CHAPITRE ……. : ETUDE DES QUADRIPOLES

I°) GENERALITES :

Un quadripôle est une partie de réseau électrique isolée électriquement et magnétiquement du reste du réseau. Les deux paires de bornes d'accès constituent les bornes d'entrée et de sortie du quadripôle. Il est généralement constitué d'éléments passifs et éventuellement de sources commandées ne dépendant pas d'une grandeur propre au reste du réseau c'est-à-dire qu'il n'existe aucun couplage inductif en particulier avec le reste du réseau. C'est en fait une boîte à 4 entrées qui se présente de la manière suivante :

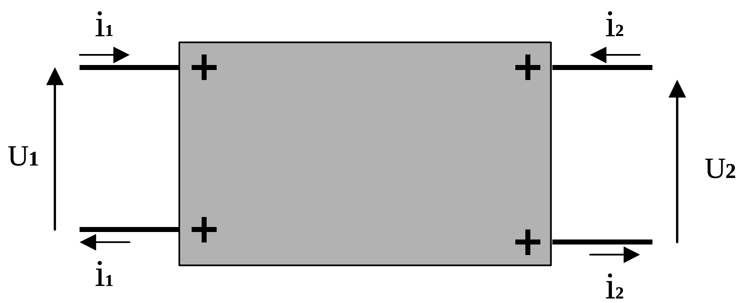


Figure n° 1 : Représentation d'un quadripôle

1°) Utilisation pratique :

Il y a différentes catégories de quadripôles dont : les actifs, passifs les linéaires etc… Les 3 fonctions principales sont :

a°) L'amplification :

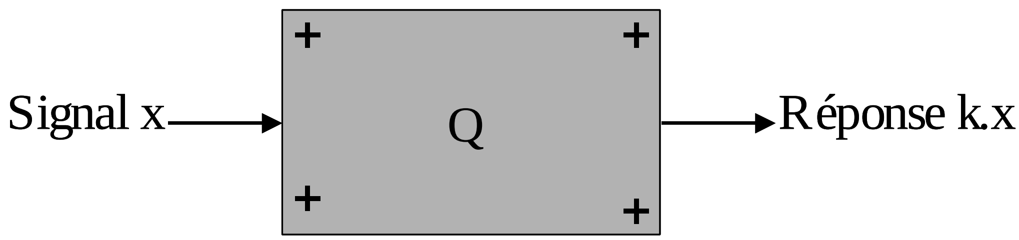


Figure n° 2 : Une structure réalisant la fonction d'amplificatrice ou d'atténuation

Si $|k| > 1$ on parle d'amplification
Si $|k| <$ on parle d'atténuation

b°) Traitement du signal :

Le but est en fait d'extraire le signal utile du bruit de fond.

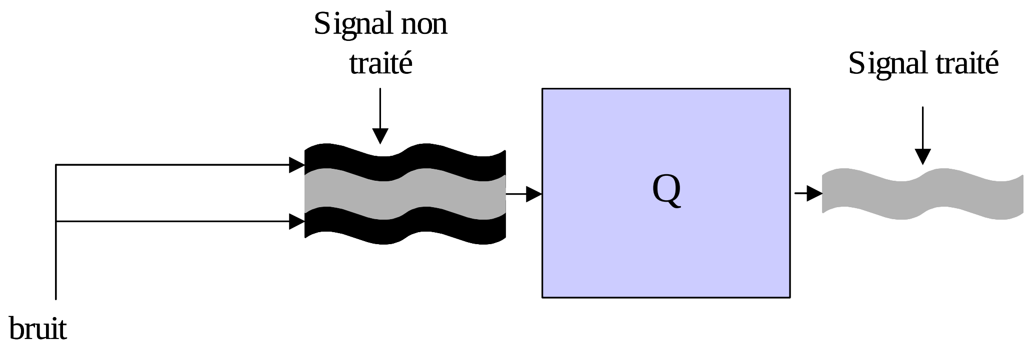
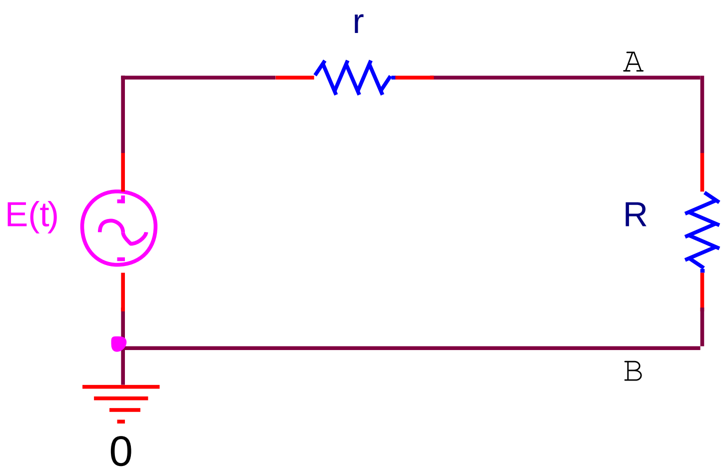


Figure n° 3 : Extraction d'un signal utile

c°) <u>L'adaptation d'impédance</u> :



Pour avoir le maximum de puissance, il faut que R = r $\Rightarrow$ pour réaliser cela, on utilise des quadripôles.

Figure n° 4 : Circuit d'adaptation d'impédance

2°) Autres caractéristiques :

La plupart des circuits électriques ont une entrée constituée de 2 fils et une sortie constituée également de 2 fils. L'ensemble constitue un quadripôle.

Sous ce chapitre nous allons étudier quelques caractéristiques des quadripôles (matrices, impédances, gain, etc.)
Nous analyserons quelques montages fondamentaux (les filtres)
On distingue 2 catégories de quadripôles

- **Quadripôles passifs**

- ✓ Circuit RC
- ✓ Circuit de filtrage
- ✓ Transformateur

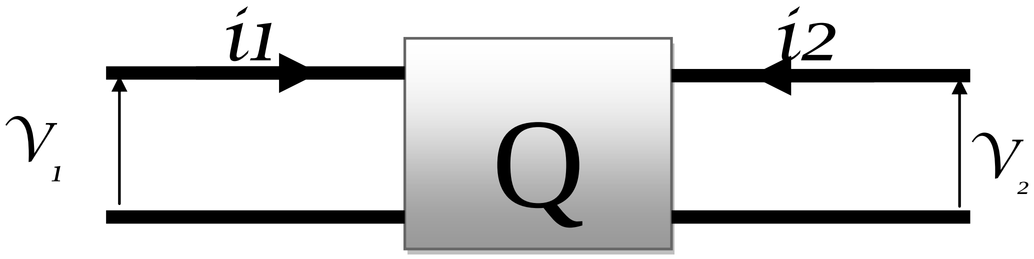
Quadripôles actifs

- ✓ Amplificateur (transistor)

II°) MISE EN EQUATION D'UN QUADRIPOLE :

Si le système est linéaire, on peut représenter les relations de transfert en termes matriciels, avec les quatre possibilités suivantes :

1°) Paramètres impedances (paramètre z)



! Attention aux sens des tensions et courants choisis

Paramètres Z $\longrightarrow$ exprimer les tensions v_1, v_2 en fonction de i_1 et i_2

Equations relatives aux paramètres Z

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases}$$

Remarque : Dans un passif $z_{12} = z_{21}$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} z_{12} \\ z_{21} z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad Z \longrightarrow \Omega$$

On déduit de ces équations les définitions suivantes :

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1}\bigg|_{i_2 = 0}$$ $\longrightarrow$: impédance d'entrée du quadripôle à sortie ouverte

$$z_{12} = \frac{v_1}{i_2}\Big|_{i_1=0} \longrightarrow$$ impédance de transfert inverse à entrée en Circuit ouvert

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1}\Big|_{i_2=0} \longrightarrow$$: Impédance de transfert direct à sortie ouverte

$$z_{22} = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{i_1=0} \longrightarrow$$ Impédance de sortie à entrée en Circuit ouvert

On détermine ainsi le schéma équivalent du quadripôle en Z comme suit :

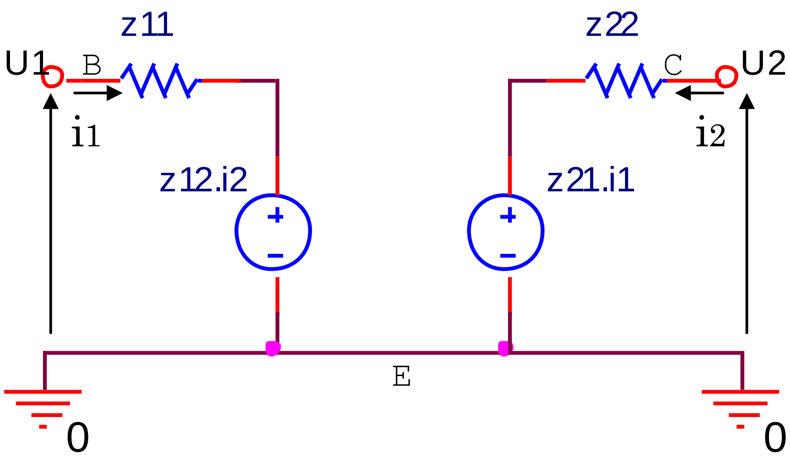
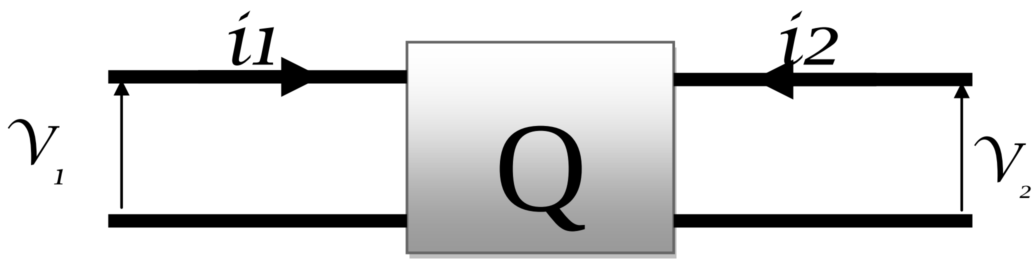


Figure n°5 : Quadripôle en Z

2) <u>Paramètre d'admittance (paramètre y)</u>



$\longrightarrow$ Exprimer les courants i_1 et i_2 est fonction de V_1 et V_2

<u>Equation :</u>

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Dans un Q passif

$y_{21} = y_{12}$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad Y \qquad \Omega^{-1} = \text{ohm}^{-1} \text{ (Siemens)}$$

$$y_{11} = \frac{i_1}{v_1} \bigg|_{v_2 = 0}$$ ⟶ Admittance d'entrée à sortie en court-circuit

$$y_{12} = \frac{i_1}{v_2} \bigg|_{v_1 = 0}$$ ⟶ Admittance de transfert inverse à entrée en court circuit

$$y_{21} = \frac{i_2}{v_1} \bigg|_{v_2 = 0}$$ ⟶ Admittance de transfert direct à sortie en court circuit

$$y_{22} = \frac{i_2}{v_2} \bigg|_{v_1 = 0}$$ ⟶ Admittance de sortie à entrée en court-circuit

Ainsi on détermine le schéma équivalent du quadripôle en y :

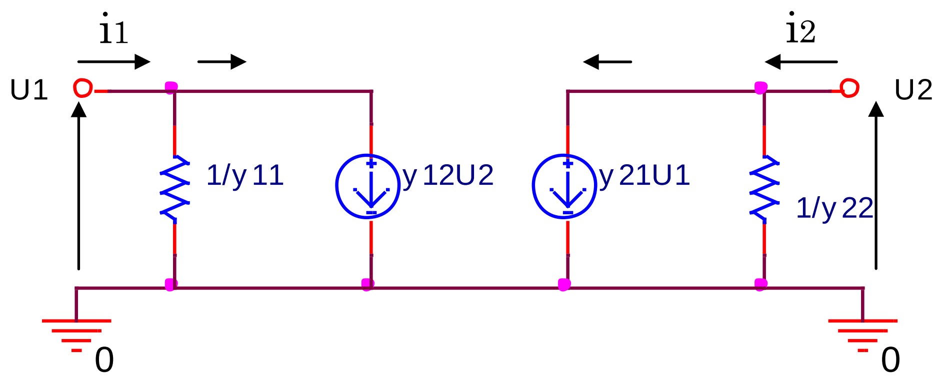
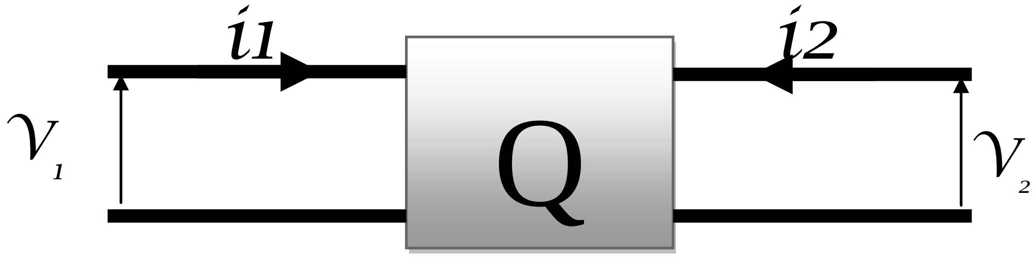


Figure n° 6 : Quadripôle en y

3°) <u>Paramètre hybrides (paramètre h)</u>



Les matrices *hybrides* correspondent au cas où les variables indépendantes sont de nature différente, un courant et une tension, relatives à des accès différents :

⟶ Exprimer la tension v_1 et le courant i_2 en fonction du courant i_1 et de la tension v_2.

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2 = 0}$ ⟶ Impédance d'entrée à sortie en court-circuit

$h_{12} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1 = 0}$ ⟶ Rapport de transfert inverse à entrée en C.O

$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2 = 0}$ ⟶ Rapport de transfert direct à sortie en C.C

$h_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1 = 0}$ ⟶ Admittance de sortie à entrée en C.O

<u>Remarque</u> : On a également les paramètres hybrides inverses (paramètres g). On exprime i_1 , v_2 en fonction de v_1 et i_2

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2 \\ v_2 = g_{21} v_1 + g_{22} i_2 \end{cases}$$

Les paramètres h et g sont inverses l'un de l'autre au niveau de la définition

$H = G^{-1}$ $\qquad\qquad G = H^{-1}$

On utilise généralement les paramètres h au lieu des paramètres g.

Ainsi on a le schéma équivalent du quadripôle en h :

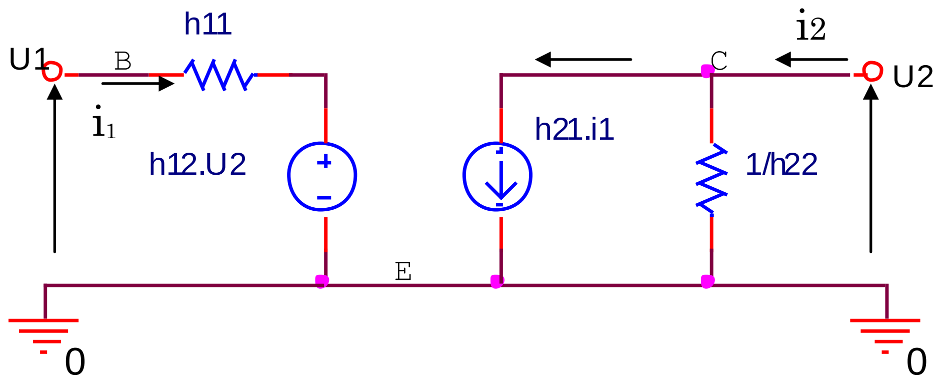
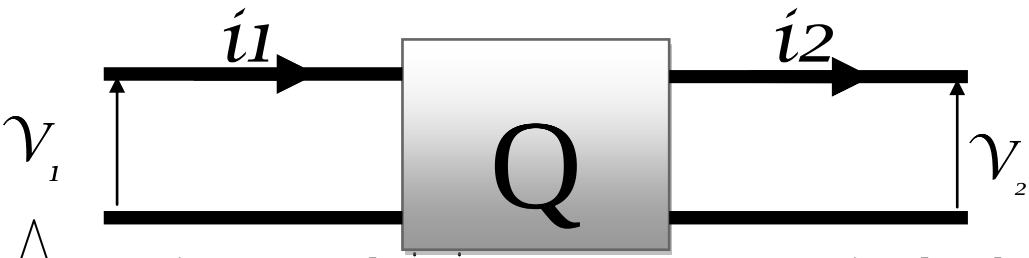


Figure n° 7 : Quadripôle en h

Les paramètres hybrides sont très utilisés en électronique. Sur le schéma du quadripôle en h on peut lire que :

- la borne d'entrée du quadripôle présente une impédance d'entrée limitant le courant de charge de la source en amont.
- Il existe une tension de retour, de la sortie vers l'entrée, tension proportionnelle à la sortie.
- La sortie est de type source de courant ; le courant de sortie est contrôlé par le courant d'entrée.
- La sortie présente aussi une admittance de sortie.

4°) <u>Les paramètres de Transfert ou paramètres chaine (Paramètre T)</u>



⚠ **Attention au sens de i_2. i_2 est sortant par convention dans le cas des paramètres T.**

→ Exprimer v_1, i_1 en fonction de v_2 et i_2

$$\begin{cases} v_1 = T_{11} v_2 + T_{12} i_2 \\ i_1 = T_{21} v_2 + T_{22} i_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} T_{12} \\ T_{21} T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$T_{11} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2 = 0}$ ⟶ Gain en tension inverse à sortie en C.O

$T_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{v_2 = 0}$ ⟶ Impédance de transfert inverse à sortie en C.C

$T_{21} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{i_2 = 0}$ ⟶ Admittance de transfert inverse à sortie en C.O

$T_{22} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_2 = 0}$ ⟶ Gain en courant inverse à sortie en C.C

III/ ASSOCIATION DE QUADRIPOLES

1) Associations simples

a°) Quadripôle en cascade (ou chaîne)

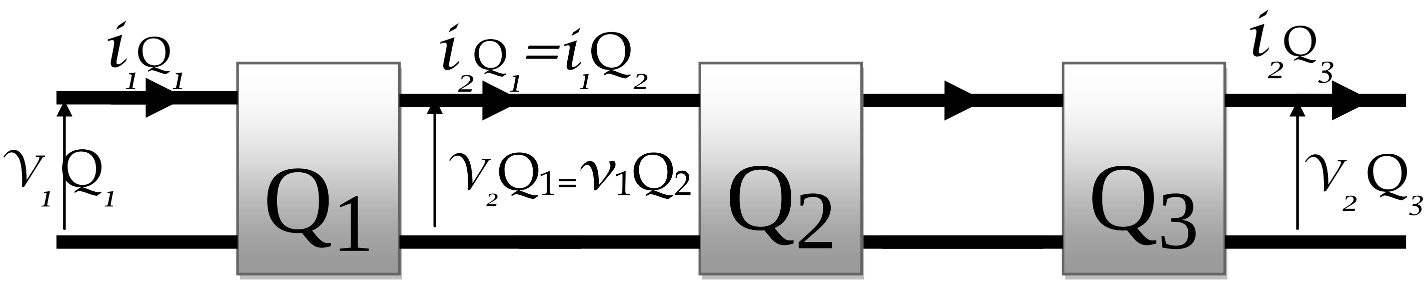


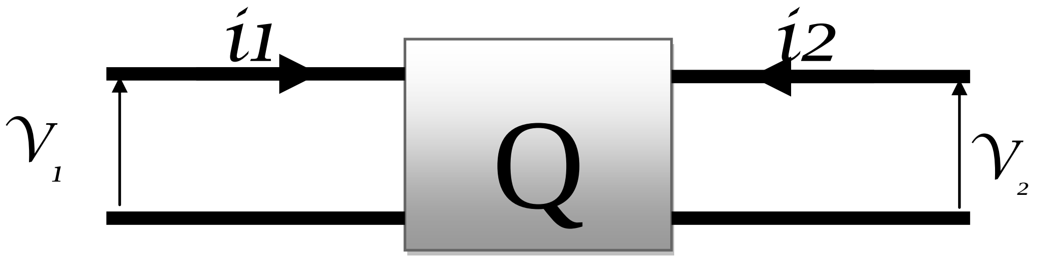
Figure n° 8 : Association en cascade de 3 quadripôles

On montre que

$$\begin{bmatrix} v_1Q_1 \\ i_1Q_1 \end{bmatrix} = [TQ_1]\times[TQ_2]\times[TQ_3]\begin{bmatrix} v_2Q_3 \\ i_2Q_3 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [TQ_1]\times[TQ_2]\times[TQ_3]$$

b°) Quadripôle en série



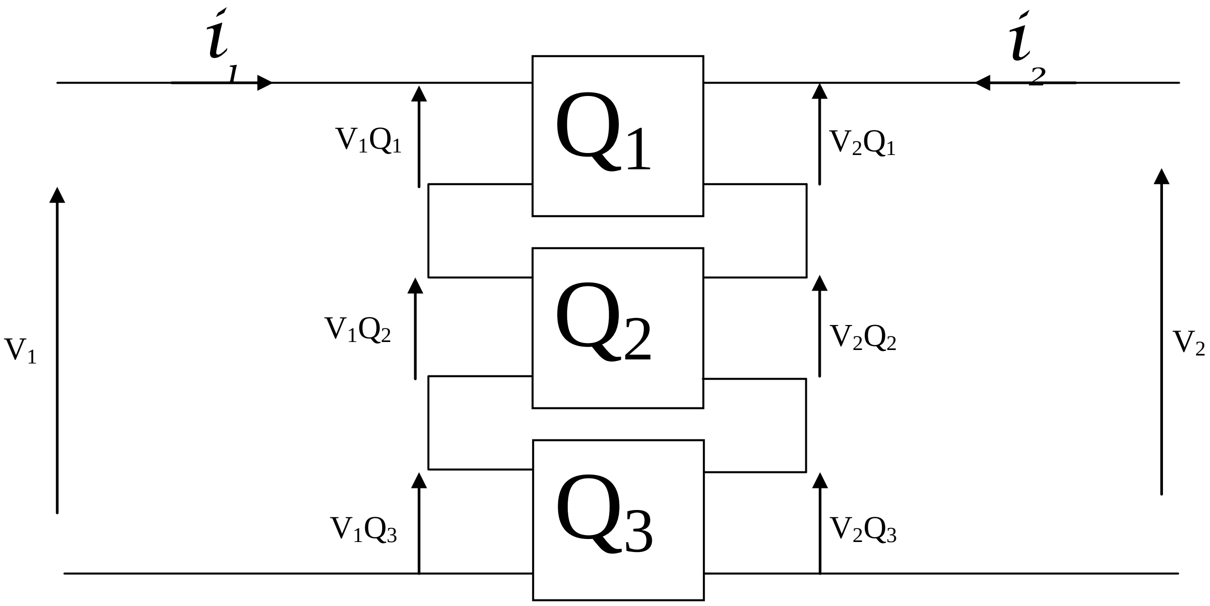


Figure n° 9 : Association série de 3 quadripôles

$$\begin{cases} v_1Q_1 = z_{11}Q_1 i_1 + z_{12}Q_1 i_2 \\ v_2Q_1 = z_{21}Q_1 i_1 + z_{21}Q_1 i_2 \end{cases}$$

$$V_1 = V_1Q_1 + V_1Q_2 + V_1Q_3$$
$$V_2 = V_2Q_1 + V_2Q_2 + V_2Q_3$$

On montre que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ Avec $Z = Z_{Q_1} + Z_{Q_2} + Z_{Q_3}$

c°) Quadripôle en parallèle

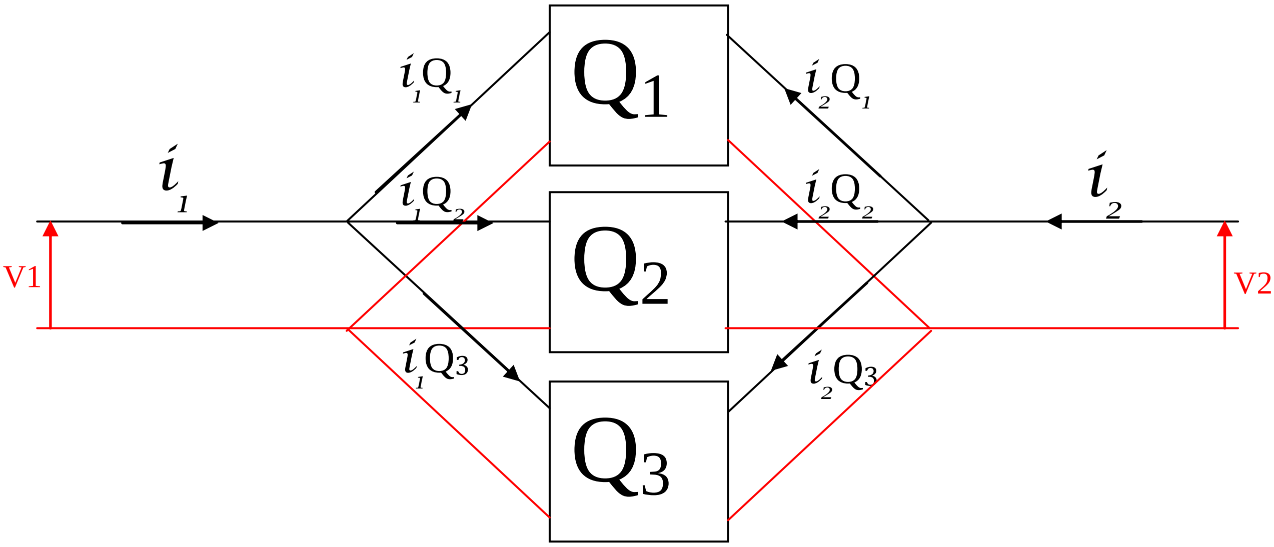


Figure n° 10 : Association parallèle de 2 quadripôles

<u>**Remarque**</u> :

- i_1 est le même dans les 3 Q
- v_2 est le même dans les 3 Q

$$i_{1_{Q_1}} = y_{11}Q_1V_1 + y_{12}Q_1V_2$$

$$i_{2_{Q_2}} = y_{21}Q_1V_1 + y_{22}Q_1V_2$$

On montre que : $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{aligned} i_1 &= i_1Q_1 + i_1Q_2 + i_1Q_3 \\ i_2 &= i_2Q_1 + i_2Q_2 + i_2Q_3 \end{aligned}$

Avec $y = y_{Q_1} + y_{Q_2} + y_{Q_3}$

2°) Associations mixtes

a) Série – parallèle : (***Trouver la matrice équivalente cf. TD*** :passer par la Matrice hybride)

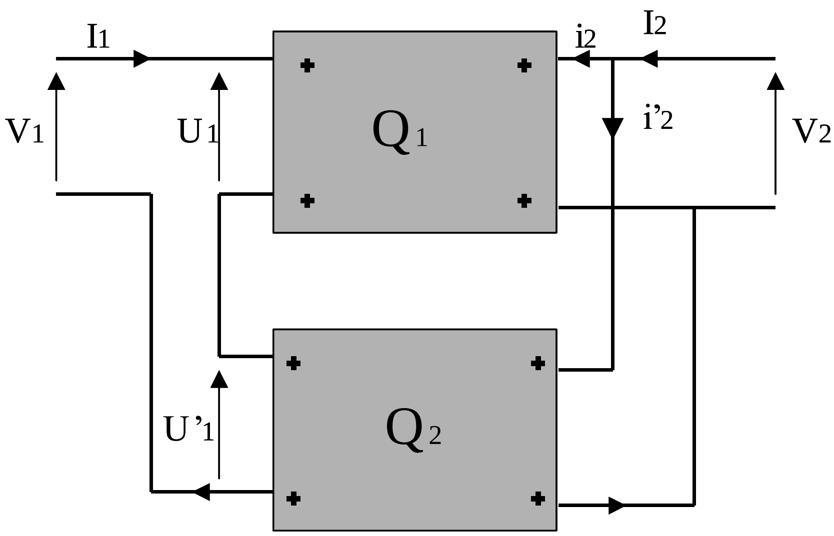


Figure n° 11 : Association série parallèle de 2 quadripôles

b°) Parallèle - série : (***Trouver la matrice équivalente cf. TD*** : passer par la Matrice hybride inverse).

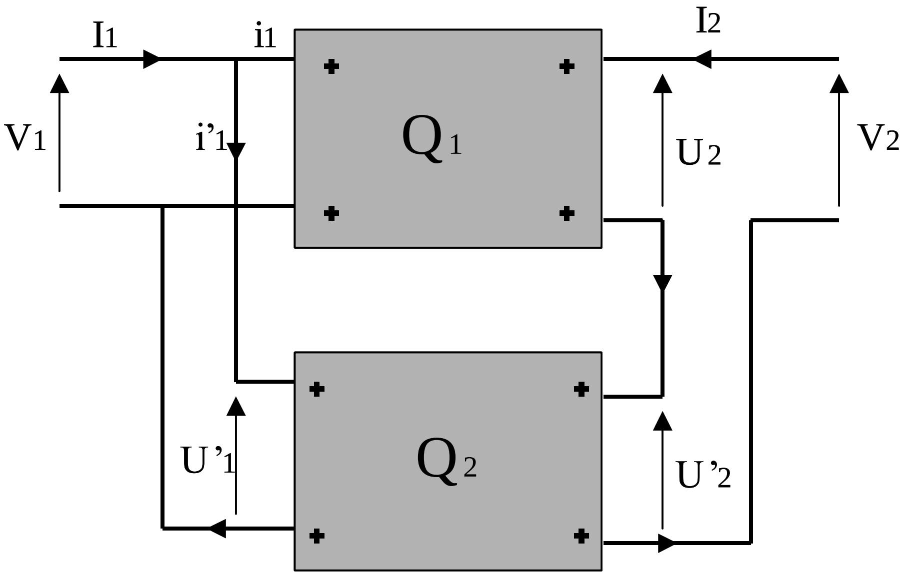
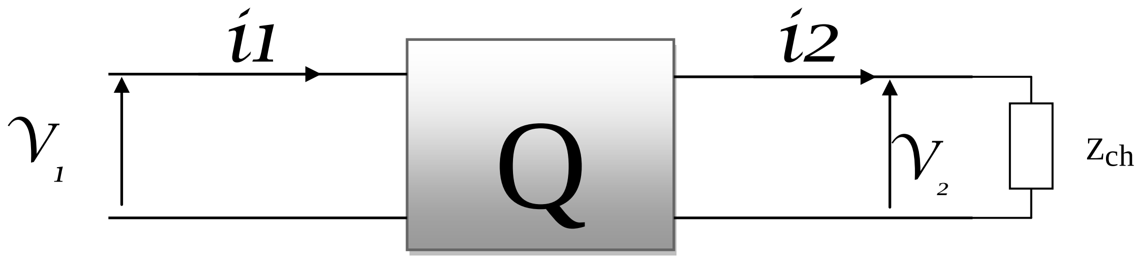


Figure n° 12 : Association série –parallèle de 2 quadripôles

IV/ IMPEDANCE ET ADAPTATION

1. Impédance d'entrée : Ze



L'impédance d'entrée est donnée par : $Ze = \dfrac{V_1}{i_1}$

Z_{ch} = impédance de charge

Avec les paramètres en T, nous avons

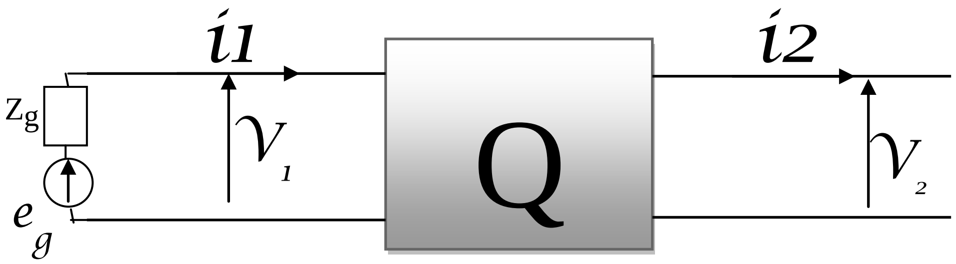
$$\begin{cases} v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}i_2 \\ i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}i_2 \end{cases}$$

Au niveau de la charge, on a $v_2 = Z_{ch}i_2$

$$\begin{cases} v_1 = \left(T_{11}Z_{ch} + T_{12}\right)i_2 \\ i_1 = \left(T_{21}Z_{ch} + T_{22}\right)i_2 \end{cases}$$

$$Ze = \frac{V_1}{i_1} \longrightarrow \boxed{Z_e = \frac{T_{11}Z_{ch} + T_{12}}{T_{21}Z_{ch} + T_{22}}}$$

2. **Impédance de sortie : Zs**



On considère une source extérieure V_2 qui fournit un courant i entrant

$$Z_S = \frac{V_2}{-i_2}\Bigg|_{eg = 0}$$

$$\begin{cases} V_1 = T_{11}V_2 + T_{12}i_2 \\ i_1 = T_{21}V_2 + T_{22}i_2 \end{cases}$$ i_2 est sortant (paramètre T)

En entrée, on a la résistance interne du générateur Zg

On a $V_1 = -Z_g i_1$

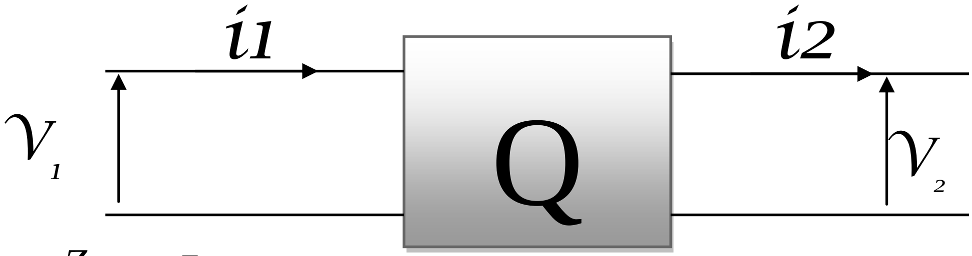
$$\longrightarrow T_{11}V_2 + T_{12}i_2 = -Z_g\left(T_{21}V_2 + T_{22}i_2\right)$$

$$V_2\left(T_{11} + Z_gT_{21}\right) = -i_2\left(T_{12} + Z_gT_{22}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{Z_S = \frac{T_{12} + Z_g T_{22}}{T_{11} + Z_g T_{21}}}$$

3. **Impédance itérative Z_0**

L'impédance itérative est une charge telle que branchée à la sortie, l'impédance d'entrée soit celle-ci.



On remplace Z_{ch} par Z_0.

Utilisons l'équation de Z_e

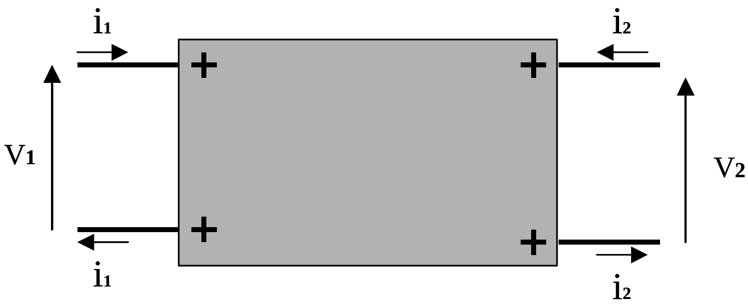
$$Z_e = \frac{T_{11}Z_0 + T_{12}}{T_{21}Z_0 + T_{22}} = Z_0$$

$$\longrightarrow Z_0^{\,2} T_{21} + Z_0\left(T_{22} - T_{11}\right) - T_{21} = 0$$

$$D = \left(T_{22} - T_{11}\right)^2 + 4T_{21}.T_{12}$$

$$\boxed{Z_0 = \frac{T_{11} - T_{22} \pm \sqrt{\left(T_{22} - T_{11}\right)^2 + 4T_{21}T_{12}}}{2T_{21}}}$$

4°) Quadripôles symétriques et réciproques:



Un quadripôle est dit réversible mais on dit le plus souvent symétrique si en inversant les bornes d'entrée et de sortie, on introduit aucune modification sur le réseau dans lequel le quadripôle est inséré.

Il en résulte que : $z_{11} = z_{22}$ et $y_{11} = y_{22}$, $T_{22}=T_{11}$, $\Delta h=1$.

Rappelons tout d'abord le théorème de réciprocité (ou théorème de Maxwell). L'impédance de transfert Z_{21T} de la branche 11' à la branche 22' est la même que l'impédance de transfert Z_{12T} de la branche 22' à la branche 11'.

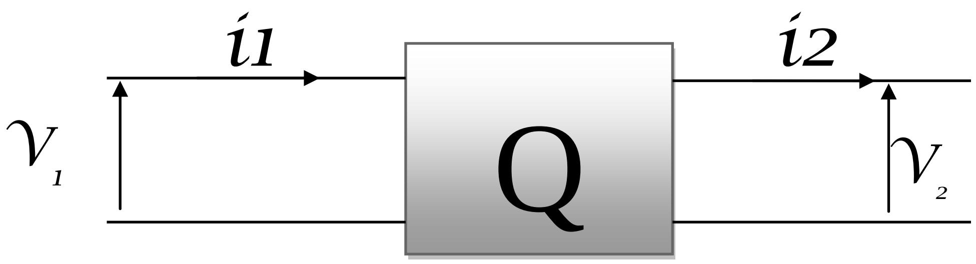
Rappelons aussi la définition de l'impédance de transfert de la branche X à la branche Y. C'est le rapport de la tension d'excitation de la branche x au courant de la branche y lorsque toutes les autres sources d'énergie ont été supprimées. Ceci se traduit par : $Z_{12}=Z_{21}$; $y_{12}=y_{21}$; $h_{12}=h_{21}$. De ces conditions, il en résulte que les matrices z, h et y sont symétriques. *Ne pas confondre matrice symétrique et quadripôles symétriques.*

5°) <u>Impédance caractéristique</u> : Z_C

Brancher à la sortie l'impédance d'entrée est égale à celle-ci.
Brancher à l'entrée, l'impédance de sortie est égale à celle-ci.

$$Z_c = \frac{V_1}{i_1} = \frac{V_2}{-i_2}$$

On note l'impédance caractéristique Z_c **ou** Z_0 dans le cas d'un quadripôle symétrique.



$$Z_C = \frac{V_1}{i_1} = \frac{-V_2}{i_2}$$

⚠ Attention au sens de i_2 % au paramètre T

- Pour un Q symétrique $Z_0 = Z_C$
- Dans le cas d'un Q non symétrique Z_0 n'est pas toujours égal à Z_C

$$Z_C = \frac{T_{22} - T_{11} \pm \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{21}.T_{12}}}{2T_{21}}$$

<u>Remarque</u> :

- Dans le cas d'un quadripôle symétrique

$y_{11} = y_{22}$

$Z_0 = Z_C$ Comme $T_{22} = T_{11}$ (Q symétrique) $z_{11} = z_{22}$

(*La remarque n'est pas valable pour h*)

$\longrightarrow$ $Z_0 = \left(\frac{T_{12}}{T_{21}}\right)^{1/2}$ Le rapport est un réel

* Si ce n'est pas un réel, on ne résout pas l'équation de Z_0 mais comme $T_{22} = T_{11}$

$Z_0{}^2 = \frac{T_{12}}{T_{21}} \longrightarrow$ (cas des complexes)

- Pour tous les Q passifs, on a la condition

$T_{11}.T_{22} - T_{12}.T_{21} = 1 \longrightarrow \det[T] = 1$

- **Pour un quadripôle** réciproque, on a $z_{12} = z_{21}$

$y_{12} = y_{21}$

(*La remarque n'est pas valable pour T*) $h_{12} = h_{21}$

6°) <u>Impédance image : Zie et Zis</u>

Z_{ie} et Z_{is} sont 2 impédances images, si et seulement si

- Zis branchée à la sortie, l'impédance d'entrée soit Zie et

$$Z_{ie} = \frac{T_{11}Z_{is} + T_{12}}{T_{21}Z_{is} + T_{22}}$$

- Zie branchée à l'entrée, l'impédance de sortie soit Zis et

$$Z_{iS} = \frac{T_{22}Z_{ie} + T_{12}}{T_{21}Z_{ie} + T_{11}}$$

7°) Autres grandeurs caractéristiques des quadripôles :

- Le gain en tension $\boxed{A_v = \dfrac{v_2}{v_1}}$

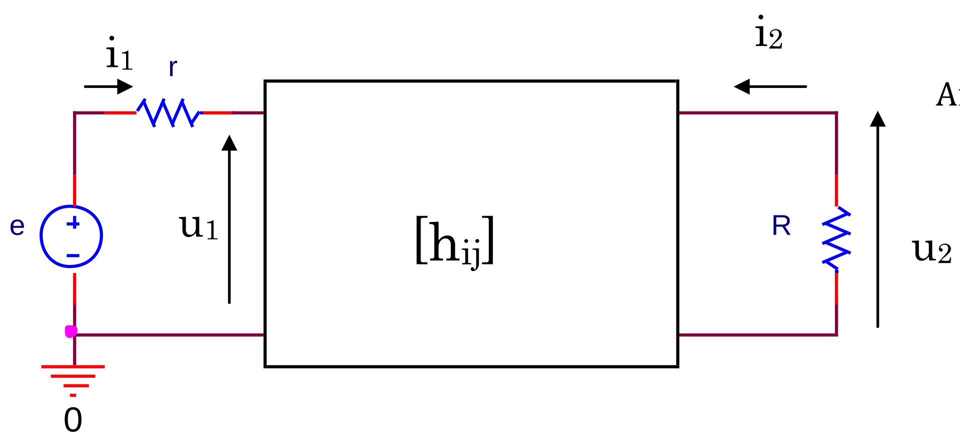
en dB on a 20 $\log_{10}\left|\dfrac{v_2}{v_1}\right|$. On a amplification si $\left|\dfrac{v_2}{v_1}\right| > 1 \quad (db > 0)$

on a atténuation si $\left|\dfrac{v_2}{v_1}\right| < 1 \quad (db < 0)$

- Le gain en courant : $\boxed{A_i = \dfrac{i_2}{i_1}}$ en dB on a 20 $\log_{10}\left|\dfrac{i_2}{i_1}\right|$. On a les mêmes remarques pour l'aspect amplification et atténuation.

- Le gain en puissance : $G = \dfrac{P_2}{P_1} = \left|\dfrac{v_2 i_2}{v_1 i_1}\right| = |A_v \cdot A_i|$
- La résistance d'entrée (impédance) : $R_e = \dfrac{v_1}{i_1}$
- La résistance (impédance) de sortie : $R_s = \dfrac{v_2}{i_2}$
- Gain de transrésistance : $R_m = \dfrac{v_2}{i_1}$
- Gain de transconductance : $G_m = \dfrac{i_2}{v_1}$

8) Calcul des grandeurs caractéristiques d'un quadripôle chargé :



Ai, Av, Re et Rs ?

Figure n° 13 : Circuit de calcul de l'impédance d'un quadripôle chargé a°) Déterminons le gain en courant A_i :

$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}V_2$
$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}V_2$ avec $u_2 = -Ri_2$
$= h_{21}i_1 - h_{22}Ri_2$ $\Leftrightarrow i_2(1+h_{22}R) = h_{21}i_2$

$$\Leftrightarrow \frac{i_2}{i_1} = \frac{h_{21}}{1+h_{22}R}$$

$A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{h_{21}}{1+Rh_{22}}$ Cas limite : si R$\Rightarrow$ 0 (cc) $A_i \Rightarrow h_{21}$

b°) Av ?

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

$U_2 = -R.i_2$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

$$A_v = \frac{v_2}{v_1}$$

$$u_1 = h_{11}i_1 - Rh_{12}i_2 \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = -\frac{R.i_2}{h_{11}i_1 - Rh_{12}i_2}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{R}{\frac{h_{11}}{A_i} - Rh_{12}} = -\frac{R}{\frac{h_{11}}{h_{21}}(1+Rh_{22}) - Rh_{12}}$$

$$= -\frac{h_{21}R}{h_{11} + Rh_{11}h_{22} - Rh_{12}h_{21}} = -\frac{h_{21}R}{h_{11} + R\underbrace{(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})}_{\Delta h}}$$

$$A_v = -\frac{Rh_{21}}{h_{11} + R\Delta h}$$

c°) $R_e = \frac{v_1}{i_1} = h_{11} + h_{12}\frac{u_2}{i_1} = h_{11} - h_{12}R\frac{i_2}{i_1} = h_{11} - h_{12}RA_i$

$$= h_{11} - h_{12}R\frac{h_{21}}{1+Rh_{22}} = \frac{h_{11} + Rh_{11}h_{22} - h_{12}Rh_{21}}{1+Rh_{22}} = \frac{h_{11} + R\Delta h}{1+Rh_{22}}$$

$$R_e = \frac{h_{11} + R\Delta h}{1+Rh_{22}}$$

d°) $R_s = \frac{u_2}{i_2}$

U_1=-r.i_1+e. On cc, l'entrée et on remplace le générateur à l'entrée par sa résistance interne.

e=0 et donc $u_1 = -r.i_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2 \Leftrightarrow i_1 = -\frac{h_{12} u_2}{r + h_{11}}$

$$i_2 = -\frac{h_{21} h_{12} u_2}{r + h_{11}} + h_{22} u_2 = u_2 \left\{ \frac{r \quad h_{22} + h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}}{r + h_{11}} \right\} = U_2 \frac{r h_{22} + \Delta h}{r + h_{11}}$$

$\frac{u_2}{i_2} = \frac{r + h_{11}}{r h_{22} + \Delta h} = R_s$ cas limite : entrée ouverte $\Rightarrow$ r$\to\infty$ et donc $Rs \to \frac{1}{h_{22}}$

9°) <u>Autres matrices</u> :

Il existe d'autres matrices telle que : $[K_{ij}]$ appelée matrice hybride inverse.

- $i_1 = k_{11} v_1 + k_{12} i_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} k_{12} \\ k_{21} k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$v_2 = k_{21} v_1 + k_{22} i_2$

$(k) = \begin{pmatrix} k_{11} k_{12} \\ k_{21} k_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice hybride inverse avec : $\begin{pmatrix} k_{11} k_{12} \\ k_{21} k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{pmatrix}^{-1}$