ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

COURS ELECTROCINETIQUE 1

LICENCE 1

L'électrocinétique est l'étude de circuits électriques et est surtout celle du déplacement de l'électricité dans les milieux matériels, par opposition à l'électrostatique qui étudie les phénomènes et les lois relatives à l'électricité immobile.

DR YOBOUE
Année académique 2012/2013

Chapitre 1. ELECTROCINETIQUE DES REGIMES QUASI-PERMANENTS

I. Introduction

Des expériences d'**électrostatique** ont montré que l'on peut faire apparaître des charges électriques par frottement. Ces expériences ont aussi montré l'existence de **deux sortes de charges**, notées positives (+) ou négatives (-). C'est le cas par exemple de l'attraction de petits morceaux de papier par le champ électrique autour d'une baguette de résine chargée par frottement. Les charges de même nature se repoussent, les charges de signe contraire s'attirent. On interprète cette action par l'existence d'un **champ électrique** autour des charges.

Dans l'étude de l'électrocinétique apparaissent deux mots clés :

- charges électriques mobiles
- déplacements d'ensemble de charges

II. Définitions

1. Courant électrique

a. Notion de courant

Un conducteur est un matériau contenant des charges libres capables de se déplacer. Par définition, on appelle milieu conducteur un milieu dans lequel existent des particules chargées, mobiles, libres de se déplacer: les porteurs de charge.

Dans un conducteur métallique, les charges sont des électrons. Les électrons sont peu liés aux atomes auxquels ils appartiennent (on dit que ces électrons se trouvent dans la bande de conduction). Ils se déplacent alors facilement dans le matériau métallique. Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée aux extrémités du conducteur, elle provoque le déplacement de ces électrons, ce que l'on appelle **courant électrique**.

Le sens conventionnel d'un courant positif est celui du déplacement des charges positives. Il est donc opposé à la direction de déplacement des électrons.

b. Intensité du courant

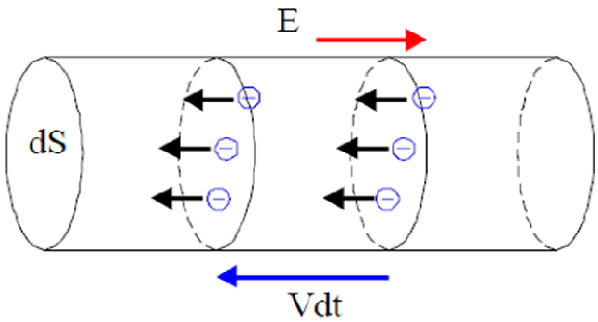
Un courant électrique existe quand une charge q est transférée d'un point à un autre du conducteur. L'intensité du courant, à l'instant *t*, est représentée par le débit des charges.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

I en ampère, q en coulomb et t en seconde

c. Vecteur densité de courant

Considérons un conducteur de section *dS*. Soit *n* la quantité de charges mobiles par unité de volume et $\vec{v}$ leur vitesse.



Pendant la durée *dt*, la charge *dq* qui traverse la section *dS* est égale à :

$$dq = n.e.\vec{v}.dt.\overrightarrow{dS}$$
$$dq = \rho.\vec{v}.dt.\overrightarrow{dS}$$

e: la charge élémentaire
ρ : la densité de charges

Le vecteur densité de courant est définit par :

$$\vec{j} = \rho.\vec{v}$$

L'unité de densité de courant est l'Ampère par mètre carré ($A.m^{-2}$).

d. Conservation de charge

La **conservation de la charge électrique** est un principe physique. Il exprime que la charge électrique d'un système isolé est un invariant. La charge électrique ne peut donc être qu'échangée avec un autre système mais ni créée ni annihilée. On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative. Ce principe de conservation de la charge est également à la base de la loi des nœuds en électrocinétique.

2. Potentiel et tension électrique

a. Potentiel électrique

Le **potentiel électrique**, exprimé en volts (V), est l'une des grandeurs définissant l'état électrique d'un point de l'espace.

La différence de potentiel électrique entre deux points de l'espace ou d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique ou de trouver plusieurs tensions inconnues dans un circuit électrique ou électronique.

b. Energie potentielle électrique

L'**énergie potentielle** d'une charge électrique q placée en un point P baignant dans un potentiel électrique V est définie comme le travail à fournir pour transporter cette charge depuis l'infini jusqu'à la position P. Elle vaut donc :

$$E_{Pe} = V.e$$

e: la charge élémentaire
E_{Pe}: énergie potentielle électrique
V : potentiel électrique

La variation d'énergie potentielle électrique d'une particule chargée se calcule à partir de la différence entre les potentiels à chacun des points. Il est possible de faire une analogie entre la hauteur et le potentiel. Lorsque la particule diminue en potentiel, son énergie potentielle diminue proportionnellement. Toutefois, à la différence de l'énergie potentielle gravitationnelle, l'énergie potentielle électrique dépend de la charge de la particule, et non de sa masse.

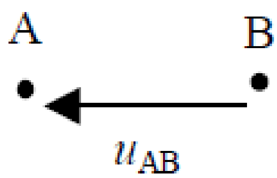
c. Tension électrique

La **tension électrique** représente le travail de la force électrique sur une particule chargée, divisé par la valeur de la charge. Dans le cas d'un générateur de tension continue, une pile par exemple, la tension électrique à vide de cette pile, appelée **force électromotrice (fém)**, est le travail de la force électrostatique de propulsion sur les électrons.

Pour obtenir une circulation de courant dans un circuit, il faut qu'au moins deux points de ce circuit soient à un instant donné à des potentiels différents.

C'est une grandeur algébrique. Conventionnellement, on représente la tension entre les points A et B du circuit par une flèche dirigée vers le point A :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$



Elle est souvent confondues avec la différence de potentiel électrique entre deux points d'un circuit électrique, car les deux notions coïncident en régime stationnaire et sont approximativement équivalentes dans de nombreuses applications pratiques en régime variable.

3. Quelques notions de base

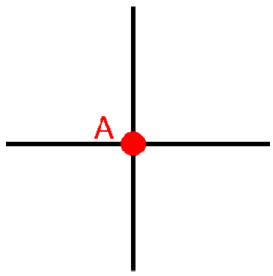
a. La masse

La masse est la partie conductrice d'un matériel électrique susceptible d'être touchée par une personne, qui n'est pas normalement sous tension mais qui peut le devenir en cas de défaut d'isolement des parties actives de ce matériel.

Dans un circuit électrique, la masse est la branche de référence des potentiels électriques. Dans la grande majorité des cas, le potentiel électrique de cette branche est la référence 0 V du circuit considéré, cependant il ne doit pas être confondu avec la terre d'un local.

b. Le nœud

Un nœud est la connexion de plusieurs conducteurs.

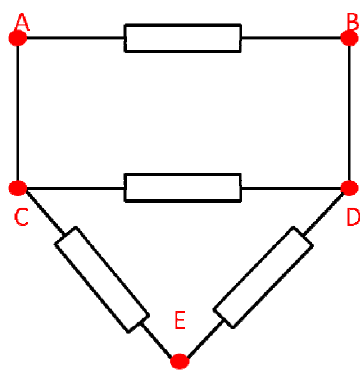


c. La branche

On appelle branche la partie comprise entre deux nœuds A.

d. La maille

On appelle maille un parcours fermée ne passant qu'une fois par un nœud donné.



e. Le réseau électrique

Le réseau électrique est un ensemble de dipôles électrocinétiques reliés par des conducteurs filiformes de résistance négligeable.

f. Le dipôle électrique

Le dipôle électrique est un élément d'un circuit électrique comportant deux bornes. Il impose une relation entre la tension u à ses bornes et l'intensité du courant i qui le traverse.

Exemples : Le condensateur, la résistance, la diode.

Caractéristiques du dipôle :

La fonction f liant u à i : $u = f(i)$ imposée par le dipôle est appelée *caractéristique* du dipôle. Par extension ce terme désigne aussi la représentation graphique de cette fonction. Cette fonction met en avant la loi des mailles et les générateurs de tension.

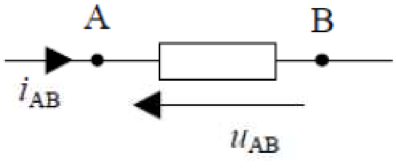
La fonction $i = g(u)$ est aussi une caractéristique du dipôle. Elle est réciproque à la précédente et met en avant la loi des nœuds et les générateurs de courant.

Classification des dipôles :

- **Dipôles passifs et actifs**
  Un dipôle passif consomme de l'énergie. Sa caractéristique passe par l'origine.
  Un dipôle actif fournit de l'énergie au circuit associé.
- **Dipôles linéaires**
  Un dipôle est dit linéaire s'il préserve la linéarité du circuit. Les résistances, les générateurs de tension, les générateurs de courant, les condensateurs et les bobines sont des dipôles linéaires.
  Tout circuit linéaire peut être représenté comme une combinaison de résistances, capacitances et inductances pures
  La caractéristique est une droite d'équation $U = a.I + b$ ou $I = p.U + q$

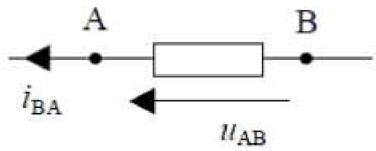
Convention de fléchage :

- Convention récepteur



Le courant et la tension sont fléchés en sens inverse. Cela permet d'obtenir deux grandeurs positives pour des dipôles s'opposant à la circulation du courant.

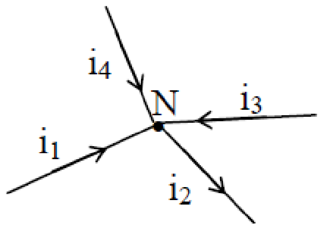
- Convention générateur



Le courant et la tension sont fléchés dans le même sens. Cela permet d'obtenir deux grandeurs positives pour des dipôles favorisant la circulation du courant.

4. Les lois de bases : les lois de Kirchhoff

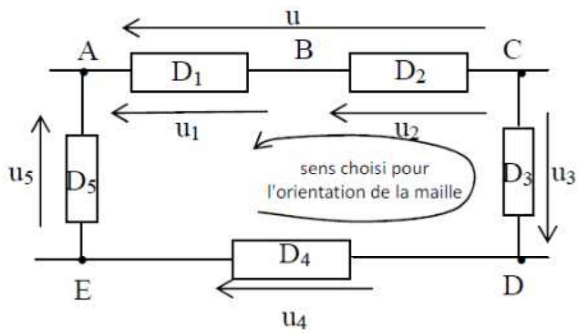
La loi des nœuds : La première loi de Kirchhoff établit l'interdépendance des courants en un nœud N, ou point de jonction, d'un circuit ; en tout temps, la somme algébrique des courants arrivant au nœud N est nulle.



$$\sum_k \varepsilon_k . i_k = 0 \qquad avec \begin{cases} \varepsilon_k = +1 \; pour\ un\ courant\ arrivant\ vers\ N \\ \varepsilon_k = -1 \; pour\ un\ courant\ partant\ de\ \ N \end{cases}$$

C'est une application de la loi de la conservation de la charge : puisque la charge ne peut être créée ni détruite, le flux total de charge (le courant) vers le nœud est nul.

La loi des mailles : La deuxième loi de Kirchhoff est une application de la loi de conservation de l'énergie. Si l'on déplace une charge le long d'une maille d'un circuit et qu'on la ramène à son point de départ, la somme des changements de potentiel ressentis par cette charge doit être nulle.



La seconde loi de Kirchhoff s'écrit :

$$\sum_k \varepsilon_k . u_k = 0 \qquad avec \begin{cases} \varepsilon_k = +1 \; si \; u_k \; est \; orienté \; dans \; le \; sens \; choisi \\ \varepsilon_k = -1 \; si \; u_k \; est \; orienté \; en \; sens \; inverse \end{cases}$$

Ces deux lois sont les lois fondamentales de l'électrocinétique. Elles permettent en principe, l'étude de tous les circuits électriques constitués de dipôles.

5. Energie et Puissance électrique d'un dipôle

La puissance instantanée mise en jeu par un dipôle en convention récepteur est :

$$p = u.i$$

p : watts (W), u : volts (V) et i :ampères (A)

Cette puissance correspond à la puissance consommée lorsque u et i sont fléchés selon la convention « **récepteur** » et à la puissance fournie lorsqu'ils sont fléchés avec la convention « **générateur** ».

Le dipôle est dit récepteur si la puissance reçue est positive, sinon le dipôle est générateur.

L'énergie reçue par un dipôle entre les instants t1 et t2 vaut, avec p la puissance instantanée :

$$E(t) = \int_{t1}^{t2} p(t)dt$$

Régime permanent : $W = P.t$ avec $P = U.I$, donc $W = U.I.t$

Cas général : On définit la quantité d'électricité traversant le dipôle par

$Q = I.t$ avec Q en Coulombs C.

Toute charge électrique Q passant d'un point A où le potentiel est V_A à un point B où le potentiel est V_B reçoit l'énergie électrique telle que :

$$W = Q.U = Q(V_A - V_B)$$

.

6. Les régimes de fonctionnement

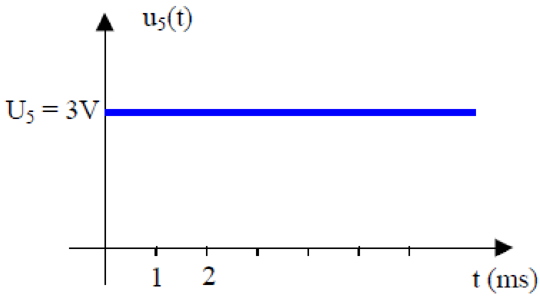
a. Le régime continu

Un circuit en régime continu est un circuit dont les grandeurs ne dépendent pas du temps. Il contient au minimum un générateur électrique qui va délivrer un courant (ou une tension) constant(e) et des résistances ; on peut avoir aussi un moteur appelé plus généralement récepteur.

L'étude de circuit peut se faire avec les lois suivantes :

Les Lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) qui donnent les relations entre les différentes grandeurs du circuit.

NB : Une grandeur continue ou constante est notée avec un nom en majuscule.



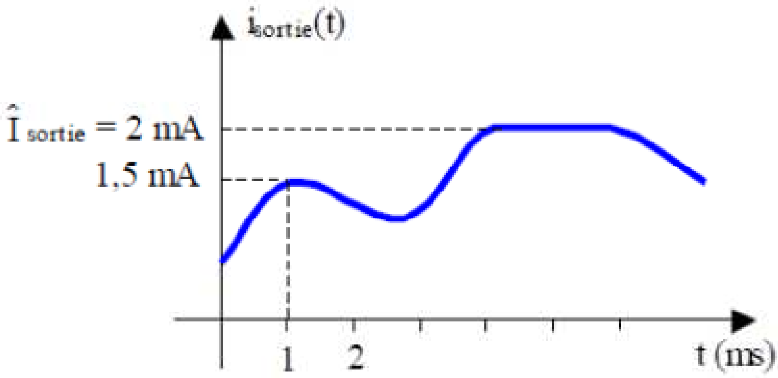
b. Le régime variable

Le régime variable est un régime qui dépend du temps. Graphiquement, la grandeur variable sera représentée sur l'ordonnée d'un graphique dont l'abscisse est le temps.

Une grandeur variable est notée avec un nom en minuscule suivi de parenthèses et de la grandeur par rapport à laquelle elle varie.

La valeur de la grandeur i(t) à un instant t0 est notée i(t0). Par exemple sur le graphique ci-dessous, $i_{sortie}(1.10^{-3}) = 1,5$ mA.

En régime variable, le signal électrique peut être associé à une onde se propageant dans le conducteur à vitesse finie (de l'ordre de $c = 3.108\ m.s^{-1}$).



c. Le régime transitoire

Dans un circuit électrique, un régime transitoire apparaît par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur, à la modification de la tension ou de l'intensité délivrée par un générateur, au passage d'un signal continu à un signal périodique.

Les Lois de Kirchhoff et autres données précédemment s'appliquent toujours.

d. Le régime stationnaire

On qualifie de stationnaire ou permanent, un phénomène qui ne dépend pas explicitement du temps.

Dans le cas d'un circuit électrique, le régime est stationnaire si la charge électrique contenue dans un volume arbitraire de conducteur est constante ; il n'est cependant pas statique puisque les porteurs de charge sont en mouvement.

Ce régime apparait à la fin du régime transitoire.

e. L'approximation en régime quasi-stationnaire (ARQS)

Considérons une grandeur électrique E, fonction du temps. Il existe à priori des phénomènes de propagation dans le circuit et E est en fait une fonction du temps et de l'espace : E = f(t,x).

Si les dimensions du circuit sont négligeables devant la longueur d'onde associée à la propagation, celle-ci peut être négligée. Par exemple, pour des fréquences de l'ordre de 1 MHz, la dimension du circuit doit être très inférieure à 300 m. Autrement dit, le produit de la dimension du circuit par la fréquence des intensités considérées est très inférieur à la célérité de la lumière ($\lambda = c/f$ avec λ : longueur d'onde, c : vitesse de la lumière et f : la fréquence).

Ainsi, on admet que E est seulement fonction du temps.

Dans cette approximation, tous les paramètres du circuit évoluant lentement par rapport à la durée de propagation des signaux dans le circuit, on peut alors considérer que, à chaque instant, les paramètres ont la même valeur en tous points du circuit et, dans ce cas, les résultats obtenus pour un régime stationnaire resteront valables (en particulier la loi des nœuds).

L'ARQS est valide pour la plupart des circuits usuels.

f. Le régime sinusoïdal

D'une manière générale, on appelle **régime sinusoïdal** (ou **régime harmonique**) l'état d'un système pour lequel la variation dans le temps des grandeurs le caractérisant est sinusoïdale.

Ce régime peut-être atteint par le système en raison d'une excitation extérieure (par exemple un générateur électrique alternatif) : c'est le régime sinusoïdal forcé, ou, dans certaines situations lors de l'évolution libre du système.

Dans le domaine de l'électricité les grandeurs sinusoïdales sont par exemple l'intensité du courant électrique, la différence de potentiel ou la charge aux bornes d'un condensateur.

<u>Remarque</u> : Le régime sinusoïdal tire son importance théorique du théorème de Fourier : celui-ci énonce que tout signal périodique est décomposable en une série de fonctions sinusoïdales. Ainsi, l'étude de n'importe quel système soumis à une excitation

extérieure périodique peut-être étudiée grâce à la connaissance du régime sinusoïdal : c'est l'analyse harmonique (Cf Cours Electrocinétique 2).

Chapitre 2. ANALYSE DE CIRCUITS ELECTRIQUES

I. Eléments dipolaires fondamentaux

Ce sont des dipôles pour lesquels la fonction *f*, telle que *u* = f(*i*), est une fonction différentielle à coefficients constants.
Exemples :

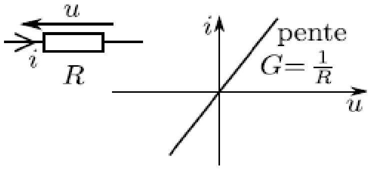
$$u = A$$
$$u = A.i$$
$$u = A.i + B.\frac{di}{dt}$$

A et B sont des constantes

1. Resistance

Ce dipôle est schématisé en convention récepteur sur la figure ci-dessous et vérifie la loi d'Ohm.

La loi d'Ohm établit la relation entre le courant i circulant dans une résistance *R* (en ohm (Ω)) à l'instant t et la tension u_R aux bornes de cette résistance au même instant.



a. Caractéristique de la résistance

En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$u = R.i \quad ou \quad i = G.u$$
$$(i = G.u \text{ avec } G \text{ la conductance en siemens } (S) \text{ et } G = \frac{1}{R})$$

En convention générateur la loi d'Ohm s'écrit :

$$u = -R.i \quad ou \quad i = -G.u$$

La résistance d'un résistor dépend des caractéristiques du conducteur. Dans le cas d'un conducteur cylindrique homogène de longueur *l* et de section *S* on montre que :

$$R = \frac{\rho.l}{S}$$

Le coefficient de proportionnalité ρ est la résistivité du matériau conducteur et s'exprime en Ω.m.

L’ordre de grandeur :

- Isolants : $\rho > 10^5$ Ω.m
- Semi-conducteurs : $1 < \rho < 10^4$ Ω.m
- Métaux : $\rho \approx 10^{-7}$ Ω.m

On définit également la conductivité d’un milieu par $\sigma = 1/\rho$, (en S/m). La conductance d’un conducteur cylindrique s’écrit alors $G = \sigma.S/l$

Remarque : La résistance d’un conducteur métallique est une fonction croissante de la température. En pratique, dans les montages électroniques on utilise des résistances à base de carbone qui sont peu sensibles aux variations de température.

b. Aspect énergétique

Le passage d’un courant dans un résistor se manifeste par un échauffement du milieu conducteur. La puissance consommée par la résistance est :

$$p = u.i$$

$$p = R.i^2 = \frac{u^2}{R}$$

On constate que cette puissance est à chaque instant, positive : la résistance est un élément dissipatif.

L'énergie reçue et dissipée sous forme de chaleur $W_J = U.I.t$ peut s'écrire en tenant compte de la relation $U = RI$:

$$W_J = R.I^2.t$$

W_J : joules (J); R : ohms (Ω); I : ampères (A) et t en secondes (s)

Cette relation traduit la loi de Joule. On dit que l'énergie est dissipée par effet Joule.

En régime établi (permanent), la résistance ne doit pas dissiper une puissance supérieure à p_{max} dont la valeur est en général prescrite par le constructeur. On en déduit les valeurs maximales du courant et de la tension à ne pas dépasser à l'aide de la formule de puissance.

NB : La puissance dissipée l'est sous forme de chaleur, et c'est souvent l'augmentation de température qui est responsable de la destruction du composant.

2. Condensateur

Un condensateur est un élément constitué de deux armatures conductrices (appelées électrodes) en influence totale et séparées par un isolant polarisable (diélectrique). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures.

Le condensateur est globalement neutre ; si on applique une tension u_C entre les deux plaques, les charges électriques négatives (électrons) en provenance de la borne négative de la source tendent à se déplacer sur la plaque correspondante tandis que les charges positives (manque d'électrons) se rassemblent sur l'autre. La capacité du condensateur donne la mesure de cet effet.

Pour un condensateur de capacité C (en farad (F)), les charges q et -q sur chaque plaque sont :

$$q = C.u_C$$

a. Caractéristique du condensateur

Si la tension varie au cours du temps, la variation de charge qui s'en suit correspond à une circulation de courant dans la branche du circuit où se trouve le condensateur. On peut donc écrire :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

On obtient :

$$u_C(t) = u_C(0) + \int_0^t i(t)dt$$

Pour une alimentation continue constante, $\frac{du_C}{dt} = 0$ et le condensateur correspond à un circuit ouvert : il n'y a pas de passage de courant, i(t) = 0.

b. Puissance consommée

L'équation $p = u.i$ devient :

$$p = C.u_C.\frac{du_C}{dt}$$

La formule mathématique de $\frac{d(u^2)}{dt} = 2u.\frac{du}{dt}$

Donc :

$$p = \frac{1}{2}C\frac{d({u_C}^2)}{dt}$$

La puissance instantanée consommée par un condensateur est liée à la variation du carré de la tension à ses bornes : si celui ci augmente, le condensateur consomme de la puissance. Mais si le carré de la tension à ses bornes diminue alors le condensateur fourni de la puissance au reste du circuit.

L'énergie échangée entre deux instants t_i et t_f :

$$W = \frac{1}{2}C(u_{Cf}^2 - u_{Ci}^2)$$

NB : Il ne faut pas dépasser en valeur instantanée la valeur maximale de la tension prescrite par le constructeur. En cas de dépassement, même très bref, on risque de provoquer un claquage entraînant la destruction du composant.

3. Bobine ou inductance

On appelle inductance un bobinage d'un fil conducteur éventuellement enroulé autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Si la bobine est traversée par un flux d'induction magnétique Φ variable, une tension u_L est induite à ses bornes. La loi de Faraday donne :

$$u_L(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

a. Caractéristique de la bobine

S'il n'y a pas d'induction dans un élément du circuit provenant d'un autre élément de ce circuit, on peut caractériser chaque élément inductif du circuit par son inductance L (en henry (H)) telle que :

$$\Phi = L.i$$

On a donc aux bornes de la bobine :

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{di}}{dt}$$

Dans le cas d'un courant continu constant i(t) = I = constante, soit $\frac{di_L}{dt} = 0$: une inductance pure parcourue par un courant continu est un court-circuit, $u_L(t) = 0$.

b. Puissance de la bobine

L'équation $p = u.i$ devient :

$$p = L.i_L.\frac{di_L}{dt}$$

En utilisant la même formule mathématique de $\frac{d(u^2)}{dt} = 2u.\frac{du}{dt}$

Donc :

$$p = \frac{1}{2}L\frac{d({i_L}^2)}{dt}$$

La puissance instantanée consommée par une inductance est liée à la variation du carré de l'intensité qui la traverse : si celui ci augmente, l'inductance consomme de la puissance. Sinon elle en fournit.

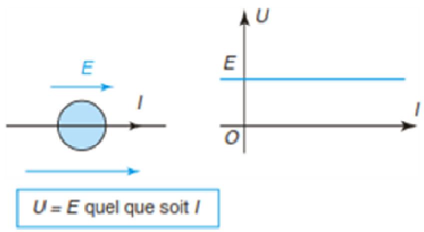
L'énergie échangée entre deux instants t_i et t_f :

$$W = \frac{1}{2}L(i_{Lf}^2 - i_{Li}^2)$$

NB : Il ne faut pas dépasser en valeur instantanée la valeur maximale de l'intensité prescrite par le constructeur. En cas de dépassement, même très bref, on risque de "saturer" le circuit magnétique, ce qui provoque une diminution brutale de la valeur de l'inductance pouvant entraîner une surintensité.

4. Source de tension idéale

Une source idéale de tension est un dipôle tel que :



La tension aux bornes de la source de tension idéale est égale à la force électromotrice E du générateur. Elle est indépendante du courant qu'elle délivre. Cela suppose que sa résistance interne est nulle. Elle ne peut jamais être mise en court circuit, sous peine de devoir débiter un courant infini, tout en ayant une tension constante à ses bornes.

Les alimentations stabilisées de laboratoire sont de bonnes approximations de sources de tensions idéales.

Remarque : Pour les sources réelles, la tension de sortie diminue si le courant débité augmente.

La puissance :

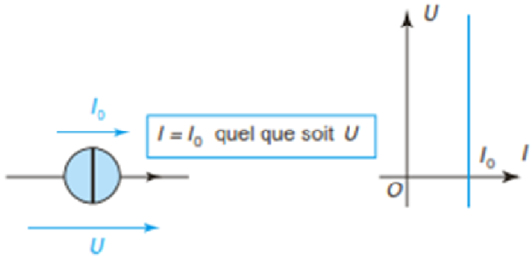
On utilise en général pour ces dipôles la convention générateur, la grandeur p représente alors la puissance fournie :

$$p = u.i = E.i$$

Cette puissance doit rester inférieure à une valeur maximale imposée par le constructeur, il s'ensuit qu'il existe une valeur maximale du courant que peut débiter cette source de tension.

5. Générateur de courant idéal

Une source idéale de courant est un dipôle tel que :



Le courant de sortie *I* est indépendant de la tension entre les bornes du générateur. Cela suppose une résistance interne infinie. Elle ne peut jamais être mise à vide, sous peine de voir la tension à ses bornes infinie.

La puissance :

Ces sources de courant sont en général réalisées à l'aide de systèmes électroniques et la tension à leurs bornes est limitée à une valeur maximale U_{max}. La puissance que peut alors délivrer la source de courant est donc inférieure à :

$$p = u.i = U_{max}.I$$

II. Association de dipôles

1. Association de dipôles passifs linéaires

a.Association en série

Le courant qui traverse les dipôles est le même. Il y a additivité des tensions aux bornes des dipôles.

$$U = \sum_k u_k$$

i. Association de résistances linéaires

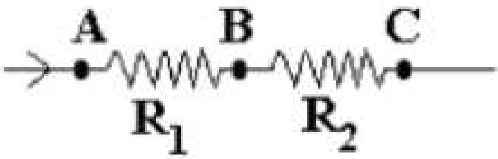
Pour des résistances linéaires :

$$U = \sum_k u_k = \sum_k R_k i$$

La résistance du dipôle équivalent est égale à la somme de résistances en série :

$$R_{eq} = \sum_k R_k$$

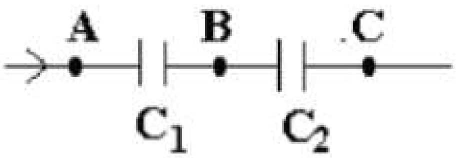
Exemple :



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

ii. Association de condensateurs

Soit deux condensateurs en série. On a alors $q_1 = q_2 = q$ car le point B est neutre.



Pour le condensateur C$_1$, $u_1 = u_A - u_B = \frac{q}{C_1}$

Pour le condensateur C$_2$, $u_2 = u_B - u_C = \frac{q}{C_2}$

D'où $u_1 + u_2 = u_A - u_C = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$

La capacité totale C$_{eq}$ vaut :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

iii. Association de bobines

Pour deux inductances en série, le développement est similaire que pour le condensateur et on obtient :

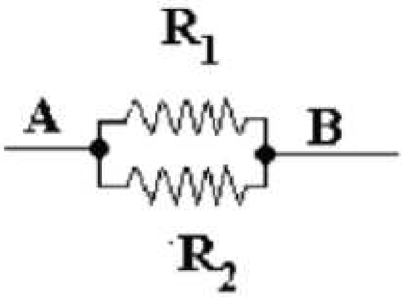
$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

b. Association en parallèle

La tension aux bornes des k dipôles placés en parallèle est la même. Il y a additivité des courants qui traversent ces dipôles.

i. Association de résistances linéaires

Soit le circuit ci-dessous :



On doit avoir i = $i_1 + i_2$ et $R_1 i_1 = R_2 i_2$

On en tire:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

ii. Association de condensateurs

Si les deux condensateurs précédents sont mis en parallèle.

La capacité totale C_{eq} vaut :

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

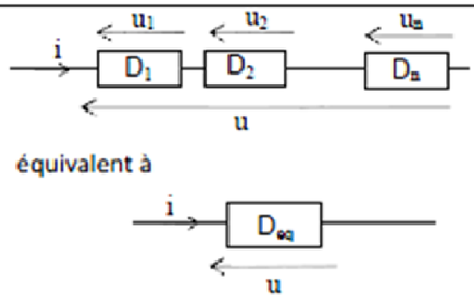
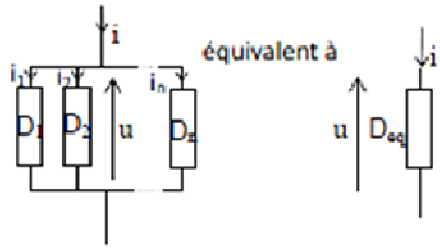
iii. Association de bobines

Pour deux inductances en parallèle, l'inductance équivalente vaut :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

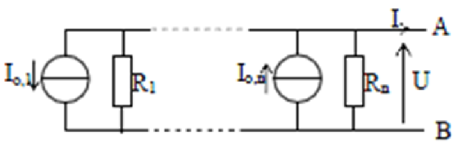
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

iv. Résumé association de dipôles linéaires

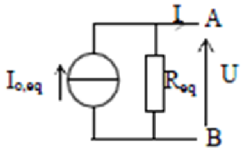
Association en série	Association en parallèle
	
D équivalent à D_1 en série avec D_2 : $\forall i,\ u = u_1+u_2$	D équivalent à D_1 en parallèle avec D_2: $\forall u,\ i = i_1+i_2$
Bobines idéales d'inductance L_k **en série** : $u = u_1 + u_2 + \ldots = L_1.\frac{di}{dt} + L_2.\frac{di}{dt} + \ldots = L_{eq}.\frac{di}{dt}$ $\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots = \sum_k L_k}$	**Bobines** idéales d'inductance L_k **en parallèle** : $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \ldots = \frac{1}{L_1}.u + \frac{1}{L_2}.u + \ldots = \frac{1}{L_{eq}}.u$ $\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots = \sum_k \frac{1}{L_k}}$
Condensateurs idéaux de capacité C_k **en série** : $u = u_1 + u_2 + \ldots$ d'où $\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \ldots = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} + \ldots = \frac{i}{C_{eq}}$ $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots = \sum_k \frac{1}{C_k}}$	**Condensateurs** idéaux de capacité C_k **en parallèle** : $i = i_1 + i_2 + \ldots = C_1.\frac{du}{dt} + C_2.\frac{du}{dt} + \ldots = C_{eq}.\frac{du}{dt}$ $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots = \sum_k C_k}$
Résistors de résistance R_k **en série** : $\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots = \sum_k R_k}$ Application : **diviseur de tension**	**Résistors** de résistance R_k **en parallèle** : $\boxed{G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots = \sum_k G_k}$ avec $G = \frac{1}{R}$ Application : **diviseur de courant**

2. Association de dipôles actifs linéaires

Sources de courant indépendantes en parallèle



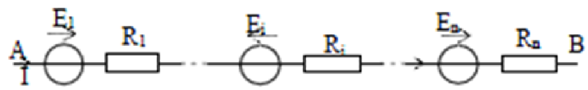
Vu de A et B équivalent à :



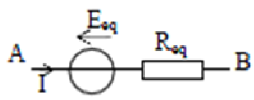
$G_{eq} = \sum_i G_i$ $\boxed{I_{o,eq} = \sum_i \varepsilon_i I_{o,i}}$

$\varepsilon_i = +1$ si $I_{o,i}$ a même sens que celui choisi pour $I_{o,eq}$ (sinon -1).

Sources de tension indépendantes en série



Vu de A et B équivalent à :



$R_{eq} = \sum_i R_i$ $\boxed{E_{eq} = \sum_i \varepsilon_i E_i}$

$\varepsilon_i = +1$ si E_i de même sens que celui choisi pour E_{eq} (sinon -1).

Générateurs de tension :

Il est interdit de placer en parallèle deux sources de tensions délivrant des tensions différentes. Le courant de circulation serait en effet infini. Par exemple, si l'on brancher deux batteries ayant des tensions différentes, celle qui possède la plus forte se videra dans l'autre en créant un court circuit, une surcharge, et une destruction prématurée.

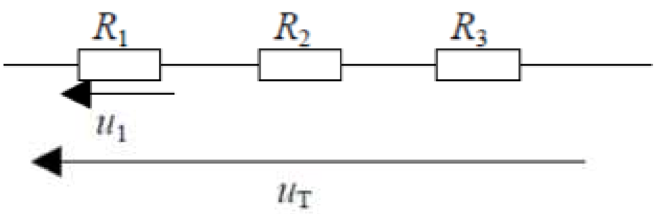
Générateur de courant :

Il est impossible de placer en série deux générateurs de courant de valeurs différentes ; cela revient à imposer simultanément deux intensités différentes.

III. Méthodes d'étude des circuits

1. Diviseurs de tension et de courant

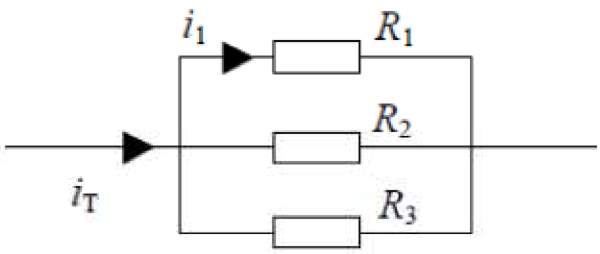
a. Diviseur de tension



Lorsque plusieurs résistances sont en série, la tension aux bornes de l'une d'entre elle peut être déterminée par la relation :

$$u_1 = u_T.\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = u_T.\frac{R_1}{\sum_i R_i}$$

b. Diviseur de courant



Lorsque plusieurs résistances sont en parallèle, le courant qui traverse l'une d'entre elle peut être calculé par la relation :

$$i_1 = i_T.\frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = i_T.\frac{G_1}{\sum_i G_i} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

2. Loi de Pouillet

Dans le cas où le réseau ne comporte qu'une maille, il est possible de transformer le circuit initial en un circuit ne comportant qu'un seul générateur, dont la f.e.m. est la somme algébrique des f.e.m. des générateurs de la maille et une seule résistance.

Le générateur de Pouillet est :

$$E = \sum_k E_k$$

La résistance de Pouillet est :

$$R = \sum_k R_k$$

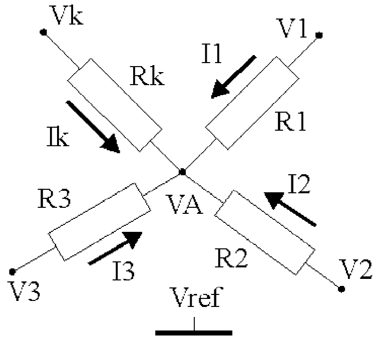
Le courant circulant dans la maille :

$$I = \frac{\sum_k E_k}{\sum_k R_k}$$

3. Théorème de Millmann

Il permet de trouver le potentiel d'un point du circuit lorsqu'on connaît les autres.

On considère un nœud A auquel aboutissent k branches dont les potentiels Vi des extrémités sont définis par rapport au même potentiel de référence. Ri est la résistance de la branche i, Gi sa conductance et Ii le courant qui circule dans celle-ci.



La loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_i I_i = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_k = 0$$

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \frac{V_3 - V_A}{R_3} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

$$(V_1 - V_A).G_1 + (V_2 - V_A).G_2 + (V_3 - V_A).G_3 + \cdots + (V_k - V_A).G_k = 0$$

$$V_A.\sum_i G_i = \sum_i V_i G_i$$

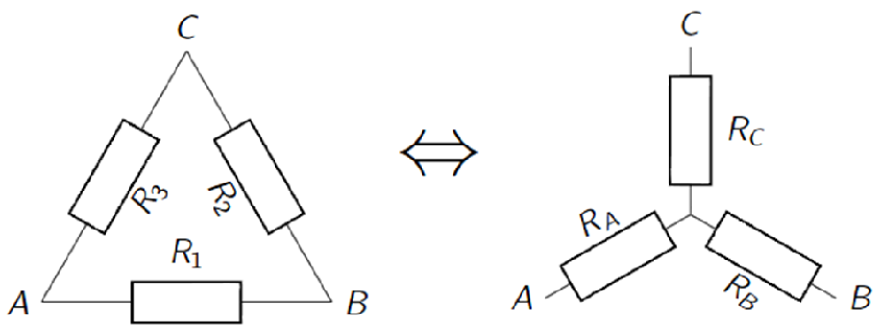
Le potentiel au point A par rapport à celui de la référence commune est donc :

$$V_A == \frac{\sum_i V_i G_i}{\sum_i G_i}$$

4. Théorème de Kennely

Le théorème de Kennelly, ou transformation triangle-étoile, ou transformation Y-Δ, ou encore transformation T-Π, est une technique mathématique qui permet de simplifier l'étude de certains réseaux électriques.

Le théorème de Kennelly permet d'établir une équivalence entre des résistances placées en triangle et des résistances placées en étoiles.



a. La transformation étoile vers triangle

La résistance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des résistances adjacentes divisé par la somme totale des résistances.

$$R_A = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

b.La transformation triangle vers étoile

La résistance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des résistances, divisée par la résistance de la branche opposée.

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

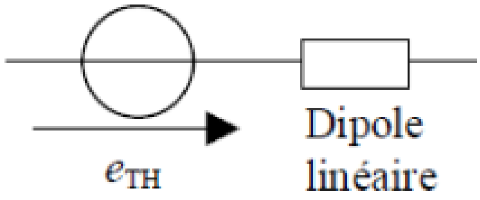
$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

5. Réduction de circuit : générateurs réels

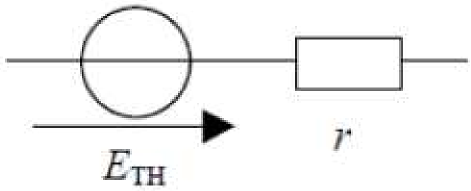
Beaucoup de générateurs ne peuvent pas être considérés comme des sources idéales. Ils sont alors modélisés par l'association d'une source idéale et d'un dipôle linéaire.

a. Modèle de Thévenin

Le modèle équivalent de Thévenin (ou M.E.T.) d'un générateur réel comporte une source de tension en série avec un dipôle linéaire :

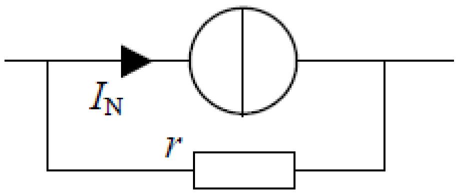


En continu la source de tension est une source de tension continue et le dipôle linéaire une résistance.



b. Modèle de Norton

Le modèle équivalent de Norton (ou M.E.N) d'un générateur réel comporte une source de courant en parallèle avec un dipôle linéaire. En continu c'est l'association en parallèle d'une source de courant et d'une résistance :



c. Equivalence entre les deux modèles

Les résistances r des deux modèles sont les mêmes. Les trois paramètres E_{TH}, I_N et r sont liés par la relation :

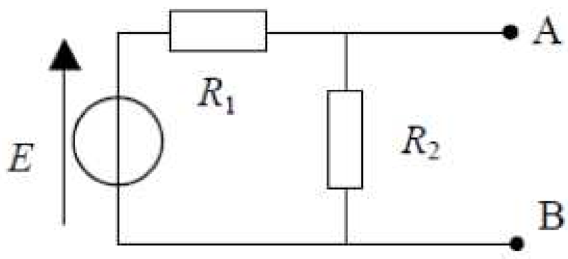
$$E_{TH} = r.I_N$$

d. Théorème de Thévenin/Norton et détermination des valeurs de E_{TH}, I_N et r

i. Théorème de Thévenin/Norton

Toute portion de circuit comprise entre 2 bornes A et B et qui ne contient que des éléments linéaires peut être modélisée par un unique générateur équivalent de Thévenin ou de Norton.

Exemple de circuit pouvant être modélisé par un générateur de Thévenin ou Norton :



ii. Détermination des valeurs de E_{TH}, I_N et r

<u>Valeur de E_{TH} :</u>

C'est la même que la valeur de la tension existant "à vide" entre A et B, c'est à dire celle que relèverait un voltmètre idéal placé entre les bornes A et B.

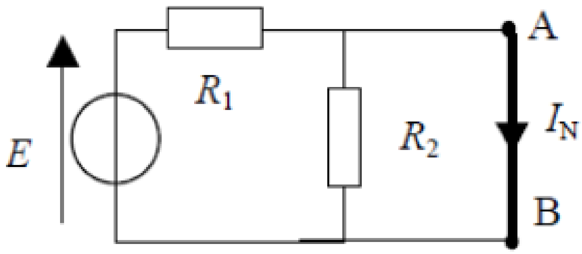
Pour le circuit de l'exemple précédent on a :

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

<u>Valeur de I_N :</u>

C'est celle de l'intensité qui circulerait à travers un fil reliant les bornes A et B c'est à dire celle mesurée par un ampèremètre idéal placé entre A et B.

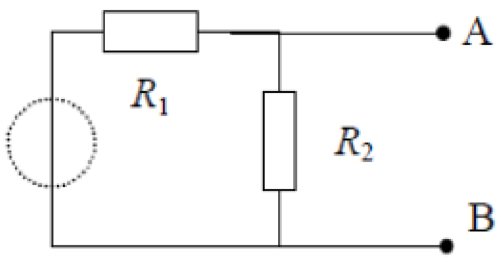
Dans notre exemple on obtient le schéma suivant avec R_2 court-circuitée.



$$I_N = \frac{E}{R_1}$$

Valeur de r :

C'est la résistance équivalente à celle du dipôle AB rendu passif, soit pour l'exemple celui de la figure ci-dessous :

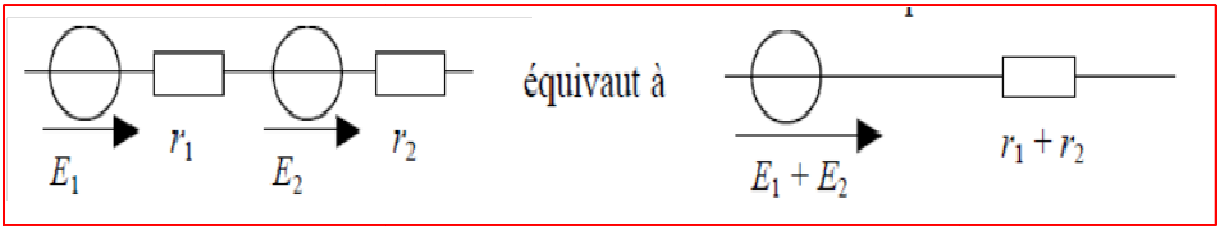


$$r = R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

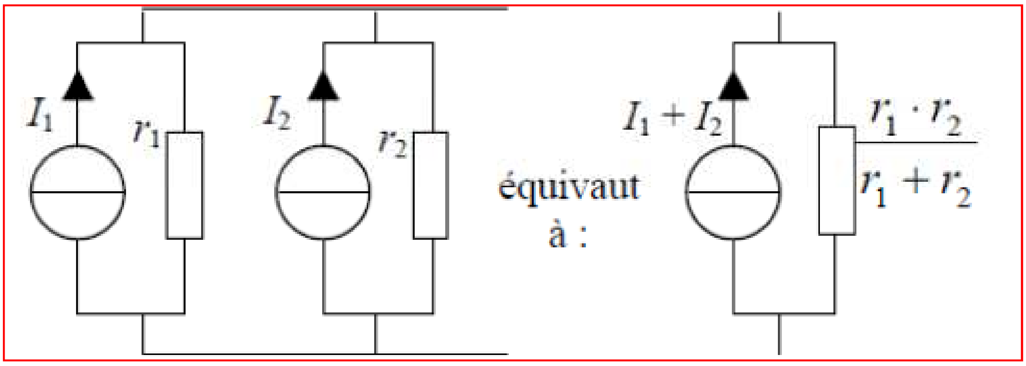
La relation d'équivalence des deux modèles lie ces trois valeurs. Par conséquent, la détermination de deux d'entres-elles, est suffisante pour réaliser la modélisation.

6. Association de générateur réels

En série : On transforme chaque générateur en M.E.T., puis on associe les sources de tensions entre elles, et les dipôles linéaires entre eux :

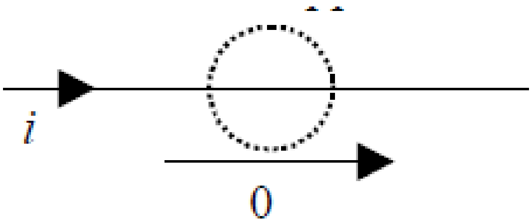


En parallèle : On transforme chaque générateur en M.E.N., puis on associe les sources de courant entre elles, et les dipôles linéaires entre eux :

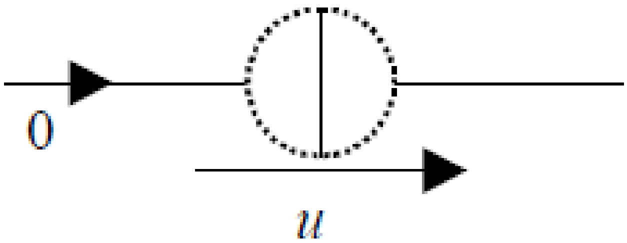


Remarques :

- Un conducteur parfait doit être considéré comme une source de tension nulle c'est à dire imposant : $U = 0$ quelque soit i.
- Rendre passive une source de tension consiste à poser $E_{TH} = 0$ c'est à dire que l'on transforme la source de tension en fil (conducteur parfait). Sur le schéma cela consiste à supprimer le cercle :



- Une coupure du circuit doit être considérée comme une source de courant nul c'est à dire imposant : $I = 0$ quelque soit u.
- Il peut être dangereux d'ouvrir une branche contenant un générateur de courant car cela revient à placer en série avec elle une source de courant nul.
- Rendre passive une source de courant consiste à poser $I_N = 0$ c'est à dire consiste à transformer la source de courant en coupure du circuit.
  Sur le schéma cela consiste à supprimer le cercle :



7. Théorème de superposition

Dans un circuit ne comportant que des éléments linéaires et plusieurs sources, on peut calculer le potentiel d'un nœud du circuit (ou le courant dans une branche) en faisant la somme des potentiels (ou des courants) obtenus lorsqu'on rend passif toutes les sources indépendantes sauf une. Il est en revanche nécessaire de laisser les sources liées.

a. Extinction d'une source libre

Source de tension :

Une source de tension n'agit plus lorsque sa tension est égale à zéro Volt. Il est donc naturel de la remplacer alors par un "court circuit" (résistance nulle).

Source de courant :

Une source de courant n'agit plus lorsque son courant est égal à zéro Ampère. Il est donc naturel de la remplacer alors par un "circuit ouvert" (résistance infinie).

b. Théorème de superposition

Énoncé 1 :

La tension entre deux points d'un circuit électrique linéaire comportant plusieurs sources d'énergie est égale à la somme des tensions obtenues entre ces deux points lorsque chaque source agit seule.

Le théorème s'applique aussi aux courants :

Énoncé 2 :

Le courant dans une branche AB d'un circuit électrique linéaire comportant plusieurs sources d'énergie est égal à la somme des intensités des courants dans cette branche lorsque chaque source agit seule.

Chapitre 3. CIRCUITS RC – RL – RLC SERIES SOUMIS A UN ECHELON

En électronique, les circuits RC et RL séries sont très couramment utilisés. Ils servent à filtrer certaines fréquences. On les trouvera par exemple dans les amplificateurs. Les filtres RC et RL sont utilisés dans les colonnes haut-parleurs pour aiguiller les fréquences sur les haut-parleurs (ainsi le HP de basses ne doit recevoir que les fréquences basses, le HP médium que les fréquences moyennes et le HP aiguës que les fréquences élevées). La qualité d'une colonne dépend en grande partie de la qualité des filtres utilisés.

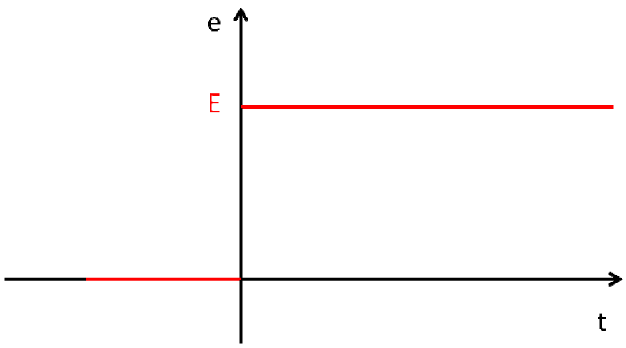
Pour ce cours, on considère la résistance interne de la bobine négligeable

I. Echelon de tension

Un échelon de tension est une tension de la forme :

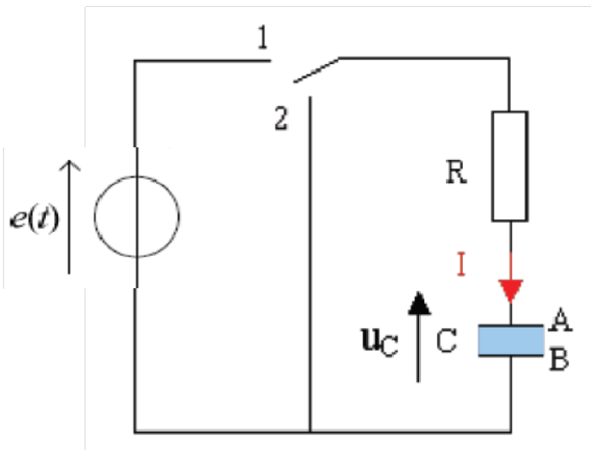
$e(t) = 0$ pour $t < 0$

$e(t) = E$ pour $t > 0$



II. Circuit R-C série

Soit le schéma électrique ci-dessous :



Le circuit comporte un condensateur en série avec une résistance, une source de tension et un interrupteur. Le sens positif choisi est les sens de circulation du courant. Il est indiqué par la flèche rouge.

1. Le fonctionnement du circuit

Lorsque l'interrupteur est en position 1, le courant circule dans le sens positif choisi.
Le générateur peut être considéré comme une pompe à électrons : les électrons circulent de l'armature A vers l'armature B, provoquant une accumulation de charges sur les armatures (les électrons ne se déplacent pas entre les armatures à cause de l'isolant). Si une charge négative quitte l'armature A, alors il apparaît sur cette armature une charge positive.

L'armature B du condensateur capte des électrons et présente une charge B une charge négative de sorte que, à tout instant :

$$q = q_B = -q_A$$

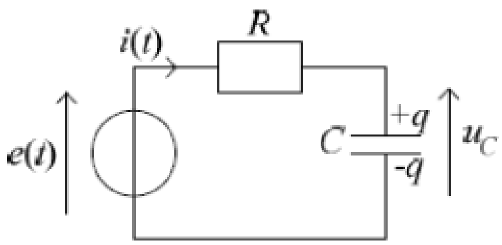
Petit à petit il se crée une différence de potentiel électrique entre les armatures A et B. Quand cette différence de potentiel est égale à celle de la pile le condensateur est chargé. Le courant ne circule plus dans le circuit.

Lorsque l'interrupteur est en position 2, le condensateur n'est plus connecté au générateur. Les électrons accumulés sur l'armature négative B lors de la charge du condensateur se déplacent vers l'armature positive A. les tensions aux bornes du conducteur ohmique et du condensateur diminuent progressivement.

2. Circuit RC soumis à un échelon de tension

a. A la charge du condensateur

L'interrruptur est en position 1 (t > 0) :



Avec les conventions du schéma, on a :

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad u_C = \frac{q}{C} \qquad u_R = Ri$$

Avec la loi des mailles, on obtient :

$$u_R + u_C - E = 0$$

Donc :

$$Ri + u_C = E$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$$

Ce qui correspond à :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Avec τ = RC : la constante de temps du circuit en seconde (s).

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme pour t > 0 :

$$u_C(t) = B + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

A et B sont des constantes. B est la solution particulière de l'équation et $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ la solution générale.

La solution particulière constante correspond au régime stationnaire, soit : $u_{CP}(t) = E$

Donc :

$$u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine A à partir des conditions initiales à t = 0 ;

Le condensateur impose la continuité de la tension $u_C(t)$ à ses bornes à t = 0, ainsi :

$u_C\ (0+) = u_C\ (0-) = 0$

$$u_C(0) = 0 = E + A$$

Donc : A = -E

On obtient alors pour t > 0:

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

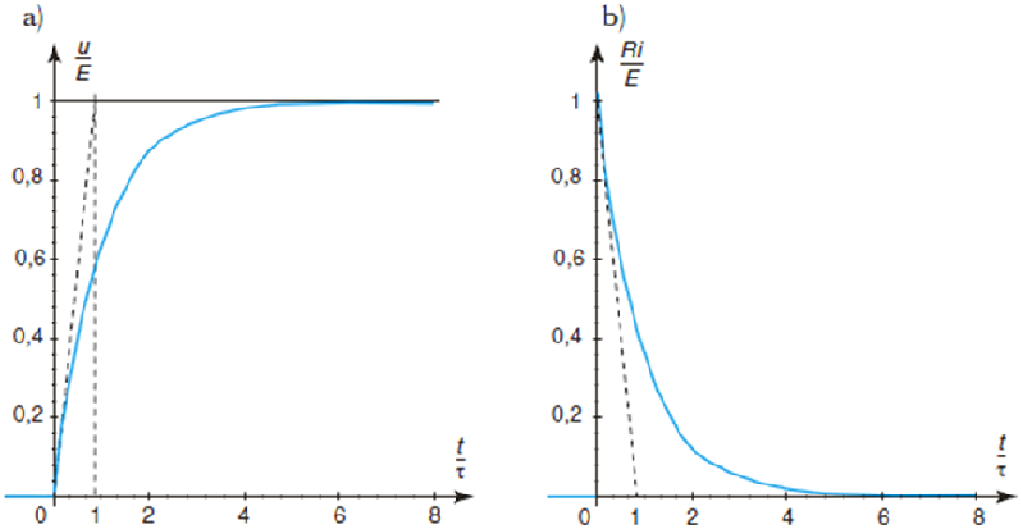
$$q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La courbe normalisée pour $u_C(t)$ est celle de u/E en fonction de t/τ.

La courbe normalisée pour i(t) est celle de Ri/E en fonction de t/τ.

Courbes normalisées des évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) pour un circuit RC soumis à un échelon de tension.



i. Détermination de la constante de temps du circuit

Méthode 1 : on connaît R et C. On calcule τ = RC ;

Méthode 2 : lecture graphique

- charge du condensateur : $u(\tau) = E\,(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63\ E$

Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe de charge u = f(t) dont l'ordonnée est égale à 0,63 E, on obtient τ.

- décharge du condensateur : $u(\tau) = E\,e^{-1} \approx 0{,}37\ E$.

Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe de décharge u = f(t) dont l'ordonnée est égale à 0,37 E, on obtient τ.

Méthode 3 : utilisation de la tangente à l'origine

- charge du condensateur : à t = 0, $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau}$

L'équation de la tangente à l'origine est de la forme : f(t) = at avec $a = \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau}$
La tangente à l'origine de la courbe $u_C = f(t)$ coupe l'asymptote $u_C = E$ au point d'abscisse t = τ.

- décharge du condensateur : à t = 0, $(\frac{du_C}{dt}) = -\frac{E}{\tau}$

La tangente à l'origine de la courbe de décharge $u_C = f(t) = -\frac{E}{\tau}t$ coupe l'axe des abscisses en t = τ

Pour t = τ, $u_C(\tau) = E\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63E$

ii. Aspect énergétique

L'énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire (de t = 0 à t = début de régime permanent est :

$$W_C = \frac{1}{2}Cu_{Cp}^2 - \frac{1}{2}Cu_{Ct=0}^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

Le condensateur se comporte comme un récepteur.

L'énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_G = \int_0^{\infty} Eidt = E\int_0^{\infty} idt = E\int_0^{\infty}\frac{E}{R}e^{-t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}dt$$

$$W_G = \frac{E^2}{R}\tau = CE^2$$

L'énergie reçue par la résistance pendant le régime transitoire :

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri^2dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{2R}\tau$$

$$W_R = \frac{1}{2}CE^2$$

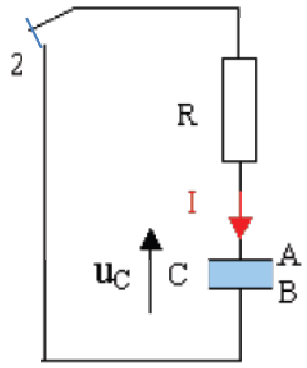
$$W_G = W_R + W_C$$

L'énergie délivrée par l'alimentation est équitablement répartie entre la résistance et le condensateur.

En régime permanent, le courant est nul, donc la puissance reçue par le circuit RC est nulle.

b.Circuit RC en régime libre : lors de la décharge du condensateur

Le condensateur est initialement chargé sous une tension E.



A t = 0, on ouvre l'interrupteur (l'interrupteur passe en position 2), le condensateur se décharge dans la résistance :

$$u_C = -\,u_R = -\,Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$$

La solution est de la forme :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Par la continuité de la tension aux bornes du condensateur à t = 0, on a u(0+) = u(0-) = E

Donc :

$$u_C(0) = A = E$$

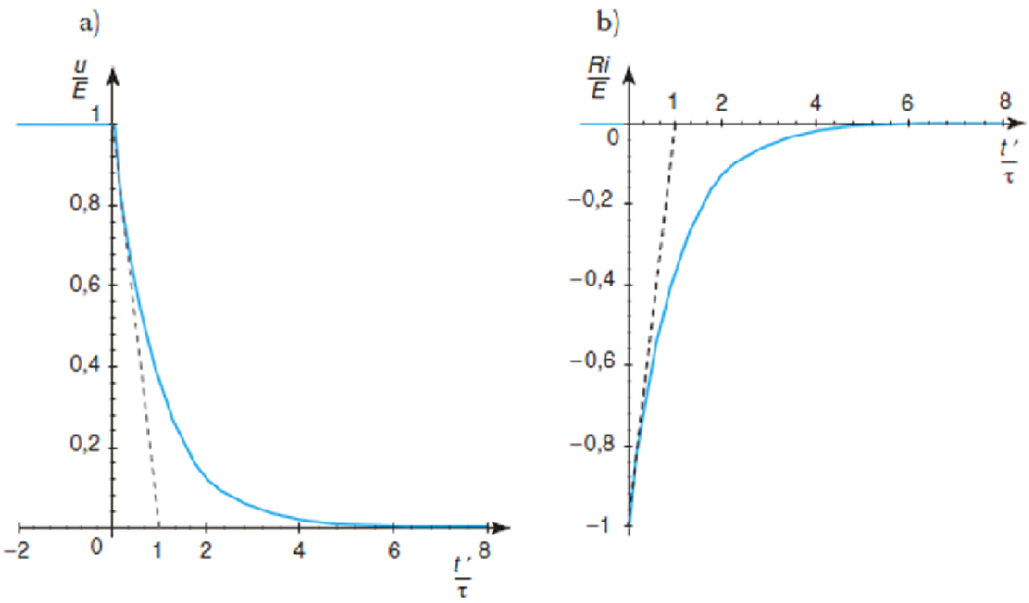
D'où pour t>0:

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$q(t) = CEe^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Courbes normalisées des évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) d'un circuit RC en régime libre.



D'un point de vue énergétique :

Le bilan d'énergie devient :

$$W_G = W_R + W_C = 0$$

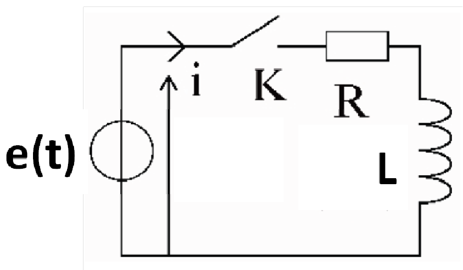
Soit : $W_R = -W_C = \frac{1}{2}CE^2$

Le condensateur restitue l'énergie stockée lors de la charge (comportement générateur) qui est dissipée par effet Joule dans la résistance.

III. Circuit R-L série

1.Circuit RC soumis à un échelon de tension

Considérons le schéma électrique ci-dessous :



Il s'agit d'un circuit comportant en série: une bobine d'inductance L, un conducteur ohmique de résistance R, un interrupteur. Ce circuit est soumis à un échelon de tension.

A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur.

a. Etablissement du courant dans le circuit RL

Avec les conventions du schéma, on a :

$$i = L\frac{di}{dt} \qquad u_R = Ri$$

Pour t > 0, la loi des mailles s'écrit :

$$u_R + u_L - E = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} - E = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

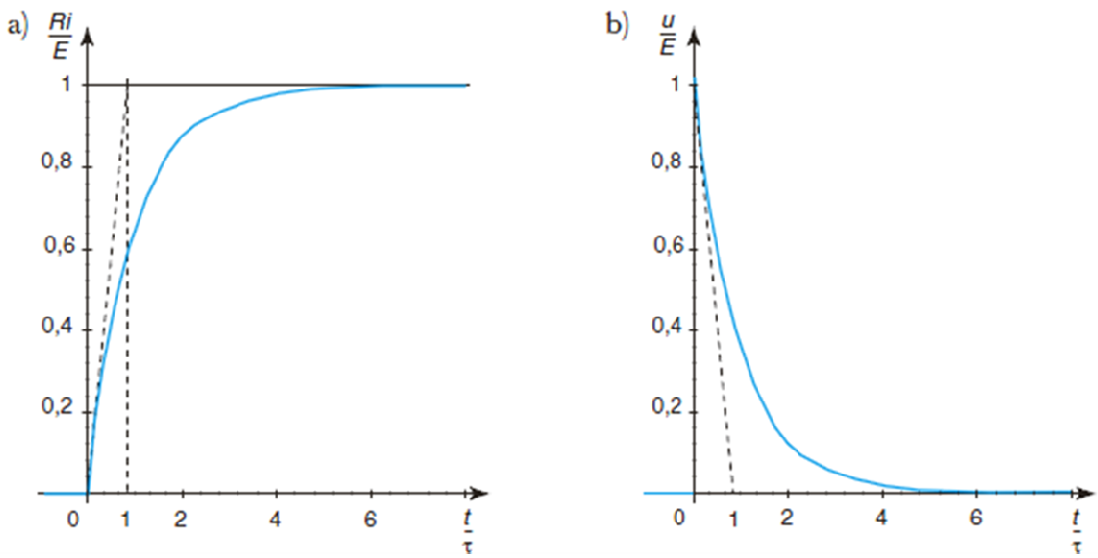
$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

Avec τ = L/R : la constante de temps du circuit en seconde (s).

En appliquant la même méthode de résolution que pour le circuit RC, on obtient :

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Évolutions de l'intensité (a) et de la tension (b) pour un circuit RL



i. Détermination de la constante de temps du circuit RL

On utilise les mêmes méthodes de détermination de la constante de temps de RC série.

<u>Méthode 1</u> : on connaît R et L. On déduit τ ;

<u>Méthode 2</u> : lecture graphique

Méthode 3 : utilisation de la tangente à l'origine

ii. Aspect énergétique

L'énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire est :

$$W_L = \frac{1}{2}Li_p^2 - \frac{1}{2}Li_{t=0}^2 = \frac{1}{2}LI_p{}^2 = \frac{1}{2}L(\frac{E}{R})^2$$

La bobine se comporte comme un récepteur.

L'énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

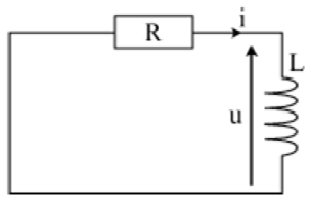
$$W_G = \int_0^{\infty} Eidt = \int_0^{\infty} Ri^2dt + \frac{1}{2}L(\frac{E}{R})^2 = W_R + W_L$$

$$W_G = W_R + W_L$$

En régime permanent, la puissance reçue par la bobine est nulle. La puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule.

2. Rupture du courant dans le circuit RL

A t = 0, on supprime le générateur E :



L'on obtient par application de la loi des mailles :

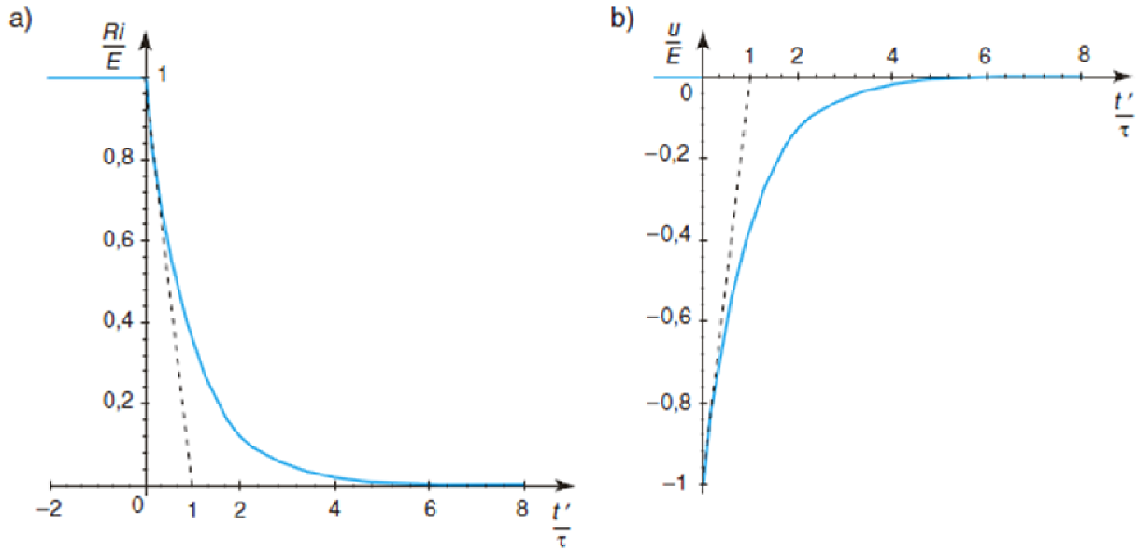
$$L\frac{di}{dt} = -Ri$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

En appliquant la même méthode de résolution que pour le circuit RC, on obtient :

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Courbes normalisées des évolutions de l'intensité (a) et de la tension (b) d'un circuit RL en régime libre.



3. Détermination de la constante de temps du circuit RL

On utilise les mêmes méthodes de détermination de la constante de temps de RC série.
Méthode 1 : on connaît R et L. On déduit τ ;

Méthode 2 : lecture graphique

Méthode 3 : utilisation de la tangente à l'origine

D'un point de vue énergétique :

Le bilan d'énergie devient :

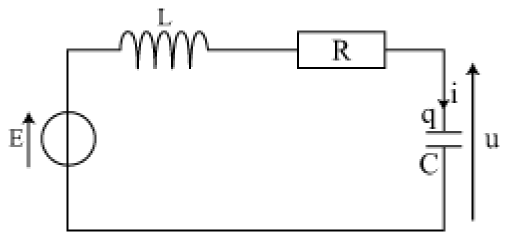
$$W_G = W_R + W_L = 0$$

Soit : $W_R = -W_L = \frac{1}{2} L (\frac{E}{R})^2$

La bobine restitue l'énergie stockée lors de la charge (comportement générateur) qui est dissipée par effet Joule dans la résistance.

IV. Circuit R-L-C série

1. Cadre de l'étude



Le condensateur est initialement déchargé et l'interrupteur ouvert ($u_C = 0$ et $i = 0$).

A t = 0, on ferme l'interrupteur :

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + u_C$$

Soit :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

La solution est de la forme $u_C(t) = {u_C}^{(h)} + {u_C}^{(p)}$

L'équation ${u_C}^{(h)}$ correspond à la solution pour le régime libre (décharge du condensateur).

La solution ${u_C}^{(p)} = E$.

2. La décharge du condensateur : oscillations électriques libres

Un condensateur chargé par un générateur de force électromotrice E se décharge dans un circuit comportant une bobine d'inductance L en série avec une résistance R.

En application de la loi des mailles :

$$u_C = u_R + u_L \qquad i = -C\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

Dans ce qui suit u = u_C.

On peut mettre l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E.}$$

- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit RLC. Elle s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ est la période propre du circuit RLC. Elle s'exprime en s.
- $\sigma = \dfrac{R}{2L\omega_0} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ est le coefficient d'amortissement du circuit RLC. C'est un paramètre sans dimension (nombre).
- On définit aussi le facteur de qualité Q par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\sigma}.$$

Afin de faciliter les calculs, réduisons l'équation différentielle précédente:

• En posant $x = \omega_0 t$, il vient : $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \omega_0 \frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 \frac{du}{dx}\right) = \omega_0^2 \frac{d^2u}{dx^2}$.

• En posant aussi $y = \frac{u}{E}$, la réduction de l'équation différentielle conduit à :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma \frac{dy}{dx} + y = 1.$$

L'équation différentielle obtenue est une équation différentielle normalisée ; x et y sont des variables sans dimension.

La méthode de résolution employée est la suivante :

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre en introduisant deux constantes.
2. Rechercher la solution particulière de l'équation différentielle complète.
3. Écrire la solution générale de l'équation différentielle complète avec les constantes.
4. Déterminer les constantes en écrivant les conditions initiales imposées au circuit, à savoir :
– continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ;
– continuité de l'intensité du courant qui traverse une bobine.

La solution générale de l'équation différentielle complète:

$y(t) = y_{Cp}(t) + y_{Ch}(t)$

La solution particulière $y_{Cp}(t)$ est $y_{Cp}(t) = 1$

Déterminons la solution $y_{Ch}(t)$ de l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma \frac{dy}{dx} + y = 0$$

L'équation caractéristique d'une telle équation différentielle est :

$$X^2 + 2\sigma X + 1 = 0$$

La nature des solutions dépend du caractère réel ou imaginaire des solutions du polynôme caractéristique de cette équation différentielle (à savoir du signe de son discriminant Δ) :

$$\Delta = 4\sigma^2 - 4 = 4(\sigma^2 - 1)$$

Le discriminant réduit est :

$$\Delta = \sigma^2 - 1$$

Les solutions de l'équation caractéristique sans 2nd membre

Si $\sigma > 1$, les solutions sont réelles : $r_1 = -\sigma + \sqrt{\Delta}$ et $r_2 = -\sigma - \sqrt{\Delta}$.
Si $\sigma < 1$, les solutions sont complexes. On pose : $\Delta = j^2\sqrt{-\Delta}$ avec $j^2 = -1$.
D'où : $\underline{r}_1 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$ et $\underline{r}_2 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$
Si $\sigma = 1$, la solution est double : $r_1 = r_2 = -1$.

3. Les différents régimes de fonctionnement

Si $\sigma > 1$ $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$, le discriminant est positif ; le régime est **apériodique**.

Si $\sigma < 1$ $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$, le discriminant est négatif ; le régime est **pseudo-périodique**.

Si $\sigma = 1$ $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$, le discriminant est nul ; le régime est **critique**.

Régime apériodique

Pour une résistance trop importante, il n'y a plus d'oscillation avant d'atteindre le régime permanent. La tension aux bornes du condensateur tend vers 0V sans osciller.

Régime pseudo-périodique

Pour des valeurs faibles de résistance, la décharge du condensateur dans un circuit RLC est oscillante amortie. Elle est pseudo-périodique de pseudo période T. Il ne s'agit pas d'une oscillation périodique car l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.

Régime critique

Le régime critique correspond à un amortissement plus important. Ce régime est la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique. Il n'a pas de réalité physique comme σ ne peut être exactement égal à 1.

4. Les solutions de l'équation complète suivant les différents régimes de fonctionnement

a. Les solutions de l'équation différentielle homogène (sans 2nd membre)

Si $\sigma > 1$, alors $y_{ssm} = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$ avec A_1 et A_2 constantes réelles.
Si $\sigma < 1$, alors $y_{ssm} = e^{-\sigma x}[B_1 \cos(\sqrt{-\Delta}\,x) + B_2 \sin(\sqrt{-\Delta}\,x)]$ avec B_1 et B_2 constantes réelles, ou $y_{ssm} = B' e^{-\sigma x} \cos(\sqrt{-\Delta}\,x + \varphi)$ avec B' et φ constantes réelles.
Si $\sigma = 1$, alors $y_{ssm} = e^{-x}[C_1 x + C_2]$ avec C_1 et C_2 constantes réelles.

b. Les solutions de l'équation différentielle complète

Si $\sigma > 1$, $y = 1 + A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$.

Si $\sigma < 1$, $y = 1 + e^{-\sigma x}[B_1 \cos(\sqrt{-\Delta}\, x) + B_2 \sin(\sqrt{-\Delta}\, x)]$ ou $y = 1 + B' e^{-\sigma x} \cos(\sqrt{-\Delta}\, x + \varphi)$.

Si $\sigma = 1$, $y = 1 + e^{-x}[C_1 x + C_2]$.

c. Détermination des constantes des solutions de l'équation différentielle complète

On détermine les constantes grâce aux conditions initiales en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

Conditions initiales imposées au circuit
À la fermeture de l'interrupteur (date $t = 0^+$) :

- la tension aux bornes du condensateur ne subit pas de discontinuité. S'il est initialement déchargé, alors : $u_{(0)} = 0$. D'où : $y_{(0)} = 0$.
- l'intensité du courant qui traverse la bobine ne subit pas de discontinuité donc :

$$i_{(0)} = C\left[\frac{du}{dt}\right]_{(0)} = 0 \Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = 0.$$

On en déduit les valeurs des constantes dans chacun des cas.

Régime apériodique

$$y_{(0)} = 1 + A_1 + A_2 = 0\,;\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$$
$$\Rightarrow A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}\,;\ A_2 = -\frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

Régime pseudo-périodique

$$y_{(0)} = 1 + B_1 = 0\,;\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = -\sigma B_1 + \sqrt{1-\sigma^2}\,;\ B_2 = 0$$
$$\Rightarrow B_1 = -1\,;\ B_2 = -\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Régime critique

$$y_{(0)} = 1 + C_2 = 0\,;\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = -C_2 + C_1 = 0$$
$$\Rightarrow C_2 = C_1 = -1.$$

d. Les solutions de l'équation différentielle complète

Régime apériodique

$$\boxed{\sigma > 1 \left(Q < \frac{1}{2}\right); \ \frac{u}{E} = 1 + \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0 t}.}$$

Régime pseudo-périodique

$$\boxed{\sigma < 1 \left(Q > \frac{1}{2}\right); \ \frac{u}{E} = 1 - e^{-\sigma\omega_0 t}\left[\cos(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}t) + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}t)\right]}$$

L'expression fait apparaître la pseudo-pulsation :

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}.$$

Pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

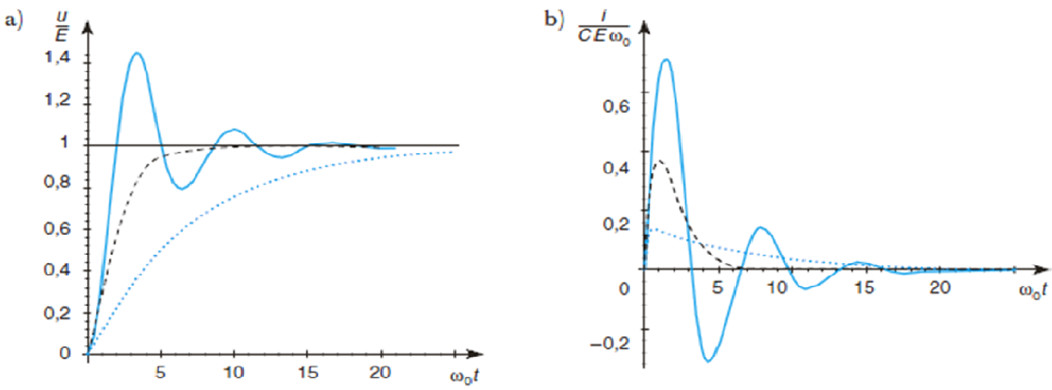
Régime critique

$$\boxed{\sigma = 1 \left(Q = \frac{1}{2}\right); \ \frac{u}{E} = 1 - e^{-\omega_0 t}[\omega_0 t + 1].}$$

L'expression de l'intensité se déduit de celle de la tension par la relation $i = C\frac{du}{dt}$.

5. Les caractéristiques

Évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) pour un circuit RLC soumis à un échelon de tension.



En trait fin, $\sigma = 0{,}25$ (régime pseudo-périodique) ; en points, $\sigma = 3{,}5$ (régime apériodique) ; en pointillés, $\sigma = 1$ (régime critique).

6. Aspect énergétique

L'énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire (de t = 0 à t = début de régime permanent est :

$$W_C = \frac{1}{2}Cu_{Cp}^2 - \frac{1}{2}Cu_{Ct=0}^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

L'énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire est :

$$W_L = \frac{1}{2}Li_p^2 - \frac{1}{2}Li_{t=0}^2 = 0$$

L'énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_G = \int_0^\infty Eidt = E\int_0^\infty idt = CE\int_0^\infty du = CE^2$$

L'énergie reçue par la résistance pendant le régime transitoire :

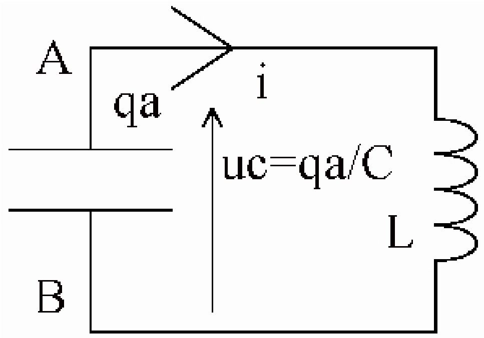
$$W_R = W_G - W_C - W_L = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet joule.

En régime permanent, le courant est nul, donc la puissance reçue par le circuit RLC est nulle.

7. Cas du régime périodique

On reprend un schéma identique au précédent. On charge le condensateur sous une tension E, puis on le décharge dans la bobine.



La tension u_c aux bornes du condensateur dans le circuit LC série est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u}{LC} = 0$$

La solution de ce type d'équation est :

$$u_C(t) = Acos(\frac{2\pi}{T_0}t + B)$$

A et B sont des constantes définies à partir des conditions initiales.

D'un point énergétique, le condensateur possède une énergie électrique Ee en série avec la bobine possédant une énergie magnétique Em. L'énergie totale emmagasinée par le circuit est égale à la somme de Ee et Em. L'énergie totale est constante car il n'y a pas de perte d'énergie (par effet joule) contrairement au dipôle RLC série lié à la présence de la résistance.

Chapitre 4. REGIME SINUSOIDAL FORCE

I. Signal électrique sinusoïdal

1. Notion de signal – Signal sinusoïdal

Un signal électrique est une grandeur électrique mesurable variant dans le temps ou dans l'espace et permettant de transporter une information.

Ce sont des courants ou des tensions électriques. On les caractérise par leur forme d'onde (continue, périodique, sinusoïdale,...), leur amplitude, leur fréquence.

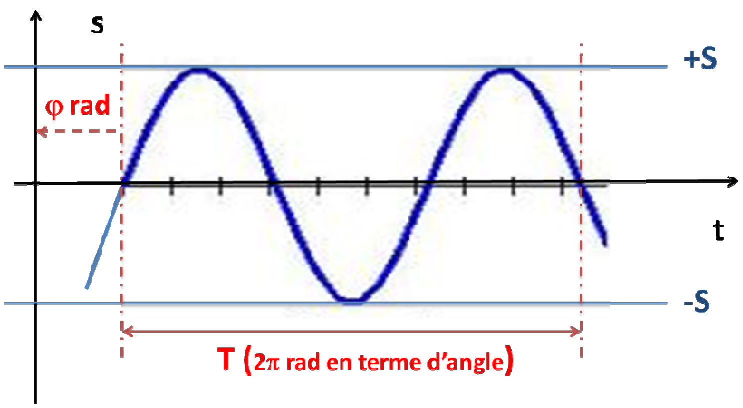
Une particularité des signaux électriques est leur facilité de transmission, d'acquisition et de stockage.

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les signaux sinusoïdaux.

2. Le signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal dont l'amplitude, observée à un endroit précis, est une fonction sinusoïdale du temps. Il peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = S.\cos(\omega t + \varphi)$$



S: Amplitude de la grandeur, appelée aussi valeur de crête. C'est la valeur maximal du signal qui varie de +S à –S.

ω : Pulsation de la grandeur en rad/s

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}, \text{avec F sa fréquence et T sa période}$$

La pulsation représente l'angle ω parcouru par la sinusoïde durant une seconde.
La fréquence f représente le nombre de périodes effectuées durant une seconde.
Une période T représente un angle de 2π rad.

φ: Phase à l'origine en radian La phase à l'origine (du temps) représente le décalage angulaire qu'il faut effectuer pour que la sinusoïde passe par 0 (cos ωt). Une sinusoïde qui "passe par zéro" dans le sens croissant, possède une phase à l'origine nulle ($\varphi = 0$).
$\omega t + \varphi$: est la phase du signal

L'importance des signaux sinusoïdaux est encore accrue par le fait que toute grandeur périodique peut se décomposer en somme de termes sinusoïdaux à l'aide de la décomposition en séries de Fourier (que nous aborderons au 2nd semestre).

3. Valeur moyenne et valeur efficace

On appelle **valeur moyenne** d'une grandeur périodique s(t) de période T le résultat :

$$S_{moy} = < s(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

Pour un signal sinusoïdal alternatif, on déduit immédiatement de la définition ci-dessus que la valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale est nulle

On appelle **valeur efficace** d'une grandeur périodique s(t) la racine moyenne du carré de cette grandeur calculée sur une période :

$$S_{eff} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}$$

Lors de l'utilisation des appareils de mesure, on retrouvera le terme en anglais pour la valeur efficace : «root-mean-square» ou en abrégé «rms».

Pour une grandeur sinusoïdale on obtient :

$$S_{eff} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

On notera :

$$s(t) = \sqrt{2}.S_{eff}.\cos(\omega t + \varphi)$$

4. Différence de phase entre deux signaux synchrones

Soit deux signaux sinusoïdaux synchrones tels que :

$$s_1(t) = S_1.\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = S_2.\cos(\omega t + \varphi_2)$$

La différence de phase φ entre les deux signaux est appelé **déphasage** entre les deux signaux.

On appelle **déphasage** φ de $s_1(t)$ par rapport à $s_2(t)$, la différence entre la phase à l'origine φ_1 et la phase à l'origine φ_2.

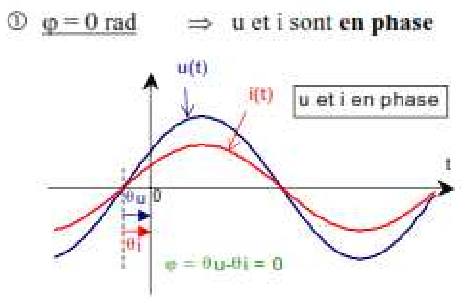
$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

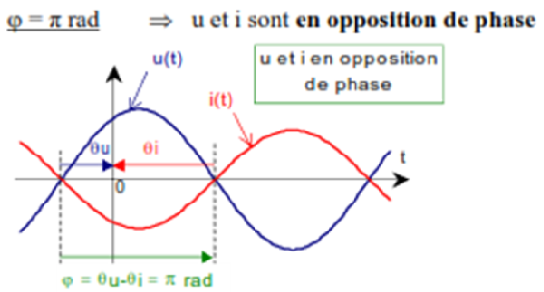
Si φ > 0, on dira que $s_2(t)$ est en retard par rapport à $s_1(t)$.

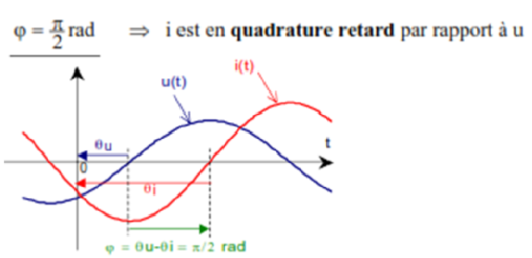
Cas particuliers :

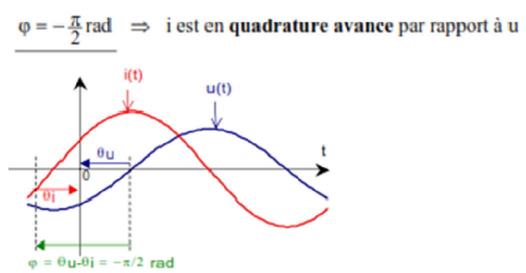
- φ = 0 rad : $s_2(t)$ et $s_1(t)$ sont en phase.
- φ = π rad : $s_2(t)$ et $s_1(t)$ sont en opposition de phase.
- φ = π/2 rad : $s_2(t)$ est en quadrature retard sur $s_1(t)$.
- φ = -π/2 rad : $s_2(t)$ est en quadrature avance sur $s_1(t)$.

Exemple : prenons deux signaux u(t) et i(t) avec θ_u la phase de u(t) et θ_i la phase de i(t).





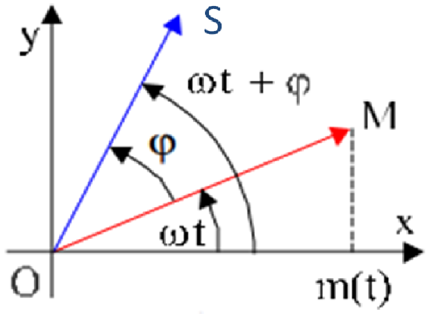




5. Représentation de Fresnel

Le vecteur $\vec{S}$ associé au signal sinusoïdal $s(t) = S.\cos(\omega t + \varphi)$ est appelé vecteur de Fresnel. Ce vecteur a les propriétés suivantes :

- Son origine est le point O
- L'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \vec{S})$ qu'il fait avec l'axe de référence Ox est égal à la phase ωt + φ
- Sa longueur représente la valeur efficace S_{eff} de s(t).



6. Représentation complexe d'un signal

<u>Rappels</u>

En mathématique :

Soit z un nombre complexe. z peut être présenté de différentes manières :

- Sous forme cartésienne :
  - algébrique : $z = x + iy$
  - ou vectorielle : z = (x,y)
- En coordonnées polaires :
  - exponentielle : $z = \rho . e^{j\varphi} = |z|e^{j.argz}$
  - ou vectorielle : z = (ρ,φ)
  - ou trigonométrique : $z = \rho(cos\varphi + jsin\varphi)$

ρ = |z| représente le module de z.

Pour la notation cartésienne, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Un argument du nombre complexe z est noté de façon simplifiée par :

$$\arg z = \varphi \ mod \ 2\pi$$

L'intérêt de la notation complexe est lié à la facilité d'effectuer des opérations sur les complexes.

Nous aurons par exemple :

$|\underline{Z}_1\underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1||\underline{Z}_2|$ $\qquad$ $\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$

$\arg(\underline{Z}_1\underline{Z}_2) = \arg \underline{Z}_1 + arg\ \underline{Z}_2$ $\qquad$ $\arg\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \arg \underline{Z}_1 - arg\ \underline{Z}_2$

$\arg(a > 0) = 0$ $\qquad$ $\arg(a < 0) = \pi$

$\arg(ja)(a > 0) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\arg(ja)(a < 0) = -\frac{\pi}{2}$

$|\overline{z}| = |z| = |-\overline{z}| = |-z|$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z

$z.\overline{z} = |z|^2$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$ ou $z_1 = \lambda z_2$.

<u>Dérivation et intégration</u>

Pour $\underline{x}(t) = X_m.e^{j(\omega t+\varphi)}$, on obtient :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega\underline{x}$$

$$\int \underline{x}dt = \frac{1}{j\omega}\underline{x}$$

Signal sinusoïdal

A une grandeur réelle de la forme $x(t) = X_m.\cos(\omega t + \varphi)$, on peut associer la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m.e^{j(\omega t+\varphi)}$$

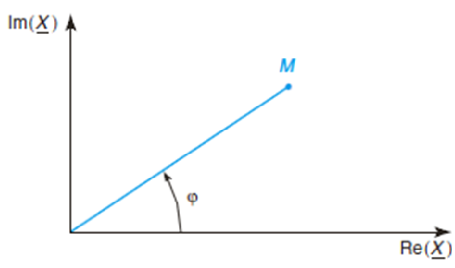
$x(t)$ est la partie réelle de $\underline{x}(t)$; on écrit $x(t) = Re(\underline{x}(t))$

On appelle $\underline{X}_m = X_m.e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe de $\underline{x}(t)$.

On a :

$$\begin{cases} le\ module X_m\ de\ \underline{X}_m : \ X_m = |\underline{X}_m| \\ l'argment\ \varphi\ de\ \underline{X}_m : \ \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases}$$

La représentation complexe de $\underline{X}_m$est :



$\|\overrightarrow{OM}\| = X_m \quad (\widehat{Ox\,;\,OM}) = \varphi$

On a donc pour le nombre complexe $\underline{x}(t)$:

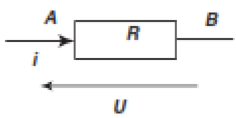
$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m.e^{j\omega t}$$

On peut ainsi associer à la grandeur réelle x(t), l'amplitude complexe $\underline{X}_m$.

7. Impédance complexe

a. Définitions

Considérons un dipôle linéaire représenté comme suit :



i(t) et u(t) sont grandeurs réelles sous forme sinusoïdales de même pulsation comme le dipôle est linéaire.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi i)$$

$$\underline{i}(t) = I_m e^{(j\omega t + \varphi i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi u)$$

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi u)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

La loi d'Ohm en représentation complexe est :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}.\underline{i}(t)$$

$$\underline{U}_m = \underline{Z}.\underline{I}_m$$

L'**impédance complexe** est définit par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi u}}{I_m e^{j\varphi i}}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi u} e^{-j\varphi i}}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi u - \varphi i)}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

Avec $Z = \frac{U_m}{I_m}$ et $\varphi = \varphi u - \varphi i$, alors :

Z le module de $\underline{Z}$ est **l'impédance** (en Ω) : $Z = |\underline{Z}|$

φ : Déphasage entre u(t) et i(t) et $\varphi = arg\underline{Z}$

On appelle **admittance complexe $\underline{Y}$**, l'inverse de l'impédance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi}$$

$$\underline{Y} = Ye^{-j\varphi}$$

Y le module de $\underline{Y}$ est **l'admittance** (en Siemens S) : $Y = |\underline{Y}|$

b. Applications sur les dipôles linéaires

i. Résistance

Pour une résistance (linéaire) u= R.i

En représentation complexe, $\underline{u} = R.\underline{i}$

Donc :

L'impédance complexe d'une résistance est : $\underline{Z} = R$

L'impédance d'une résistance est : $Z = |\underline{Z}| = \underline{Z} = R$

La tension aux bornes de la résistance est en phase avec le courant qui le traverse : φ = 0.

ii. Condensateur idéal

Pour un condensateur idéal (linéaire) i = $C\frac{du_C}{dt}$

En représentation complexe, $\underline{i} = C\frac{d\underline{u}_C}{dt}$

$$\underline{i} = j\omega C\underline{u}_C$$

Donc :

$$\underline{I}_m = j\omega C\underline{U}_m$$

Donc :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'impédance complexe d'un condensateur idéal est : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'impédance d'un condensateur idéal est : $Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$

La tension aux bornes de la bobine est en retard de phase avec le courant qui le traverse (à démontrer) :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

On dira que **u(t) est en quadrature retard par rapport à i(t)**.

<u>Cas limites :</u>

En haute fréquence (ω → ∞), Z → 0 : le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

En basse fréquence (ω → 0), Z → ∞ : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

iii. Bobine

Pour une bobine idéale (linéaire) u(t) = $L\frac{di_L}{dt}$

En représentation complexe, $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}_L}{dt}$

$$\underline{u}(t) = j\omega L\underline{i}_L$$

Donc :

$$\underline{U}_m = j\omega L\underline{I}_m$$

Donc :

$$\underline{Z} = jL\omega$$

L'impédance complexe d'une bobine idéale est : $\underline{Z} = jL\omega$

L'impédance d'une bobine idéale est : $Z = |\underline{Z}| = L\omega$

La tension aux bornes de la bobine est en avance de phase avec le courant qui le traverse (à démontrer):

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

On dira que **u(t) est en quadrature avance par rapport à i(t)**.

Cas limites :

En haute fréquence ($\omega \to \infty$), $Z \to \infty$: le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En basse fréquence ($\omega \to 0$), $Z \to 0$: le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

c. Applications sur les lois de Kirchhoff

Tous les résultats trouvés en courant continu restent valables en régime sinusoïdal forcé à condition de travailler avec les grandeurs complexes.

Ainsi nous aurons :

- **La loi des mailles**
  La loi des mailles vue dans le chapitre I est valable pour les tensions instantanées $u_k(t)$ comme l'on est dans le cadre de l'ARQS.
  Le long d'une maille donnée, on a :

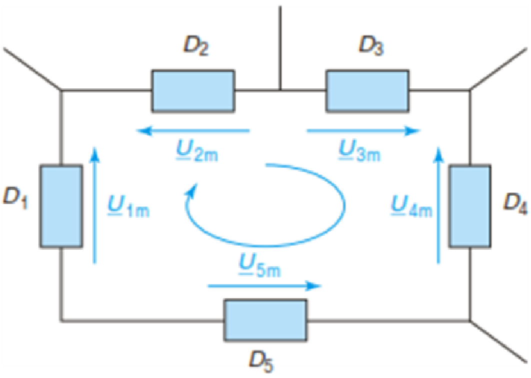
$$\sum \varepsilon_k u_k = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$$

  Avec $u_k(t) = u_{km} e^{j(\omega t + \varphi u)}$ $\quad \underline{u}_k(t) = \underline{U}_{km} e^{j\omega t}$
  ε_k = +1 si la flèche tension pour l'amplitude est dans le sens du parcours
  ε_k = -1 si la flèche tension pour l'amplitude est dans le sens opposé au sens du parcours.

  En divisant cette relation par $e^{j\omega t}$, on obtient :

$$\sum \varepsilon_k \underline{U}_{km}(t) = 0$$

  Exemple :



Maille parcourue dans le sens horaire

$$\underline{U}_{1m} - \underline{U}_{2m} + \underline{U}_{3m} - \underline{U}_{4m} - \underline{U}_{5m} = 0$$

- **La loi des nœuds**
  La loi des nœuds vue dans le chapitre I est valable pour les intensités instantanées $i_k(t)$ comme l'on est dans le cadre de l'ARQS.

A un nœud N donné, on a :

$$\sum \varepsilon_k i_k = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$$

Avec $i_k(t) = i_{km} e^{j(\omega t + \varphi u)}$ $\quad \underline{i}_k(t) = \underline{I}_{km} e^{j\omega t}$

ε_k = +1 si l'intensité est orienté vers le nœud

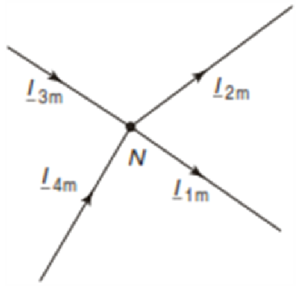
ε_k = -1 si l'intensité est orienté à partir du nœud

En divisant cette relation par $e^{j\omega t}$, on obtient :

$$\sum \varepsilon_k \underline{I}_{km} = 0$$

La somme des amplitudes complexes des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des amplitudes complexes des courants qui en partent.

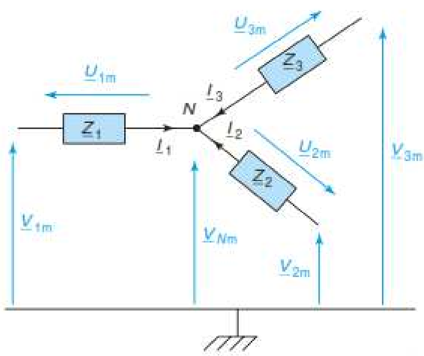
Exemple



$$\underline{I}_{3m} + \underline{I}_{4m} - \underline{I}_{1m} - \underline{I}_{2m} = 0.$$

8.Théorèmes généraux en notation complexe

a. Loi des nœuds en termes de potentiel



La loi des nœuds :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\frac{\underline{V}_{1m} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{2m} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{3m} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_3} = 0$$

$$\underline{V}_{N\mathrm{m}} = \frac{\dfrac{\underline{V}_{1\mathrm{m}}}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{V}_{2\mathrm{m}}}{\underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{V}_{3\mathrm{m}}}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}}$$

$$\text{ou} \quad \underline{V}_{N\mathrm{m}} = \frac{\underline{Y}_1\underline{V}_{1\mathrm{m}} + \underline{Y}_2\underline{V}_{2\mathrm{m}} + \underline{Y}_3\underline{V}_{3\mathrm{m}}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

On retrouve le théorème de Millmann.

b. Modélisation de dipôle actif

Source ou générateur idéal de tension

C'est un dipôle actif qui impose une tension $e(t) = E_\mathrm{m}\cos(\omega t + \psi)$ entre ses bornes, $e(t)$ est appelée force électromotrice (f.é.m.).
On note $\underline{e}(t) = \underline{E}_\mathrm{m}\exp\mathrm{j}(\omega t)$ avec $\underline{E}_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\psi)$.
En général, on choisit $\psi = 0$.

Source ou générateur idéal de courant

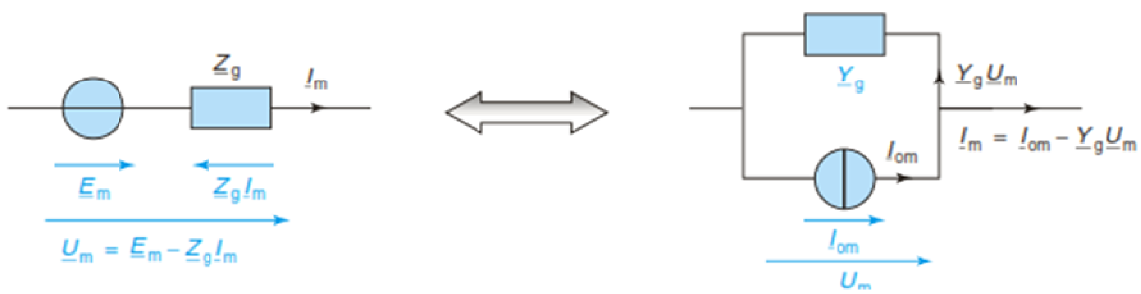
C'est un dipôle actif qui impose un courant d'intensité $i_0(t) = I_{0\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)$.
$i_0(t)$ est appelé courant électromoteur (c.é.m.), dans la branche dans laquelle il est placé.
On note $\underline{i}_0(t) = \underline{I}_{0\mathrm{m}}\exp\mathrm{j}(\omega t)$ avec $\underline{I}_{0\mathrm{m}} = I_{0\mathrm{m}}\exp(\mathrm{j}\phi)$.
En général on choisit $\phi = 0$.

Modélisation d'un générateur réel

Dans de nombreuses applications, l'expérience montre qu'on peut modéliser un générateur réel par l'association :

- d'un générateur idéal de tension (f.é.m. d'amplitude complexe $\underline{E}_\mathrm{m}$) et d'un dipôle en série dont l'impédance est appelée impédance interne du générateur ($\underline{Z}_\mathrm{g}$).
- ou d'un générateur idéal de courant (c.é.m. d'amplitude complexe $\underline{I}_{0\mathrm{m}}$) et d'un dipôle en parallèle dont l'admittance est appelée admittance interne du générateur ($\underline{Y}_\mathrm{g}$).

Ces deux générateurs sont équivalents, les relations qui relient leurs caractéristiques sont établies ci-dessous, elles sont équivalentes à celles obtenues en régime permanent



$$\underline{U}_m = \underline{E}_m - \underline{Z}_g \underline{I}_m \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} \qquad \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} = \underline{I}_{om} - \underline{Y}_g \underline{U}_m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_{om} = \dfrac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} \\ \underline{Y}_g = \dfrac{1}{\underline{Z}_g} \end{cases}$$

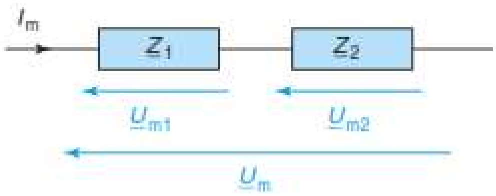
c. Lois d’association

i. Association en série

- **Association pour des impédances**
  N dipôles d’impédances complexes $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots, \underline{Z}_N)$ associés en série sont équivalents à un seul dipôle d’impédance complexe $\underline{Z}_{eq}$ égale à la somme des impédances complexes de chacun d’eux.

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_N$$

- **Diviseur de tension**



$$\underline{U}_{1m} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_m$$

$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_m$$

- **Générateurs en série**
  Soit N générateurs en série caractérisés par l’amplitude complexe de leurs fém et impédances internes complexes $(E_{1m}, \underline{Z}_{g1})$, $(E_{2m}, \underline{Z}_{g2})$,…., $(E_{Nm}, \underline{Z}_{gN})$.
  Ces N générateurs sont équivalents à un seul générateur de fém d’amplitude complexe E_{eqm} et d’impédance interne complexe $\underline{Z}_{eq}$

$$\begin{cases} \underline{E}_{eqm} = \varepsilon_1 \underline{E}_{1m} + \varepsilon_2 \underline{E}_{2m} + \cdots + \varepsilon_k \underline{E}_{km} + \cdots + \varepsilon_N \underline{E}_{Nm} \\ \underline{Z}_{geq} = \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \cdots + \underline{Z}_{gN} \end{cases}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche correspond à $\underline{E}_{km}$ est dans le même sens que celle correspondant à $\underline{E}_{eqm}$ et $\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

- **Loi de Pouillet**
  L'intensité circulant dans une maille constituées de N dipôles d'impédances complexes $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots., \underline{Z}_N)$ et N générateurs associés en série, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs fém et impédances internes (E_{1m}, Z_{g1}), (E_{2m}, Z_{g2}),…., (E_{Nm}, Z_{gN}) est :

$$\underline{I}_m = \frac{\varepsilon_1 \underline{E}_{1m+} \varepsilon_2 \underline{E}_{2m+} + \cdots + \varepsilon_N \underline{E}_{Nm}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_N + \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \cdots + \underline{Z}_{gN}}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche correspond à $\underline{E}_{km}$ est dans le même sens que celle correspondant à $\underline{E}_{eqm}$ et $\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

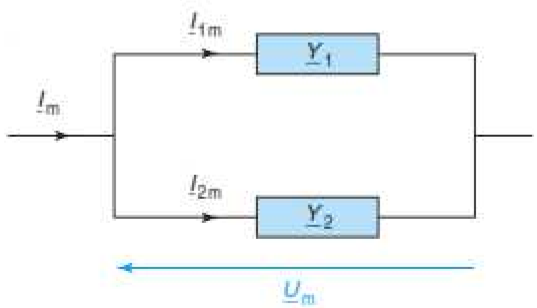
ii.Association en parallèle

- **Association pour des admittances**
  N dipôles d'admittance complexes $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots., \underline{Z}_N)$ associés en parallèle sont équivalents à un seul dipôle d'admittance complexe $\underline{Y}_{eq}$ égale à la somme des admittances complexes de chacun d'eux.

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \cdots + \underline{Y}_N$$

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\underline{Z}_N}$$

- **Diviseur de courant**



$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_m$$

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_m$$

- **Générateur en parallèle**

On considère N générateurs associés en parallèle, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs c.é.m. et admittances internes $(\underline{I}_{0m1}, \underline{Y}_{g1})$, $(\underline{I}_{0m2}, \underline{Y}_{g2})$, …, $(\underline{I}_{0mN}, \underline{Y}_{gN})$.
Ces N générateurs sont équivalents à un seul générateur de c.é.m. d'amplitude complexe $\underline{I}_{eqm}$ et d'admittance interne $\underline{Y}_{eq}$.

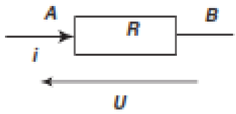
$$\begin{cases} \underline{I}_{\text{eqm}} = \varepsilon_1 \underline{I}_{0\text{m}1} + \varepsilon_2 \underline{I}_{0\text{m}2} + \cdots + \varepsilon_k \underline{I}_{0\text{m}k} + \cdots + \varepsilon_N \underline{I}_{0\text{m}N} \\ \underline{Y}_{\text{geq}} = \underline{Y}_{\text{g}1} + \underline{Y}_{\text{g}2} + \cdots + \underline{Y}_{\text{g}N} \left(\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{geq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{g}1}} + \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{g}2}} + \cdots + \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{g}N}} \right) \end{cases}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche correspondant à $\underline{I}_{0k}$ est dans le même sens que celle de $\underline{I}_{0\text{eq}}$) et $\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

II. Puissance en régime sinusoïdal forcé

1. Puissance instantanée

Soit u(t) = U_m.cos(ωt+φu), la tension aux bornes d'un dipôle linéaire quelconque orienté en convention récepteur et i(t) = I_m.cos(ωt+φi) l'intensité du courant le traversant.



La puissance instantanée reçue par le dipôle :

$$p(t) = u(t).i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi u) \cos(\omega t + \varphi i)$$

$$p(t) = u(t).i(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi u + \varphi i) + \cos(\varphi u - \varphi i)]$$

Point Math :

$$\cos b \cos(a) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

En posant φ = φu - φi,

$$p(t) = u(t).i(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi u + \varphi i) + \cos(\varphi)]$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) + \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi u + \varphi i)]$$

Le premier terme de la somme est appelé **puissance moyenne**, le deuxième terme de la somme **puissance fluctuante**. Cette somme correspond à une puissance sinusoïdale de fréquence double de celle du courant et de la tension et dont la position moyenne est égale à la puissance active.

2. Puissance moyenne – facteur de puissance

La puissance moyenne est :

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2}[\cos\ \varphi]$$

Le terme cos φ est le **facteur de puissance** du dipôle.

3. Puissance moyenne : autre expression

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2}[\cos\ \varphi]$$

En régime sinusoïdale,

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

On a aussi :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Donc :

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

La puissance active ne dépend que des valeurs efficaces de l'intensité et de la tension et du déphasage existant entre ces deux grandeurs. Il faut que $\cos\varphi$ soit le plus grand possible pour que I_{eff} soit minimale : afin de minimiser les pertes joules.

4. Puissance moyenne reçue par les dipôles linéaires

a. Resistance

Le déphasage φ entre u et i est nul. On a donc :

$$P_{Rmoy} = U_{eff} I_{eff}$$

Puisque $U_m = Ri_m$, on a aussi : $U_{eff} = Ri_{eff}$

$$P_{Rmoy} = RI^2{}_{eff}$$

Cette puissance dissipée sous forme de chaleur.

b. Condensateur et bobine

Le déphasage φ entre u et i pour une bobine et un condensateur est respectivement :

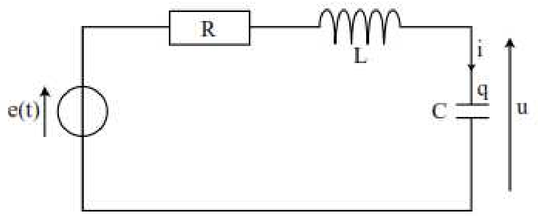
+π/2 et -π/2. On a donc :

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi = 0$$

Ces dipôles ne reçoivent donc pas, en moyenne, de puissance : ils en reçoivent autant qu'ils en fournissent. Les bobines et condensateurs échangent réversiblement de l'énergie avec le reste du circuit .

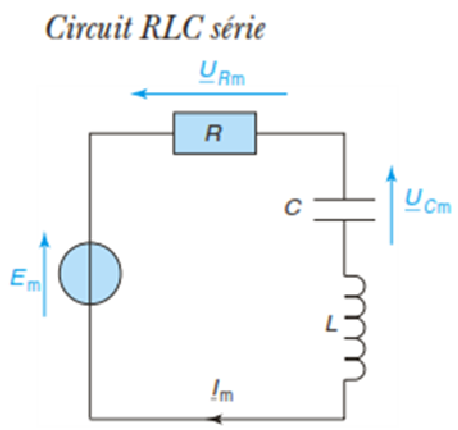
III. Le circuit RLC série en régime sinusoïdal

Soit un circuit RLC série avec à ses bornes une tension sinusoïdale $e(t) = E_m.\cos(\omega t)$. $\omega = 2\pi f$ avec f la fréquence du signal. Supposons la bobine et le condensateur idéaux.



1. Résonance en intensité

Le schéma complexe équivalent est :



$$\underline{E}_m = E_m \quad \text{et} \quad \underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi).$$

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad \text{et} \quad I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La courbe représentant $I_m(\omega)$, l'amplitude de l'intensité du courant, s'appelle courbe de résonance en intensité.

$I_m(0) = 0$ et $\lim_{\omega \to \infty} I_m = 0$. I_m étant positif, cette courbe passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on appellera ω_r, la pulsation de résonance.

Le numérateur étant indépendant de ω, I_m est maximum lorsque le dénominateur est minimum.

$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on obtient donc $\omega_r = \omega_0$.

$$I_{mmax} = I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}$$

Soit ω_1 et ω_2 deux pulsations situées de part et d'autre de ω_r telles que :

$$I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

La bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Pour tout ω de la bande passante,

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}}$$

Déterminons ω_2 et ω_1 :

$$\Rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

$$R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \pm R = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

$$\omega^2 - \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

Donc

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ et } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q} \left(\text{car } Q = \frac{L\omega_0}{R}\right), \text{ on a donc :}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

a. Etude du déphasage

On veut trouver la phase $\varphi = \arg \underline{I}_m$

$$\varphi = \arg \underline{I}_m \Rightarrow \varphi = -\varphi', \text{ avec } \varphi' = \arg\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right).$$

$$\tan\varphi' = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ ; puisque } \tan(-\varphi) = -\tan\varphi, \text{ on a :}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

Point maths. Soit $\underline{x} = a + jb$, a et b étant des grandeurs réelles. Alors on a :

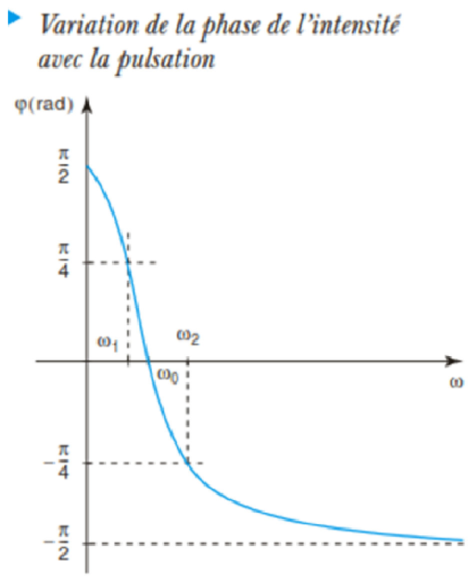
$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{\underline{x}}\right) = -\arg(\underline{x}).$$

La phase φ est donnée par sa tangente, il y a donc une indétermination sur le domaine de définition de la phase ; étudions le signe de $\cos\varphi$.

$$\cos\varphi = \cos -\varphi' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} > 0$$

Donc

$$: \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right].$$



b.Comparaison des courbes $I_m(\omega)$ selon Q

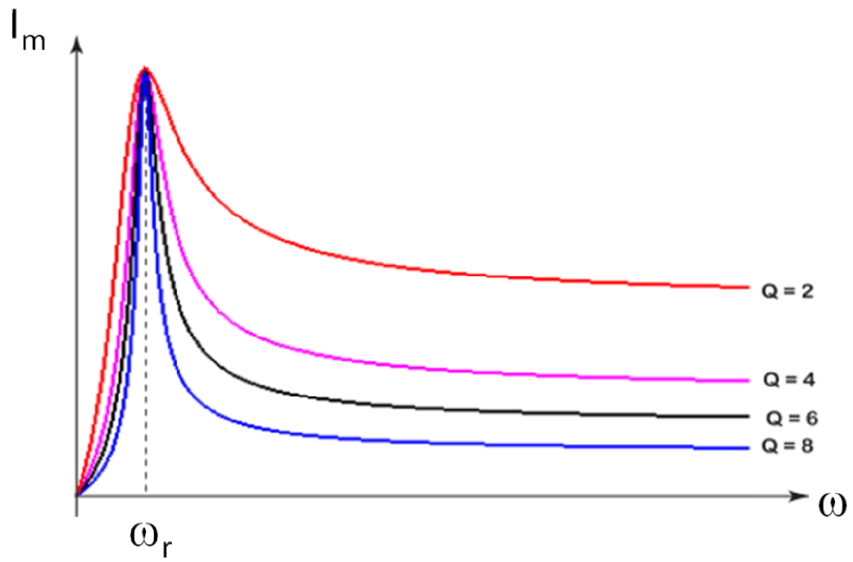
On a : $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$

On peut déduire que le facteur de qualité Q caractérise la resonance.

Plus Q est important, plus $\Delta\omega$ est petit et donc plus la resonance est dite « aigue ».

Plus Q est petit, plus $\Delta\omega$ est grand et donc plus la resonance est dite « floue ».

Sur le graphe $I_m(\omega)$: on observe que plus Q est grand plus le pic se resserre (résonance aigue). Plus Q est petit, plus le pic devient large (résonance floue). On constate aussi que ω_r est indépendant de Q.

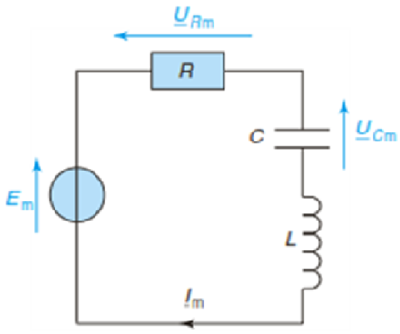


2. Résonance en tension aux bornes du condensateur

Tout comme la courbe représentant $I_m(\omega)$ s'appelle courbe de résonance en intensité, la courbe de résonance en tension aux bornes du condensateur sera représentée par $U_{Cm}(\omega)$.

Pour ce faire on cherche $\underline{U}_{Cm}$. Nous appliquons le diviseur de tension sur le schéma ci-dessous :

Circuit RLC série



On trouve :

- $\underline{U}_{cm} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{jC\omega}\right)E}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$;
- $U_{cm} = |\underline{U}_{cm}| = \dfrac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$;
- $U_{cm}(0) = E$ et $\lim\limits_{\omega \to \infty} U_{cm}(\omega) = 0$.

En utilisant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$, et en notant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, on peut écrire :

$$U_{cm} = \frac{E}{D} \text{ avec } D = \sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}$$

U_{cm} passe par un maximum si D, et donc D^2, passe par un minimum.
On doit calculer la dérivée de D. Il revient au même, et c'est plus simple, de dériver D^2 :

$$\frac{dD^2}{dx} = 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}, \text{ d'où } \frac{dD^2}{dx} = 0 \text{ si } 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2}.$$

On obtient donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

Cette fonction croissante avec Q n'est définie que si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} \geqslant 0$, donc si $Q \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La courbe $U_{cm}(\omega)$ passe donc par un maximum pour $Q \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. On parle de résonance de tension aux bornes du condensateur ou de résonance de charge car la charge du condensateur est proportionnelle à la tension.

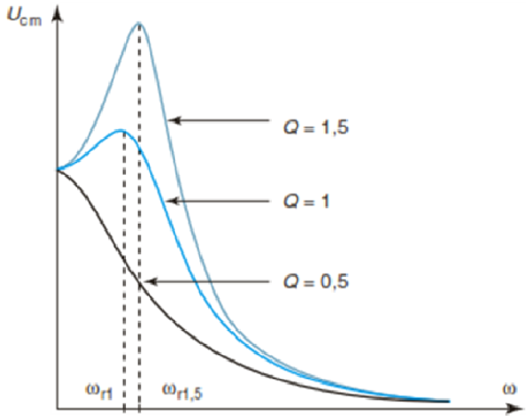
Il y a deux différences importantes entre la résonance d'intensité et la résonance de charge : la résonance de charge n'existe que pour des valeurs de Q suffisamment grandes et quand elle existe, la pulsation de résonance dépend de Q.

Le calcul conduit à $U_{cm}(\omega_r) = \dfrac{QE}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$.

Pour Q >> $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $U_{cm}(\omega_r) = QE$: on peut atteindre des valeurs d'amplitude U_{cm} très élevées. C'est le phénomène de surtension. Q sera alors le facteur de surtension.

3. Evolution de $U_{Cm}(\omega)$ selon Q

Variation de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation pour Q = 0,5 ; 1 et 1,5.



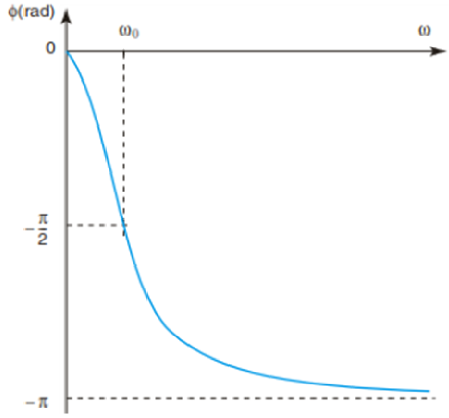
On constate bien sûr sur ce graphe qu'il n'y a pas de résonance si $Q = 0,5$ $\left(Q < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71\right)$ et que la pulsation de résonance est d'autant plus grande que Q est grand ($\omega_{r1} < \omega_{r1,5}$).

4. Etude du déphasage

$$\underline{U}_{cm} = \left(\frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I}_{cm} \Rightarrow \phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

La courbe représentant ϕ en fonction de ω se déduit donc de la courbe représentant φ par un simple décalage vers le bas de $-\frac{\pi}{2}$, donc $\phi \in [0 ; -\pi]$.

- *Variation de la phase de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation*



5. Aspect énergétique

a. Bilan des puissances moyennes

En faisant la valeur moyenne du bilan des puissances instantanées, on obtient :

$$\langle p_L \rangle + \langle p_C \rangle + \langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle.$$

Or nous avons vu que les puissances moyennes reçues par une bobine et un condensateur sont nulles, on a donc : $\langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle$.

b. Résonance en puissance

L'expression de la puissance moyenne est :

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2}[\cos\ \varphi]$$

On sait que :

$$U_m = Z I_m$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jS$$

Donc :

$$R = Z\cos\varphi \qquad et \qquad S = Z\sin\varphi$$

On peut écrire la puissance moyenne de la manière suivante :

$$P_{moy} = \frac{ZI^2{}_m}{2}[\cos\ \varphi] = \frac{RI^2{}_m}{2}$$

La valeur efficace d'un courant i(t) est définit comme l'intensité du courant continu qui dissiperait la même énergie que i(t) à travers une résistance R sur une période T. La puissance moyenne reçue par cette résistance serait donc :

$$P_{Rmoy} = \frac{RI^2{}_m}{2} = RI^2{}_{eff}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Nous avons montré plus haut (page 60) que :

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

et $I_{\mathrm{e}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$, donc $\mathcal{P}_{\mathrm{Rmoy}} = RI_{\mathrm{e}}^2 = R\frac{E_{\mathrm{m}}^2}{2\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)}$.

En utilisant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, on obtient l'expression :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Rmoy}} = \frac{E_{\mathrm{m}}^2}{2R\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}.$$

La courbe $P_{Rmoy}(\omega)$ est la courbe de résonance en puissance. La puissance moyenne étant lié à l'amplitude de l'intensité du courant (proportionnelle au carré de l'amplitude de l'intensité du courant), on peut dire que la courbe de résonance en puissance est aussi liée à la courbe de résonance en intensité.

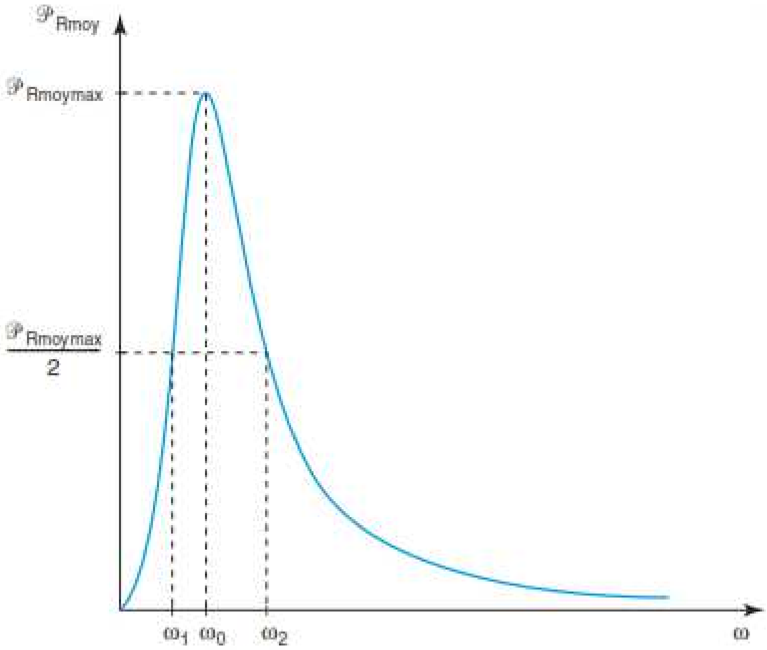
On peut déduire que :

Les caractéristiques de la résonance de puissance sont les mêmes que celles de résonance en intensité : il y a toujours résonance, pour toute valeur de Q, pour $\omega = \omega_0$.

Soit $\mathcal{P}_{\mathrm{Rmoymax}} = \frac{E_{\mathrm{m}}^2}{2R} = \mathcal{P}_{\mathrm{Rmoy}}(\omega_0)$. On définit la bande passante par $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, avec ω_1 et ω_2 tels que $\mathcal{P}_{\mathrm{Rmoy}}(\omega_1) = \mathcal{P}_{\mathrm{Rmoy}}(\omega_2) = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{Rmoymax}}}{2}$.

Cela correspond aux relations $I_{\mathrm{m}}(\omega_1) = I_{\mathrm{m}}(\omega_2) = \frac{I_{\mathrm{mmax}}}{\sqrt{2}}$ pour l'intensité. On retrouve donc la bande passante définie pour l'étude des résonances d'intensité et de charge.

Résonance de puissance



Chapitre 5. DIAGRAMME DE BODE DES FILTRES DU 1ER ORDRE

I. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

1. Définition d'un quadripôle

Un quadripôle linéaire D constitué par un système linéaire possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.

On s'intéresse aux signaux sinusoïdaux.

Soit $u_e(t)$ un signal sinusoïdal appliqué au quadripôle.

$$u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t + \varphi_e)$$

Le signal complexe associé est :

$$\underline{u_e} = \underline{U_{em}}e^{j(\omega t)}$$

Avec $\underline{U_{em}} = U_{em}e^{j\varphi}$

Pour un quadripôle linéaire et en régime sinusoïdal forcé, la tension de sortie $u_s(t)$ est sinusoïdale de même pulsation ω.

$$u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s)$$

Le signal complexe associé est :

$$\underline{u_s} = \underline{U_{sm}}e^{j(\omega t)}$$

Avec $\underline{U_{sm}} = U_{sm}e^{j\varphi}$

2. Fonction de transfert d'un quadripôle

On appelle fonction de transfert d'un quadripôle, la fonction $\underline{H}(j\omega)$ telle que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}}$$

On peut déduire que :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi}$$

H(ω) est le module de la fonction de transfert et φ = φ_s - φ_e son argument (déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Exemples : les fonctions de transfert de circuits RC et RL séries:

Circuit RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur

Circuit RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance

Circuit RL : $\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la bobine

Circuit RL : $\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R+jL\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance

3. Lien entre en la fonction de transfert et l'équation différentielle

Rappel : En notation complexe, multiplier par (jω) revient à dériver une fois par rapport au temps. Multiplier par $(j\omega)^n$ revient à dériver n fois par rapport au temps.

Prenons l'exemple du circuit RC :

Circuit RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Donc :

$$\underline{u}_C(1 + jRC\omega) = \underline{u}_C + jRC\omega\underline{u}_C = \underline{u}_e$$

En notation réelle :

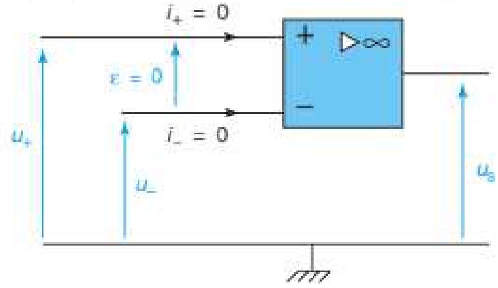
$$u_C(t) + RC\frac{du_c}{dt} = u_e(t)$$

On retrouve l'équation différentielle du circuit.

4. Quadripôle passif – quadripôle actif

Un quadripôle est **passif** quand il ne comporte que des dipôles R, L, C. Il est **actif** s'il contient en plus des sources d'énergie électrique. Dans la pratique, il s'agit d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels fonctionnant en régime linéaire.

Amplificateur opérationnel (AO) en régime linéaire



- Le courant d'entrée inverseuse − est nul.
- Le courant d'entrée non inverseuse + est nul.
- La tension différentielle ε est nulle.

Remarque. L'alimentation en énergie électrique n'est pas représentée.

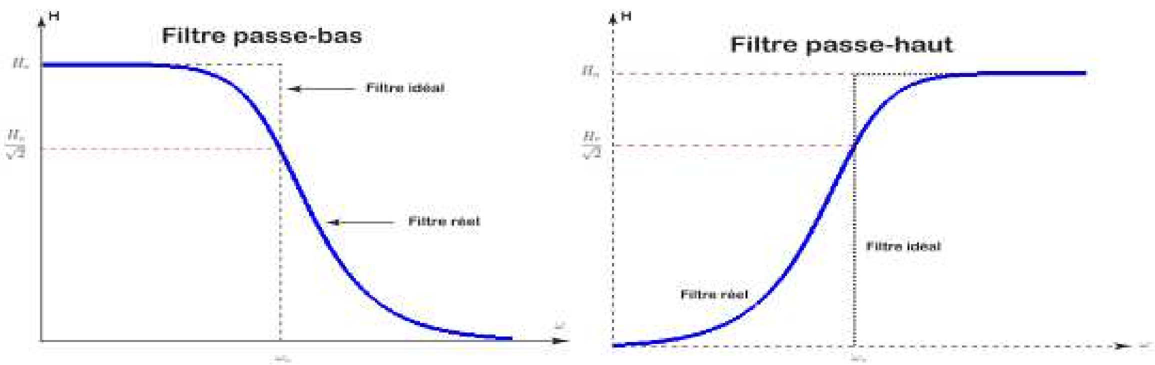
5. Filtres

Un filtre idéal est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est nulle dans un domaine de fréquences caractéristique.

Un filtre réel est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est atténuée dans un domaine de fréquences caractéristique.

Il est caractérisé par sa bande passante et pour un filtre du 1er ordre à sa pulsation de coupure ω_c (ou fréquence de coupure F_c).

Pour le 1er ordre, on distingue le filtre passe-bas du 1er ordre et le filtre passe haut du 1er ordre.



On définit la **bande passante à -3dB** comme la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle :

$$H(\omega) \geq H(\omega_c) \quad ou \quad G \geq G_{max} - 3dB$$

6. La fonction de transfert réduite

Elle est utilisée pour simplifiée les calculs. On définit une variable $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{F}{F_c}$; on appelle x la pulsation réduite ou la fréquence réduite. ω_c est la pulsation caractéristique du filtre (F_c la fréquence caractéristique).

On a donc la fonction de transfert réduite du filtre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = H(x)e^{j\varphi}$$

II. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est une représentation en échelle logarithmique en abscisse.

Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système. Il permet une résolution graphique simplifiée.

1. Le gain en décibel

Le gain en décibels est définit par :

$$G_{dB} = 20logH = 20\log\left(|\underline{H}(j\omega)|\right)$$

Le diagramme de Bode est le tracé des deux courbes : le gain en décibels et la phase en fonction du logarithme décimal de la pulsation :

- G_{dB} (ω) = f(log (ω)) : diagramme de Bode pour le gain
- φ(ω) = g(log (ω)) : diagramme de Bode pour la phase

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)$$

Avec les grandeurs réduites, le gain en décibels est :

$$G_{dB} = 20logH(x) = 20\log\left(|\underline{H}(jx)|\right)$$

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx)$$

Le diagramme de Bode devient :

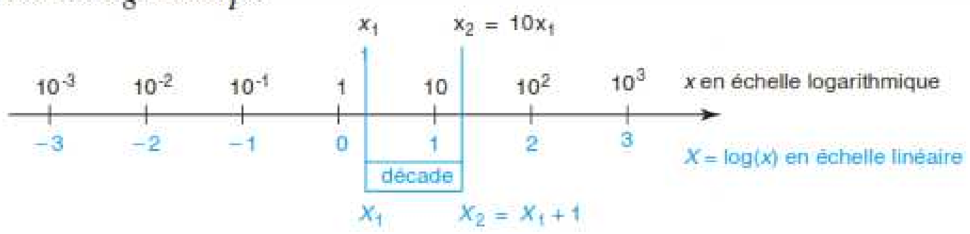
- G_{dB} (x) = f(log (x)) : diagramme de Bode pour H en décibels
- φ (x) = g(log (x)) : diagramme de Bode pour la phase

Point maths. L'échelle logarithmique. Décade

L'axe des abscisses de chacune des courbes $G(x)$ et $\varphi(x)$ est gradué en échelle logarithmique (figure 3). Les valeurs de x sont en général représentées par décades (… 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^1, 10^2, 10^3 …).

Une décade est l'intervalle de fréquence $[f_1 ; f_2]$ tel que : $\dfrac{f_2}{f_1} = 10.$

Principe de l'échelle logarithmique



III. Etude des filtres passifs du 1er ordre

1. Le filtre passe-bas

La forme canonique du filtre passe-bas est :

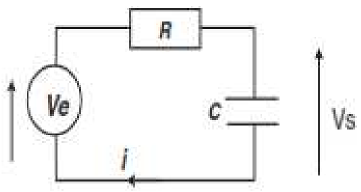
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jx}$$

A_0 est une constante réelle et ω_c la pulsation de coupure du filtre. $\omega_c = \omega_0$

Un exemple :

considérons le circuit (RC) suivant :



- *En BF :* $\omega(x) \to 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{jC\omega} \to \infty$ *(le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert) ,donc le courant est nul et par conséquent* $v_s(t) = v_e(t)$
- *En HF :* $\omega(x) \to \infty \Longrightarrow \dfrac{1}{jC\omega} \to 0$ *(le condensateur se comporte comme un fil) ,donc la tension entre ses bornes est nulle et par conséquent* $v_s(t) = 0$

On conclut que ce filtre laisse passer les tensions sinusoïdales de faibles fréquences et élimine les tensions de hautes fréquences : ***C'est un filtre passe-bas***

La fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

donc :

$$A_0 = 1 \qquad et \qquad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

La fonction de transfert réduite est pour ce circuit est :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$

a. Diagramme de Bode pour le gain et la phase

On a :

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jx}$$

Donc :

Le diagramme de Bode pour le gain (module de $\underline{H}(jx)$) :

$$H(x) = \frac{|A_0|}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Le diagramme de Bode pour la phase :

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx) = \arg A_0 - \arg\ (1 + jx)$$

Dans notre exemple $A_0 = 1$ donc $\arg A_0 = 0$

$$\varphi(x) = -\arg\ (1 + jx)$$

b. Comportement asymptotique et expression à la fréquence de coupure

A basse fréquence BF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(\mathrm{j}x) \approx 1 = |\underline{H}(\mathrm{j}x)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\mathrm{j}x)| \approx 1 \Rightarrow G_{\mathrm{BF}} = 20\log(1) = 0 \\ \varphi_{\mathrm{BF}} = 0 \end{cases}$$

> **Point maths.** Pour déterminer le comportement asymptotique à basse fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence. Pour cela on ne conserve au dénominateur que le terme de plus bas degré en x, soit ici le terme 1 (degré nul).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence : $G_{\mathrm{BF}} = 0$ et $\varphi_{\mathrm{BF}} = 0$.

A fréquence de coupure

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow |\underline{H}(\mathrm{j}x)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(x)} = \frac{1}{1+\mathrm{j}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\mathrm{j})| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3\ \mathrm{dB} \\ \varphi_{(x=1)} = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

La courbe du gain en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0\ ;-3\ \mathrm{dB})$.

La courbe de la phase en fonction de $\log(x)$ passe par le point $\left(0\ ; -\frac{\pi}{4}\right)$.

A haute fréquence HF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(\mathrm{j}x) \approx \frac{1}{\mathrm{j}x} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = |\underline{H}(\mathrm{j}x)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\mathrm{j}x)| \approx \dfrac{1}{x} \Rightarrow G_{HF} = -20\log(x) \\ \varphi_{HF} = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Point maths. Pour déterminer le comportement asymptotique à haute fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence en ne conservant que le terme de plus haut degré en x, soit ici le terme $\mathrm{j}x$.

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence : $G_{HF} = -20\log x$ et $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$.

Rappel : $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

c. Diagramme asymptotique et pente de l'asymptote HF

Diagramme asymptotique

La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations :

$G_{BF} = 0$ et $G_{HF} = -20\log(x)$. Elles sont reliées au point (0;0).

La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations :

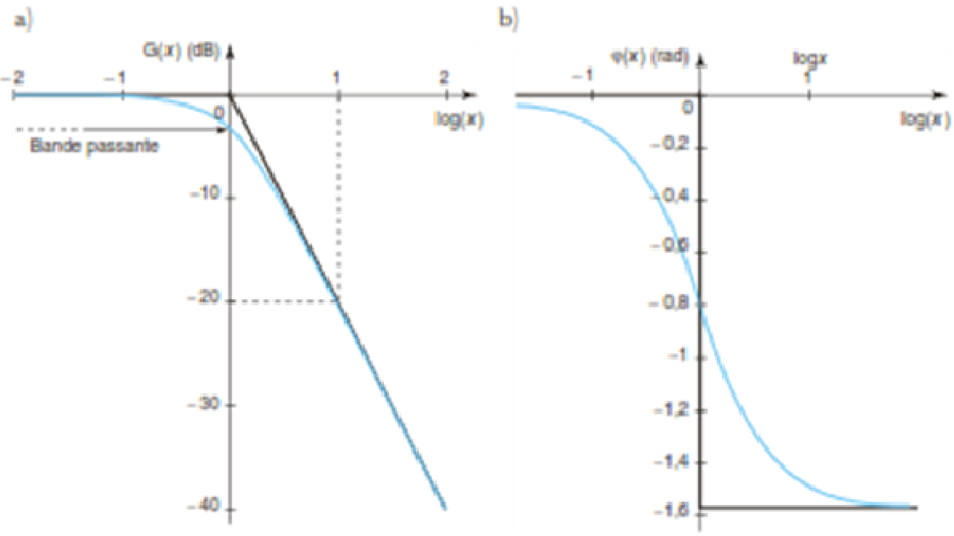
$\varphi_{BF} = 0$ et $\varphi_{HF} = -\pi/2$ d'origine $\log(x) = 0$ et du segment vertical qui les relie.

Pente de l'asymptote à HF

En posant $X = \log(x)$, il vient $G_{HF} = -20X \Rightarrow \frac{dG_{HF}}{dX} = -20$ dB/décade. Le gain diminue de 20 dB quand la fréquence est multipliée par 10 (X augmente d'une unité) ; on dit que la pente de l'asymptote haute fréquence est égale à – 20 dB par décade.

▸ *Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert*

$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}x}$



a) Courbe du gain (en couleur) et courbe asymptotique du gain (en noir).
On a porté log(x) en échelle linéaire des abscisses. Le gain est en décibels.

b) Courbe de la phase (en couleur) et courbe asymptotique de la phase (en noir).
On a porté log(x) en échelle linéaire des abscisses. La phase est en radians.

d. Bande passante à -3db

Point méthode. ***Détermination de la bande passante à −3 dB d'un filtre***

a) Déterminer la valeur maximale $|\underline{H}|_{\max}$ du module de la fonction de transfert.

b) Résoudre l'équation $|\underline{H}| = \dfrac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$. Selon le cas, on travaille avec la pulsation, la fréquence ou la fréquence réduite.

• **Autre méthode :** déterminer la valeur maximale $G_{\max}$ du gain, puis résoudre l'équation $G = G_{\max} - 3$.

• Détermination de la valeur maximale $|\underline{H}|_{\max}$ du module de la fonction de transfert :

$$H_{\max} = H_{x=0} = 1.$$

• Résolution de l'équation :

$$|\underline{H}(\mathrm{j}x)| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}x}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c.$$

Donc la bande passante à -3dB d'un filtre passe bas du 1^er^ ordre de fréquence de coupure F_c est :

$$\Delta f \in [0; F_c]$$

2.Le filtre passe-haut

La forme canonique du filtre passe-bas est :

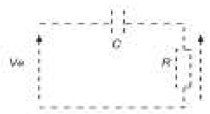
$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\underline{H}(jx) = A_0 \frac{jx}{1 + jx}$$

A_0 est une constante réelle et ω_c la pulsation caractéristique.

Un exemple :

considérons le circuit (CR) suivant :
En BF : $Z_c \rightarrow +\infty \Longrightarrow v_s(t) \rightarrow 0$
En HF : $Z_c \rightarrow +0 \Longrightarrow v_s(t) \rightarrow v_e(t)$
Donc le filtre CR est un filtre passif passe-haut



L'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

donc : $A_0 = 1$ $\quad et \quad$ $\omega_c = \frac{1}{RC}$

La fonction de transfert réduite est pour ce circuit est :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$$

a. Diagramme de Bode pour le gain et la phase

On a :

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0 jx}{1 + jx}$$

Donc :

Le diagramme de Bode pour le gain (module de $\underline{H}(jx)$) :

$$H(x) = \frac{|A_0 x|}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Le diagramme de Bode pour la phase :

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx) = \arg\ (jA_0 x) - \arg\ (1 + jx)$$

Dans notre exemple $A_0 = 1$ donc $\arg A_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arg\ (1 + jx)$$

b. Comportement asymptotique et expression à la fréquence de coupure

<u>A basse fréquence BF</u>

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f \ll f_c \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx jx = xe^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx x \Rightarrow G_{BF} = 20\log(x) \\ \varphi_{BF} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

> **Point maths.** On ne conserve que les termes de plus bas degré en x, au numérateur (jx) et au dénominateur (1).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence : $G_{BF} = 20\log(x)$ et $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$.

<u>A fréquence de coupure</u>

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = |\underline{H}(j)|e^{j\varphi(1)} = \frac{j}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(j)| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3\text{ dB} \\ \varphi_{(x=1)} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- La courbe du gain en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0\ ;\ -3\text{ dB})$.
- La courbe de la phase en fonction de $\log(x)$ passe par le point $\left(0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

<u>A haute fréquence HF</u>

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f \gg f_c \Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx 1 \Rightarrow G_{HF} = 0 \\ \varphi_{HF} = 0 \end{cases}$$

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence : $G_{HF} = 0$ et $\varphi_{HF} = 0$.

c. Diagramme asymptotique et pente de l'asymptote BF

Diagramme asymptotique

La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations :

G_{BF} = 20log(x) et G_{HF} = 0 reliées au point (0 ;0).

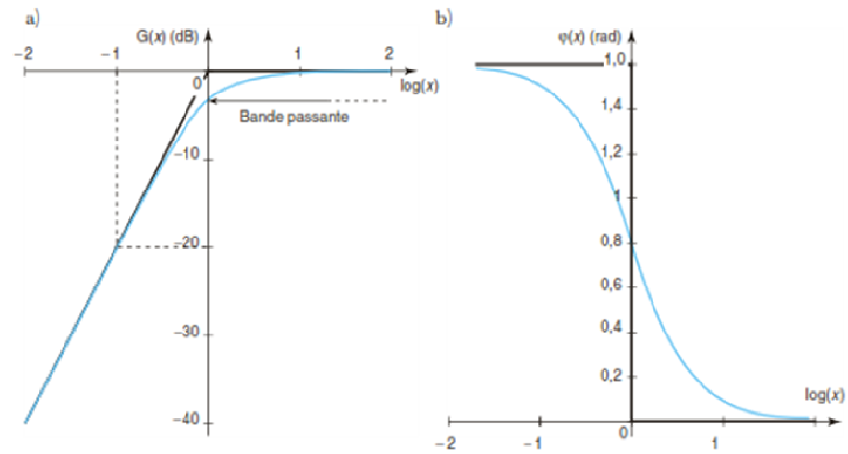
La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations :

$\varphi_{BF} = \pi/2$ et $\varphi_{HF} = 0$ d'origine log(x) = 0 et du segment vertical qui les relie.

Pente de l'asymptote BF

En posant X = log(x), il vient G_{BF} = 20X, d'où $\frac{dG_{BF}}{dX} = 20\ dB/décade$. Le gain augmente de 20 dB quand X augmente d'une unité (ou quand la fréquence est multipliée par 10). La pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à +20 dB par décade.

Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$



a) Courbe du gain (en couleur) et courbe asymptotique du gain (en noir).
On a porté log(x) en échelle linéaire des abscisses. Le gain est en décibels.
b) Courbe de la phase (en couleur) et courbe asymptotique de la phase (en noir).
On a porté log(x) en échelle linéaire des abscisses. La phase est en radians.

d. Bande passante à -3db

On utilise la même méthode que celle utilisée pour le filtre passe-bas

- Détermination de la valeur maximale $|\underline{H}|_{max}$ du module de la fonction de transfert : $H_{max} = H_{x \to \infty} = 1$.
- Résolution de l'équation : $|\underline{H}(\mathrm{j}x)| = \left|\frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c$.

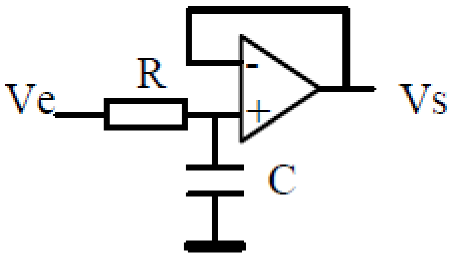
La bande passante à -3dB d'un filtre passe-haut du 1er ordre de fréquence coupure F_c est

$$\Delta f \in [F_c ; +\infty]$$

IV. Etude des filtres actifs du 1er ordre

1. Le filtre passe-bas

Un exemple de ce type de filtre :



Ce filtre à exactement les mêmes caractéristiques que le filtre passif du premier ordre. Elle a seulement l'avantage d'être suivi par un amplificateur suiveur à très haute impédance d'entrée et très faible impédance de sortie. De cette façon, ses caractéristiques ne sont pas altérées par les composants qui seront reliés à sa sortie.

Rappelons que les caractéristiques de ce filtre sont :

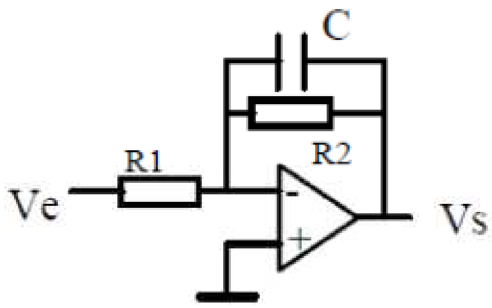
- Fréquence de coupure : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC} \quad , \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$
- Fonction de transfert $\boxed{h(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}}$
- Module de la fonction de transfert (**gain**) :

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}}$$

- Argument de la fonction de transfert (**phase**) :

$$\boxed{\phi(\omega) = -Arctg(RC\omega) = -Arctg(\frac{\omega}{\omega_c}) = -Arctg(\frac{f}{f_c})}$$

Une autre structure de filtre passe-bas actif est :



Pour déterminer la fonction de transfert, notons Z = C//R2.

$$\underline{Z} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

La fonction de transfert H(ω) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = -\frac{\underline{Z}}{R_1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}}{R_1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + jR_2C\omega}$$

La fréquence de coupure est : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{R_2C} \quad , \quad f_c = \frac{1}{2\pi R_2C}}$

Module de la fonction de transfert (**gain**) :

$$\boxed{H(\omega) = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + R_2^2C^2\omega^2}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}}$$

On remarque qu'à la différence de la structure précédente, pour f =0, nous avons un gain différent de 1 : $|A_0| = R2/R1$. C'est ce qu'on appelle le gain statique, c'est approximativement le gain dans la bande passante. Les signaux dont la fréquence est à l'intérieur de la bande passante peuvent non seulement passer dans le filtre, mais ils peuvent en plus être amplifié, c'est la caractéristique des filtres actifs.

La phase φ:

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) - \arg\left(1 + jR_2C\omega\right)$$

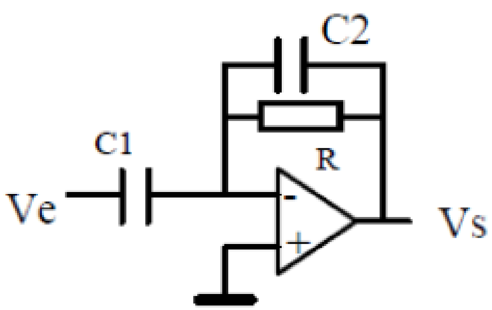
$$\varphi(j\omega) = \pi - \arg\left(1 + jR_2C\omega\right)$$

$$\phi(\omega) = \pi - Arctg(R_2C\omega) = \pi - Arctg(\frac{\omega}{\omega_c}) = \pi - Arctg(\frac{f}{f_c})$$

Pour tracer le diagramme de Bode de ces filtres, on utilise la même méthode que pour les filtres passifs étudiés précédemment.

2. Le filtre passe-haut

Un exemple de filtre passe haut passif :



La fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = -\frac{\underline{Z}}{\underline{Z_1}}$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC_2\omega}$$

$$\underline{Z_1} = \frac{1}{jC_1\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\frac{R}{1 + jRC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{jRC_1\omega}{1 + jRC_2\omega} = -\frac{\frac{C_1}{C_2} jRC_2\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

La fréquence de coupure est : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC_2} \quad , \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC_2}}$

Le module de la fonction de transfert (**gain**) est :

$$H(\omega) = \frac{RC_1\omega}{\sqrt{1 + R^2C_2^2\omega^2}} = \frac{C_1}{C_2}\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{C_1}{C_2}\frac{\frac{f}{f_c}}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}$$

La phase φ:

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(-\frac{C_1}{C_2}\right) + \arg\left(jR_2C\omega\right) - \arg\left(1 + jR_2C\omega\right)$$

$$\varphi(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(1 + jR_2C\omega\right)$$

Pour tracer le diagramme de Bode de ce filtre, on utilise la même méthode que pour les filtres passifs étudiés précédemment.