

## Chapitre 4. REGIME SINUSOIDAL FORCE

### I. Signal électrique sinusoïdal

#### 1. Notion de signal – Signal sinusoïdal

Un signal électrique est une grandeur électrique mesurable variant dans le temps ou dans l'espace et permettant de transporter une information.

Ce sont des courants ou des tensions électriques. On les caractérise par leur forme d'onde (continue, périodique, sinusoïdale,...), leur amplitude, leur fréquence.

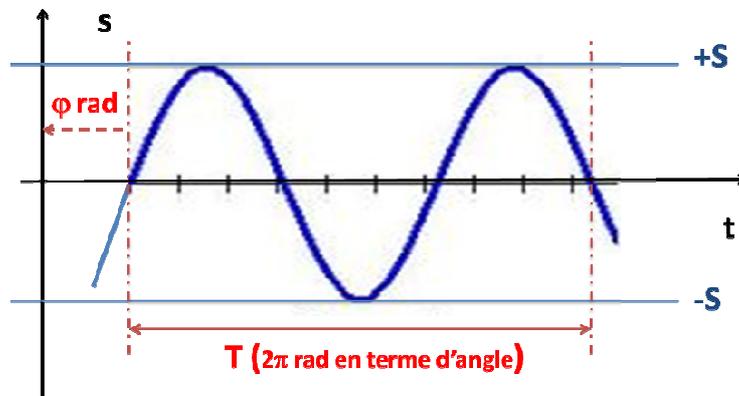
Une particularité des signaux électriques est leur facilité de transmission, d'acquisition et de stockage.

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les signaux sinusoïdaux.

#### 2. Le signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal dont l'amplitude, observée à un endroit précis, est une fonction sinusoïdale du temps. Il peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$



$S$ : Amplitude de la grandeur, appelée aussi valeur de crête. C'est la valeur maximal du signal qui varie de  $+S$  à  $-S$ .

$\omega$  : Pulsation de la grandeur en rad/s

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}, \text{ avec } F \text{ sa fréquence et } T \text{ sa période}$$

La pulsation représente l'angle  $\omega$  parcouru par la sinusoïde durant une seconde.

La fréquence  $f$  représente le nombre de périodes effectuées durant une seconde.

Une période  $T$  représente un angle de  $2\pi$  rad.

$\varphi$ : Phase à l'origine en radian La phase à l'origine (du temps) représente le décalage angulaire qu'il faut effectuer pour que la sinusoïde passe par 0 ( $\cos \omega t$ ). Une sinusoïde qui "passe par zéro" dans le sens croissant, possède une phase à l'origine nulle ( $\varphi = 0$ ).

$\omega t + \varphi$  : est la phase du signal

L'importance des signaux sinusoïdaux est encore accrue par le fait que toute grandeur périodique peut se décomposer en somme de termes sinusoïdaux à l'aide de la décomposition en séries de Fourier (que nous aborderons au 2<sup>nd</sup> semestre).

### 3. Valeur moyenne et valeur efficace

On appelle **valeur moyenne** d'une grandeur périodique  $s(t)$  de période  $T$  le résultat :

$$S_{moy} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Pour un signal sinusoïdal alternatif, on déduit immédiatement de la définition ci-dessus que la valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale est nulle

On appelle **valeur efficace** d'une grandeur périodique  $s(t)$  la racine moyenne du carré de cette grandeur calculée sur une période :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Lors de l'utilisation des appareils de mesure, on retrouvera le terme en anglais pour la valeur efficace : «root-mean-square» ou en abrégé «rms».

Pour une grandeur sinusoïdale on obtient :

$$S_{eff} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

On notera :

$$s(t) = \sqrt{2} \cdot S_{eff} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

### 4. Différence de phase entre deux signaux synchrones

Soit deux signaux sinusoïdaux synchrones tels que :

$$s_1(t) = S_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = S_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La différence de phase  $\varphi$  entre les deux signaux est appelé **déphasage** entre les deux signaux.

On appelle **déphasage**  $\varphi$  de  $s_1(t)$  par rapport à  $s_2(t)$ , la différence entre la phase à l'origine  $\varphi_1$  et la phase à l'origine  $\varphi_2$ .

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

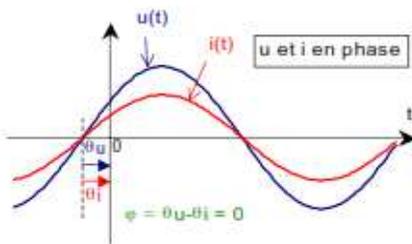
Si  $\varphi > 0$ , on dira que  $s_2(t)$  est en retard par rapport à  $s_1(t)$ .

### Cas particuliers :

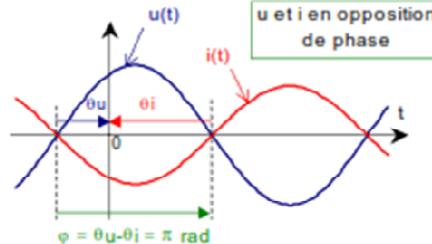
- $\varphi = 0 \text{ rad}$  :  $s_2(t)$  et  $s_1(t)$  sont en phase.
- $\varphi = \pi \text{ rad}$  :  $s_2(t)$  et  $s_1(t)$  sont en opposition de phase.
- $\varphi = \pi/2 \text{ rad}$  :  $s_2(t)$  est en quadrature retard sur  $s_1(t)$ .
- $\varphi = -\pi/2 \text{ rad}$  :  $s_2(t)$  est en quadrature avance sur  $s_1(t)$ .

Exemple : prenons deux signaux  $u(t)$  et  $i(t)$  avec  $\theta_u$  la phase de  $u(t)$  et  $\theta_i$  la phase de  $i(t)$ .

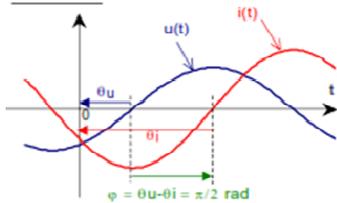
①  $\varphi = 0 \text{ rad} \Rightarrow u$  et  $i$  sont en phase



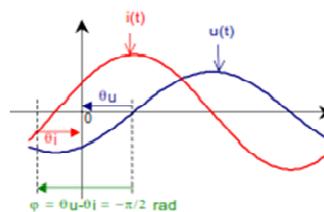
$\varphi = \pi \text{ rad} \Rightarrow u$  et  $i$  sont en opposition de phase



$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow i$  est en quadrature retard par rapport à  $u$



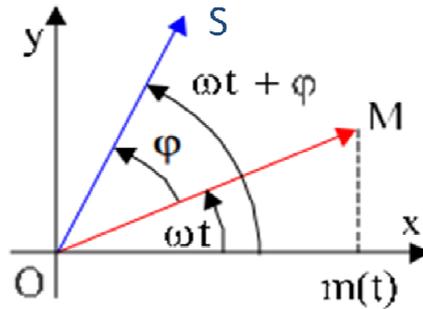
$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow i$  est en quadrature avance par rapport à  $u$



## 5. Représentation de Fresnel

Le vecteur  $\vec{S}$  associé au signal sinusoïdal  $s(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  est appelé vecteur de Fresnel. Ce vecteur a les propriétés suivantes :

- Son origine est le point O
- L'angle orienté  $(\vec{Ox}, \vec{S})$  qu'il fait avec l'axe de référence Ox est égal à la phase  $\omega t + \varphi$
- Sa longueur représente la valeur efficace  $S_{\text{eff}}$  de  $s(t)$ .



## 6. Représentation complexe d'un signal

### Rappels

En mathématique :

Soit  $z$  un nombre complexe.  $z$  peut être présenté de différentes manières :

- Sous forme cartésienne :
  - algébrique :  $z = x + iy$
  - ou vectorielle :  $z = (x,y)$
- En coordonnées polaires :
  - exponentielle :  $z = \rho \cdot e^{j\varphi} = |z|e^{j \cdot \text{arg} z}$
  - ou vectorielle :  $z = (\rho, \varphi)$
  - ou trigonométrique :  $z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$\rho = |z|$  représente le module de  $z$ .

Pour la notation cartésienne,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Un argument du nombre complexe  $z$  est noté de façon simplifiée par :

$$\arg z = \varphi \text{ mod } 2\pi$$

L'intérêt de la notation complexe est lié à la facilité d'effectuer des opérations sur les complexes.

Nous aurons par exemple :

$$|\underline{Z}_1 \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| |\underline{Z}_2|$$

$$\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$$

$$\arg(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2) = \arg \underline{Z}_1 + \arg \underline{Z}_2$$

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \arg \underline{Z}_1 - \arg \underline{Z}_2$$

$$\arg(a > 0) = 0$$

$$\arg(a < 0) = \pi$$

$$\arg(ja)(a > 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(ja)(a < 0) = -\frac{\pi}{2}$$

$|\bar{z}| = |z| = |-\bar{z}| = |-z|$ , où  $\bar{z}$  désigne le conjugué du nombre complexe  $z$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si et seulement s'il existe un réel positif  $\lambda$  tel que  $z_2 = \lambda z_1$  ou  $z_1 = \lambda z_2$ .

### Dérivation et intégration

Pour  $\underline{x}(t) = X_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ , on obtient :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}$$

$$\int \underline{x} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}$$

### Signal sinusoïdal

A une grandeur réelle de la forme  $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ , on peut associer la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

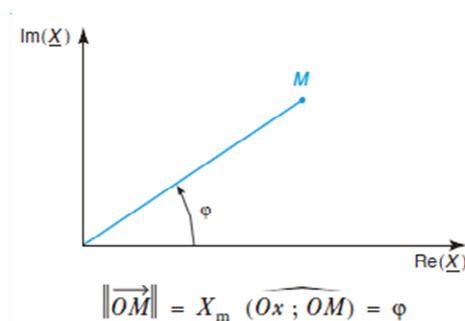
$x(t)$  est la partie réelle de  $\underline{x}(t)$ ; on écrit  $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$

On appelle  $\underline{X}_m = X_m \cdot e^{j\varphi}$  l'amplitude complexe de  $\underline{x}(t)$ .

On a :

$$\begin{cases} \text{le module } X_m \text{ de } \underline{X}_m : X_m = |\underline{X}_m| \\ \text{l'argument } \varphi \text{ de } \underline{X}_m : \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases}$$

La représentation complexe de  $\underline{X}_m$  est :



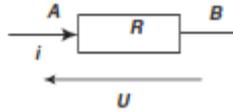
On a donc pour le nombre complexe  $\underline{x}(t)$  :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t}$$

## 7. Impédance complexe

### a. Définitions

Considérons un dipôle linéaire représenté comme suit :



$i(t)$  et  $u(t)$  sont grandeurs réelles sous forme sinusoïdales de même pulsation comme le dipôle est linéaire.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

La loi d'Ohm en représentation complexe est :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t)$$

$$\underline{U}_m = \underline{Z} \cdot \underline{I}_m$$

L'**impédance complexe** est défini par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i}}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

Avec  $Z = \frac{U_m}{I_m}$  et  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ , alors :

$Z$  le module de  $\underline{Z}$  est l'**impédance** (en  $\Omega$ ) :  $Z = |\underline{Z}|$

$\varphi$  : Déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$  et  $\varphi = \arg \underline{Z}$

On appelle **admittance complexe**  $\underline{Y}$ , l'inverse de l'impédance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$$

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi}$$

Y le module de  $\underline{Y}$  est l'**admittance** (en Siemens S) :  $Y = |\underline{Y}|$

## b. Applications sur les dipôles linéaires

### i. Résistance

Pour une résistance (linéaire)  $u = R.i$

En représentation complexe,  $\underline{u} = R.\underline{i}$

Donc :

L'impédance complexe d'une résistance est :  $\underline{Z} = R$

L'impédance d'une résistance est :  $Z = |\underline{Z}| = \underline{Z} = R$

La tension aux bornes de la résistance est en phase avec le courant qui le traverse :  $\varphi = 0$ .

### ii. Condensateur idéal

Pour un condensateur idéal (linéaire)  $i = C \frac{du_C}{dt}$

En représentation complexe,  $\underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt}$

$$\underline{i} = j\omega C \underline{u}_C$$

Donc :

$$\underline{I}_m = j\omega C \underline{U}_m$$

Donc :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'impédance complexe d'un condensateur idéal est :  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'impédance d'un condensateur idéal est :  $Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$

La tension aux bornes de la bobine est en retard de phase avec le courant qui le traverse (à démontrer) :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

On dira que **u(t) est en quadrature retard par rapport à i(t)**.

**Cas limites :**

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ),  $Z \rightarrow 0$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ),  $Z \rightarrow \infty$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

**iii. Bobine**

Pour une bobine idéale (linéaire)  $u(t) = L \frac{di_L}{dt}$

En représentation complexe,  $\underline{u} = L \frac{di_L}{dt}$

$$\underline{u}(t) = j\omega L \underline{i}_L$$

Donc :

$$\underline{U}_m = j\omega L \underline{I}_m$$

Donc :

$$\underline{Z} = jL\omega$$

L'impédance complexe d'une bobine idéale est :  $\underline{Z} = jL\omega$

L'impédance d'une bobine idéale est :  $Z = |\underline{Z}| = L\omega$

La tension aux bornes de la bobine est en avance de phase avec le courant qui le traverse (à démontrer):

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

On dira que **u(t) est en quadrature avance par rapport à i(t)**.

**Cas limites :**

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ),  $Z \rightarrow \infty$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ),  $Z \rightarrow 0$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

### c. Applications sur les lois de Kirchhoff

Tous les résultats trouvés en courant continu restent valables en régime sinusoïdal forcé à condition de travailler avec les grandeurs complexes.

Ainsi nous aurons :

- **La loi des mailles**

La loi des mailles vue dans le chapitre I est valable pour les tensions instantanées  $u_k(t)$  comme l'on est dans le cadre de l'ARQS.

Le long d'une maille donnée, on a :

$$\sum \varepsilon_k u_k = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$$

Avec  $u_k(t) = u_{km} e^{j(\omega t + \varphi_k)}$        $\underline{u}_k(t) = \underline{U}_{km} e^{j\omega t}$

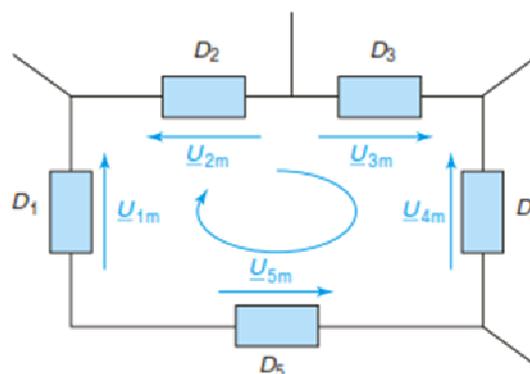
$\varepsilon_k = +1$  si la flèche tension pour l'amplitude est dans le sens du parcours

$\varepsilon_k = -1$  si la flèche tension pour l'amplitude est dans le sens opposé au sens du parcours.

En divisant cette relation par  $e^{j\omega t}$ , on obtient :

$$\sum \varepsilon_k \underline{U}_{km}(t) = 0$$

Exemple :



Maille parcourue dans le sens horaire

$$\underline{U}_{1m} - \underline{U}_{2m} + \underline{U}_{3m} - \underline{U}_{4m} - \underline{U}_{5m} = 0$$

- **La loi des nœuds**

La loi des nœuds vue dans le chapitre I est valable pour les intensités instantanées  $i_k(t)$  comme l'on est dans le cadre de l'ARQS.

A un nœud N donné, on a :

$$\sum \varepsilon_k i_k = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$$

Avec  $i_k(t) = i_{km} e^{j(\omega t + \varphi_k)}$        $\underline{i}_k(t) = \underline{I}_{km} e^{j\omega t}$

$\varepsilon_k = +1$  si l'intensité est orienté vers le nœud

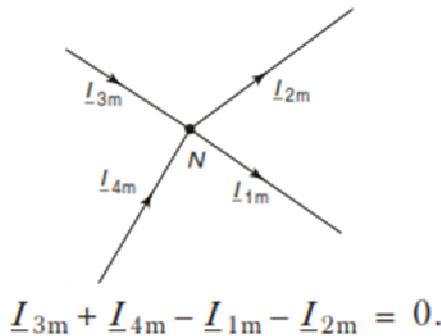
$\varepsilon_k = -1$  si l'intensité est orienté à partir du nœud

En divisant cette relation par  $e^{j\omega t}$ , on obtient :

$$\sum \varepsilon_k \underline{I}_{km} = 0$$

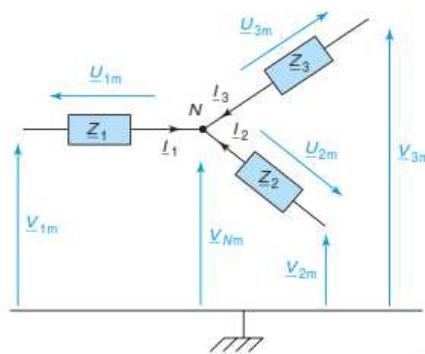
La somme des amplitudes complexes des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des amplitudes complexes des courants qui en partent.

Exemple



## 8. Théorèmes généraux en notation complexe

### a. Loi des nœuds en termes de potentiel



La loi des nœuds :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\frac{V_{1m} - V_{Nm}}{\underline{Z}_1} + \frac{V_{2m} - V_{Nm}}{\underline{Z}_2} + \frac{V_{3m} - V_{Nm}}{\underline{Z}_3} = 0$$

$$\underline{V}_{Nm} = \frac{\frac{V_{1m}}{Z_1} + \frac{V_{2m}}{Z_2} + \frac{V_{3m}}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

$$\text{ou } \underline{V}_{Nm} = \frac{Y_1 V_{1m} + Y_2 V_{2m} + Y_3 V_{3m}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

On retrouve le théorème de Millmann.

## b. Modélisation de dipôle actif

### Source ou générateur idéal de tension

C'est un dipôle actif qui impose une tension  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$  entre ses bornes,  $e(t)$  est appelée force électromotrice (f.é.m.).

On note  $\underline{e}(t) = \underline{E}_m \exp(j\omega t)$  avec  $\underline{E}_m = E_m \exp(j\psi)$ .

En général, on choisit  $\psi = 0$ .

### Source ou générateur idéal de courant

C'est un dipôle actif qui impose un courant d'intensité  $i_0(t) = I_{0m} \cos(\omega t + \phi)$ .

$i_0(t)$  est appelé courant électromoteur (c.é.m.), dans la branche dans laquelle il est placé.

On note  $\underline{i}_0(t) = \underline{I}_{0m} \exp(j\omega t)$  avec  $\underline{I}_{0m} = I_{0m} \exp(j\phi)$ .

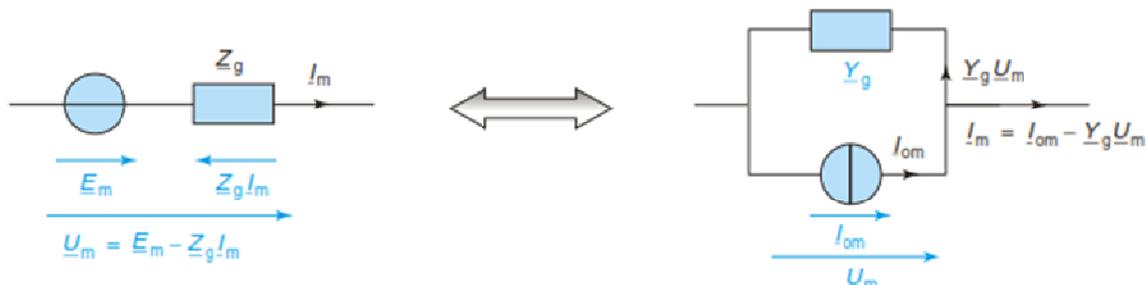
En général on choisit  $\phi = 0$ .

### Modélisation d'un générateur réel

Dans de nombreuses applications, l'expérience montre qu'on peut modéliser un générateur réel par l'association :

- d'un générateur idéal de tension (f.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{E}_m$ ) et d'un dipôle en série dont l'impédance est appelée impédance interne du générateur ( $\underline{Z}_g$ ).
- ou d'un générateur idéal de courant (c.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{I}_{0m}$ ) et d'un dipôle en parallèle dont l'admittance est appelée admittance interne du générateur ( $\underline{Y}_g$ ).

Ces deux générateurs sont équivalents, les relations qui relient leurs caractéristiques sont établies ci-dessous, elles sont équivalentes à celles obtenues en régime permanent



$$\underline{U}_m = \underline{E}_m - \underline{Z}_g \underline{I}_m \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} \quad \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} = \underline{I}_{om} - \underline{Y}_g \underline{U}_m$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_{om} &= \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} \\ \underline{Y}_g &= \frac{1}{\underline{Z}_g} \end{aligned}$$

### c. Lois d'association

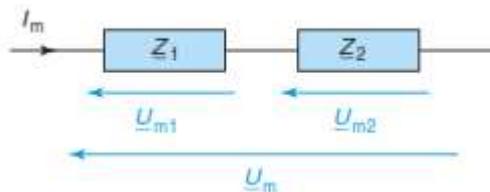
#### i. Association en série

- **Association pour des impédances**

N dipôles d'impédances complexes ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N$ ) associés en série sont équivalents à un seul dipôle d'impédance complexe  $\underline{Z}_{eq}$  égale à la somme des impédances complexes de chacun d'eux.

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N$$

- **Diviseur de tension**



$$U_{1m} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} U_m$$

$$U_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} U_m$$

- **Générateurs en série**

Soit N générateurs en série caractérisés par l'amplitude complexe de leurs fém et impédances internes complexes ( $\underline{E}_{1m}, \underline{Z}_{g1}$ ), ( $\underline{E}_{2m}, \underline{Z}_{g2}$ ), ..., ( $\underline{E}_{Nm}, \underline{Z}_{gN}$ ).

Ces N générateurs sont équivalents à un seul générateur de fém d'amplitude complexe  $\underline{E}_{eqm}$  et d'impédance interne complexe  $\underline{Z}_{eq}$

$$\begin{cases} \underline{E}_{eqm} = \varepsilon_1 \underline{E}_{1m} + \varepsilon_2 \underline{E}_{2m} + \dots + \varepsilon_k \underline{E}_{km} + \dots + \varepsilon_N \underline{E}_{Nm} \\ \underline{Z}_{geq} = \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \dots + \underline{Z}_{gN} \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspond à  $\underline{E}_{km}$  est dans le même sens que celle correspondant à  $\underline{E}_{eqm}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

- **Loi de Pouillet**

L'intensité circulant dans une maille constituées de N dipôles d'impédances complexes ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N$ ) et N générateurs associés en série, caractérisés par

l'amplitude complexe de leurs fém et impédances internes  $(E_{1m}, Z_{g1}), (E_{2m}, Z_{g2}), \dots, (E_{Nm}, Z_{gN})$  est :

$$I_m = \frac{\varepsilon_1 E_{1m} + \varepsilon_2 E_{2m} + \dots + \varepsilon_N E_{Nm}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N + \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \dots + \underline{Z}_{gN}}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspond à  $\underline{E}_{km}$  est dans le même sens que celle correspondant à  $\underline{E}_{eqm}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

## ii. Association en parallèle

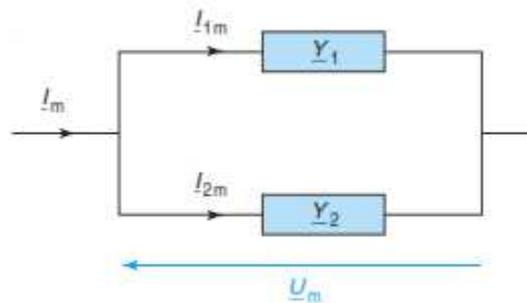
- **Association pour des admittances**

$N$  dipôles d'admittance complexes  $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N)$  associés en parallèle sont équivalents à un seul dipôle d'admittance complexe  $\underline{Y}_{eq}$  égale à la somme des admittances complexes de chacun d'eux.

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N$$

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_N}$$

- **Diviseur de courant**



$$I_{1m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} I_m = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} I_m$$

$$I_{2m} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} I_m = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} I_m$$

- **Générateur en parallèle**

On considère  $N$  générateurs associés en parallèle, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs c.é.m. et admittances internes  $(\underline{I}_{0m1}, \underline{Y}_{g1}), (\underline{I}_{0m2}, \underline{Y}_{g2}), \dots, (\underline{I}_{0mN}, \underline{Y}_{gN})$ . Ces  $N$  générateurs sont équivalents à un seul générateur de c.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{I}_{eqm}$  et d'admittance interne  $\underline{Y}_{eq}$ .

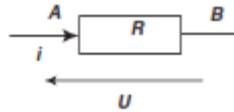
$$\begin{cases} \underline{I}_{\text{eqm}} = \varepsilon_1 \underline{I}_{0m1} + \varepsilon_2 \underline{I}_{0m2} + \dots + \varepsilon_k \underline{I}_{0mk} + \dots + \varepsilon_N \underline{I}_{0mN} \\ \underline{Y}_{\text{geq}} = \underline{Y}_{g1} + \underline{Y}_{g2} + \dots + \underline{Y}_{gN} \left( \frac{1}{\underline{Z}_{\text{geq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_{g1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{g2}} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_{gN}} \right) \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspondant à  $\underline{I}_{0k}$  est dans le même sens que celle de  $\underline{I}_{0\text{eq}}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

## II. Puissance en régime sinusoïdal forcé

### 1. Puissance instantanée

Soit  $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$ , la tension aux bornes d'un dipôle linéaire quelconque orienté en convention récepteur et  $i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$  l'intensité du courant le traversant.



La puissance instantanée reçue par le dipôle :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

**Point Math :**

$$\cos b \cos(a) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

En posant  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ,

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi)]$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) + \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Le premier terme de la somme est appelé **puissance moyenne**, le deuxième terme de la somme **puissance fluctuante**. Cette somme correspond à une puissance sinusoïdale de fréquence double de celle du courant et de la tension et dont la position moyenne est égale à la puissance active.

## 2. Puissance moyenne – facteur de puissance

La puissance moyenne est :

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi]$$

Le terme  $\cos \varphi$  est le **facteur de puissance** du dipôle.

## 3. Puissance moyenne : autre expression

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi]$$

En régime sinusoïdale,

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

On a aussi :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Donc :

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

La puissance active ne dépend que des valeurs efficaces de l'intensité et de la tension et du déphasage existant entre ces deux grandeurs. Il faut que  $\cos \varphi$  soit le plus grand possible pour que  $I_{eff}$  soit minimale : afin de minimiser les pertes joules.

## 4. Puissance moyenne reçue par les dipôles linéaires

### a. Resistance

Le déphasage  $\varphi$  entre  $u$  et  $i$  est nul. On a donc :

$$P_{Rmoy} = U_{eff} I_{eff}$$

Puisque  $U_m = R i_m$ , on a aussi :  $U_e = R i_e$

$$P_{Rmoy} = R I_{eff}^2$$

Cette puissance dissipée sous forme de chaleur.

## b. Condensateur et bobine

Le déphasage  $\varphi$  entre  $u$  et  $i$  pour une bobine et un condensateur est respectivement :

$+\pi/2$  et  $-\pi/2$ . On a donc :

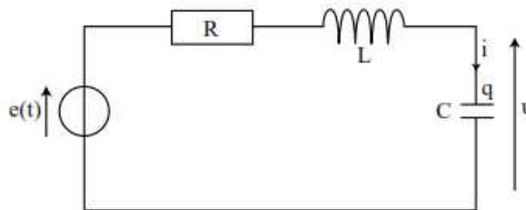
$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi = 0$$

Ces dipôles ne reçoivent donc pas, en moyenne, de puissance : ils en reçoivent autant qu'ils en fournissent. Les bobines et condensateurs échangent réversiblement de l'énergie avec le reste du circuit.

## III. Le circuit RLC série en régime sinusoïdal

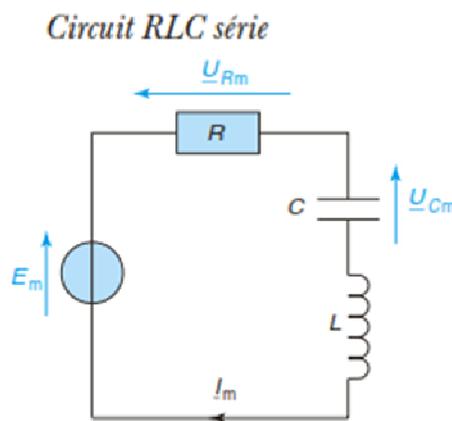
Soit un circuit RLC série avec à ses bornes une tension sinusoïdale  $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$ .

$\omega = 2\pi f$  avec  $f$  la fréquence du signal. Supposons la bobine et le condensateur idéaux.



### 1. Résonance en intensité

Le schéma complexe équivalent est :



$$\underline{E}_m = E_m \text{ et } \underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi).$$

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \text{ et } I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La courbe représentant  $I_m(\omega)$ , l'amplitude de l'intensité du courant, s'appelle courbe de résonance en intensité.

$I_m(0) = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_m = 0$ .  $I_m$  étant positif, cette courbe passe par un maximum pour une valeur de  $\omega$  que l'on appellera  $\omega_r$ , la pulsation de résonance.

Le numérateur étant indépendant de  $\omega$ ,  $I_m$  est maximum lorsque le dénominateur est minimum.

$$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ on obtient donc } \omega_r = \omega_0.$$

$$I_{mmax} = I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}$$

Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux pulsations situées de part et d'autre de  $\omega_r$  telles que :

$$I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

La bande passante  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Pour tout  $\omega$  de la bande passante,

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}}$$

Déterminons  $\omega_2$  et  $\omega_1$  :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} &= \frac{E_m}{R\sqrt{2}} \\ R\sqrt{2} &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \Rightarrow 2R^2 &= R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \\ \Rightarrow \pm R &= L\omega - \frac{1}{C\omega} \\ \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

$$\omega^2 - \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

Donc

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ et } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q} \text{ (car } Q = \frac{L\omega_0}{R}\text{), on a donc :}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

### a. Etude du déphasage

On veut trouver la phase  $\varphi = \arg I_m$

$$\varphi = \arg I_m \Rightarrow \varphi = -\varphi', \text{ avec } \varphi' = \arg\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right).$$

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}; \text{ puisque } \tan(-\varphi) = -\tan \varphi, \text{ on a :}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

**Point maths.** Soit  $\underline{x} = a + jb$ ,  $a$  et  $b$  étant des grandeurs réelles. Alors on a :

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{\underline{x}}\right) = -\arg(\underline{x}).$$

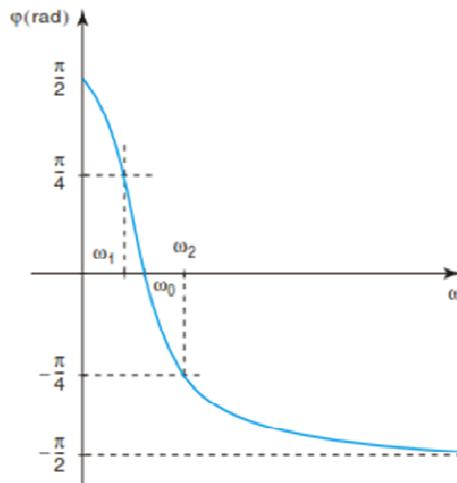
La phase  $\varphi$  est donnée par sa tangente, il y a donc une indétermination sur le domaine de définition de la phase ; étudions le signe de  $\cos \varphi$ .

$$\cos \varphi = \cos -\varphi' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} > 0$$

Donc

$$: \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

► *Variation de la phase de l'intensité avec la pulsation*



**b. Comparaison des courbes  $I_m(\omega)$  selon Q**

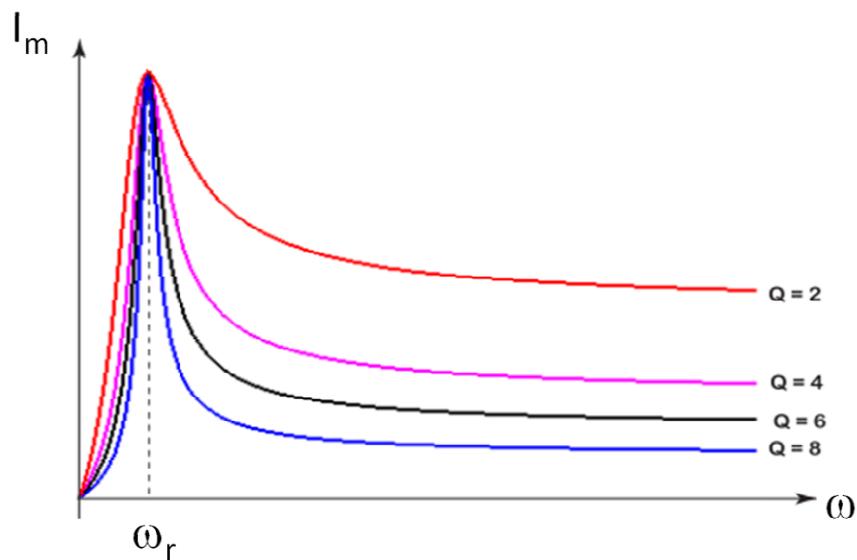
On a :  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

On peut déduire que le facteur de qualité Q caractérise la résonance.

Plus Q est important, plus  $\Delta\omega$  est petit et donc plus la résonance est dite « aigüe ».

Plus Q est petit, plus  $\Delta\omega$  est grand et donc plus la résonance est dite « floue ».

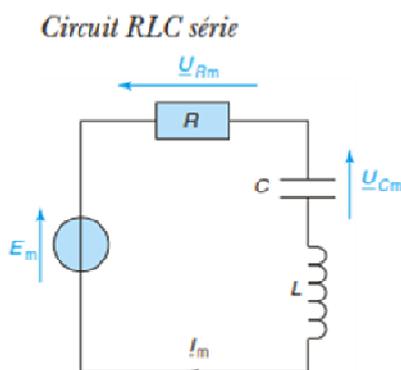
Sur le graphe  $I_m(\omega)$  : on observe que plus Q est grand plus le pic se resserre (résonance aigüe). Plus Q est petit, plus le pic devient large (résonance floue). On constate aussi que  $\omega_r$  est indépendant de Q.



## 2. Résonance en tension aux bornes du condensateur

Tout comme la courbe représentant  $I_m(\omega)$  s'appelle courbe de résonance en intensité, la courbe de résonance en tension aux bornes du condensateur sera représentée par  $U_{Cm}(\omega)$ .

Pour ce faire on cherche  $\underline{U}_{Cm}$ . Nous appliquons le diviseur de tension sur le schéma ci-dessous :



On trouve :

$$\bullet \underline{U}_{cm} = \frac{\left(\frac{1}{jC\omega}\right)E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2};$$

$$\bullet U_{cm} = |\underline{U}_{cm}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}};$$

$$\bullet U_{cm}(0) = E \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_{cm}(\omega) = 0.$$

En utilisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , et en notant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut écrire :

$$U_{cm} = \frac{E}{D} \text{ avec } D = \sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}$$

$U_{cm}$  passe par un maximum si  $D$ , et donc  $D^2$ , passe par un minimum.

On doit calculer la dérivée de  $D$ . Il revient au même, et c'est plus simple, de dériver  $D^2$  :

$$\frac{dD^2}{dx} = 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}, \text{ d'où } \frac{dD^2}{dx} = 0 \text{ si } 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2}.$$

On obtient donc  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Cette fonction croissante avec  $Q$  n'est définie que si  $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$ , donc si  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La courbe  $U_{cm}(\omega)$  passe donc par un maximum pour  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On parle de résonance de tension aux bornes du condensateur ou de résonance de charge car la charge du condensateur est proportionnelle à la tension.

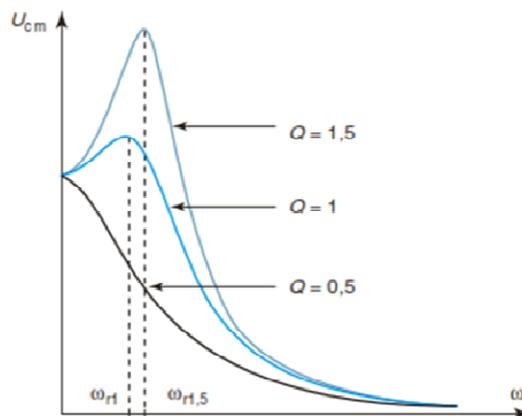
Il y a deux différences importantes entre la résonance d'intensité et la résonance de charge : la résonance de charge n'existe que pour des valeurs de  $Q$  suffisamment grandes et quand elle existe, la pulsation de résonance dépend de  $Q$ .

Le calcul conduit à 
$$U_{cm}(\omega_r) = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Pour  $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $U_{cm}(\omega_r) = QE$  : on peut atteindre des valeurs d'amplitude  $U_{cm}$  très élevées. C'est le phénomène de surtension.  $Q$  sera alors le facteur de surtension.

### 3. Evolution de $U_{Cm}(\omega)$ selon $Q$

*Variation de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation pour  $Q = 0,5 ; 1$  et  $1,5$ .*



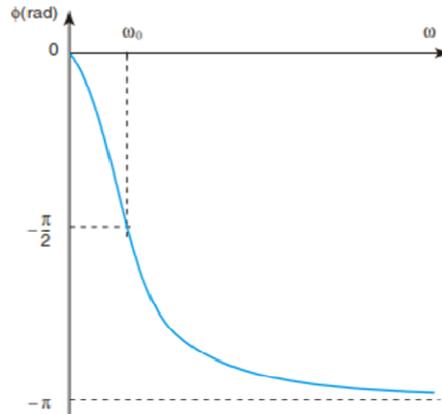
On constate bien sûr sur ce graphe qu'il n'y a pas de résonance si  $Q = 0,5$  ( $Q < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ ) et que la pulsation de résonance est d'autant plus grande que  $Q$  est grand ( $\omega_{r1} < \omega_{r1,5}$ ).

### 4. Etude du déphasage

$$\underline{U}_{cm} = \left( \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I}_{cm} \Rightarrow \phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

La courbe représentant  $\phi$  en fonction de  $\omega$  se déduit donc de la courbe représentant  $\varphi$  par un simple décalage vers le bas de  $-\frac{\pi}{2}$ , donc  $\phi \in [0 ; -\pi]$ .

► Variation de la phase de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation



## 5. Aspect énergétique

### a. Bilan des puissances moyennes

En faisant la valeur moyenne du bilan des puissances instantanées, on obtient :

$$\langle p_L \rangle + \langle p_C \rangle + \langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle.$$

Or nous avons vu que les puissances moyennes reçues par une bobine et un condensateur sont nulles, on a donc :  $\langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle$ .

### b. Résonance en puissance

L'expression de la puissance moyenne est :

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi]$$

On sait que :

$$U_m = Z I_m$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + jS$$

Donc :

$$R = Z \cos \varphi \quad \text{et} \quad S = Z \sin \varphi$$

On peut écrire la puissance moyenne de la manière suivante :

$$P_{moy} = \frac{Z I_m^2}{2} [\cos \varphi] = \frac{R I_m^2}{2}$$

La valeur efficace d'un courant  $i(t)$  est définie comme l'intensité du courant continu qui dissiperait la même énergie que  $i(t)$  à travers une résistance  $R$  sur une période  $T$ . La puissance moyenne reçue par cette résistance serait donc :

$$P_{Rmoy} = \frac{RI_m^2}{2} = RI_{eff}^2$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Nous avons montré plus haut (page 60) que :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\text{et } I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \text{ donc } \mathcal{P}_{Rmoy} = RI_e^2 = R \frac{E_m^2}{2\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)}$$

En utilisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , on obtient l'expression :

$$\mathcal{P}_{Rmoy} = \frac{E_m^2}{2R\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}$$

La courbe  $P_{Rmoy}(\omega)$  est la courbe de résonance en puissance. La puissance moyenne étant lié à l'amplitude de l'intensité du courant (proportionnelle au carré de l'amplitude de l'intensité du courant), on peut dire que la courbe de résonance en puissance est aussi liée à la courbe de résonance en intensité.

On peut déduire que :

Les caractéristiques de la résonance de puissance sont les mêmes que celles de résonance en intensité : il y a toujours résonance, pour toute valeur de  $Q$ , pour  $\omega = \omega_0$ .

Soit  $\mathcal{P}_{Rmoymax} = \frac{E_m^2}{2R} = \mathcal{P}_{Rmoy}(\omega_0)$ . On définit la bande passante par  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  tels que  $\mathcal{P}_{Rmoy}(\omega_1) = \mathcal{P}_{Rmoy}(\omega_2) = \frac{\mathcal{P}_{Rmoymax}}{2}$ .

Cela correspond aux relations  $I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}}$  pour l'intensité. On retrouve donc la bande passante définie pour l'étude des résonances d'intensité et de charge.

## Résonance de puissance

