

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b><u>TITRE</u> : CIRCUIT RLC EN REGIME SINUSOIDAL FORCE</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  | <b><u>Durée</u> : 10 H</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b><u>Objectifs spécifiques</u></b> :</p> <p><b><u>OS 1</u></b> : Appliquer les lois de l'électrocinétique à un circuit RLC série soumis à un régime sinusoïdal forcé.</p> <p><b><u>OS 2</u></b> : Comprendre le phénomène de résonance pour un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé.</p> <p><b><u>OS 3</u></b> : Connaître les expressions de la puissance et de l'énergie échangées dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé.</p>                                                                                                                       |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b><u>Moyens</u> :</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b><u>Vocabulaire spécifique</u> :</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b><u>Documentation</u></b> : Livres de Physique AREX Terminale C et D, Eurin-gié Terminale D. Guide pédagogique et Programme                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b><u>Amorce</u> :</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b><u>Plan du cours</u> :</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>I) Généralités</p> <p>1° Courant alternatif sinusoïdal</p> <p>2° Tension alternative sinusoïdale</p> <p>3° Différence de phase</p> <p>4° Intensité efficace – tension efficace</p> <p>II) Etude expérimentale d'un circuit RLC</p> <p>1° Montage expérimental</p> <p>2° Expérience et observations</p> <p>3° Conclusion</p> <p>III) Etude théorique d'un circuit RLC</p> <p>1° Equation différentielle des oscillations électriques</p> <p>2° Résolution de l'équation différentielle</p> <p>2.1° Méthode de Fresnel</p> <p>2.2° Expression de l'impédance du circuit RLC</p> |  | <p>2.3° Différence de phase <math>\varphi_{u/i}</math></p> <p>IV) Phénomène de résonance d'intensité du circuit RLC série</p> <p>1° Expérience et résultats</p> <p>2° Tracé de la courbe <math>I = f(N)</math></p> <p>3° Acuité de la résonance</p> <p>3.1° Bande passante à 3 décibels (3 dB)</p> <p>3.2° Facteur de qualité</p> <p>4° Surtension à la résonance</p> <p>V) Puissance en régime sinusoïdal forcé</p> <p>1° Puissance instantané</p> <p>2° Puissance moyenne</p> <p>3° Facteur de puissance</p> <p>4° Energie consommée dans le circuit RLC série</p> |

# CIRCUIT RLC EN REGIME SINUSOIDAL FORCE

## I) Généralités

### 1° Courant alternatif sinusoïdal

C'est un courant dont l'intensité est une **fonction sinusoïdale** du temps. Son expression est de la forme :  
 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ .

### 2° Tension alternative sinusoïdale

C'est une fonction sinusoïdale du temps de la forme :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

### 3° Différence de phase

Soient  $i(t)$  et  $u(t)$  deux grandeurs sinusoïdales telles que :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ . On appelle différence de phase entre  $u(t)$  et  $i(t)$ , la grandeur :

$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$$

En considérant  $\varphi_i = 0$  comme origine des phases on obtient dans un même repère :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_{u/i})$$

- Si  $\varphi_{u/i} < 0$ ,  $u$  est en retard par rapport à  $i$  ;
- si  $\varphi_{u/i} > 0$ ,  $u$  est en avance par rapport à  $i$  ;
- si  $\varphi_{u/i} = 0$ ,  $u$  et  $i$  sont en phase.

### Remarques :

- $|\varphi_{u/i}| = \omega \times \tau = 2\pi N \times \tau = \frac{2\pi \times \tau}{T}$ ,  $\tau$  étant le décalage horaire entre les courbes représentatives

de **u** et **i** sur un oscillogramme.

- Lorsque  $\varphi_{u/i} = \pm \frac{\pi}{2}$ , on parle de **quadrature avance** ou **retard** de phase. Lorsque  $\varphi_{u/i} = \pm \pi$ , on parle d'**opposition** de phase.

#### 4° Intensité efficace – tension efficace

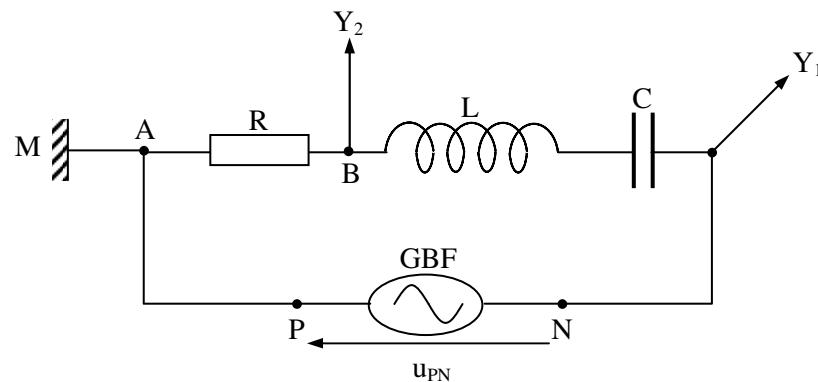
L'**intensité efficace**  $I$  d'un courant alternatif sinusoïdal et la **tension efficace**  $U$  d'une tension alternative sinusoïdale sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

**Remarque** : En régime alternatif, l'intensité efficace et la tension efficace sont liés par la relation :  $U = Z \times I$ .  
 $Z$  est appelé **impédance**.

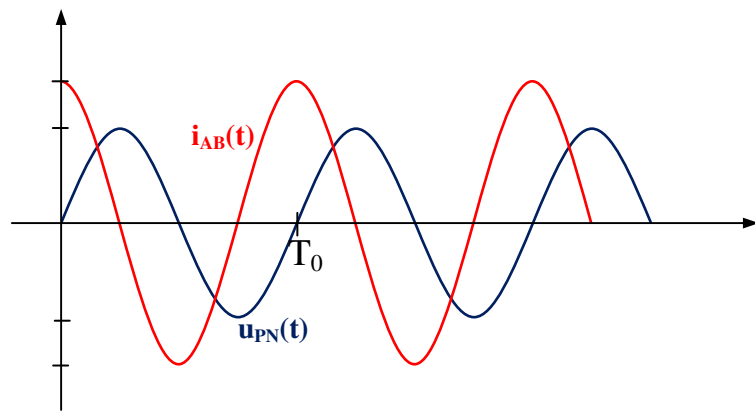
## II) Etude expérimentale d'un circuit RLC

### 1° Montage expérimental



### 2° Expérience et observations

Le générateur basse fréquence (GBF) impose une tension sinusoïdale  $u_{PN}$ , de fréquence  $N$  (ou de pulsation  $\omega$ ), dans le circuit RLC série, observée sur la voie  $Y_1$  de l'oscilloscope ; la voie  $Y_2$  permettant d'observer l'intensité  $i$  ( $i = u_{AB}/R$ ) du courant dans le circuit.



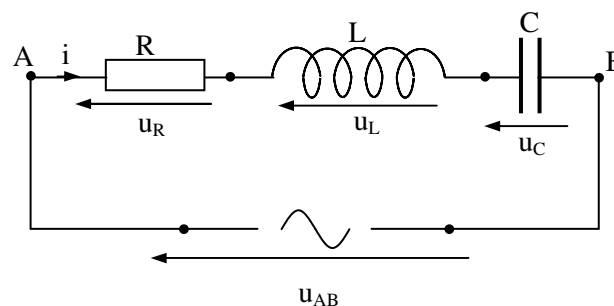
La tension efficace et la fréquence de la tension  $u_{PN}$  étant fixées, on observe à l'oscilloscope deux (2) sinusoïdes de même période et généralement décalés dans le temps.

### 3° Conclusion

Le dipôle RLC est le siège d'oscillations électriques à la fréquence (ou à la pulsation) imposée par le GBF : ces oscillations sont alors dites **forcées**.

### III) Etude théorique d'un circuit RLC

#### 1° Equation différentielle des oscillations électriques



- Aux bornes de la résistance :  $u_R = Ri$  ;
- aux bornes de la bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt}$  ;
- aux bornes du condensateur :  $u_C = \frac{q}{C}$ .

La loi d'additivité des tensions  $\Rightarrow u_{AB} = u_R + u_L + u_C$

$$u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{or} \quad dq = idt \Rightarrow q = \int idt$$

$$u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

## 2° Résolution de l'équation différentielle

### 2.1° Méthode de Fresnel

Considérons l'équation différentielle des oscillations :  $u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$

On a :  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_{u/i})$

$$u_R = Ri = RI_m \cos(\omega t) = RI\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t)] = -LI_m \omega \sin(\omega t) = LI\sqrt{2} \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int [I_m \cos(\omega t)] dt = \frac{1}{C\omega} I_m \sin(\omega t) = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$u_{AB} = U_m \cos(\omega t + \varphi_{u/i}) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_{u/i})$$

$$\Rightarrow U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_{u/i}) = RI\sqrt{2} \cos(\omega t) + LI\omega\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

On obtient finalement la relation ci-dessous :

$$U \cos(\omega t + \varphi_{u/i}) = RI \cos(\omega t) + LI\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

A une grandeur sinusoïdale  $u$ , on peut faire correspondre un **vecteur de Fresnel**  $\vec{u}$  tel que :

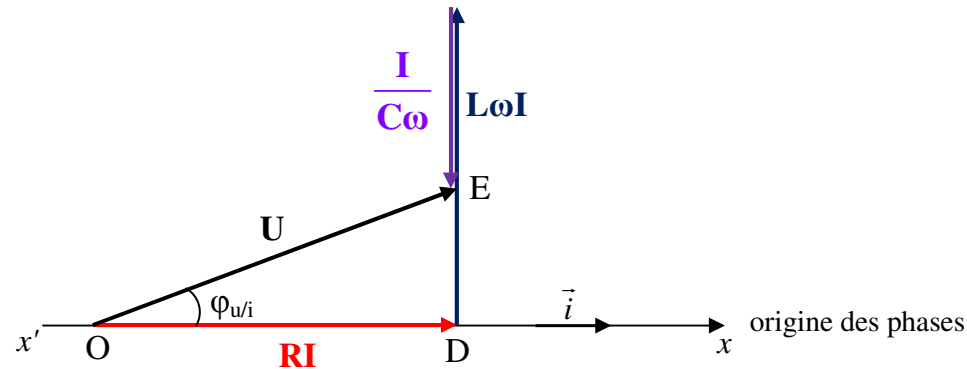
- la norme du vecteur  $\vec{u}$  est égale à l'amplitude de  $u$  ;
- l'angle entre le vecteur et l'horizontale est égale à la phase à l'origine des dates.

En associant des vecteurs de Fresnel aux différentes tensions on obtient :

$$\vec{u}_{AB} = \vec{u}_R + \vec{u}_L + \vec{u}_C$$

avec :  $\vec{u}_{AB} (U, \varphi_{u,i})$  ;  $\vec{u}_R (RI, 0)$  ;  $\vec{u}_L (LI\omega, +\frac{\pi}{2})$  et  $\vec{u}_C (\frac{I\omega}{C\omega}, -\frac{\pi}{2})$

D'où le **diagramme de Fresnel** ci-après :



En considérant le triangle rectangle ODE on obtient :  $U^2 = RI^2 + (L\omega I - \frac{I}{C\omega})^2$ .

### 2.2° Expression de l'impédance du circuit RLC

D'après le diagramme de Fresnel,  $U^2 = RI^2 + (L\omega I - \frac{I}{C\omega})^2$

$$\Rightarrow U^2 = \left[ R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \right] \times I^2 \Rightarrow U = I \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

or  $U = Z \times I$  (ou  $U_m = Z \times I_m$ )  $\Rightarrow$   $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

C'est l'expression de l'**impédance du circuit**.

### 2.3° Différence de phase $\varphi_{u/i}$

D'après la représentation de Fresnel :

$$\tan \varphi_{u/i} = \frac{DE}{OD} = \frac{L\omega I - \frac{I}{C\omega}}{RI} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

En considérant le **cosinus** on obtient :

$$\cos \varphi_{u/i} = \frac{OD}{OE} = \frac{RI}{U} \quad \text{or} \quad U = Z \times I \Rightarrow \cos \varphi_{u/i} = \frac{R}{Z}$$

$$\text{Comme } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow \cos \varphi_{u/i} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

\* Si  $(L\omega > \frac{1}{C\omega})$ ,  $\text{tg } \varphi_{u/i} > 0$  ( $\varphi_{u/i} > 0$ ), la tension est **en avance** sur l'intensité. Le circuit est dit **inductif**

(fig. 1).

\* Si  $(L\omega < \frac{1}{C\omega})$ ,  $\varphi_{u/i} < 0$  ( $\varphi_{u/i} < 0$ ), la tension est **en retard** sur l'intensité. Le circuit est dit **capacitif** (fig.

\*

\* . 2).

\* Si  $(L\omega = \frac{1}{C\omega})$ ,  $\text{tg } \varphi_{u/i} = 0$ , la tension et l'intensité sont **en phase**. On est à la **résonance d'intensité** (fig.

3).

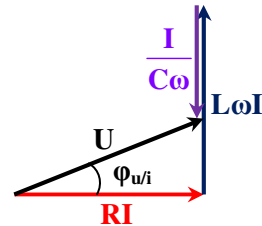


Figure 1

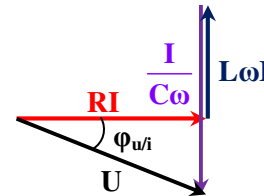


Figure 2

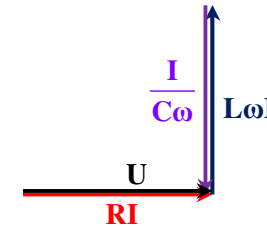


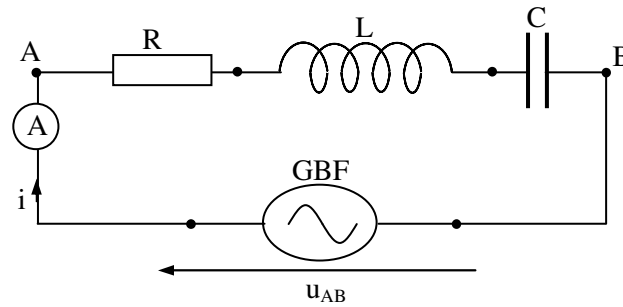
Figure 3

**Remarque** : Si la bobine possède une résistance interne **r** la résistance totale du circuit est **R + r** et on a :

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

#### IV) Phénomène de résonance d'intensité du circuit RLC série

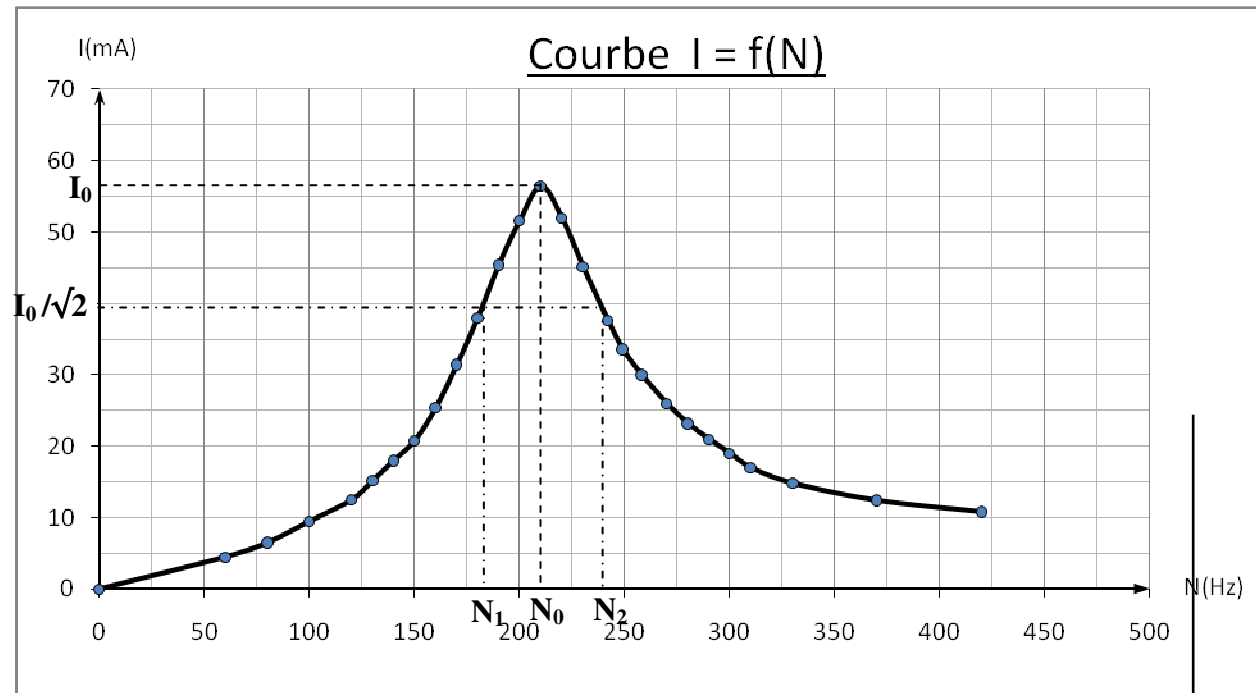
##### 1° Expérience et résultats



La tension efficace  $U$  du GBF étant fixée, on fait varier sa fréquence  $N$  et on note les valeurs de l'intensité efficace  $I$  du courant qui circule dans le circuit RLC. Les résultats des mesures figurent dans le tableau ci-dessous.

|        |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| N (Hz) | 0   | 60   | 80   | 100  | 120  | 130  | 140  | 150  | 160  | 170  | 180  | 190  | 200  | 210  |
| I (mA) | 0   | 4,5  | 6,5  | 9,5  | 12,5 | 15,2 | 18   | 20,8 | 25,4 | 31,4 | 38   | 45,4 | 51,6 | 56,4 |
| N (Hz) | 220 | 230  | 242  | 249  | 258  | 270  | 280  | 290  | 300  | 310  | 330  | 370  | 420  |      |
| I (mA) | 52  | 45,2 | 37,6 | 33,6 | 30   | 26   | 23,2 | 21   | 19   | 17   | 14,8 | 12,4 | 10,8 |      |

## 2° Tracé de la courbe $I = f(N)$



La courbe fait apparaître une fréquence pour laquelle  $I$  passe par une valeur maximale  $I_0$ . Cette fréquence est égale à la fréquence propre  $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  du dipôle RLC étudié.

### **3° Acuité de la résonance**

#### **3.1° Bande passante à 3 décibels (3 dB)**

La bande passante à 3 dB d'un circuit RLC série est l'intervalle des fréquences pour lesquelles  $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ,  $I_0$  étant l'intensité efficace maximale ou intensité à la résonance.

La largeur de la bande passante est donnée par la relation :  $\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{R}{2\pi L}$

#### **Remarques :**

- \* A la résonance,  $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow$  l'impédance est :  **$Z = R$** .
- \* La fréquence  $N_0$ , aussi appelée fréquence de résonance ne dépend pas de la résistance  $R$  du dipôle RLC.
- \* L'intensité efficace  $I_0$  du courant à la résonance diminue lorsque  $R$  augmente.
- \* La largeur de la bande passante est aussi donnée par :  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspondant aux fréquences  $N_1$  et  $N_2$ . Elle augmente avec la résistance  $R$ .

#### **3.2° Facteur de qualité**

Le facteur de qualité d'un dipôle RLC est défini par :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 = 2\pi N_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ est la pulsation propre du circuit RLC série.}$$

Le facteur de qualité d'un circuit RLC mesure l'acuité de la résonance. Lorsque Q est élevé, la résonance est dite **aiguë**. Le circuit est sélectif car la bande passante est étroite. Si Q est faible, la résonance est dite **floue**.

Le facteur de qualité diminue lorsque la résistance **R** du circuit augmente.

#### 4° Surtension à la résonance

$$\text{A la résonance, on a : } U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} \text{ or } Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{I_0}{RC\omega_0 I_0} = \frac{I_0 / C\omega_0}{RI_0}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{U_C}{U} \text{ avec } U = RI_0 \text{ tension efficace à la résonance.}$$

$$\text{D'où : } U_C = Q \times U.$$

$Q$  étant très grand alors  $U_C \gg U$  : il y'a une **surtension** aux bornes du condensateur. Cette surtension, également observée aux bornes de la bobine ( $U_L = Q \times U$ ), peut avoir des conséquences néfastes.

#### V) Puissance en régime sinusoïdal forcé

##### 1° Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue par un dipôle RLC est :

$$P = u \times i$$

En posant :  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_{u/i})$ , on obtient :

$$P = U_m I_m \cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi_{u/i})$$

$$\text{or } \cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi_{u/i}) = \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \varphi_{u/i} + \omega t) + \cos(\omega t + \varphi_{u/i} - \omega t)] ;$$

d'où :

$$P = UI [\cos(2\omega t + \varphi_{u/i}) + \cos \varphi_{u/i}]$$

##### 2° Puissance moyenne

La puissance moyenne consommée par un dipôle RLC est :

$$P = UI \cos \varphi_{u/i}.$$

Le produit  $U \times I$  est la **puissance apparente**, exprimée en **volt-ampère (V.A)**.

Le terme  $\cos \varphi_{u/i}$  s'appelle **facteur de puissance** du circuit RLC.

**Remarque** : La puissance moyenne reçue par un dipôle RLC apparaît sous forme thermique dans la résistance :

$$P = UI \cos \varphi_{u/i} = RI^2 \quad \text{car} \quad \cos \varphi_{u/i} = \frac{R}{Z}.$$

Un condensateur parfait et une bobine parfaite ne consomment donc pas de puissance.

### **3° Energie consommée dans le circuit RLC série**

L'énergie consommée par un dipôle RLC pendant une durée  $\Delta t$  est :

$$E = P \times \Delta t = UI \Delta t \cos \varphi_{u/i}.$$

Cette énergie est transformée en chaleur (énergie thermique).