Raisonnement par Récurrence.

Propriété : Soit P(n) une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Etape 1 : Vérification (initialisation)

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : P(0) ou P(1) est vraie.

Etape 2 : Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et on démontre que si elle est vraie pour le rang n elle est vraie pour le rang $n + 1$.

Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a P(n) vraie $\Rightarrow$ P(n+1)vraie.

Exercice 3.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3.

Soit à démontrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. $P_{n0=1}$: $1^3 = 1^2$

On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Somme des n premiers cubes (non nuls) $1^3+2^3+3^3+..........+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration :
Le principe est le même que pour la somme des n premiers carrés ,
posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$
on obtient en faisant varier k de 1 à n , n équations que l'on peut ajouter membre à membre :

$2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$

$3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$

…

$\underline{(n+1)^4 - n^4 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n - 1}$

$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$

en isolant S_3 on obtient la formule de la somme des cubes.

Somme des n premiers carrés (non nuls) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

démonstration :
posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ on sait que : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$
on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :