$ et P un entier tel que $1 \leq p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de E toute suite constituée par p éléments de E distincts (*Un élément de E déjà pris ne peut plus être repris*).
Les p éléments sont ordonnés.

Le nombre d'arrangement d'ordre p de E est noté $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} \qquad \boldsymbol{A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60}$
$\boldsymbol{A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$

Exercice d'application

Au départ d'une course de 14 chevaux on suppose et qu'il n'y a pas de non partants et qu'il n'y a pas d'ex-acquo.
Combien de tiercés possibles peut-on jouer ?

Réponse

L'ensemble des tiercés est l'ensemble d'arrangement de 3 éléments parmi 14
Le nombre total de tiercés possible est :
$A_{14}^{3} = 14 \times 13 \times 12 = 2184$

➢ ***Permutation***

On appelle permutation de E un arrangement de tous les $n$ élément de E. On la note : $A_n^n = n!$

➢ ***Combinaison***

Soit E un ensemble donné. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie (ou sous ensemble) constituée par p éléments de E. Les p éléments sont distincts.

Soient $n$ *et* $p$ deux entiers naturels avec $p \leq n$. Le nombre de combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est : $C_n^p$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\times6\times5!}{5!\times2\times1} = 21 \qquad C_5^2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Exercice d'application

Dans une classe de 70 élèves, on veut former un comité de 5 élèves.
1) Combien de comités peut-on former ?
2) Il y a 20 filles et 50 garçons.
Combien de comités de 2 filles peut-on former ?

Réponse

1) Un comité est une combinaison de 5 élèves parmi les 70 élèves de la classe.
Le nombre de comité est : $C_{70}^5 = \frac{70\times69\times68\times67\times66}{5\times4\times3\times2\times1}$
$C_{70}^5 = 12.103.014$

2) Il s'agit de choisir 2 filles parmi les 20 et 3 garçons parmi les 50.
Donc le nombre de comités contenant 2 fille est :
$C_{20}^2 \times C_{50}^3 = \frac{20\times19}{2} \times \frac{50\times49\times48}{3\times2} = 190 \times 19600$
$C_{20}^2 \times C_{50}^3 = 3724000$

❖ ***Formule du binôme de Newton***

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels ou complexes et $n$ un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} b^p$$
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n b^n$$

Si $a = b = 1 : 2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$

❖ ***Triangle de Pascal***

Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$, on a : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| ... | | | | | | | |
| n | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | | $\binom{n}{p}$ |

***Tableau récapitulatif***

| Type de tirages | Ordre | Répétition | Outils | Nbre de tirage |
|---|---|---|---|---|
| Successif avec remise | oui | oui | p-liste | $n^p$ |
| Successif sans remise | oui | non | Arrangement | $A_n^p$ |
| Simultané | non | non | Combinaison | $C_n^p$ |

Exercice d'application

Exercice 1



On considère un jeu classique de 32 cartes.
On rappelle que celles-ci peuvent être de 4 couleurs (cœur, pique, trèfle, carreau) comportant chacune 8 valeurs (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).
On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
1. Dénombrer tous les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages comportant :

a) 5 cartes de même couleur
b) 4 cœurs et un pique
c) Les 4 As
d) Ne comportant pas de trèfle.

Exercice 2

On jette 5 fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les résultats possibles.
1°) Calculer le nombre de résultats possibles.
2°) Calculer le nombre de façons d'obtenir :
a) Le même numéro cinq fois ;
b) Le 6 suivi du numéro 5.

Exercice 3

On tire successivement sans remise 4 boules d'une urne contenant 3 boules rouges, 3boules blanches et 4 boules noires
1) Déterminer le nombre de résultats possibles
2) Déterminer le nombre de résultats contenant :
a) Exactement 2 boules rouges
b) Exactement 2 boules noires et une boule blanche
c) Au plus de 3 boules noires
d) Au moins une boule blanche

**Correction**



Exercice 1

1. Dénombrons tous les tirages possibles.

Un tirage possible est une partie de 5 cartes parmi 32.
Le nombre de tirages possibles est : $C_{32}^5$
$C_{32}^5 = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1} = 8 \times 31 \times 29 \times 28$
Il y a 201376 tirages possibles.

2- a) Pour tirer 5 cartes de même couleur, on choisit une couleur parmi les 4 et on tire 5 cartes parmi les 8 cartes de la couleur choisie.
Ce qui donne : $C_4^1 \times C_8^5 = 4 \times \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2} = 4 \times 56$
Il y a 224 tirages possibles.

b) 4 cœurs et un pique

Une main contenant 4 cœurs et un pique est une partie formée de 4 cœurs choisis parmi 8 et d'un pique choisi parmi 8.
Ce qui donne : $C_8^4 \times C_8^1 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2} \times 8 = 70 \times 8$
Il y a 560 tirages possibles.

4) Une main contenant 4 As est une partie formée des 4 As et d'une 5è carte tirée parmi les 28 autres.
Ce qui donne : $C_4^4 \times C_{28}^1 = 28$ possibités

d) Une main ne comportant pas de trèfle est une partie de 5 cartes tirée parmi les 24 restantes.
Ce qui donne : $C_{24}^5 = \frac{24\times23\times22\times21\times20}{5\times4\times3\times2} = 42504$
Il y a 42504 tirages possibles.

Exercice 2

1°) *Calculons le nombre de résultats possibles.*
Un résultat possible est une 5-liste de l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Le nombre de résultat possibles est : $N = 6^5$

2) a- *Obtenir le même numéro 5 fois*
Pour le premier jet, on a 6 possibilités c'est-à-dire qu'on doit avoir un numéro de la liste $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Pour les 4 autres jets, on a qu'une seule possibilité : avoir le numéro qu'on a eu au premier jet. Donc $N = 6 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$

b) *Avoir le 6 suivi du numéro 5.*
Pour le premier jet et le 2è jet, il y a une seule possibilité. Pour les 3 autres jets, il y a 6 possibilités : $N = 1 \times 1 \times 6 \times 6 \times 6 = 216$

Exercice 3

1) *Déterminons le nombre de résultats possibles*
Le tirage est successif et sans remise. Un résultat possible est un arrangement de 4 boules parmi 10.
$N = A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

2- a) *Avoir exactement deux boules rouges*
Il s'agit d'un arrangement de 2 boules rouges parmi les 3 et un arrangement de 2 boules parmi les 7 non rouges :
$N = A_3^2 \times A_7^2 = 3 \times 2 \times 7 \times 6 = 252$

b) *Exactement 2 boules noires et une boule blanche*
$N = A_4^2 \times A_3^1 \times A_3^1 = 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

c) *Au plus de 3 boules noires*
Il s'agit d'avoir soit 0 boule noire, soit 1 boule noire, soit 2 boule noire, soit 3 boule noire dans le tirage :
$N = A_6^4 + A_4^1 \times A_6^3 + A_4^2 \times A_6^2 + A_4^3 \times A_6^1 = 1344$

d) Au moins une boule blanche

Il s'agit d'avoir 1 boule blanche ou 2 boules blanches ou 3 boules blanches

$N = A_3^1 \times A_7^3 + A_3^2 \times A_7^2 + A_3^3 \times A_7^1 = 924$

# Probabilités

## Vocabulaire

- ***Expérience aléatoire*** :
  Une expérience est dite aléatoire si l'issu est imprévisible.
  *On lance une pièce de monnaie. On ne peut pas prévoir à l'avance le résultat de cette expérience.*
  *On dit que c'est une expérience aléatoire.*
  Chaque résultat possible est une ***éventualité***
- ***Univers :***
  On appelle univers d'une expérience aléatoire noté $\Omega$, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
  *Lancé d'un dé numéroté de 1 à 6. L'univers associé à cette expérience est* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- ***Évènement :***
  On appelle évènement de $\Omega$ toute partie (ou sous ensemble) de $\Omega$.
  *Soit* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $A = \{1; 4\}$ *et* $B = \{2; 5; 6\}$ *sont des évènements de* $\Omega$.
  - ✓ Un événement comprenant une seule éventualité est ***un événement élémentaire.***
  - ✓ L'ensemble vide est appelé ***événement impossible.***
  - ✓ L'univers est appelé ***événement certain.***
  - ✓ ***L'événement contraire*** de $A$, noté $\overline{A}$, est constitué des éventualités ne réalisant pas A.
  - ✓ L'événement A ou B (ou $A \cup B$ ) est la ***réunion des deux événements.***
  - ✓ L'événement A et B (ou encore $A \cap B$) est ***l'intersection des deux événements.***
  - ✓ Deux événements A et B sont ***incompatibles*** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

## Equiprobabilité

Si un univers $\Omega$ comporte $n$ éventualités et si chacune d'elles a la même chance d'être réalisée que les autres, alors on dit qu'il y a équiprobabilité.
*On supposera les évènements élémentaires équiprobables chaque fois qu'une expression telle que : dé non pipé..., éléments indiscernables au toucher..., non truqués...etc, sera utilisée.*

## Calcul de probabilité

$\Omega$ étant un univers et $A$ une partie de $\Omega$, la probabilité que l'évènement A se réalise est le nombre réel noté :

$$\boxed{P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombres de cas possibles}}}$$

## Propriétés

- ✓ La probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{card\ \Omega}$
- ✓ La somme des probabilités des événements élémentaires est 1.
- ✓ Pour tout événement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
- ✓ $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
- ✓ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ✓ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- ✓ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

## Exercices d'application

### Exercice n°1

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On tire 2 boules de l'urne en considérant les hypothèses suivantes :

1) On tire les 2 boules simultanément.
2) On tire les 2 boules successivement et sans remise.
3) On tire les 2 boules successivement et avec remise.

Déterminer dans chacun des cas la probabilité de tirer 2 boules rouges.

### Réponse

1) L'univers $\Omega$ est l'ensemble des combinaisons de 2 boules prises parmi 8. D'où card $\Omega = C_8^2 = 28$
Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges »,
card $A = C_5^2 = 10$
$P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$
2) L'univers $\Omega$ est l'ensemble des arrangement de 2 boules prises parmi 8.
D'où card $\Omega = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$
Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges »,
card $A = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$
$P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$
3) L'univers $\Omega$ est l'ensemble 2-listes de 2 boules prises parmi 8.
D'où card $\Omega = 8^2 = 64$
Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges »,
card $A = 5^2 = 25$ $\quad P(A) = \frac{25}{64}$

### Exercice n°2

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un.

Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier. Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »

C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs »

Solution

- L'univers $\Omega$ est l'ensemble des combinaisons de 5 livres pris parmi 30.
  D'où card $\Omega = C_{30}^5 = 4060$
- Parmi les livres, 5 sont couverts de cuir.
  L'événement $A$ consiste à choisir simultanément 3 livres parmi ces 5.
  card A $= C_5^3 = 10$ et $P(A) = \frac{10}{4060} = \frac{1}{406}$
- L'évènement contraire $\bar{B}$ de B consiste à choisir 3 livres parmi les 25 non couverts de cuir.
  On a : card $\bar{B} = C_{25}^3 = 2300$
  $P(\bar{B}) = \frac{2300}{4060} = \frac{115}{203}$
  $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{88}{203}$
- L'événement C consiste à choisir soit 3 livres couverts de cuir, soit 3 livres de couvertures toilées, soit 3 livres de couvertures cartonnées.
  card C $= C_5^3 + C_{12}^3 + C_{13}^3 = 516$
  $P(C) = \frac{516}{4060} = \frac{129}{1015}$
- Il y a deux cas possibles pour la réalisation de l'événement D :
  **1er cas** : le libraire choisit 1 livre de 3000 et 2 livres de 6000
  **2è cas** : le libraire choisit 2 livres de 3000 et 1 livre de 9000.
  card D $= C_{13}^1 \times C_{12}^2 + C_{13}^2 \times C_5^1 = 1248$
  $P(D) = \frac{1248}{4060} = \frac{312}{1015}$
- Il y a deux cas possibles pour la réalisation de l'événement E :
  **1er cas** : le libraire choisit 3 livres de 3000
  **2è cas** : le libraire choisit 2 livres de 3000 et 1 livre de 6000.
  card E $= C_{13}^3 + C_{13}^2 \times C_{12}^1 = 1222$
  $P(E) = \frac{1222}{4060} = \frac{611}{2030}$

***Probabilité conditionnelle***

Soient A et B sont deux parties d'un univers $\Omega$ tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle ***probabilité conditionnelle de*** A sachant B le nombre réel noté : $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ et défini par :

$$\boxed{P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- Deux évènement A et B sont ***indépendants*** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- Si A et B sont ***indépendants*** alors $P_A(B) = P(B)$ ***ou*** $P_B(A) = P(A)$.

Exercices d'application

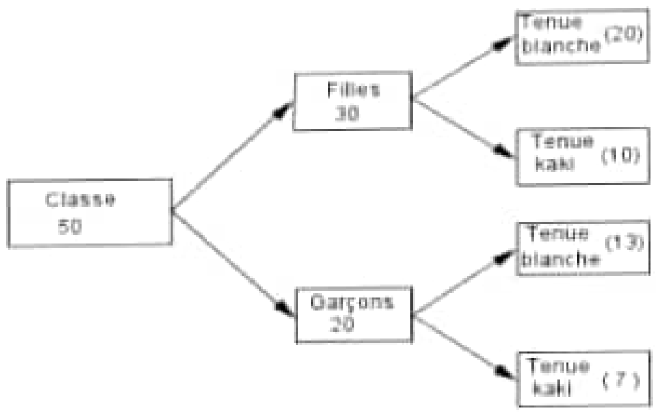
Exercice n°1

Une classe contient 50 élèves dont 30 filles et 20 garçons. 20 filles portent une tenue blanche et 10 une tenue kaki. 13 garçons portent une tenue blanche et 7 une tenue kaki.
On tire un élève de cette classe.
1) Quelle est la probabilité d'obtenir un garçon ?
2) Sachant que l'élève tiré est une fille, quelle est la probabilité qu'il porte une tenue blanche ?

Solution

Soit F l'évènement : « Tirer une fille »
G : « Tirer un garçon »,
B : « Porte une tenue blanche »
K : « Porte une tenue kaki »

Arbre des cardinaux




1) $P(G) = \frac{card\,G}{card\,\Omega} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

2) Il s'agit de calculer $P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)}$
$P(B \cap F) = \frac{card(B \cap F)}{card\,\Omega} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$
$P(F) = \frac{card F}{card\,\Omega} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$
$P_F(B) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$

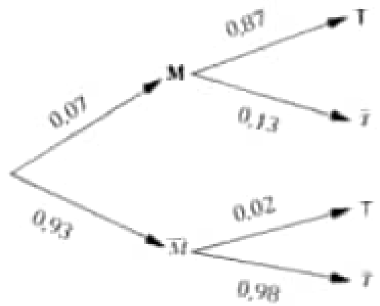
Exercice n°2

Une grave maladie affecte le cheptel bovin de Moussa. On estime que 7 % des bovins sont atteints.
Ali vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que :

- Quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas,
- Quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

On note M l'événement "être malade" et T l'événement "avoir un test positif".
1. Calculez la probabilité des trois événements suivants : M et T , $\bar{M}$ et $\bar{T}$, $M$ et $\bar{T}$
Déduisez-en la probabilité de T.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade ?

Solution
$P(M) = 0{,}07$ $\quad P(\bar{M}) = 0{,}93$ $\quad P(T/M) = 0{,}87$
Arbre de probabilités




$P(T/\bar{M}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$
$P(\bar{T}/M) = 1 - P(T/M) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$
**1) Calculons $P(T \cap M)$, $P(\bar{M} \cap \bar{T})$, $P(\bar{T} \cap M)$**
$P(T \cap M) = P(T/M) \times P(M) = 0{,}0609$
$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = P(\bar{T}/\bar{M}) \times P(\bar{M}) = 0{,}9114$
$P(\bar{T} \cap M) = P(\bar{T}/M) \times P(M) = 0{,}0091$
Déduisons la probabilité de T.
$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = 0{,}0609 + 0{,}0186$
$P(T) = 0{,}0795$

2) $P(M/\bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \cap M)}{P(\bar{T})} = \frac{0{,}0091}{0{,}9205} = 0{,}0098$

***Variables aléatoires***

On appelle variable aléatoire X sur un univers $\Omega$, toute application de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de $\Omega$, on associe un nombre réel $x_i$.
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ est appelé univers image de $\Omega$ par X.

Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

*NB* : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

- ***Espérance mathématique de X***

On appelle Espérance mathématique de $X$ le nombre réel noté $E(X)$ et défini par :
$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}$

- ***Variance de X***

On appelle variance de X le nombre réel noté $V(X)$ et défini par :
$V(X) = E[x_i - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - [E(X)]^2$

$\boxed{V(X) = (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n) - [E(X)]^2}$

- ***Écart-type de X***

On appelle Écart-type de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ et défini par :
$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

***Exercice d'application***

1) Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires.
On extrait simultanément 2 boules de l'urne.
Quel est le nombre de résultats possibles ?
2) Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points.
On note $X$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenu à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules.
Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre $X$.
3) En supposant tous les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de $X$.
4) Calculer l'espérance mathématique de $X$.
5) Calculer la variance de $X$.

***Solution***

1) Déterminons le nombre de résultats possibles
Soit $\Omega$ l'univers associé : card $\Omega = C_{10}^{2} = 45$
Le nombre de résultats possible est 45.

2) L'ensemble des valeurs que peut prendre X

| *Résultats possibles* | (J,J) | (J,R) | (J,N) | (R,R) | (R,N) | (N,N) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Valeur de X* | 4 | 3 | -1 | 2 | -2 | -6 |

L'ensemble des valeurs prises par X est :
$X(\Omega) = \{-6; -2; -1; 2; 3; 4\}$

3) La loi de probabilité de $X$

Calcul des probabilités :

$P(X=-6)$ : « Avoir deux boules noires »

$P(X=-6)=\frac{C_5^2}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$P(X=-2)$ : « Avoir 1boule noire et 1boule rouge »

$P(X=-2)=\frac{C_5^1\times C_2^1}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$P(X=-1)$ : « Avoir 1boule noire et 1boule jaune»

$P(X=-1)=\frac{C_5^1\times C_3^1}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

$P(X=2)=\frac{C_2^2}{45}=\frac{1}{45}$; $P(X=3)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

$P(X=4)=\frac{C_3^2}{45}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

| $X=x$ | $-6$ | -2 | -1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{10}{45}$ | $\frac{10}{45}$ | $\frac{15}{45}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{6}{45}$ | $\frac{3}{45}$ |

4) Calcul de l'espérance mathématique de $X$

$E(X)=-6\times\frac{10}{45}-2\times\frac{10}{45}-1\times\frac{15}{45}+2\times\frac{1}{45}+3\times\frac{6}{45}+\frac{12}{45}$

$E(X)=\frac{-60-20-15+2+18+12}{45}=-\frac{63}{45}=-\frac{7}{5}$

5) Calculons la variance de $X$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$E(X^2)=36\times\frac{10}{45}+4\times\frac{10}{45}+1\times\frac{15}{45}+4\times\frac{1}{45}+9\times\frac{6}{45}+\frac{48}{45}$

$E(X^2)=\frac{360+40+15+4+54+48}{45}=\frac{521}{45}$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{521}{45}-\frac{49}{25}=\frac{2605-441}{225}=\frac{2164}{225}$

- ***Fonction de répartition de X***

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ et définie par : $F(x)=P(X\le x)$.

Exemple :
Considérons la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie comme suit :

| $X=x$ | $-3$ | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ |

La fonction F de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

Si $x\in]-\infty;-3[$, $F(x)=P(X<-3)=0$

Si $x\in[-3;1[$, $F(x)=P(X\le -3)=\frac{2}{8}$

Si $x\in[1;2[$, $F(x)=P(X\le 1)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

Si $x\in[2;5[$, $F(x)=P(X\le 2)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}$

Si $x\in[5;+\infty[$, $F(x)=P(X\le 5)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=1$

***Représentation graphique :***

Unité graphique: 1cm sur $(Ox)$ et 4cm sur $(Oy)$

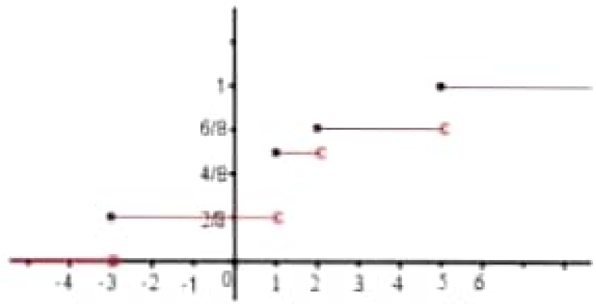



***Schéma de Bernoulli***

On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire qui n'a que deux éventualités : l'une est appelée succès $S$ et l'autre échec $\bar{S}$.

*Exemple : Le jet d'une pièce à pile ou face. La naissance d'un enfant garçon ou fille. Résultat d'un examen.*

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter $n$ fois de suite $(n\ge 2)$ une même épreuve de Bernoulli.
La probabilité d'obtenir exactement $k$ succès au cours des $n$ épreuves est : $\boldsymbol{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}$
$\boldsymbol{0\le k\le n}$.

***Exemple*** :
*On lance 5 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de1 à 6. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le 6.*

***Solution***
*Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et à s'intéresser au 6.*

*Le succès S « Obtenir 6 » a pour probabilité :* $P(S)=\frac{1}{6}$

*L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli.*

*L'événement A « Obtenir exactement 4 fois le 6 au cours des 5 lancers » a pour probabilité : :*

$P(A)=C_5^4(\frac{1}{6})^4(1-\frac{1}{6})^1=\frac{25}{7776}$

***Loi binomiale***

Lorsqu'on effectue $n$ épreuves de Bernoulli indépendante dont la probabilité de succès est $p$.
Si $X$ est la variable aléatoire réelle qui associe le nombre de succès à l'issue de $n$ épreuves, on dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètre $(n\,;\,p)$

$\boldsymbol{P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}$

$E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

***Exemple*** :
*Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire une boule de l'urne en supposant l'équiprobabilité des tirages. On effectue 6 tirages successifs d'une boule avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées au bout des 6 tirages.*

Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli.
Obtenir une boule rouge a pour probabilité $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
X est une variable aléatoire binomiale de paramètre 6 et $\frac{2}{5}$ .

$E(X) = 6 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ $\qquad V(X) = 6 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{25}$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$

Exercice d'application

Une urne contient dix boules : quatre rouges et six blanches.
1) On extrait simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges extraites.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) de X.
2) On répète $n$ fois l'épreuve précédentes ; après chaque tirage de trois boules rouges.
a) On suppose $n = 5$. Calculer la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges.
b) On prend maintenant $n = 2$.
On note S l'évènement « le nombre total de boules rouges obtenues après les deux tirages est 3 ».
Calculer la probabilité de S.

Solution

$E = \{4BR, 6BB\}$ $\quad card\ E = 10$
1) On extrait simultanément trois boules :
card $\Omega = C_{10}^{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$
X est le nombre de boules rouges extraites :
Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ;2 ;3.
La loi de probabilité de X :

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{20}{120}$ | $\frac{60}{120}$ | $\frac{36}{120}$ | $\frac{4}{120}$ |

$P(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{120}$ $\qquad P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{120}$

$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{120}$ $\qquad P(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{120}$

$E(X) = \frac{60+72+12}{120} = \frac{6}{5}$

2) Lors d'un tirage simultané de trois boules la probabilité que l'on obtienne trois boules rouges est : $p = P(X = 3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$
On répète $n$ fois cette épreuve : on a une épreuve de Bernoulli.
a) $n = 5$. La probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges est $P(2) = C_5^2 (\frac{1}{30})^2 (\frac{29}{30})^3 = \frac{24389}{2430000}$

b) $n = 2$ $\qquad S = \{(0;3), (3;0), (1;2), (2;1)\}$
$P(S = 3) = 2 \times \frac{20}{120} \times \frac{4}{120} + 2 \times \frac{60}{120} \times \frac{36}{120}$

$\boxed{P(S = 3) = \frac{14}{45}}$

# I- PRIMITIVES

### Définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de $f$ sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $F'(x) = f(x)$.

**Exemple**

- La fonction $F: x \longmapsto 3x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f: x \longmapsto 3$
- La fonction $F: x \longmapsto 2\sqrt{x} - 5$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f: x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

### Théorème d'existence d'une primitive

Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I.
Mais une fonction non dérivable sur un intervalle I peut avoir une primitive sur I.

*La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable sur $[0; +\infty[$ car non dérivable en 0.*
*Mais elle admet sur $[0; +\infty[$ une primitive qui est la fonction $x \longmapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$*

### Ensemble des primitives d'une fonction

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I. $f$ admet une infinité de primitive sur I, et si $F$ est l'une d'entre elles, toute autre primitive de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

**Exercice d'application**

Déterminer une primitive de la fonction f suivante :

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin x$

**Réponse**

a) $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{F(x) = x^3 + k}$

b) $f$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f admet une primitive sur $]0; +\infty[$.

$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - \cos x + k}$

### Primitive vérifiant une condition initiale

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, $x_0$ un réel appartenant à I et, $y_0$ un réel quelconque.
Il existe une et une unique primitive $G$ de $f$ sur I telle que $G(x_0) = y_0$
Toute primitive de $f$ s'écrit de la forme :
$G(x) = F(x) + c$
$G(x_0) = F(x_0) + c = y_0 \Leftrightarrow c = y_0 - F(x_0)$

D'où : $\boxed{G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0}$

**Exemple** : Soit $f(x) = \sin x - 1$.
Déterminons une primitive $F$ de $f$ vérifiant $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
$F(x) = -\cos x - x + c$
$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + c = 3 \Leftrightarrow c = 3 + \frac{\pi}{2}$

D'où : $\boxed{F(x) = -\cos x - x + 3 + \frac{\pi}{2}}$

### Primitives de fonctions

| Fonctions usuelles | | Formules de primitives | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $F(x)$ | $f(x)$ | $F(x)$ |
| $a$ | $ax + k$ | $u + v$ | $U + V + k$ |
| $ax + b$ | $\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ | $au$ | $aU + k$ |
| $x^n$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ | $u'u^n$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x} + k$ | $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u} + k$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + k$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u} + k$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + k$ | $u' \sin u$ | $-\cos u + k$ |
| $\cos x$ | $\sin x + k$ | $u' \cos u$ | $\sin u + k$ |
| $1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x + k$ | $\frac{u'}{\cos^2 u}$ | $\tan u + k$ |

*Exercices d'application*

1) Trouver la primitive $F$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ $\quad F(0) = 3$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ $\quad F(1) = \frac{5}{6}$

c) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ $\quad F(0) = -1$

2) Calculer les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (3x^2+1)(x^3+x-2)^3$ $\quad I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-6}}$ $\quad I = ]2;5[$

**3) Primitive nécessitant une transformation**

*Exemple:* Soit $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$

On pose : $u(x) = 2x - 3$ $\quad u'(x) = 2$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

D'où $F(x) = \frac{3}{2} \times (2\sqrt{2x-3}) + k$

$\boxed{F(x) = 3\sqrt{2x-3} + k \text{ sur } \left]\frac{3}{2};+\infty\right[}$

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^2} - \sqrt{2}$ $\quad I = ]0;+\infty[$

b) $f(x) = 2(3x-1)^5$ $\quad I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$ $\quad I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{3x^2}$ $\quad I = ]0;+\infty[$

## Correction

1) Trouvons la primitive $F$ de la fonction $f$

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ $\quad F(0) = 3$

$F(x) = x^3 - x^2 + 2x + k$

$F(0) = 3 \Leftrightarrow k = 3$

$\boxed{F(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3}$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ $\quad F(1) = \frac{5}{6}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + k$

$F(1) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 1 + k = -\frac{7}{6} + k$

$F(1) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} + k = \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = 2$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 2}$

c) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ $\quad F(0) = -1$

$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$

$F(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1}$

2) Calculons les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^2 - x + 3$ $\quad u'(x) = 2x - 1$

$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ or $prim\left(\frac{u'}{u^2}\right) = -\frac{1}{u} + k$

$\boxed{F(x) = \frac{-1}{x^2-x+3} + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) $f(x) = (3x^2+1)(x^3+x-2)^3$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^3 + x - 2$ $\quad u'(x) = 3x^2 + 1$

$f(x) = u'(x) \times u^3(x)$

$prim(u'u^n) = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}(x^3+x-2)^4 + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-6}}$ $\quad I = ]2;5[$

Soit $u(x) = x^2 + 5x - 6$ $\quad u'(x) = 2x + 5$

$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ $\quad prim(\frac{u'}{\sqrt{u}}) = 2\sqrt{u} + k$

$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x^2+5x-6} + k \text{ sur } ]2;5[}$

3) Calculons les primitives des fonctions :

a) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^2} - \sqrt{2}$ $\quad I = ]0;+\infty[$

$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{x^2} - \sqrt{2}$

$prim(\frac{1}{\sqrt{x}}) = 2\sqrt{x} + k$ et $prim\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} + k$

$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{x} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{x}) - x\sqrt{2} + k$ sur $]0;+\infty[$

$\boxed{F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{3x} - x\sqrt{2} + k \text{ sur } ]0;+\infty[}$

b) $f(x) = 2(3x-1)^5$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = 3x - 1$ $\quad u'(x) = 3$

$f(x) = \frac{2}{3} \times 3(3x-1)^5 = \frac{2}{3} \times u'(x) \times u^5(x)$

$F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}u^6(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6 + k$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6 + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = \frac{\pi}{3} - 2x$ $\quad u'(x) = -2$

$f(x) = \frac{1}{-2} \times (-2)\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{2} \times u' \sin u$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) \text{ sur } \mathbb{R}}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{3x^2}$ $\quad I = ]0;+\infty[$

$f(x) = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{x^2}{3x^2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3x} + k \text{ sur } ]0;+\infty[}$

# II- FONCTION LOGARITHME

### *Définition*

On appelle logarithme népérien la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.
On la note : ***ln*** ou ***log***.
Soit $f(x) = \ln x$.
**On a :** $D_f = ]0; +\infty[$ $\quad \ln 1 = 0$
$\forall x \in ]0; +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}$
**ln $X$ existe si et seulement si $X > 0$**

### *Propriétés*

Pour tous nombres réels strictement positifs $x$ et $y$ on a :

→ $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
→ $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
→ $\begin{cases} \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$

Pour tous nombres réels strictement positifs $a$ et $b$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

→ $\ln(a \times b) = \ln(a) \times \ln(b)$
→ $\ln(a^r) = r\ln(a)$ $\qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
→ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

### *Dérivée de la fonction* $\ln(u)$ *et* $\ln(|u|)$

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ tel que : $\forall x \in I, u(x) \neq 0$

- La fonction $x \longmapsto \ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$
- La fonction $x \longmapsto \ln(|u|)$ est dérivable sur I et on a : $[\ln(|u|)]' = \frac{u'}{u}$

<u>Exemple</u>

Calculons $f'(x)$ : a) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$
b) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+3})$ $\qquad$ c) $f(x) = \ln|1 - 3x|$

a) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$
$D_f = ]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ $\quad$ $f$ est dérivable sur $D_f$
$\forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{(x^2-3x+2)'}{x^2-3x+2}$ $\quad \boxed{f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}}$
b) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+3})$ $\quad D_f = ]-\infty; -3[\cup\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$
$f$ est dérivable sur $D_f$ $\quad \forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)'}{\frac{2x-1}{x+3}}$
$\boxed{f'(x) = \frac{7}{(x+3)(2x+1)}}$

c) $f(x) = \ln|1 - 3x|$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$
$\forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{(-3x+1)'}{-3x+1}$ $\quad \boxed{f'(x) = \frac{-3}{-3x+1}}$

### *Exercice 1 d'application*

Déterminer $D_f$ dans chacun des cas suivants :
a) $f(x) = \ln(2 - 3x)$ $\qquad$ b) $f(x) = \ln|x + 5|$
c) $f(x) = \ln\sqrt{2x - 1}$ $\qquad$ d) $f(x) = \ln(x^2)$

### *Corrigé*

a) $f(x) = \ln(2 - 3x)$
$f$ existe si et seulement si $2 - 3x > 0$
$2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ $\qquad \boxed{D_f = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[}$
b) $f(x) = \ln|x + 5|$
$f$ existe si et seulement si $x + 5 \neq 0$
$x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$ $\qquad \boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\}}$
c) $f(x) = \ln\sqrt{2x - 1}$
$f$ existe si et seulement si $2x - 1 > 0$
$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ $\qquad \boxed{D_f = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[}$
d) $f(x) = \ln(x^2)$
$f$ existe si et seulement si $x \neq 0$ $\quad \boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

### *Exercice 2 d'application*

Simplifier les expressions suivantes :
$A = \ln 3 + \ln\frac{1}{3}$ $\qquad B = \ln 5^2 + \ln 5 + \ln\sqrt{5}$
$C = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$
$E = \ln 8 + \ln 16 - \ln 24 + \ln 32 - \ln 64$
$F = \ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$

### *Corrigé*

$A = \ln 3 + \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln 3 = 0$ $\quad \boxed{A = 0}$
$B = \ln 5^2 + \ln 5 + \ln\sqrt{5} = 2\ln 5 + \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5$
$\boxed{B = \frac{7}{2}\ln 5}$
$C = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$
$C = \ln[(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})] = \ln 1 = 0$ $\quad \boxed{C = 0}$
$E = \ln 8 + \ln 16 - \ln 24 + \ln 32 - \ln 64$
$E = \ln\left[\frac{8 \times 16 \times 32}{24 \times 64}\right] = \ln\frac{8}{3} = \ln 8 - \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3$
$\boxed{E = 3\ln 2 - \ln 3}$
$F = \ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$
$F = \ln[3\sqrt{15}] + \ln[5\sqrt{3}] - \ln 15 - \ln[3\sqrt{3}]$
$F = \ln\left[\frac{3\sqrt{15} \times 5\sqrt{3}}{15 \times 3\sqrt{3}}\right] = \ln\frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{2}\ln 15 - \ln 3$
$F = \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3$ $\qquad \boxed{F = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3}$

### *Primitive de* $\frac{u'}{u}$

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I la fonction : $\ln|u| + k$

**Exercice d'application**

Déterminer une primitive sur I de $f$.

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \tan x$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}$ $\quad I = \mathbb{R}$

**Corrigé**

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^2 + 1$ $\quad u'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = \ln|u(x)| + k$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ d'où

$\boxed{F(x) = \ln(x^2+1) + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Soit $u(x) = \cos x$ $\quad u'(x) = -\sin x$

$f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = -\ln|\cos x| + k$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \cos x > 0$ d'où

$\boxed{F(x) = -\ln(\cos x) + k \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}$ $\quad I = \mathbb{R}$

Soit $u(x) = x^2 - 2x + 3$ $\quad u'(x) = 2x - 2$

$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| + k$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ d'où

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 3) + k \text{ sur } \mathbb{R}}$

**Les limites usuelles**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0^+$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} x^r\ln(x) = 0^-$ $(r \in \mathbb{Q}_+^*)$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ ; $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

**Exemple**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} (\frac{1}{x} + \ln x)$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ $\quad$ d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1)$

**Corrigé**

a) $\lim\limits_{x\to0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = \lim\limits_{x\to0^+} (\frac{1+x\ln x}{x}) = \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = +\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty(1-0)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty}$

*(Suite correction exemple : limites)*

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0 \times 1 = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} = 0}$

d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1)$ $\quad$ Soit $u = x - 1$

$u = x - 1 \Leftrightarrow x = u + 1$ **si $x \to 2$ alors $u \to 1$**

$\lim\limits_{x\to2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1) = \lim\limits_{u\to1} \frac{u+1}{u-1}\ln(u) = \lim\limits_{u\to1}(u+1)\frac{\ln(u)}{u-1}$

$\lim\limits_{u\to1}(u+1) = 2$ et $\lim\limits_{u\to1} \frac{\ln(u)}{u-1} = 1$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1) = 2}$

**Le nombre « e » : nombre d'Euler**

$\forall x \in ]0;+\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$.

*ln* est donc continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par suite elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $1 \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.

On désigne par $e$ cette unique solution. $e$ est appelé **le nombre d'Euler** et on a : $e \approx 2{,}718$ ...

$e$ n'est pas un nombre rationnel.

$\boldsymbol{\ln e = 1}$ $\quad$ $\boldsymbol{\ln e^r = r\ln e = r}$

$\boldsymbol{\ln a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln e^b}$ (avec $a > 0$)

**Exemple** : $\boldsymbol{\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2}$

**Etude de la fonction ln**

Soit $f(x) = \ln x$ et $(C_f)$ sa courbe représentative.

$D_f = ]0;+\infty[$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite $(D): x = 0$ est une asymptote verticale à $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ donc $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(ox)$ au voisinage de $+\infty$.

$f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x \in ]0;+\infty[, f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**Tableau de variation**

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- **Tangente de $(C_f)$ au point d'abscisse $x = 1$**

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\boxed{(T): y = x - 1}$

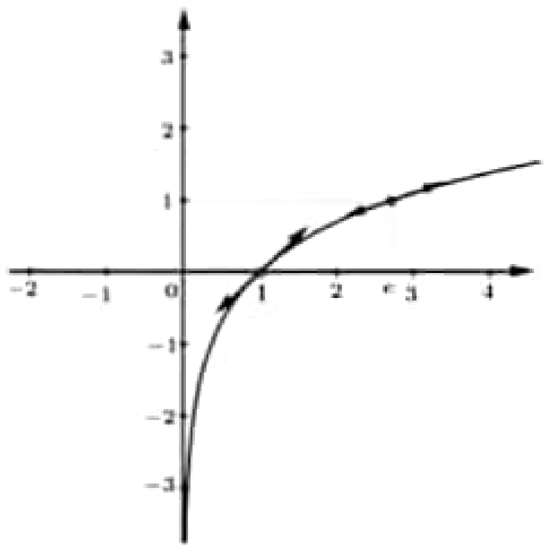
- **Tangente de $(C_f)$ au point d'abscisse $x = e$**

$(T): y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$(T): y = \frac{1}{e}(x-e) + \ln e = \frac{1}{e}x - 1 + 1$

$\boxed{(T): y = \frac{1}{e}x}$

***Courbe*** $(C_f)$




## *Équations - Inéquations*

Pour résoudre une équation $\ln u(x) = \ln v(x)$

- On trouve l'ensemble de validité $D_v$ de l'équation en cherchant l'ensemble des réels $x$ tels que : $u(x) > 0$ *et* $v(x) > 0$.
- On résout dans $D_v$ l'équation : $u(x) = v(x)$ **C'est-à-dire** qu'on la résout d'abord dans $\mathbb{R}$ et qu'on ne garde que les solutions qui sont dans $D_v$.
  $\ln(a) = \ln(a) \Leftrightarrow a = b$ **avec** $a > 0$ *et* $b > 0$

Pour résoudre une équation $\ln u(x) \geq \ln v(x)$

- On trouve l'ensemble de validité $D_v$ de l'équation en cherchant l'ensemble des réels $x$ tels que : $u(x) > 0$ *et* $v(x) > 0$.
- On résout dans $D_v$ l'équation : $u(x) \geq v(x)$ **C'est-à-dire** qu'on la résout d'abord dans $\mathbb{R}$ et qu'on ne garde que les solutions qui sont dans $D_v$.
  $\ln(a) \geq \ln(a) \Leftrightarrow a \geq b$ **avec** $a > 0$ *et* $b > 0$

***Exercice d'application***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

a) $(x-2)\ln(x-2) = 0$

b) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(3x-5)$

c) $\ln(x-3) \leq \ln(2x+1)$

d) $\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geq 0$

***Corrigé***

a) $(x-2)\ln(x-2) = 0$

$D_v = \{x \in \mathbb{R}; x - 2 > 0\} = ]2; +\infty[$

$(x-2)\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ *ou* $\ln(x-2) = 0$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2}$

$\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{x = 3}$ $\quad 2 \notin D_v$ $\quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = \{3\}}$

b) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(3x-5)$

$D_v = \{x \in \mathbb{R}; x + 1 > 0; x - 2 > 0$ *et* $3x - 5 > 0\}$

$D_v = ]-1; +\infty[ \cap ]2; +\infty[ \cap \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[ = ]2; +\infty[$

$\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(3x-5)$

$\ln[(x+1)(x-2)] = \ln(3x-5)$

$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ $\quad \boldsymbol{x_1 = 1}$ $\quad \boldsymbol{x_2 = 3}$

$1 \notin D_v$ $\quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = \{3\}}$

c) $\ln(x-3) \leq \ln(x+2)$

$D_v = \{x \in \mathbb{R}; x - 3 > 0; 2x + 1 > 0\} = ]3; +\infty[$

$\ln(x-3) \leq \ln(2x+1) \Leftrightarrow x - 3 \geq 2x + 1$

$x - 2x \leq 3 + 1 \Leftrightarrow x \geq -4 \Leftrightarrow x \in ]-4; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = ]-4; +\infty[ \cap ]3; +\infty[$ $\quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = ]3; +\infty[}$

d) $\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geq 0$

$D_v = \{x \in \mathbb{R}; 3 - x > 0; x + 1 > 0\} = ]-1; 3[$

$\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geq 0$

$\ln[2(3-x)] \geq \ln[(x+1)]^2 \Leftrightarrow 2(3-x) \geq (x+1)^2$

$x^2 + 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$

$S_{\mathbb{R}} = ]-1; 3[ \cap [-5; 1]$ $\quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = ]-1; 1]}$

## Logarithme de base $a$

Soit $a$ un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base $a$ est la fonction notée $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$\boldsymbol{\log_a = \frac{\ln x}{\ln a}}$

La fonction logarithme de base 10 est appelée fonction logarithme décimal. On la note : **log.**

$\forall x \in ]0; +\infty[$, $\log(x) = \log_{10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\boldsymbol{\log(10) = 1; \log(1) = 0}$

# LA FONCTION EXPONENTIELLE

## Définition

On sait que la fonction $\ln : ]0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante $]0;+\infty[$.
Donc la fonction $\ln$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est appelée **la fonction exponentielle.**

**La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction $\ln$.**
**Elle est notée $exp$**

Pour tout réel $x$, on note : $\exp(x) = e^x$
$e^0 = 1$ , $e^1 = e$

$$exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow ]0;+\infty[ \\ x \longmapsto e^x \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

## Propriétés

Pour tout nombre réel $a$ strictement positif et pour tout nombre réel $b$, on a :

- $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$
- $\ln a > b \Leftrightarrow a > e^b$
- $\ln a < b \Leftrightarrow a < e^b$
- $e^{\ln a} = a$ et $\ln(e^a) = a$

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$
- $\frac{1}{e^b} = e^{-b}$

## Limites

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

## Exercice d'application

**1) Simplifier**

$A = e^{3\ln 5}$ $\quad B = e^{\ln 2 + \ln 5}$ $\quad C = e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$

**2) Vérifier que pour tout réel x :**

a) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x$

b) $e^{-x} - e^{-2x} + \frac{1 - e^x}{e^{2x}} = 0$

**3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :**

a) $e^{x+3} = 4$ $\qquad$ b) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

c) $e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2$ $\qquad$ d) $3e^x - 7e^{-x} + 20 > 0$

**4) Calculer les limites suivantes :**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3}$ $\qquad$ b) $\lim_{x \to +\infty} (x - e^x)$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$ $\qquad$ d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$

## Correction

**1) Simplification :**

$A = e^{3\ln 5} = e^{\ln 5^3} = 5^3 = 125$

$B = e^{\ln 2 + \ln 5} = e^{\ln 10} = 10$

$C = e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x} = e^{\ln(x-1) - \ln x} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

$C = \frac{x-1}{x}$

| | |
|---|---|
| $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$<br>$\ln(a^r) = r\ln(a)$<br>$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ | $e^{\ln a} = a$<br>$e^a \times e^b = e^{a+b}$ |

**2) Vérifions que pour tout réel x :**

**a) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x$**

$\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{1 + e^{-x}}\right)$

$\frac{e^x + 1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} = e^x$

Donc $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = \ln(e^x) = x$

**b) $e^{-x} - e^{-2x} + \frac{1 - e^x}{e^{2x}} = 0$**

$e^{-x} - e^{-2x} + \frac{1 - e^x}{e^{2x}} = e^{-x} - e^{-2x} + (1 - e^x)e^{-2x}$

$= e^{-x} - e^{-2x} + e^{-2x} - e^{-x} = 0$

Donc $e^{-x} - e^{-2x} + \frac{1 - e^x}{e^{2x}} = 0$

**3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ :**

**a)** $e^{x+3} = 4$

$e^{x+3} = 4 \Leftrightarrow e^{x+3} = e^{\ln 4} \Leftrightarrow x + 3 = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = -3 + \ln 4$ $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-3 + \ln 4\}}$

**b)** $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

Posons $X = e^x$ $X > 0$

On a donc : $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3$

$X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{0; \ln 3\}}$

**c)** $e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2$

$e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2 \Leftrightarrow e^{x-3} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{x-3} \leq \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x - 3 \leq -\ln 2 \Leftrightarrow x \leq 3 - \ln 2$

$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; 3 - \ln 2]$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; 3 - \ln 2]}$

**d)** $3e^x - 7e^{-x} + 20 > 0$

$e^{-x}(3e^{2x} - 7 + 20e^x) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Résolvons $3e^{2x} + 20e^x - 7 = 0$

Posons $X = e^x$ $X > 0$

$3X^2 + 20X - 7 = 0 \Leftrightarrow X = -7 \text{ ou } X = \frac{1}{3}$

$3e^{2x} + 20e^x - 7 = 3(e^x + 7)(e^x - \frac{1}{3})$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 7 > 0$

$e^x - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\ln 3$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = ]-\ln 3 ; +\infty[}$

**4) Calculons les limites suivantes :**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3}$

Posons $X = e^x$ si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} = \lim_{X \to +\infty} \frac{3X - 2}{5X + 3} == \lim_{X \to +\infty} \frac{3X}{5X} = \frac{3}{5}$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} = \frac{3}{5}}$

b) $\lim_{x \to +\infty} (x - e^x)$

$\lim_{x \to +\infty} (x - e^x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (x - e^x) = -\infty}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{1 - e^x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{1 - e^x} = \lim_{x \to 0} -2 \times \frac{x}{e^x - 1} = -2$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x} = -2}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$

Posons $X = e^x$ si $x \to -\infty$ alors $X \to 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = 1}$

## ***Dérivée et primitive d'une fonction exponentielle***

- Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ alors $e^u$ est dérivable sur $I$ et $(e^u)' = u'e^u$
- Soit $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
  La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur $I$ la fonction $e^u$.

***Exercice d'application***

1) Calculer la dérivée de la fonction $f$

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$

c) $f(x) = e^x \ln x$

2) Déterminer dans chaque cas une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \cos x \, e^{\sin x}$ b) $f(x) = (1 - x)e^{2x - x^2}$

c) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$ d) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

**Correction**

**1) Calculons la dérivée de la fonction $f$**

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (-2x + 1)'e^{-2x+1} = -2e^{-2x+1}$

b) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$f'(x) = \left[\frac{x+1}{x-2}\right]' e^{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{-3}{(x-2)^2} e^{\frac{x+1}{x-2}}$

c) $f(x) = e^x \ln x$ $D_f = ]0; +\infty[$

$f(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

**2) Déterminons une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$**

a) $f(x) = \cos x \, e^{\sin x}$

Soit $u(x) = \sin x$ $u'(x) = \cos x$

$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ $\boxed{F(x) = e^{\sin x} + k}$

b) $f(x) = (1-x)e^{2x-x^2}$

Soit $u(x) = 2x - x^2$ ; $u'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$

$f(x) = (1-x)e^{2x-x^2} = \frac{1}{2}\, u'(x)e^{u(x)}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-x^2} + k}$

c) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

$f(x) = x - 5 + \frac{3}{-2} \times (-2)e^{-2x+1}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{3}{2}e^{-2x+1} + k}$

d) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Soit $u(x) = 1 + e^{2x}$ $\quad u'(x) = 2e^{2x}$

$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + k}$

## *Etude de la fonction $f(x) = e^x$*

Soit $f(x) = e^x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(C_f)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

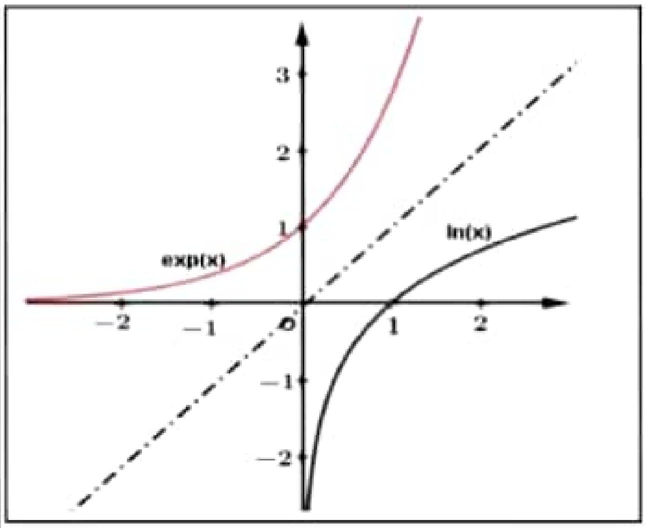
$f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

*Tableau de variations*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions réciproques. Leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta)$: $y = x$




## FONCTION PUISSANCE

Soit $r$ un nombre rationnel. On appelle **fonction puissance** la fonction $x \mapsto x^r = e^{r\ln x}$, $x > 0$

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$ ; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$

**Exemple**

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{3}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} = +\infty$

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto rx^{r-1}$.
- Soit $r \neq -1$. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
- Soit $r$ un nombre rationnel strictement positif.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$

# LES NOMBRES COMPLEXES

## I. Les formes d'un nombre complexe

### 1) Forme algébrique

**Définition**

Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

- **a : est appelé partie réelle de z**
- **b : est appelé partie imaginaire de z**

On note : $\Re e(z) = a \quad \Im m(z) = b$

- Si $b = 0$ alors z est un réel
- Si $a = 0$ alors z est un imaginaire pur. On note : $z \in i\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z.

**Conjugué d'un nombre complexe**

Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
On appelle nombre conjugué de z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par : $\bar{z} = a - ib$

**Exemple** :

$z = 4 + 2i \Leftrightarrow \bar{z} = 4 - 2i$

$z = -3 \Leftrightarrow \bar{z} = -3 \qquad z = -i\sqrt{5} \Leftrightarrow \bar{z} = i\sqrt{5}$

**Théorème** :

- $z$ est un nombre réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- $z$ est un imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$
- Si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$ et $z - \bar{z} = 2\Im m(z)$

**Propriétés**

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad (n \in \mathbb{Z})$

**Exemple1** :

Soient $z_1 = 3 + i\sqrt{5}$ $\quad z_2 = -2i$ et $z_3 = \frac{1}{2}$

- $Re(z_1) = 3 \quad Im(z_1) = \sqrt{5}$
- $Re(z_2) = 0 \quad Im(z_2) = -2$
- $Re(z_3) = \frac{1}{2} \quad Im(z_3) = 0$

$z_2$ est un imaginaire pur et $z_3$ est un réel

**Opérations**

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. On a :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- Pour rendre algébrique un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.
- $z = z'$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

**Exemple2** :

Mettre sous forme algébriques les nombres complexes suivantes :

1) $z_1 = (4 + 3i)(2 - 5i) \quad z_2 = \left(2 + i\sqrt{3}\right)^2$

$z_3 = \frac{i-3}{1+2i}$

2) $Z_1 = (z + 2)(2z - i)$ (avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$)

3) Déterminer le conjugué de : $z_1 = \frac{4-5i}{3+i} \quad z_2 = \frac{2z^2-i}{5z+1}$

**Réponse**

1) $z_1 = (4 + 3i)(2 - 5i) = 8 - 20i + 6i - 15i^2$

$z_1 = 8 + 15 - 14i = 23 - 14i \quad \boxed{z_1 = 23 - 14i}$

$z_2 = \left(2 + i\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2 \times 2 \times i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2$

$z_2 = 4 + 4i\sqrt{3} - 3 = 1 + 4i\sqrt{3} \quad \boxed{z_2 = 1 + 4i\sqrt{3}}$

$z_3 = \frac{(i-3)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2-3+6i}{1+4} = \frac{-1+7i}{5} \quad \boxed{z_3 = \frac{-1+7i}{5}}$

2) $Z_1 = (z + 2)(2z - i)$

$Z_1 = (x + iy + 2)(2x + 2iy - i)$

$Z_1 = 2x^2 + 2ixy - ix + 2ixy - 2y^2 + y + 4x + 4iy - 2i$

$\boxed{Z_1 = (2x^2 + 4x + y - 2y^2) + i(4xy - x + 4y - 2)}$

3) $\overline{z_1} = \overline{\frac{4-5i}{3+i}} = \frac{4+5i}{3-i}$

$\overline{z_2} = \overline{\frac{2z^2-i}{5z+1}} = \frac{2\bar{z}^2-\bar{i}}{5\bar{z}+\bar{1}} = \frac{2\bar{z}^2+i}{5\bar{z}+1}$

**Représentation graphique d'un nombre complexe**

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut faire correspondre un point $M(a; b)$.
Le nombre $z = a + ib$ est appelé l'affixe du point $M$. On note : $z_M = a + ib$.
M est appelé le point image de z. on le note $M(z)$.
$\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur image de z. On le note $\overrightarrow{OM}(z)$.

- L'axe des abscisses est appelé l'axe des réels
- L'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires purs

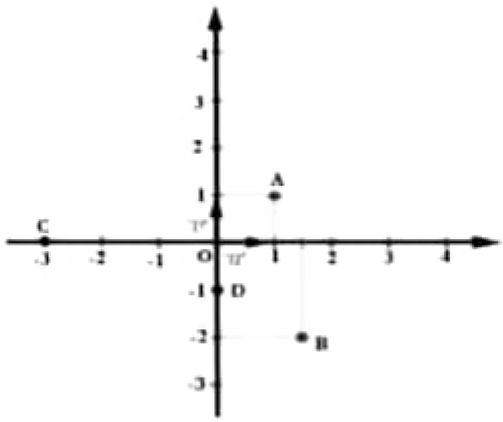
Soient $A(z_A)$ $et$ $B(z_B)$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

***Exercice d'application***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Placer les points $A, B, C$ $et$ $D$ tel que : $z_A = 1 + i$ $\quad z_B = \frac{3}{2} - 2i$ $\quad z_C = -3$ $\quad z_D = -i$

***Solution***

Il s'agit de placer les points : $A(1; 1)$ $B(\frac{3}{2}; -2)$ $C(-3; 0)$ et $D(0; -1)$




## 2) Forme trigonométrique et forme exponentielle

**Module d'un nombre complexe**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le module de z est le réel positif noté :
$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soient $A(z_A)$ $et$ $B(z_B)$.
La distance : $AB = |z_B - z_A|$
Le module s'interprète géométriquement en distance.

***Propriétés***

Soit $z$, $z_1$ $et$ $z_2$ des nombres complexes non nuls :

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$ $\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $\qquad |z^n| = |z|^n \quad n \in \mathbb{N}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\qquad |z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)

***Exercices d'application***

1) Calculer le module de z

$a)$ $z = -\sqrt{3} + i$ $\quad$ b) $z = \frac{5-i}{3}$ $\quad$ c) $z = \frac{1+i}{3+2i}$

d) $z = 3i(-1 + i)^4$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Soient $A, B$ $et$ $C$ les points d'affixes respectives : $1 - 3i$, $4 + 5i$ et $-3 + 2i$.
Calculer les distances $AB, AC$ $et$ $BC$.

***Solution***

1) Calculons le module de z

a) $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4}$ $\qquad \boxed{|z| = 2}$

b) $z = \frac{5-i}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + (-\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{26}{9}}$ $\qquad \boxed{|z| = \frac{\sqrt{26}}{3}}$

c) $|z| = \left|\frac{1+i}{3+2i}\right| = \frac{|1+i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ $\qquad \boxed{|z| = \frac{\sqrt{26}}{13}}$

d) $|z| = |3i(-1+i)^4| = |3i| \times |(-1+i)^4| = |3i| \times |-1+i|^4 = 3 \times (\sqrt{2})^4 = 3 \times 4 = 12$ $\qquad \boxed{|z| = 12}$

2) Calculons les distances $AB, AC$ et $BC$

$AB = |z_B - z_A| = |4 + 5i - 1 + 3i| = |3 + 8i|$

$AB = \sqrt{3^2 + 8^2}$ $\boxed{AB = \sqrt{73}}$

$AC = |z_C - z_A| = |-3 + 2i - 1 + 3i| = |-4 + 5i|$

$AC = \sqrt{(-4)^2 + 5^2}$ $\boxed{AC = \sqrt{41}}$

$BC = |z_C - z_B| = |-3 + 2i - 4 - 5i| = |-7 - 3i|$

$BC = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2}$ $\boxed{BC = \sqrt{58}}$

## Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul, $M$ son image dans le plan complexe. On appelle **argument** de z noté $\boldsymbol{arg(z)}$ toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}})$.

On note : $\boldsymbol{arg(z) = \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]}$

### Propriétés

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes, on a :

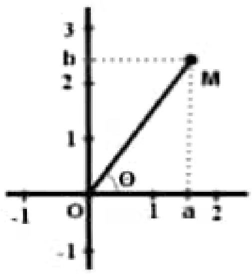
- $\mathbf{arg(zz') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]}$
- $\mathbf{arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]}$ $(z' \neq 0)$
- $\mathbf{arg(z^n) = n\,arg(z)\ [2\pi]}$
- $\mathbf{arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\ [2\pi]}$ $(z' \neq 0)$
- $\mathbf{arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]}$

### Détermination de l'argument

Soient $\begin{cases} z = a + ib \\ OM = |z| = r \end{cases}$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$

$\cos\theta = \frac{a}{OM} = \frac{a}{r}$

$\sin\theta = \frac{b}{OM} = \frac{b}{r}$




**On obtient alors :**

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{\Re e(z)}{|z|}}$ **et**

$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{\Im m(z)}{|z|}}$

### Forme trigonométrique

On a : $z = a + ib$ avec $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin\theta$

Donc : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

L'écriture $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est appelée forme trigonométrique de z.

### Exercice d'application

Déterminer l'argument de z :

a) $z = 1 + i$ b) $z = -\sqrt{3} + i$

c) $z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$ d) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$

### Solution

Déterminer l'argument de z :

Soit $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$ et $|z| = r$

a) $z = 1 + i$ $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]}}$

b) $z = -\sqrt{3} + i$ $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}}$

c) $z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$

$\arg(z) = \arg\left((-\sqrt{3} + i)^2\right) + \arg((1 + i)^4)$

$\arg(z) = 2\arg(-\sqrt{3} + i) + 4\arg(1 + i)$

$\arg(z) = 2 \times \frac{5\pi}{6} + 4 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} + \pi$

$\boxed{\arg(z) = \frac{8\pi}{3}\ [2\pi]}$

d) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$

$\arg(z) = \arg\left((-\sqrt{3} + i)^3\right) - \arg((1 + i)^2)$

$\arg(z) = 3\arg(-\sqrt{3} + i) - 2\arg(1 + i)$

$\arg(z) = 3 \times \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$\boxed{\arg(z) = 0\ [2\pi]}$

### Forme exponentielle

On pose : $\boldsymbol{\cos x + i\sin x = e^{ix}}$ et $\boldsymbol{\cos x - i\sin x = e^{-ix}}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow z = re^{i\theta}}$

L'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ est appelée forme exponentielle de z.

***Exemple***

Donnons la forme trigonométrique et la forme exponentielle de $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$

$z_1 = 1 + i \quad |z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc $\mathbf{z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} \quad \mathbf{z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$z_2 = -\sqrt{3} + i \quad |z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

Donc $\mathbf{z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})} \quad \mathbf{z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

***Propriétés***

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

- $|e^{i\theta}| = 1 \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $[e^{i\theta}]^n = e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$

***Formule de Moivre***

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

***Formule d'Euler***

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ et $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

La formule d'Euler peut être utilisée pour les linéarisation de $\cos^n x$ et de $\sin^n x$.

***Formule du Binôme de Newton***

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, a^{n-i}b^i$

$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad C_n^0 = 1 \quad C_n^n = 1 \quad C_n^1 = n$

$(a+b)^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i\, a^{3-i}b^i$

$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b^1 + C_3^2a^1b^2 + C_3^3b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

***Exercice d'application***

1) Donner la forme algébrique de :

$z = (1 + i\sqrt{3})^5 \quad Z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$

2) Linéariser : $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$

***Solution***

1) Donnons la forme algébrique de :

$z = (1 + i\sqrt{3})^5$

Soit $z' = 1 + i\sqrt{3} \quad |z'| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Soit $\theta = \arg(z')\ [2\pi] \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z = [2e^{i\frac{\pi}{3}}]^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z = 16[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})] = 16(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\boxed{z = 8(1 - i\sqrt{3})}$

$Z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$ Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$Z = \frac{[z_1]^4}{[z_2]^3} = \frac{[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}]^4}{[2e^{-i\frac{\pi}{6}}]^3} = \frac{4e^{i\pi}}{8e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{3\pi}{2})}$

$Z = \frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})] = -\frac{1}{2}i$

$\boxed{z = -\frac{1}{2}i}$

***Pour calculer les puissances, il est préférable d'utiliser la forme exponentielle ou trigonométrique***

2) Linéarisons : $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

$\cos^3 x = [\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}]^3 = \frac{1}{2^3}(e^{ix} + e^{-ix})^3$

$\cos^3 x = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$\cos^3 x = \frac{1}{8}[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$

$\cos^3 x = \frac{1}{4}[\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + 3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)]$

$\cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos(3x) + 3\cos(x)]$

$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)}$

$\sin^3 x = [\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}]^3 = \frac{1}{(2i)^3}(e^{ix} - e^{-ix})^3$

$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})]$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}[\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} - 3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)]$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}[\sin(3x) - 3\sin(x)]$

$\boxed{\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)}$

# II. Résolution d'équations complexes

**Racine carrée d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ et $U$ un nombre complexe. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = U$

$z^2 = U \Leftrightarrow (x+iy)^2 = U \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = U$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \Re e(U) \\ 2xy = \Im m(U) \end{cases}$

De plus $z^2 = U \Leftrightarrow |z|^2 = |U| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = |U|$

En somme résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = U$ revient à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = |U|} \\ \boldsymbol{x^2 - y^2 = \Re e(U)} \\ \boldsymbol{2xy = \Im m(U)} \end{cases}$$

**Equation du second degré dans $\mathbb{C}$**

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ on procède comme suit :

- On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
- On détermine $\sigma$ défini par $\sigma^2 = \Delta$ puis on calcule : $z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une double solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$

**Détermination de $\sigma$**

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

✓ Si $\Delta > 0$ alors $\sigma = \sqrt{\Delta}$

✓ Si $\Delta < 0$ alors $\sigma = i\sqrt{-\Delta}$

✓ Si $\Delta \notin \mathbb{R}$ alors on pose : $\sigma = x + iy$ avec
$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \Re e(\Delta) \\ 2xy = \Im m(\Delta) \end{cases}$

**Racine nième d'un nombre complexe : $z^n = a$**

On veut résoudre l'équation $\boldsymbol{z^n = a}$ avec $n > 2$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $z = re^{i\theta}$ *et* $a = \rho e^{i\alpha}$

$\boldsymbol{z^n = a} \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}}$$

*La somme des racines nièmes d'un nombre complexe est égale à 0 :* $\boldsymbol{z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 0}$.

*Les racines nièmes de 1 sont appelées racines nièmes de l'unité.*

**Exemple1**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -5 + 12i$

**Solution**

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ *ou* $x = -2$ et $y = 3$ *ou* $y = -3$

Les solutions de ce système sont les couples : $(-2; -3)$ *ou* $(2; 3)$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-2 - 3i; 2 + 3i\}}$

**Exemple2**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$ b) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

**Solution**

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$ $\sigma = i\sqrt{4} = 2i$

$z_1 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$ $z_2 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{2 - i; 2 + i\}}$

b) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

$\Delta = (1 - 5i)^2 - 4i(6i - 2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i$

$\Delta = -2i$

Soit $\sigma = x + iy$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x = 1$ *ou* $x = -1$ et $y = 1$ *ou* $y = -1$

$xy = -1 \Leftrightarrow x = 1$ *et* $y = -1$ ou $x = -1$ *et* $y = 1$

$\sigma = 1 - i$

$z_1 = \frac{-1+5i-1+i}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = 3 + i$

$z_2 = \frac{-1+5i+1-i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$ $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{3 + i; 2\}}$

**Exemple3**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^3 = 1$ b) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

**Solution**

a) $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i0}$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ $k \in \{0; 1; 2\}$

$z_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}} = e^{i0} = 1$

$z_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}}$

b) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+i) \Leftrightarrow z^6 = 4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$z^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{8} \\ \theta = \frac{\frac{3\pi}{4}}{6} + \frac{2k\pi}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$ $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$

Les solutions de cette équation sont de la forme : $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)} \; k \in \{0;1;2;3;4;5\}\}}$

## III. Applications géométriques

### 1) Nombres complexes et configurations du plan

Soient $z_A, z_B$, $z_C$ et $z_D$ les affixes respectives des points $A, B$, $C$ et $D$ et $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$|Z| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

| Caractérisations complexes | Interprétations géométriques | Configurations |
|---|---|---|
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\theta}$<br>$0 < \theta < \pi;\ \ \theta \neq \frac{\pi}{2}$ | • $AC = AB$<br>• $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\theta\ [2\pi]$ | $ABC$ est un triangle isocèle en $A$. |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = yi \quad (y \in \mathbb{R})$<br>$Z$ est un imaginaire pur | • $AC = \lvert y\rvert AB$<br>• $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$<br>• $(AC) \perp (AB)$ | $ABC$ est un triangle rectangle en $A$. |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ | • $AC = AB$<br>• $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ | $ABC$ est un triangle rectangle isocèle en $A$ |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ | • $AC = AB$<br>• $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ | $ABC$ est un triangle équilatéral |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a \quad (a \in \mathbb{R})$<br>$Z$ est un réel non nul | $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ | Les points $A, B$ et $C$ sont alignés. |
| $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = a \quad (a \in \mathbb{R})$ | | Les points $A, B, C$ et $D$ sont cocycliques. |

### *Exercices d'application*

***Exercice1***

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

Montrer que : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire la nature du triangle ABC.

***Exercice2***

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -2 + i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 4 + 4i$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés

***Exercice3***

On considère les points : $A(-2i)$, $B(7 - i)$ $C(8 + 2i)$ et $D(-1 + 5i)$

1) Placer les points A, B, C et D dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

2) Calculer $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABD.

3) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle $(C)$ que l'on tracera.

**Solution**

**Exercice1**

Montrons que : $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(-3-i\sqrt{3})^2}{9+3}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nature du triangle ABC

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc le triangle ABC est équilatéral.

**Exercice2**

Montrons que les points A, B et C sont alignés

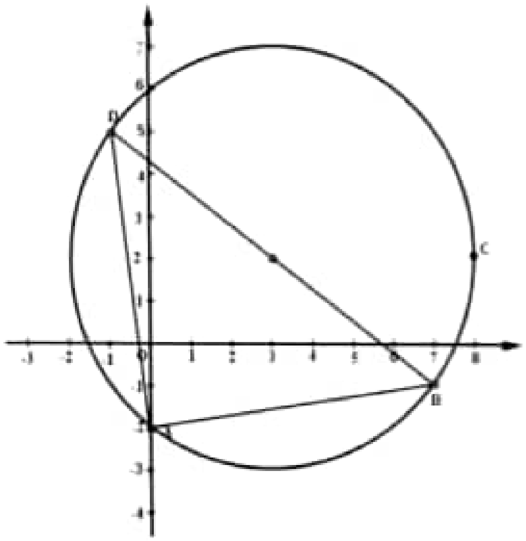
$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{4+4i-(2+3i)}{-2+i-(2+3i)}=\frac{2+i}{-4-2i}=\frac{(2+i)(-4+2i)}{16+4}=\frac{-10}{20}$

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$

Donc les points A, B et C sont alignés.

**Exercice3**

1) Figure




2) Calculons $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$

$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1+5i+2i}{7-i+2i}=\frac{-1+7i}{7+i}=\frac{(-1+7i)(7-i)}{50}=\frac{50i}{50}$

$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=i.$

Nature du triangle ABD

$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc le triangle ABD est isocèle rectangle en A.

3) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle $(C)$

Calculons $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}:\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$

Soient $Q_1=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ et $Q_2=\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$

$Q_1=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-1+5i+2i}{8+2i+2i}=\frac{-1+7i}{8+4i}=\frac{(-1+7i)(2-i)}{4(2+i)(2-i)}$

$Q_1=\frac{1+3i}{4}$

$Q_2=\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-1+5i-7+i}{8+2i-7+i}=\frac{-8+6i}{1+3i}=\frac{(-8+6i)(1-3i)}{10}$

$Q_2=1+3i$

$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{\frac{1+3i}{4}}{1+3i}=\frac{1}{4}$

$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}:\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\in\mathbb{R}.$

Donc les points A, B, C et D appartiennent à un cercle $(C)$

<u>Centre du cercle $(C)$</u>

Soit I le centre du cercle. I est le milieu de l'hypoténuse du triangle ABD.

$z_I=\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{7-i-1+5i}{2}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$

$\boxed{z_I=3+2i}$

**Propriétés**

- $ABCD$ est un parallélogramme signifie que :
  - $z_B-z_A=z_C-z_D$
  - Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu
- $ABCD$ est un losange signifie que $ABCD$ est un parallélogramme et $(AC)\perp(BD)$
- $ABCD$ est un rectangle signifie que $ABCD$ est un parallélogramme et $AC=BD$
- $ABCD$ est un carré signifie que $ABCD$ est un parallélogramme et $(AC)\perp(BD)$ et $AC=BD$

**Exemple**

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}-i$; $\sqrt{3}+i$ et $1-i\sqrt{3}$

1) Montrer que O est le milieu de [AD] et [BC]

2) Calculer le module et l'argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

3) En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

**Solution**

1) **Montrons que O est le milieu de [AD] et [BC]**

On a : $\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2}=0=z_O$ et $\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+i}{2}=0=z_O$ donc O est le milieu de [AD] et [BC]

2) **Calculons le module et l'argument de $\frac{z_A}{z_B}$**

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{2}{2} = 1$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_A) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{4\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\boxed{\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

3) **Déduisons la nature du quadrilatère ABDC**

- ✓ D'après 1) les diagonales $[AD]$ *et* $[BC]$ se coupent en leur milieu O
- ✓ De plus d'après 2) $OA = OB$ *et* $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ c'est-à-dire $OA = OB$ *et* $(OA) \perp (OB)$.

Donc les diagonales $[AD]$ *et* $[BC]$ se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et de même mesure.
Par conséquent ABDC est un carré.

## 2) Ensembles de point ou lieux géométriques

$A$ *et* $B$ sont deux points d'affixes respectives $z_A$ *et* $z_B$ ; $M$ est le point d'affixe z, du plan.

| **Ensemble $(E)$ des points $M(z)$ tels que :** | **Interprétations géométriques** | **Nature de l'ensemble $(E)$** |
|---|---|---|
| $\left\|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right\| = 1$ | $AM = BM$ | $(E)$ est la médiatrice du segment $[AB]$. |
| $\frac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathbb{R}^*$ ou $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ | $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ | $(E)$ est la droite $(AB)$ privée des points $A$ *et* $B$ |
| $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi\ [2\pi]$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ est un réel strictement négatif | $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = \pi\ [2\pi]$ | $(E)$ est le segment $[AB]$ privé des points $A$ *et* $B$. |
| $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ est un réel strictement positif | $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = 0\ [2\pi]$ | $(E)$ est la droite $(AB)$ privé du segment $[AB]$ |
| $\frac{z-z_A}{z-z_B} = yi \ (y \in \mathbb{R}^*)$ ou $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ | $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ | $(E)$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points $A$ *et* $B$. |
| $\|z - z_A\| = r \ (r \in \mathbb{R}^+)$ | $MA = r$ | $(E)$ est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$ |

**_Exercice d'application_**

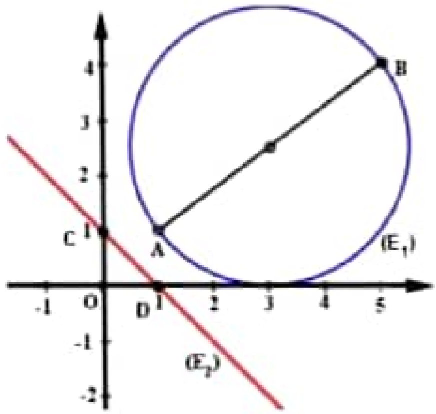
1) Déterminer l'ensemble $(E_1)$ des points M d'affixe z tels que : $\arg\left(\frac{z-1-i}{z-5-4i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

2) Déterminer l'ensemble $(E_2)$ des points M d'affixe z tels que : $\arg\left(\frac{i-z}{1-z}\right) = 0 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

**_Réponse_**

1) Soient A et B les points d'affixes respectives : $1 + i$ *et* $5 + 4i$
Pour $z \neq 1 + i$ *et* $z \neq 5 + 4i$ on a :
$\arg\left(\frac{z-1-i}{z-5-4i}\right) = (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
**Donc l'ensemble $(E_1)$ est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.**

2) Soient C et D d'affixes respectives : $i$ *et* $1$
Pour $z \neq i$ *et* $z \neq 1$ on a :
$\arg\left(\frac{i-z}{1-z}\right) = (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) = 0 + k\pi$ avec $M \neq C$ *et* $M \neq D$.
**Donc l'ensemble $(E_2)$ est la droite (AB) privé de C et D.**



**Utilisation de la forme algébrique**

***Exemple1***

On pose : $Z = (z-2)(\bar{z}+i)$.
Soit les écritures algébriques : $z = x + iy$ avec $x, y$ réels et $Z = X + iY$; $X, Y$ réels.

1) Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.
2) Trouver alors les ensembles suivants :
$E_1$: ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel
$E_2$: ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire

***Exemple2***

On considère un nombre complexe $Z$ tel que :
$Z = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1}$
a) Déterminer la partie réelle de Z et la partie imaginaire de Z
b) Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tel que Z soit imaginaire pur

***Equation de cercle - Equation de droite***

- L'expression : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ est l'équation du cercle de centre $A(a;b)$ et de rayon $r$.

*Dans certains cas pour avoir cette expression il faut d'abord trouver la forme canonique des expressions :* $x^2 + ax$ et $y^2 + by$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. La forme canonique de $P(x) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$

- L'expression : $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite.

***Réponse***

***Exemple1***

$Z = (z-2)(\bar{z}+i)$

1) Exprimons $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$

$Z = (x+iy-2)(x-iy+i)$
$Z = x^2 - ixy + xi + ixy + y^2 - y - 2x + 2iy - 2i$
$Z = (x^2 - 2x + y^2 - y) + i(x + 2y - 2) = X + iY$

$\boxed{X = x^2 - 2x + y^2 - y \text{ et } Y = x + 2y - 2}$

2) Trouvons les ensembles :

Z est réel $\Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$
Donc l'ensemble $E_1$ est la droite d'équation $x + 2y - 2 = 0$

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Donc l'ensemble $E_1$ est le cercle de centre $A(1;\frac{1}{2})$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

***Exemple2***

$Z = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1}$

a) Déterminons $\Re e(Z)$ et $\Im m(Z)$

Soit $z = x + iy$ $(x;y) \neq (-1;0)$

$Z = \frac{x-iy+2}{x-iy+1} = \frac{(x+2-iy)(x+1+iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+3x+y^2+2+iy}{(x+1)^2+y^2}$

$\boxed{\Re e(Z) = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2} \text{ et } \Im m(Z) = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}}$

b) Déterminons l'ensemble des points $M$ du plan tel que Z soit imaginaire pur

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2} = 0$ avec $(x;y) \neq (-1;0)$

$\frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

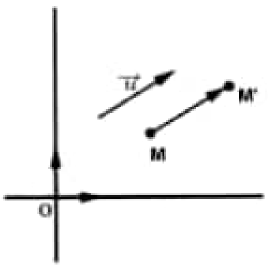
Donc l'ensemble $(E)$ cherché est le cercle de centre $A(-\frac{3}{2};0)$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$ privé du point $B(-1;0)$

## 3) Transformations du plan

***Translation de vecteur***

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe $b$. Considérons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

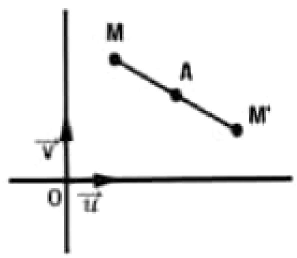
$t_{\vec{u}}(M) = M'$
$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
$z' - z = b$
$\boxed{z' = z + b}$




***Symétrie centrale***

Soit A le point d'affixe $z_A$ et $S_A$ la symétrie de centre A.

$S_A(M) = M'$
$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA}$
$z' - z_A = z_A - z$
$\boxed{z' = -z + 2z_A}$



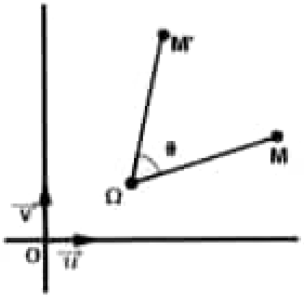
## Rotation

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle $\theta$.

$r(M) = M'$

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$




$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$

$\boxed{\mathbf{z' = (z - \omega)e^{i\theta} + \omega}}$

### Cas particulier

Si la rotation est de centre O et d'angle $\theta$ alors : $\boxed{\mathbf{z' = e^{i\theta}z}}$

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}, |a| = 1, b \in \mathbb{C}$) est une rotation d'angle $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{arg}(\boldsymbol{a})$ et de centre $\Omega$ tel que : $\mathbf{z_\Omega} = \frac{b}{1-a}$

## Exercice d'application

Soit $f$ une application définie de P vers P tel que : $z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$.

1) Caractériser géométriquement $f$ .

2) Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Déterminer l'affixe de B image de A par $f$

## Réponse

1) Caractérisons géométriquement $f$

$z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$

$a = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \qquad b = -\sqrt{3} + i \quad |a| = 1$

donc f une rotation. $\theta = \arg(a) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\mathbf{z_\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{-\sqrt{3}+i}{1-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})} = 2i$

Par suite **f une rotation de centre $\boldsymbol{\Omega(2i)}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$**

2) Déterminons l'affixe de B

$\mathbf{z_B} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\mathbf{z_A} - \sqrt{3} + i$

$z_B = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 + i) - \sqrt{3} + i$

$\boxed{\mathbf{z_B} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$

# CALCUL INTEGRAL

## Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a$ et $b$ deux réels de I et F une primitive de f sur I.

On appelle **intégrale** de f entre $a$ et $b$, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

**Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$ et donc g est la primitive de f qui s'annule en $a$.**

*__Exemple__* : Calculer :

$A = \int_0^1 (3x^2 + 3)dx \qquad B = \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx$

*__Réponse__*

$A = \int_0^1 (3x^2 + 3)dx = [x^3 + 3x]_0^1$

$A = (1^3 + 3 \times 1) - (0^3 + 3 \times 0) = 4$

$\boxed{A = 4}$



$B = \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

Soit $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f$ admet une primitive $F$ sur $[-1; 1]$.

Posons $u(x) = x^2 + 1 \qquad u'(x) = 2x \quad f(x) = \frac{u'}{u^2}$

$F(x) = -\frac{1}{x^2+1} + c$

$B = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{(-1)^2+1} + \frac{1}{1^2+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0$

$\boxed{C = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$

### *Propriétés*

Soient $f$ *et* $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I avec $a$ *et* $b$ deux éléments de I :

$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$

### *Relation de Chasles*

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I avec $a, b$ *et* $c$ des réels de I

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

### *Exercice d'application*

1) Calculer $A = \int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$

2) Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx$

a) Calculer $I + 2J$ et $2J - I$

b) En déduire les valeurs de I et J.



*__Réponse__*

1) Calculons $A$

$A = \int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$

$A = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{2x+1}{(x+1)^2}\right]dx = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}dx$

$A = \int_1^2 1dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

2) a- Calculons $I + 2J$ et $2J - I$

$I + 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx$

$I + 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2 x + 2 \times \frac{\cos^2 x}{2}\right]dx$

$I + 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 x + \cos^2 x]dx$

$I + 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{array}}$$

$2J - I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

$2J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 x - \sin^2 x]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$2J - I = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$

b) Déduisons les valeurs de I et J.

$\begin{cases} I + 2J = \frac{\pi}{2} \\ -I + 2J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4J = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow J = \frac{\pi}{8}$

$I = 2J = 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad \boxed{I = \frac{\pi}{4} \text{ et } J = \frac{\pi}{8}}$

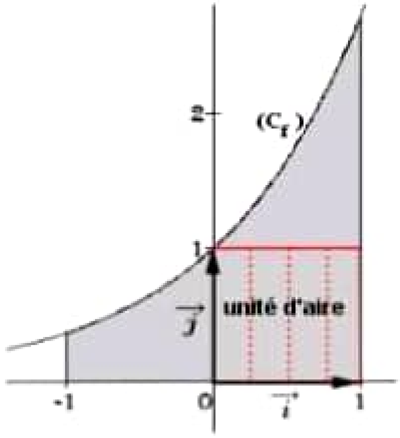
### Interprétation graphique de l'intégrale

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$ et $(C_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $(C_f)$ l'axe **(OI)**, les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$.

On le note aire du domaine défini par :

$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases} \qquad u.a = OI \times OJ$




Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm), l'aire $\mathcal{A}$ du domaine défini par $\begin{cases}-1\le x\le -1\\ 0\le y\le e^x\end{cases}$ **est :**

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} e^x dx \times u.a}$

**avec** $\boldsymbol{u.a = 2\times 2 = 4cm^2}$



$\mathcal{A} = [e^x]_{-1}^{1} \times 4 = 4(e - \frac{1}{e})$ $\qquad \boldsymbol{\mathcal{A} = 9,4cm^2}$

Si $f$ est **négative** sur $[a;b]$ alors

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \int_a^b [-f(x)]dx}$ (en unité d'aire)

## *Propriétés de comparaison*

Soient $f$ *et* $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$

- **Si** $\boldsymbol{f \ge 0}$ **sur** $\boldsymbol{[a;b]}$ **alors** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \ge 0}$
- **Si** $\boldsymbol{f \le g}$ **sur** $\boldsymbol{[a;b]}$ **alors :** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, $\quad m$ *et* $M$ deux nombres réels :

- **Si** $\boldsymbol{m \le f \le M}$ **sur** $\boldsymbol{[a;b]}$ **alors :** $\boldsymbol{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$
- **Si** $\boldsymbol{|f| \le M, (M \ge 0)}$ **sur** $\boldsymbol{[a;b]}$**, alors** $\boldsymbol{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)}$

**C'est l'inégalité de la moyenne.**

## *Valeur moyenne d'une intégrale*

$f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a;\ b]$.

On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a;\ b]$, le nombre réel $\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

## *Exercice d'application*

1) Démontrer que :

a) $\int_0^1 (x^2+1)dx \ge \int_0^1 2xdx$ $\quad$ b) $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1$

2) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - sinx.$

Calcule la valeur moyenne de $f$ sur $[0;\ \pi]$.

### Solution



1) Démontrons que :

a) $\int_0^1 (x^2+1)dx \ge \int_0^1 2xdx$

$\forall x \in [0;1], (x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 \ge 2x \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2+1)dx \ge \int_0^1 2xdx$

**Donc** $\boldsymbol{\int_0^1 (x^2+1)dx \ge \int_0^1 2xdx}$

b) $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1$

$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x^2 + 1 \le 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \int_0^1 1dx$

**Donc** $\boldsymbol{\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1}$

2) Calculons la valeur moyenne de $f$ sur $[0;\ \pi]$.

$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi (x - sinx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x\right]_0^\pi$

$\mu = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi^2 - 2)$ $\qquad \boxed{\mu = \frac{\pi^2-4}{2\pi}}$

## *Technique de calcul d'une intégrale*

### Utilisation de primitives

*Exemple* : Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 (t^3 + 2t + 1)dt$ $\qquad B = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2-1}dt$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx$ $\qquad D = \int_{-2}^{3} |u^2 - 1|du$

**Solution**

$A = \int_0^1 (t^3 + 2t + 1)dt = \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{4} + +1 + 1$

$\boxed{A = \frac{9}{4}}$

$B = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2-1}dt = [\ln|t^2-1|]_0^{\frac{1}{2}} = \ln\left|\frac{1}{4} - 1\right| - \ln|-1|$

$\boxed{B = \ln\frac{3}{4}}$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,(1 - \sin^2 x)\ dx$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos x \sin^2 x)\,dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\qquad \boxed{C = \frac{2}{3}}$

$D = \int_{-2}^{3} |u^2 - 1|du$

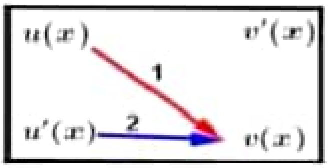
$D = \int_{-2}^{-1} (u^2 - 1)du + \int_{-1}^{1} (-u^2 + 1)du + \int_{-2}^{-1} (u^2 - 1)du$

$D = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{1}^{3} = \frac{28}{3}$ $\qquad \boxed{C = \frac{28}{3}}$

**Intégration par parties**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;\ b]$.
Si les dérivées $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a;\ b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$




*Exemple* : Calculer à l'aide d'une intégration par partie, les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\pi}(x+1)\cos x\,dx \qquad B = \int_1^2 \ln t\,dt$

$C = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$



**Solution**

$A = \int_0^{\pi}(x+1)\cos x\,dx$

Soit $u(x) = x+1$ et $v'(x) = \cos x$ alors :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$

$A = [(x+1)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$A = 0 - [-\cos x]_0^{\pi} \qquad \boxed{A = -2}$

$B = \int_1^2 \ln t\,dt = \int_1^2 1 \times \ln t\,dt$

Soit $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$ alors :

$u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$

$B = [t \times \ln t\,]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{1}{t}dt$

$B = [t \times \ln t\,]_1^2 - \int_1^2 1dt = [t \times \ln t\,]_1^2 - [t\,]_1^2$

$B = (2\ln 2 - 1\ln 1) - (2-1)$

$\boxed{B = 2\ln 2 - 1}$

$C = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

Soit $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$ alors :

$u'(x) = \cos x$ et $v(x) = e^x$

$C = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$

$C = 0 - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = \int_0^{\pi} e^x\,(-\cos x)dx$

*Intégrons une deuxième fois par parties.*

Soit $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = e^x$ alors :

$u'(x) = \sin x$ et $v(x) = e^x$

$C = [-e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$C = e^{\pi} + 1 - C \Leftrightarrow 2C = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow C = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

$\boxed{C = \frac{e^{\pi}+1}{2}}$

**Changement de variable**

Pour calculer $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels tel que $\alpha \neq 0$, on peut procéder comme suit :

- Poser $t = \alpha x + \beta$
  on a : $dt = \alpha\,dx$ donc $dx = \frac{1}{\alpha}dt$
  $x = a \Leftrightarrow t = \alpha a + \beta$
  $x = b \Leftrightarrow t = \alpha b + \beta$
- Utiliser l'égalité
  $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{f(t)}{\alpha}dt$

Exemple : Calculer $K = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$

Soit $t = 2x+3 \qquad dt = 2dx$ donc $dx = \frac{1}{2}dt$

$x = -1 \Leftrightarrow t = 1$ et $x = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$K = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2}dt = \int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$K = [\sqrt{t}\,]_1^3 \qquad \boxed{K = \sqrt{3} - 1}$

**Fonction paire, impaire et périodique**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.
Pour tout élément $a$ de I, on a :

- Si $f$ est paire, alors :
  $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si $f$ est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période $T$.
Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

***Exercice d'application***

Calculer : $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$

$C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx$

**Solution**

La fonction $x \mapsto \cos 2x$ est paire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = [\sin 2x\,]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$A = 1$

La fonction $x \mapsto sin2x$ est impaire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc :

$B = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = 0$

La fonction $x \mapsto \cos 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période $\pi$, donc :

$C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos 2x\, dx$

$C = 0$

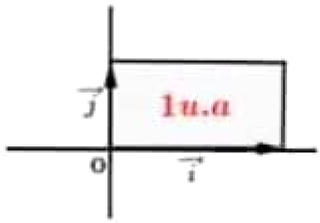
## Calcul d'aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

**L'unité d'aire**, notée $\boldsymbol{u.a}$, est l'aire du rectangle bâti à partir des O, I et J .

$\mathbf{1}\boldsymbol{u.a} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



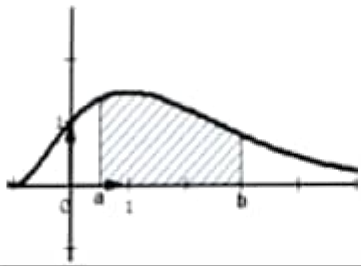

L'aire du domaine délimité par la courbe $(C_f)$, l'axe **(OI),** les droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$ est :

$\left(\int_a^b |f(x)| dx\right) \times u.a$

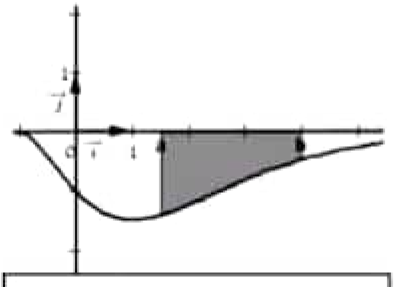
L'aire du domaine délimité par la courbe $(C_f)$, $(C_g)$ et les droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$ est :

$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx\right) \times u.a$

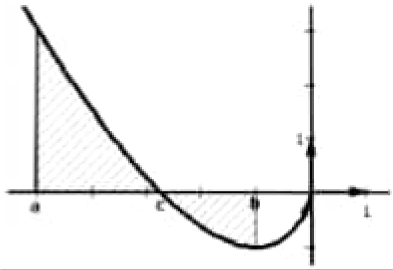
## Cas particuliers



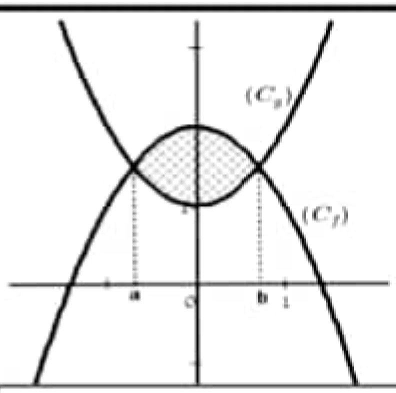
$\mathcal{A} = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \times u.a$



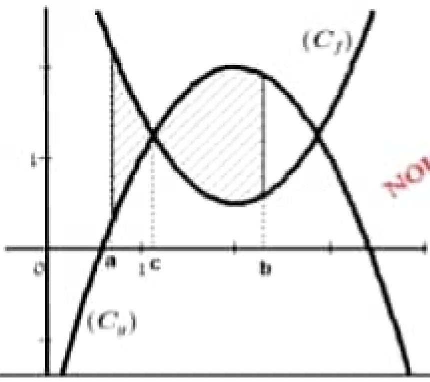
$\mathcal{A} = \left(\int_a^b -f(x)dx\right) \times u.a$



$\mathcal{A} = \left(\int_a^c f(x)dx\right) \times u.a + \left(\int_c^b -f(x)dx\right) \times u.a$




$\mathcal{A} = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right) \times u.a$






$\mathcal{A} = \left(\int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx\right) ua$

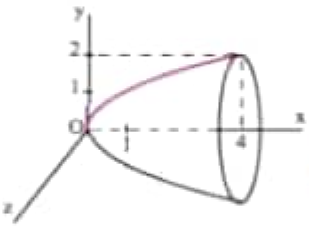
## Calcul de volumes

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, I, J, K)$

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $(C_f)$ sur $[a; b]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \left(\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx\right) \times u.v$$

$u.v = OI \times OJ \times OK$ (Unité de volume)






$$V = \left(\pi \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 dx\right) \times u.v$$
$$V = \left(\pi \int_0^4 x dx\right) \times u.v = \frac{\pi}{2}[x^2]_0^4 \times u.v$$
$$V = 8\pi\ cm^3$$

## Suites définies par une intégrale

On considère la suite des intégrales :

$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $\quad I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ $\quad I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$

1- a) Calculer $I_1$ et $I_0 + I_1$. En déduire $I_0$.

b) Pour tout entier naturel n, calculer $I_n + I_{n+1}$

2- a) Prouver que, pour tout élément $x$ de $[0; 1]$

$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$

b) En déduire un encadrement de $I_n$.

3) A partir de cet encadrement, déterminer la limite de $I_n$.

### Corrigé



1- a) Calculons $I_1$ et $I_0 + I_1$

$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = [\ln(e^x+1)]_0^1$

$I_1 = \ln(e+1) - \ln 2$ $\quad \boxed{I_1 = \ln(\frac{e+1}{2})}$

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}dx$

$I_0 + I_1 = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ $\quad \boxed{I_0 + I_1 = 1}$

Déduisons $I_0$

$I_0 + I_1 = 1 \Leftrightarrow I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})$

$\boxed{I_0 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})}$

b) calculer $I_n + I_{n+1}$

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx$

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \frac{e^x \times e^{nx}}{e^x+1}dx$

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_0^1 e^{nx}dx$

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}[e^{nx}]_0^1 = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}(e^n - 1)}$

2- a) Prouvons que, pour tout élément $x$ de $[0; 1]$ $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$

$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$

$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$ car $e^{nx} > 0$

Donc $\forall x \in [0; 1]$ $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$

b) Déduisons un encadrement de $I_n$

$\forall x \in [0; 1]$ $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$

D'où : $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1}dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}e^{nx}dx$

$\frac{1}{e+1}\int_0^1 e^{nx}dx \leq I_n \leq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}dx$

$\frac{1}{n(e+1)}(e^n - 1) \leq I_n \leq \frac{1}{2n}(e^n - 1)$

$\frac{e^n-1}{n(e+1)} \leq I_n \leq \frac{e^n-1}{2n}$

3) Déterminer la limite de $I_n$.

On a : $\frac{e^n-1}{n(e+1)} \leq I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-1}{n(e+1)} = +\infty$

**Donc** $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$

# SUITES NUMERIQUES

## Définition

On appelle suite numérique à valeur réelle toute fonction d'un sous ensemble $I$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$u: \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad\; n \longmapsto u(n)$

- L'image de $n$ par la suite $u$ est noté $u_n = u(n)$
- $u_n$ est appelé le terme général de la suite $u$
- $n$ est appelé l'indice ou le rang du terme $u_n$
- L'ensemble I est appelé l'ensemble des indices de la suite $u$
- La suite $u$ se note $(u_n)_{n \in I}$

Une suite $(u_n)$ peut être définie par :

- **Une relation fonctionnelle** :
  Exemple : $u_n = \sqrt{2n^2+1}$ $\quad u_n = f(n)$ où $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$
- **Par une relation de récurrence** :
  $u_p$ étant donné et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$
  Exemple : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

## Raisonnement par récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie sur $\mathbb{N}$:

- On vérifie que la propriété vraie pour un entier $n_0$
- On suppose que la propriété est vraie pout tout entier $n \geq n_0$ et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier $n+1$
- On conclut que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

### Exercices d'application

1) Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$

2) On considère la suite $(v_n)$ définie par :
$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$
Etablir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n + 1$

3) On donne la suite $(w_n)$ définie par : $\begin{cases} w_0 = \frac{3}{2} \\ w_{n+1} = \frac{3w_n - 2}{w_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$

> Pour la suite $(w_n)$ on doit trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $w_{n+1} = a + \frac{b}{w_n}$. On a alors : $w_{n+1} = 3 - \frac{2}{w_n}$

### Exercice d'application

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :
$u_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$ et $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases}$

1) Calculer les trois premiers termes de $(u_n)$
2) Calculer $v_1, v_2$ et $v_3$

### Solution 1

1) Calculons les trois premiers termes de $(u_n)$

$u_0 = \cos(\frac{0 \times \pi}{4}) = \cos(0) = 1$

$u_1 = \cos(\frac{1 \times \pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_2 = \cos(\frac{2 \times \pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

2) Calculons $v_1, v_2$ et $v_3$

$v_1 = v_{0+1} = 2v_0 + 1 = 2(-2) + 1 = -3$

$v_2 = v_{1+1} = 2v_1 + 1 = 2(-3) + 1 = -5$

$v_3 = v_{2+1} = 2v_2 + 1 = 2(-5) + 1 = -9$

### Solution 2

**1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$**

Soit P la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$ »

Pour $n = 0$. $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$

D'où P est vraie pour $n = 0$.

Supposons que P est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

$0 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$

$0 < \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc P est vraie à l'ordre $n+1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{0 \leq u_n \leq 2}$

**2) Etablissons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n + 1$**

Soit P la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n + 1$ »

Pour $n = 0$ : $2^0 + 1 = 1 + 1 = 2 = v_0$

D'où P est vraie pour $n = 0$.

Supposons que P est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n + 1$ et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $v_{n+1} = 2^{n+1} + 1$

$v_{n+1} = 2v_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$

Donc P est vraie à l'ordre $n+1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{v_n = 2^n + 1}$

**3) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$**

Soit P la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$ »

Pour $n = 0$. $w_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq w_0 \leq 2$

D'où P est vraie pour $n = 0$.

Supposons que P est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$ et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $1 \leq w_{n+1} \leq 2$

$1 \leq w_n \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{w_n} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{-2}{w_n} \leq -1$

$1 \leq 3 - \frac{2}{w_n} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq 2$

Donc P est vraie à l'ordre $n+1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{1 \leq w_n \leq 2}$

## Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)$ une suite numérique de terme général $u_n$.

- $(u_n)_{n\in I}$ est croissante $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} - u_n > 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} - u_n < 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est constante $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} = u_n$

$(u_n)$ est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante ou soit constante.

### Comment prouver la monotonie d'une suite

On peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

✓ **On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$**

*Exemple* : Soit $u_n = \frac{n+2}{n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{-2}{n(n+1)} < 0$

*donc la suite $(u_n)$ est décroissante.*

✓ **Si $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique alors la suite $(u_n)$ et $f$ ont le même sens de variation**

*Exemple* : Soit $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$

$f$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ *et*

$f'(x) = \frac{3(2x-1)-2(3x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$

$\forall x \in [1; +\infty[$ $f'(x) < 0$ donc $f$ est décroissante sur $[1; +\infty[$.

*D'où la suite $(u_n)$ est décroissante à partir de $n = 1$*

✓ **Si à un certain rang $(u_n)$ a un signe constant alors on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1**

- Si $u_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite $(u_n)$ est croissante
- Si $u_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante
- Si $u_n < 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante
- Si $u_n < 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite $(u_n)$ est croissante

*Exemple1* : Soit $u_n = \frac{-3}{5^n}$ $\quad u_{n+1} = \frac{-3}{5^{n+1}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{-3}{5^{n+1}}}{\frac{-3}{5^n}} = \frac{3}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3} = 5^{-1} = \frac{1}{5} < 1$

$u_n < 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ **donc $(u_n)$ est croissante**

*Exemple2* : On donne la suite $(v_n)$ définie par : $\forall n \geq 1$

$v_n = \frac{n}{2^n}$ $\quad v_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ $\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\forall n \geq 1 \;\; 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $v_n > 0$

**d'où $(v_n)$ est décroissante**

## Suite majorée – Suite minorée

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique :

- $(u_n)$ est majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \; \forall n \in I, u_n \leq M$
- $(u_n)$ est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \; \forall n \in I, u_n \geq m$
- $(u_n)$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée : $\forall n \in I, \; m \leq u_n \leq M$

*Exemple* : Soit $u_n = \frac{n+1}{n-4}$

Montrons que $\forall n \geq 5$ on a : $1 \leq u_n \leq 6$

$u_n - 1 = \frac{n+1}{n-4} - 1 = \frac{5}{n-4}$ $\qquad n \geq 5 \Leftrightarrow n - 4 \geq 1$

donc $u_n - 1 \geq 0$ c-à-d $\mathbf{1 \leq u_n}$

$u_n - 6 = \frac{n+1}{n-4} - 6 = \frac{n+1-6n+24}{n-4} = \frac{-5n+25}{n-4} = \frac{-5(n-5)}{n-4}$

$n \geq 5 \Leftrightarrow n - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -5(n-5) \leq 0$ et $n - 4 \geq 1$

donc $u_n - 6 \leq 0$ c-à-d $\mathbf{u_n \leq 6}$

On conclut que : $\forall n \geq 5$ on a : $1 \leq u_n \leq 6$.

$(u_n)$ est minorée par 1 et majorée par 6 donc $(u_n)$ est bornée.

## Convergence d'une suite

- Si $(u_n)$ est une suite croissante et majorée alors elle est convergente
- Si $(u_n)$ est une suite décroissante et minorée alors elle est convergente
- Si $(u_n)$ est une suite monotone et bornée alors elle est convergente

*Proposition*

- La suite $(u_n)$ est convergente $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$
- La suite $(u_n)$ est divergente $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \notin \mathbb{R}$

### Exercice d'application

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

2) Montrer que $(u_n)$ est décroissante

En déduire que $(u_n)$ est convergente.

### Réponse

**1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$**

Soit P la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ »

Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ D'où P est vraie pour $n = 1$.

Supposons que P est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et montrons que P est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{2n} > 0$ *et* $u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > 0$

Donc P est vraie à l'ordre $n + 1$.

On conclut que $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{u_n} > \mathbf{0}$

**2) Montrons que $(u_n)$ est décroissante**

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n} u_n - u_n = u_n\left(\frac{n+1}{2n} - 1\right) = \frac{-n+1}{2n} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ *et* $\frac{-n+1}{2n} \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Par suite $(u_n)$ est décroissante.

$(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

## Suite arithmétique – Suite géométrique

| | **Suite arithmétique** | **Suite géométrique** |
|---|---|---|
| **Définition** | $u_{n+1} = u_n + r$ <br> $(r \in \mathbb{R})$ | $u_{n+1} = qu_n$ <br> $(q \in \mathbb{R})$ |
| **Raison** | $r$ | $q$ |
| **Terme général $u_n$ en fonction de $n$** | $u_n = u_0 + nr$ <br> $u_n = u_p + (n-p)r$ | $u_n = u_0 q^n$ <br> $u_n = u_p q^{n-p}$ |
| **Somme :** $S_n = u_p + \cdots + u_n$ | $S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$ | $S_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ <br> $q \neq 1$ |
| **Monotonie** | $u_{n+1} = u_n + r$ <br> $\bullet (u_n) \nearrow$ si $r > 0$ <br> $\bullet (u_n) \searrow$ si $r < 0$ <br> $\bullet u_n = cste$ si $r = 0$ | Si $q > 0$ <br> $\bullet (u_n) \nearrow$ si $q > 1$ <br> $\bullet (u_n) \searrow$ si $0 < q < 1$ <br> $\bullet u_n = cste$ si $q = 1$ <br> $q < 0$ $(u_n)$ est dite alternée |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ -\infty & si\ r < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 & si\ \lvert q\rvert < 1 \\ +\infty & si\ q > 1 \end{cases}$ <br> n'existe pas si $q \leq -1$ |

## Limites de suites

### Limites usuelles

Soit $a$ un nombre réel

- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
- Si $-1 < a < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
- Si $a = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
- Si $a \leq -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$ **n'existe pas**

### Limites et comparaison

Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ des suites numériques : $\forall n \geq n_0$

- Si $\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *(Théorème des gendarmes)*
- Si $\begin{cases} \lvert u_n - l\rvert \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Si $\begin{cases} w_n \leq u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

### Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} \in f(I)$

Si $(u_n)$ est convergente de limite $l$ alors $l$ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans $I$.

## Exercices d'application

### Exercice 1

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1} \end{cases}$ et la suite $(v_n)$ telle que : $v_n = nu_n$

1) Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) En déduire l'expression de $(v_n)$ puis celle de $(u_n)$ en fonction de $n$.

3) Déterminer la somme : $S_n = v_1 + v_2 \ldots + v_n$ en fonction de $n$.

### Exercice 2

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 2u_n = u_{n-1} + 5 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ On pose : $v_n = u_n - 5$

1) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.

2) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$. En déduire leur limite.

3) On pose: $S_n = v_0 + v_1 \ldots + v_n$ et $G_n = u_0 + u_1 \ldots + u_n$

a) Exprimer $S_n$ et $G_n$ en fonction de $n$.

b) Etudier la convergence des suites $(S_n)$ et $(G_n)$.

### Correction

### Exercice 1

**1) Démontrons que la suite $(v_n)$ est arithmétique**

$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} = (n+1)\frac{nu_n + 4}{n+1} = nu_n + 4$

$v_{n+1} - v_n = nu_n + 4 - nu_n = 4$

Donc $(v_n)$ est arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_1 = u_1 = 1$

**2) Expression de $(v_n)$ puis celle de $(u_n)$ en fonction de $n$**

$v_n = v_1 + 4(n-1) = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$

$\boxed{v_n = 4n - 3}$

$v_n = nu_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{n} = \frac{4n-3}{n}$ $\boxed{u_n = \frac{4n-3}{n}}$

**3) Déterminons la somme : $S_n = v_1 + v_2 \ldots + v_n$ en fonction de $n$.**

$S_n = \frac{n-1+1}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 3) = \frac{n}{2}(4n - 2)$

$\boxed{S_n = n(2n-1)}$

### Exercice 2

**1) Démontrons que la suite $(v_n)$ est géométrique.**

$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 \quad 2u_n = u_{n-1} + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n + 5}{2}$

$v_{n+1} = \frac{u_n+5}{2} - 5 = \frac{u_n - 5}{2} = \frac{v_n}{2} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

Donc $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 2 - 5 = -3$

**2) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.**

$v_n = v_0 q^n = -3 \times (\frac{1}{2})^n$ $\boxed{v_n = -\frac{3}{2^n}}$

$v_n = u_n - 5 \Leftrightarrow u_n = v_n + 5 = -\frac{3}{2^n} + 5$

$\boxed{u_n = -\frac{3}{2^n} + 5}$

**Calcul de limite**

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ **et** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

**3- a) Exprimons $S_n$ et $G_n$ en fonction de $n$.**

$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -3 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -6(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$

$\boxed{S_n = -6(1 - \frac{1}{2^{n+1}})}$

$G_n = u_0 + u_1 \dots + u_n$

$G_n = (v_0 + 5) + (v_1 + 5) + \cdots + (v_n + 5)$

$G_n = v_0 + v_1 \dots + v_n + 5(n+1) = S_n + 5(n+1)$

$G_n = -6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 5(n+1)$

$\boxed{G_n = 5n - 1 + \frac{3}{2^n}}$

**b) Etudions la convergence des suites $(S_n)$ et $(G_n)$.**

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -6$

D'où $(S_n)$ est une suite convergente.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (5n - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2^n}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n = +\infty$

Par conséquent, $(G_n)$ est une suite divergente.

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## *Equations différentielles linéaires du 1er ordre*

### *Activité*

Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = e^{-2x}$.
Calculer la dérivée de f et montrer que pour tout réel $x$, on a : $f'(x) + 2f(x) = 0$

### *Réponse*

$f'(x) = (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$
$f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$
D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 0$

**On dit que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.**

### *Définition*

On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation de la forme :
$\boldsymbol{ay' + by = 0}$ $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}}$

### *Propriété*

- Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ sont de la forme :
  $\boldsymbol{f : x \mapsto ke^{-\frac{b}{a}x}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.
  **($x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$).**

Cette unique solution est la fonction
$f : x \mapsto y_0 e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}$

NOUR-MATHS

### *Exercice d'application*

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $(E_1) : y' - 2y = 0$
b) $(E_2) : 3y' + 5y = 0$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle ( E ) qui vérifie la condition donnée :
a) (E) : $y' - 4y = 0$ $et\ f(0) = 3$
b) (E) : $y' + \sqrt{2}y = 0$. La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.

### *Corrigé*

1) a) $(E_1) : y' - 2y = 0 \quad a = 1\ \ et\ b = -2$
Les solutions de l'équation $(E_1)$ sont les fonctions : $\boldsymbol{f : x \mapsto ke^{2x}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

b) $(E_2) : 3y' + 5y = 0 \quad (E_2) : y' + \frac{5}{3}y = 0$
Les solutions de l'équation $(E_2)$ sont les fonctions : $\boldsymbol{f : x \mapsto ke^{-\frac{5}{3}x}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

2) a) (E) : $y' - 4y = 0$ $et\ f(0) = 3$
$y' - 4y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = ke^{4x}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$
$f(0) = 3 \Leftrightarrow ke^{4\times 0} = 3 \Leftrightarrow k = 3$
$\boxed{\boldsymbol{f(x) = 3e^{4x}}}$

b) (E) : $y' + \sqrt{2}y = 0$
Les solutions de l'équation $(E_1)$ sont les fonctions : $\boldsymbol{f : x \mapsto ke^{-x\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $f'(0)$.
Selon la condition donnée $f'(0) = 1$
$f'(x) = -\sqrt{2}ke^{-x\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\sqrt{2}k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\boxed{\boldsymbol{f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x\sqrt{2}}}}$

## *Equations différentielles du type* $y'' - ay = 0$

### *Propriétés*

- Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' = 0}$ sont les fonctions $\boldsymbol{x \mapsto ax + b}$,
  $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' - \omega^2 y = 0}$ sont les fonctions
  $\boldsymbol{x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
- Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$ sont les fonctions
  $\boldsymbol{x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}$,
  $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
- Soient $x_0$ , $y_0$ et $y'_0$ trois nombres réels. L'équation $y'' - my = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$

### Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle ( E ) qui vérifie la condition donnée :

a) (E) : $25y'' - 16y = 0$ et $f'(0) = f(0) = 1$

b) (E) : $y'' + y = 0$.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**Corrigé** NOUR-MATHS

**a)** (E) : $\boldsymbol{25y'' - 16y = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{f'(0) = f(0) = 1}$

$25y'' - 16y = 0 \Leftrightarrow y'' - \frac{16}{25}y = 0$

On a une équation de la forme: $y'' - \omega^2 y = 0$

avec $\omega = \frac{4}{5}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-\frac{4}{5}x}$ $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow A + B = 1$

$f'(x) = \frac{4}{5}Ae^{\frac{4}{5}x} - \frac{4}{5}Be^{-\frac{4}{5}x}$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}A - \frac{4}{5}B = 1$

On a donc : $\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{4}{5}A - \frac{4}{5}B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{9}{8}$ et $B = -\frac{1}{8}$

Ainsi : $\boldsymbol{f(x) = \frac{9}{8}e^{\frac{4}{5}x} - \frac{1}{8}e^{-\frac{4}{5}x}}$

**b)** (E) : $\boldsymbol{y'' + y = 0}$

On a une équation de la forme: $y'' - \omega^2 y = 0$

avec $\omega = 1$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions : $x \mapsto \boldsymbol{A\cos(x) + B\sin(x)}$

$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

- La courbe de f passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow B = 1$
- La courbe de f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

  $f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$

  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -A = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Donc $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$

### Tableau récapitulatif

| Equations différentielles | Solutions |
|---|---|
| $y' + my = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) | $x \mapsto ke^{-mx}$, $k \in \mathbb{R}$ |
| $y'' = 0$ | $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ |
| $y'' - \omega^2 y = 0$ | $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| $y'' + \omega^2 y = 0$ | $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |

### Exercices résolus

NOUR-MATHS

#### Exercice 1

Soient $(E_1)$: $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$ et $(E_2)$: $2y' + 3y = 0$

1) Déterminer un polynôme g du second degré solution de $(E_1)$.

2) Démontrer qu'une fonction $h$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si ( $h - g$ ) est solution de $(E_2)$.

3) En déduire les solutions de $(E_1)$.

#### Exercice 2

Soit l'équation différentielle $(E)$: $y' + 3y = (x + 4)e^{-x}$

1) Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de $(E)$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E')$: $y' + 3y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f - g$ est solution de $(E')$.

4) En déduire les solutions de $(E)$.

#### Exercice 3

Soit l'équation différentielle $(E)$: $y' - y = A\cos x$

1) Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos x + b\sin x$ vérifie $(E)$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E')$: $y' - y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f - g$ est solution de $(E')$.

4) En déduire les solutions de $(E)$.

## Correction

### Exercice 1

**1) Déterminons un polynôme g du second degré solution de $(E_1)$**

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ solution de $(E_1)$.

$2g' + 3g = 6x^2 - 7x + 2$

$2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 7x + 2$

$4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = 6x^2 - 7x + 2$

$3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = 6x^2 - 7x + 2$

Par identification : $\begin{cases} 3a = 6 \\ 4a + 3b = -7 \\ 2b + 3c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$

**Donc $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$**

**2) Démontrons qu'une fonction $h$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si $(h - g)$ est solution de $(E_2)$**

- *Supposons que $h$ est solution de $(E_1)$ et montrons que $(h - g)$ est solution de $(E_2)$*

$h$ est solution de $(E_1) \Leftrightarrow 2h' + 3h = 6x^2 - 7x + 2$

On sait que : $2g'(x) + 3g(x) = 6x^2 - 7x + 2$

Donc $2h'(x) + 3h(x) = 2g'(x) + 3g(x)$

$\Leftrightarrow 2h'(x) - 2g'(x) + 3h(x) - 3g(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(h - g)'(x) + 3(h - g)(x) = 0$

**D'où $(h - g)$ est solution de $(E_2)$**

- *Supposons que $(h - g)$ est solution de $(E_2)$ et montrons que $h$ est solution de $(E_1)$*

*$(h - g)$ est solution de $(E_2)$ donc*

$2(h - g)'(x) + 3(h - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2h'(x) - 2g'(x) + 3h(x) - 3g(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2h'(x) + 3h(x) = 2g'(x) + 3g(x)$

Or $2g'(x) + 3g(x) = 6x^2 - 7x + 2$

D'où $2h'(x) + 3h(x) = 6x^2 - 7x + 2$

*Par suite $h$ est solution de $(E_1)$*

*Ainsi $h$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si $(h - g)$ est solution de $(E_2)$*

**3) Déduisons les solutions de $(E_1)$**

Les solutions de l'équation $(E_2)$ sont de la forme $f: x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$

Comme $(h - g)$ est solution de $(E_2)$ alors :

$h(x) - g(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow h(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + g(x)$

$$\boxed{h(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4,\ k \in \mathbb{R}}$$

### Exercice 2

$(E): y' + 3y = (x + 4)e^{-x}$

**1) Déterminons les $a$ et $b$ pour que $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de $(E)$**

$g(x) = (ax + b)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

g est solution de l'équation $(E)$ donc

$g' + 3g = (x + 4)e^{-x}$

$(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (x + 4)e^{-x}$

$(2ax + 2b + a)e^{-x} = (x + 4)e^{-x}$

Par identification $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$

$\boldsymbol{g(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{7}{4})e^{-x}}$

**2) Résolvons sur $\mathbb{R}$ $(E')$: $y' + 3y = 0$**

Les solutions de l'équation $(E')$ sont de la forme $h: x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.

**3) Démontrons qu'une fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f - g$ est solution de $(E')$**

- *Supposons que $f$ est solution de $(E)$ et montrons que $(f - g)$ est solution de $(E')$*

$f$ est solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = (x + 4)e^{-x}$

On sait que : $g'(x) + 3g(x) = (x + 4)e^{-x}$

Donc $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 3(h - g)(x) = 0$

**D'où $(f - g)$ est solution de $(E')$**

- *Supposons que $(f - g)$ est solution de $(E')$ et montrons que $f$ est solution de $(E)$*

*$(f - g)$ est solution de $(E')$ donc*

$(f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$

Or $g'(x) + 3g(x) = (x + 4)e^{-x}$

D'où $f'(x) + 3f(x) = (x + 4)e^{-x}$

*Par suite $f$ est solution de $(E)$*



**4) Déduisons les solutions de $(E)$.**

D'après la question précédente, $f$ est solution de $(E)$ si et seulement $f - g$ est solution de $(E')$

Or les solutions de l'équation $(E')$ sont de la forme $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$

*Donc* $f(x) - g(x) = ke^{-3x} \Leftrightarrow f(x) = ke^{-3x} + g(x)$

$$\boxed{f(x) = ke^{-3x} + (\frac{1}{2}x + \frac{7}{4})e^{-x},\ k \in \mathbb{R}}$$

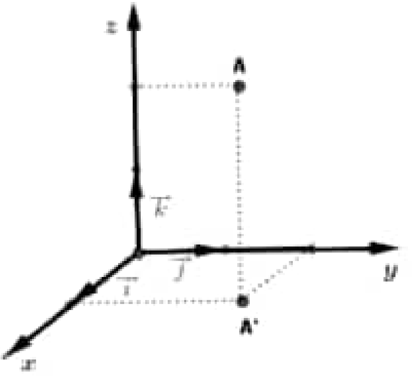
# GEOMETRIE DANS L'ESPACE

## *Repère de l'espace*

- Soient $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. Alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe deux réels $a$ *et* $b$ tels que : $\boldsymbol{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$.
- On appelle repère de l'espace tout quadruplet $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ où O est un point de l'espace et $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

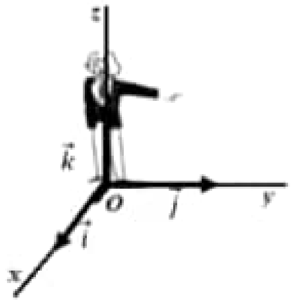
  Si les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit orthogonal. Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$), on dit que le repère est orthonormal.
- Un point $M$ de l'espace est repéré par trois coordonnées : **son abscisse $x$, son ordonnée $y$ et sa côte $z$.**

*Exemple*




$A(1; 2; 2)$ $\quad$ $A'(1; 2; 0)$

- Le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace est dit direct si un homme traversé par le vecteur $\vec{k}$ des pieds à la tête et regardant le vecteur $\vec{\imath}$ a le vecteur $\vec{\jmath}$ à sa gauche. C'est la règle du bonhomme d'Ampère.




*Ce repère est direct.*

## *Calcul sur les coordonnées*

Les résultats sont identiques à ceux du plan.

- Si $A(x_A;\ y_A; z_A)$ et $B(x_B;\ y_B; z_B)$ alors :
  - Les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  - Les coordonnées du milieu $I$ du segment $[AB]$ sont : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2};\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs :
  - Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$
  - Si $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $k\vec{u}$ sont : $\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
  - $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k \ \ (k \in \mathbb{R})$

### *Exercice d'application*

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace, on considère les points : $A(4; 0; 0)$ $\ B(0; 3; 0)$ $C(0; 0; 6)$ et $M(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

On note I le milieu de $[AC]$ et L le point tel que $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées de I et de L .

2) Montrer que les points A, M et L sont alignés.

### *Solution*

*1) Déterminons les coordonnées de* I et de L

I le milieu de $[AC]$ donc $I(\frac{4+0}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+6}{2})$ $\boldsymbol{I(2; 0; 3)}$

Soit $L(x_L;\ y_L; z_L)$ $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} x_L - 0 \\ y_L - 3 \\ z_L - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_L = 0 \\ 3(y_L - 3) = -3 \\ 3z_L = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = 2 \\ z_L = 2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{I(0; 2; 2)}$

*2) Montrons que les points* A, M et L *sont alignés*

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les points A, M et L sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires.

C'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AL} \Leftrightarrow \begin{cases} -4k = -3 \\ 2k = \frac{3}{2} \\ 2k = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ k = \frac{3}{4} \\ k = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AL}$. Par suite, les points A, M et L sont alignés

## *Produit scalaire de l'espace*

- ***Définition***

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est le réel :

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})}$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Si $\vec{u} = \vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v}$ se note $\vec{u}^2$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

- ***Propriétés***

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, $a$ *et* $b$ deux réels.

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)\vec{u}.\vec{v}$ $\qquad$ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

- ***Orthogonalité***

✓ Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

✓ Etant donné deux droites $(D)$ et $(D')$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. $(D)$ et $(D')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

- ***Expression analytique***

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$.

✓ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

✓ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

✓ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

## *Vecteur normal à un plan*

➢ Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan défini par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si et seulement si pour tout point M de ce plan, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

➢ Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$; A un point de $(\mathcal{P})$, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Alors un point M de l'espace appartient au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

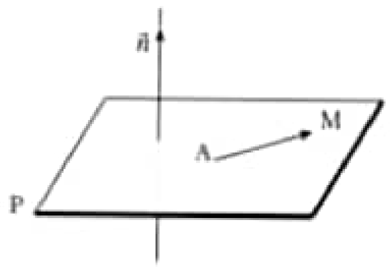
➢ ***Equation d'un plan***

Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ; $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

$\forall M(x, y, z) \in (\mathcal{P})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Donc : $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$$\boxed{(\mathcal{P}): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$$




<u>Exemple</u> :

Donnons l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1; 3; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -5; 4)$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de $(\mathcal{P})$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow x - 1 - 5y + 15 + 4z - 8 = 0$

$$\boxed{(\mathcal{P}): x - 5y + 4z + 6 = 0}$$

***Exercice d'application***

Dans le plan de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$, on donne les points suivants : $A(-2; 1; 1)$ $B(-1; 2; 0)$ et $C(0; -1; 1)$ et le vecteur $\vec{u}(1; 1; 2)$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2) Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $(ABC)$.

3) Déterminer une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

***Corrigé***

1) Montrons que A, B et C déterminent un plan.

$\overrightarrow{AB}(1; 1; -1)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}(2; -2; 0)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{1} \neq -\frac{2}{1} \neq \frac{0}{-1}$

Donc les point A, B et C ne sont pas alignés ; ils définissent alors un plan : le plan $(ABC)$.

2) Vérifions que $\vec{u}$ est normal au plan $(ABC)$

On a : $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 1+1-2=0$ et

$\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 2-2=0.$

Donc le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $(ABC)$

3) Déterminons une équation du plan $(ABC)$.

Soit $M(x,y,z)$ un point de $(ABC)$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2+y-1+2z-2=0$$

$$\boxed{(ABC): x+y+2z-1=0}$$

## Produit vectoriel dans l'espace

### ➢ Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ défini par :

- ✓ $\vec{w} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- ✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ; $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
  Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe
- ✓ $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
- ✓ $\vec{w}$ se note : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

### ➢ Propriétés

- ✓ $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- ✓ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- ✓ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

### ➢ Expression analytique

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}z & z'\\x & x'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

<u>Exemple</u> : soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Déterminons les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{vmatrix} = 1\times 0 - 2\times(-1) = 2$$

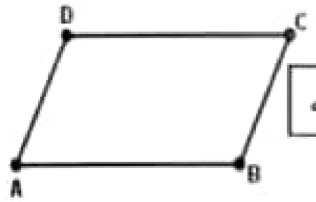
$$\begin{vmatrix}z & z'\\x & x'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0\\-2 & 1\end{vmatrix} = 2\times 1 - (-2)\times 0 = 2$$

$$\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & -1\\1 & 0\end{vmatrix} = -2\times 0 - 1\times(-1) = 1$$

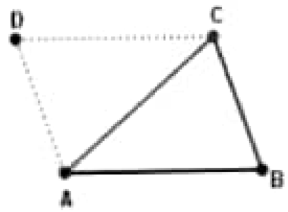
Donc $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

## Application du produit vectoriel

### ➢ Aire d'un parallélogramme – Aire d'un triangle

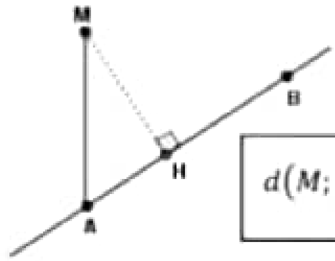



$$\boxed{\mathcal{A}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|}$$



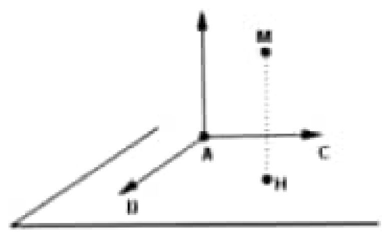

$$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

### ➢ Distance d'un point à une droite



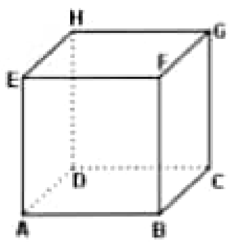

$$\boxed{d(M;(AB)) = MH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$

### ➢ Distance d'un point à un plan



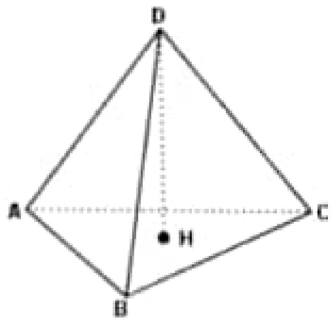

$$\boxed{d(M;(ABC)) = MH = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}}$$

### ➢ Volume d'un parallélépipède




$$\boxed{\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \|\overrightarrow{AE}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\|}$$

- ***Volume d'un tétraèdre***




$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\|}$$

<u>Exercices d'application</u>

<u>Exercice n°1</u>

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 1; -3)$, $B(-2; 3; -3)$ et $C(-2; 1; 0)$.

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) Soit I le point de coordonnées $(-1; 3; 0)$.
Calculer la distance de $I$ au plan $(ABC)$.
Les points $A$ , $B$ , $C$ *et* $I$ sont-ils coplanaires ?

3-a) Calculer l'aire $A$ du triangle $ABC$ en unité d'aire.

b) Déterminer le volume $V$ (en unité de volume) de la pyramide de sommet $I$ et de base le triangle $ABC$.

<u>Exercice n°2</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient $A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 3)$ et $C(3; 2; 1)$.

1) Calculer $AB$, $BC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

2) Soit $D$ le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Trouver les coordonnées de $D$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?
En déduire que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

3) Déterminer la distance séparant le point $O$ au plan du quadrilatère $ABCD$.

4) Soit $I$ le milieu de $[AC]$.
Calculer $OI$, en déduire que $I$ est le projeté orthogonale de $O$ sur le plan $(ABCD)$.

5) Démontrer que les plans $(OAC)$ et $(OBD)$ sont orthogonaux.

6) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

7) Déterminer le volume de la pyramide de sommet $O$ et de base, le quadrilatère $ABCD$.

***<u>Correction</u>***

***<u>Exercice n°1</u>***

$A(-1; 1; -3)$, $B(-2; 3; -3)$ et $C(-2; 1; 0)$.

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$

2) Calculons $d(I; (ABC))$

$d(I; (ABC)) = \frac{|\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$ $\quad \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = 12$ $\quad \boxed{d(I; (ABC)) = \frac{12}{7}}$

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$

$d(I; (ABC)) \neq 0$ donc $A$, $B$, $C$ et $I$ ne sont pas coplanaires

3- a) Calculons l'aire du triangle ABC

$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{7}{2}ua$

b) Déterminons le volume V

$V = \frac{1}{3} \times A \times d(I; (ABC)) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{12}{7} = 2\ uv.$

***<u>Exercice n°2</u>***

$A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 3)$ et $C(3; 2; 1)$

1) Calculons $AB$, $BC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 - 4 + 0 = -4$

2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 0 \\ y_D - 2 = 2 \\ z_D - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = 1 \end{cases}$ $\quad \boxed{D(1; 4; 1)}$

<u>Nature du quadrilatère ABCD</u>

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $AB = BC$ donc ABCD est un parallélogramme qui deux coté non parallèles égaux.
Par suite $\boldsymbol{ABCD}$ est un losange.

<u>Déduction</u>

$\boldsymbol{ABCD}$ étant un losange, ses diagonales $[\boldsymbol{AC}]$ et $[\boldsymbol{BD}]$ sont perpendiculaires d'où $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

3) $d(O; (ABCD)) = \frac{|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = 4 + 8 + 12 = 24$

$d(O; (ABCD)) = \frac{24}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

4) I est milieu de $[AC] \Leftrightarrow I(\frac{1+3}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{3+1}{2})$ $\quad \boxed{I(2; 2; 2)}$

$OI = \|\overrightarrow{OI}\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$