## PREFACE

Cet ouvrage est destiné aux élèves de la classe de terminale, il est strictement conforme au nouveau programme.

*Le pilier du bac* intègre l'essentiel des savoirs en classe de terminale mais ne vous trompez surtout pas un livre ne peut et ne pourra jamais remplacer le cours.

Il est fondamental de comprendre d abord le cours et ensuite d aller consulter le livre.

La clé du bac vise un triple objectif :

- aider l'élève à combler ses lacunes car il est évident que le cours seul s avère insuffisant
- aider l'élève à vérifier sa compréhension des notions du programme
- aider l'élève à avoir confiance en soi avant le jour J

En classe de terminale l'élève ne doit pas être trop dépendant du professeur, il doit effectuer ses propres recherches. Seul un travail personnel, régulier et méthodique vous mènera à la réussite.

Maintenant vous détenez dans vos dextres un ouvrage très riche ; je pense qu'avec cet outil vous seriez à la hauteur d'avoir le bac dans vos poches

*< faites ce que vous pensez ne pas pouvoir faire>sy saidou*

# Remerciement

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidées corps et âme pour réaliser ce document

Je remercie particulièrement :

- ✓ le directeur et professeur Traoré à l école BA Souleye
- ✓ Le professeur soufi à l école normal des instituteurs (ENI)
- ✓ Le directeur de l école 8 pour ses encouragements
- ✓ Et mon cher ami Youssouf Ndaiye pour ses encouragements et toutes ses nuits blanches
- ✓ le directeur et professeur Gaston berger el hadji dame seck à Dakar
- ✓ le docteur sow djibril



Je dédie ce livre a mon père décédé en 2009 que la terre lui sois légère. Il m'a toujours soutenu tout au long de mon cursus scolaire .

Merci papa

# TABLE DES MATIERES

## THEMES :

# Les nombres complexes

***EXERCICE1***

| question | Réponse A | Réponse B | Réponse C | Réponse D |
|---|---|---|---|---|
| 1) $z = -\sqrt{3} - i$ alors $\arg(z) =$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{-\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ |
| 2) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ la forme algébrique de $z =$ | $\frac{(1+\sqrt{3})}{2} + i\frac{(1-\sqrt{3})}{2}$ | $\frac{(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{i(1+\sqrt{3})}{2}$ | $\frac{4}{(1+\sqrt{3})} - \frac{4}{i(\sqrt{3}+1)}$ | $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 3)*on considère les pionts* A ; B ; C ; D d affixe respective : $a = 3; b = 1 + i\sqrt{3}\ ; c = 1 + i\sqrt{3}$ *le triangle ABC est* | Equilatéral | Rectangle non isocèle | Isocèle non rectangle Non équilatéral | Non isocèle non rectangle |
| 4) Soit n un entier et soit $1 - i\sqrt{3}\ z^n$ est un réel positive si et seulement si : n = | $3k$ *avec* $k \in \boldsymbol{Z}$ | $3k + 1$ *avec* $k \in \boldsymbol{Z}$ | $6k$ *avec* $k \in \boldsymbol{Z}$ | $2k$ *avec* $k \in \boldsymbol{Z}$ |
| 5) L ensemble des points M d affixe z tels que $z + 2\bar{z} = 1$ est | Un point | Une droite | Un ensemble de point | Un cercle |
| 6)$z = \frac{3+9i}{3-i}$ | Le point $M$ d affixe $z$ Est sur le cercle trigonométrique | $z = \bar{z}$ | *z est un imaginaire pure* | *z est un réel* |
| 7)$z = 2 + 2i\sqrt{3}$ son conjugué : | $\bar{z} = -2 + 2i\sqrt{3}$ | $\bar{z} = -2 - 2i\sqrt{3}$ | $\bar{z} = 2 + 2i\sqrt{3}$ | $\bar{z} = 2 - 2i\sqrt{3}$ |
| 8)$f(z) = (-4 + 2i)\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}$ $z_A = 2i$ ; $z_B = -1 - \frac{1}{2}i$ L'ensemble des points $M(z)$ d affixe z tel que $\|f(z)\| = \sqrt{20}$ | *Est une droite* $(AB)$ | *Est* la médiatrice du segment $[AB]$ | Le milieu d une droite | Est un cercle de rayon $\sqrt{20}$ |
| *on pose* $Z = (z_1 \times z_2)$ $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{6}$ ; $\arg(Z) = \frac{13\pi}{12}$ $\arg(z_2) =$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{23\pi}{12}$ | $\frac{13}{10}$ | $\frac{8\pi}{12}$ |
| 10) *on pose* $Z = \frac{z_1}{z_2}$ $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ ; $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}$ $\arg(Z) =$ | $\frac{\pi}{12}$ | $-\frac{\pi^2}{24}$ | $-\frac{\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{12}$ |

***solution1***

| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| réponses | D | B | C | C | A | C | D | B | B | D |

***Exercice 2***

**1.** Soit P($z$) = $z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où $z$ appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

**a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

**b.** Calculer P(2).

**c.** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que P($z$) = ($z$ - 2) ($az^2 + bz + c$).

**d.** Déduire des questions précédentes les solutions dans **C** de l'équation P(z) = 0.

**2.** Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 2$ ; $z_B = 1 + 2i$ ; $z_C = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$et $z_D = 1 - 2i$.

**a.** Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe (sur papier millimétré).

**b.** Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_D$, $z_B - z_D$ et $z_B - z_A$.

En déduire la nature du triangle ABD

***Solution2***

**1.** Soit P(z) = $z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où $z$ appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

**a.**

$z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times5 = 4 - 20 = -16 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i \quad , z_2 = 1 + 2i$$

**b.**

$p(2) = 2^3 - 4\times2^2 + 9\times2 - 10 = 8 - 16 + 18 - 10 = -8 + 8 = 0$

donc 2 est une racine de $p(z)$

**c.** On en déduit que P(z) peut s'écrire sous la forme
P(z) = (z - 2)($az^2 + bz + c$) où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels à déterminer.
développons P(z) :
$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c = az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

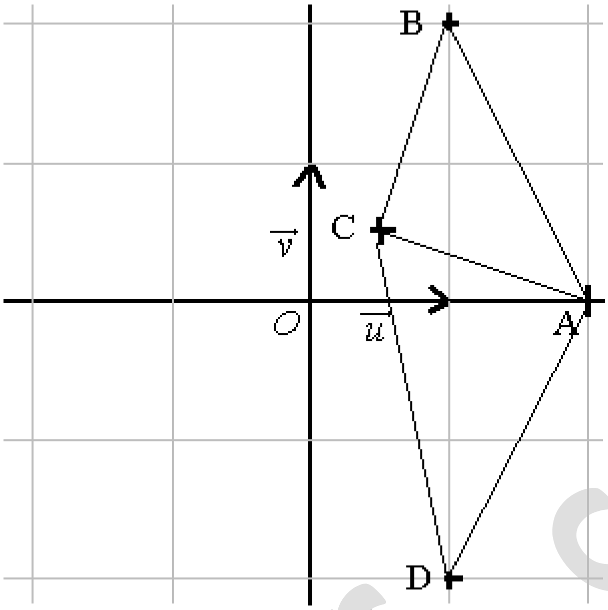
par identification ( avec $z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ ) on en déduit :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 9 \\ -2c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 + 2 = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

soit : $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 5)$

**d.** $P(z) = 0$ équivaut à
$(z - 2)(z^2 - 2z + 5) = 0$ équivaut à
$z - 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 5 = 0$
$z = 2$ ou $z = 1 - 2i$ ou $z = 1 + 2i$ ( d'après la question **1.a** )

**2.** ***a.***




$z_A = 2$ ; $z_B = 1 + 2i$ ; $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\ 2i$ et $z_D = 1 - 2i$

**b.**

$DA = |z_A - z_D| = |2 - (1 - 2i)|$

$= |2 - 1 + 2i| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$DB = |z_B - z_D| = |1 + 2i - (1 - 2i)|$

$= |4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$

$AB = |z_B - z_A| = |1 + 2i - 2| = |-1 + 2i|$

$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

donc AB = AD, donc ABD est isocèle en A.

***<u>Exercice 3</u>***

Le plan est rapporté à un repère ortho normal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$(unité graphique : 2cm)

Soient les nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad et \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

**1. a.** Déterminer le module et un argument des nombres $z_1$ et $z_2$.

**1. b** Placer les points A et B d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

**2.** Soit Z le nombre complexe tel que Z = $\frac{z_2}{z_1}$.

Ecrire Z sous forme exponentielle, en déduire une mesure en radian de l'angle $\theta$ de la rotation de centre O qui transforme A en B.

**3. a.** Ecrire Z sous forme trigonométrique.

**3. b.** En utilisant les formes algébriques de $z_1$ et $z_2$, déterminer la forme algébrique de Z.

**3.c.** En déduire les valeurs exactes de

$\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$

## Solution 2

### 1. a.

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad et \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

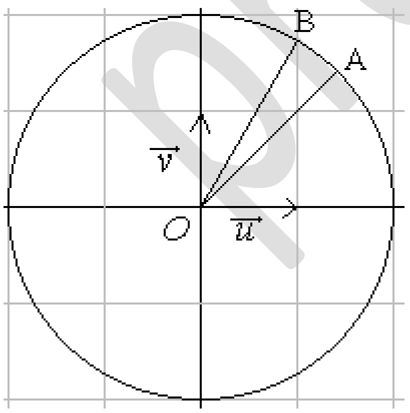
$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad Arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

### 1. b.




### 2. a.

$$|z_1| = 2, \quad Arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{donc } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$|z_2| = 2, \quad Arg(z_2) = \frac{\pi}{3} \quad \text{donc } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_2 = z_1 e^{i\frac{\pi}{12}}$$

donc B est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{12}$

**2.b.**

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i^2\sqrt{6}}{2-2i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

**c.**

$$Z = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

***Exercice4*** : (bac)

Le plan complexe est muni d un repère orthonormé (o $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ )

Pour tout nombre complexe $z$ on pose : $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

1 a) calculer $p\ (4)$

b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z : $p\ (z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

2) Résoudre dans l ensemble des nombres complexes ***C*** *l équation* $p(z) = 0$ *puis donner le module et l argument de*

*Chacun de ses solutions*

*3) dans le plan complexe on considère les points A, B, C d affixe respectives*

$z_{A=}\ 1 - i\sqrt{3}$ ; $z_B =\ 4$ ; $z_c$ = 1+ $i\sqrt{3}$

a) construire les points A, B, C dans un repère (o $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ )

b) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral

c) Calculer le périmètre et l aire du triangle ABC

**<u>*Solution3*</u>** :

1a) calculons $p(4)$ : $4^3 - 6(4)^2 + 12(4) - 16 = 64 - 96 + 48 - 16 = 0$

b) Déterminons les réels a et b

$p\ (z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$ *on développe* $p\ (z)$

☞ $z^3 + az^2 + bz - 4z^2 - 4az - 4b$ *on factorise* $p\ (z)$

$z^3 + (a - 4)z^2 + (b - 4a)z - 4b$

***<u>Première méthode :par identification</u>***

$$\begin{cases} (a - 4) = -6 \Rightarrow \boldsymbol{a} = -2 \\ . \\ (b - 4a) = 12 \ \Rightarrow \boldsymbol{b} = 4 \\ . \\ -4b = -16 \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{p(z) = (z - 4)(z^2 - 2z + 4)}}$$

***<u>Deuxième méthode :la division euclidienne</u>***

$$
\begin{array}{r|l}
z^3 - 6z^2 + 12z - 16 & z \quad - 4 \\
\cline{2-2}
-z^3 + 4z^2 & z^2 - 2z + 4 \\
\cline{1-1}
-2z^2 + 12z - 16 & \\
2z^2 - 8z & \\
\cline{1-1}
4z - 16 & \\
-4z + 16 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2) Résoudre $p(z) = 0$ revient à poser $(z-4)(z^2-2z+4) = 0$

$(z-4)$ = 0 ou $(z^2 - 2z + 4)$ =0

$z_1$ = 4 ou $\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$\Delta = 4 - 16 = -12 = 2i\sqrt{3}$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{2} = \ (1 + i\sqrt{3})$

$z_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{2} = \ (1 - i\sqrt{3})$

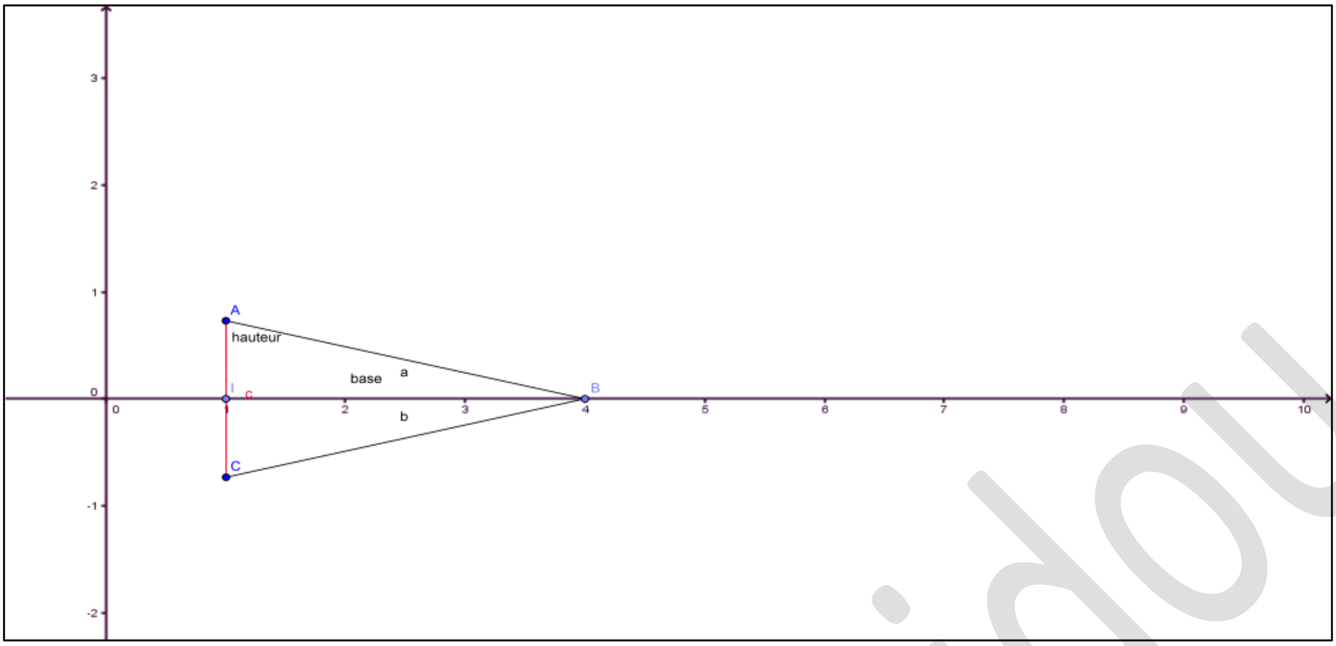
$s \ \{4, \ 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}.\}$

$|z_1| = 4 \quad \arg z_{1\,=} \ 0[2\pi]$

$|z_2|$ = $|1 + i\sqrt{3}|$ = $\sqrt{1+3}$ = 2 $\qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow arg z_2 = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$|z_3|$ = $|1 - i\sqrt{3}|$ = $\sqrt{1+3}$ = 2 $\qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow arg z_2 = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

3 a)




3b)

$z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ; $z_B = 4$ ; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

***Montrons que le triangle est équilatéral***

Première méthode : on va démontrer que les côtés BA = CA = BC

$BA = |Z_A - Z_B| = \left|1 - i\sqrt{3} - 4\right| = \left|-3 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BA = 2\sqrt{3}$

$CA = \left|z_A - z_C\right| = \left|1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}\right| = \left|2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$CA = 2\sqrt{3}$ .

$BC = \left|z_C - z_B\right| = \left|1 + i\sqrt{3} - 4\right| = \left|-3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12}$

$BC = 2\sqrt{3}$ . On remarque que $BA = CA = BC$

Donc ABC est un triangle équilatéral

***Deuxième méthode :***

Il suffit de démontrer que $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{1+i\sqrt{3}-4}{1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-2i\sqrt{3})}{12} = \frac{6i\sqrt{3}+6}{12} = \frac{6(1+i\sqrt{3})}{6\times 2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc ABC est un triangle équilatéral

c) *calculons le perimètre et la surface du triangle ABC*

☞ *perimètre égale* à *somme des* côtés : $BA + CA + BC = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

☞ *surface égale* à $\frac{base \times hauteur}{2} = \frac{BI \times AC}{2}$ ; *calculons* d' abord $BI$. $|z_B - Z_I| = |4 - 1| = 3$

$$\boxed{l\ aire\ du\ triangle\ ABC = \frac{3\times 2\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}}$$

***Exercice 5.***

Le plan complexe est rapporté au repère ortho normal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm. Le nombre

i désigne

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi$ /2.

1. Soit trois nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = \frac{z_1^{\ 2}}{2} \quad et \quad z_3 = \frac{4}{z_2}$$

a. Déterminer le module et un argument de $z_1$.
b. Ecrire sous la forme a + bi les complexes $z_2$ et $z_3$.
2. Soit quatre nombres complexes

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_C = -\sqrt{3} + i, \quad z_D = 1 - i\sqrt{3}$$

a. Montrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$ sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer le cercle dans le plan complexe et placer les points A, B , C et D.
b. Calculer $|z_C - z_B|$ et $|z_D - z_A|$.

c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ; vérifier que $\overrightarrow{CD} = -(\sqrt{3}+2)\overrightarrow{AB}$ .

d. Indiquer si les propositions suivantes sont justes ou fausses; justifier vos réponses.
AD = BC ;
CD = 3 AB
ABCD est un trapèze isocèle

**Solution5 :**

1 .a.

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta_1 = \frac{\pi}{6} = Arg(z_1)$$

b.

$$z_2 = \frac{z_1^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{2} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i^2}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

$$z_3 = \frac{4}{z_2} = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-3i^2} = \frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4} = 1-i\sqrt{3}$$

2. a.

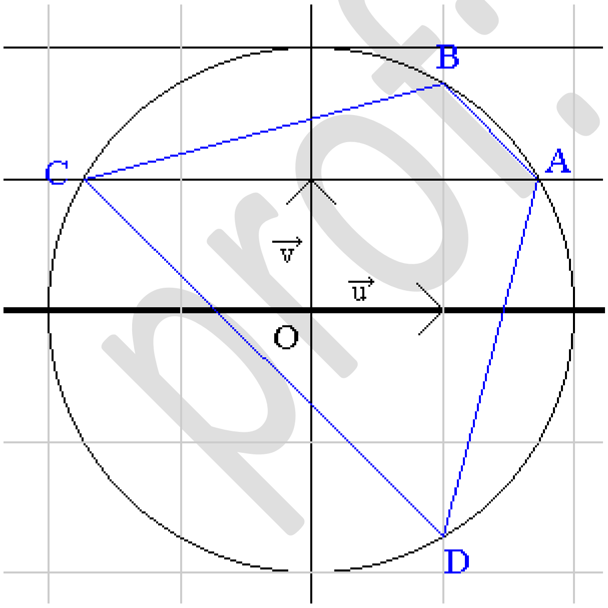
$$OA = |z_A| = |z_1| = 2$$

$$OB = |z_B| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$OC = |z_C| = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$OD = |z_D| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

OA = OB = OC = OD donc les points A, B , C et D appartiennent au cercle de centre O et rayon 2.




b.

$BC = |z_C - z_B| = |-\sqrt{3} + i - 1 - i\sqrt{3}| = |(-\sqrt{3} - 1) + i(1 - \sqrt{3})|$

$\sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2 + (1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3 + \cancel{2\sqrt{3}} + 1 + 1 \cancel{-2\sqrt{3}} + 3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AD = |z_D - z_A| = |1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i| = |(1-\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3})|$

$= \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (-1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 \cancel{-2\sqrt{3}} + 3 + 1 + \cancel{2\sqrt{3}} + 3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i = (1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 1 - i\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3} + i\right) = 1 - i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i = (1+\sqrt{3}) - i(\sqrt{3}+1)$

$-(\sqrt{3}+2)z_{\overrightarrow{AB}} = -(\sqrt{3}+2)(1-\sqrt{3}) - i(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$

$= -(\sqrt{3} - 3 + 2 - 2\sqrt{3}) - i(3 - \sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3})$

$= -(-1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3}) = z_{\overrightarrow{CD}}$

donc $\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}+2)\overrightarrow{AB}$

d. AD = BC d'après la question b.

$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}+2)\overrightarrow{AB}$ les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc (AB) // (CD) par conséquent ABCD est un trapèze isocèle.

Par contre l'égalité CD = 3AB n'est pas juste puisque CD = $(-\sqrt{3}+2)$ AB.

***Exercice 6***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère

les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + 3i$ ; $z_B = 2\sqrt{3}$ et $z_C = 2i$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe ( sur papier millimétré ).
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z_A$.
3. a. Calculer les modules des nombres complexes :

$z_A - z_C$ , $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$

En déduire la nature du triangle ABC.

b. Déterminer l'affixe du centre K du cercle ( Γ ) circonscrit au triangle ABC ; préciser le rayon de ce cercle.

c. Montrer que le point O appartient au cercle ( Γ )

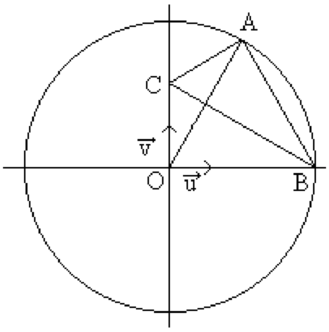
4. On considère le point D d'affixe $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

a. Montrer que $z_D = \sqrt{3} - i$

b. Calculer l'affixe du milieu M du segment [AD].

c. Démontrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

Solution6




1.

2. Déterminons le module de $z_A = \sqrt{3} + 3i$

$|z_A| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Déterminons un argument de $z_A$

soit $\theta_A$ un argument de $z_A = \sqrt{3} + 3i$, on a :

$\cos \theta_A = \sqrt{3}/2\sqrt{3} = 1/2$

$\sin \theta_A = 3/2\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$

On en déduit $\theta = \pi/3$ est un argument de $z_A$

3. a.

$AC = |z_A - z_C| = |\sqrt{3} + 3i - 2i| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3} + 1 = \sqrt{4} = 2$

$AB = |z_B - z_A| = |2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 3i)| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{3+9} =$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_B - z_C| = |2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$BC^2 = 16$
$AC^2 + AB^2 = 4 + 12 = 16$
donc $BC^2 = AC^2 + AB^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore
ABC est rectangle en A.

3.b. Le triangle ABC est rectangle en A, donc le centre K du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de [BC], soit $z_K$ l'affixe de K on a :

$$z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

Le rayon r du cercle $(\Gamma)$ est égal à la moitié de l'hypoténuse BC, soit r = 2.
B et C appartiennent respectivement à l'axe des réels et des imaginaires purs donc BOC est rectangle en O, O appartient donc au cercle $(\Gamma)$ de diamètre [BC]

4. a.
$$z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} - i$$

b. M milieu de [AD] donc si $z_M$ est l'affixe de M :

$$z_M = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3} - i}{2} =$$
$$\frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i = z_K$$

donc M et K sont confondus.

c.

[AD] et [BC] ont le même milieu K , or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme d'ou ABDC est un parallélogramme.

De plus ABDC est tel que (AB) $\perp$ (AC) or un parallélogramme dont deux cotés consécutifs sont perpendiculaire est un rectangle donc ABDC est un rectangle.

***Exercice7***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (o $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ )

Pour tout nombre complexe $z$ diffirent de $4+3i$ on pose $f(z) = \frac{z-3+4i}{z-4-3i}$

1) calculer $\beta = f(10-5i)$ puis l'écriture sous forme algébrique et trigonométrique

2) on considère les deux points A et B d'affixe respectives : $z_{A=}$ 4+3$i$ $et$ $z_{B=}$ $3-4i$

a) Déterminer l'ensemble $\Gamma_1$ des points $M$ du plan d'affixe $z$ tel que $|f(z)| = 1$

b) Déterminer l'ensemble $\Gamma_2$ des points $M$ du plan d'affixe $z$ tel que $f(z)$ soit imaginaire pure

c) vérifier par calcul que l'origine O du repère a un point commun aux deux ensemble $\Gamma_1$ $et$ $\Gamma_2$ construire

Les deux ensemble dans le repère (o $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ ).

3) pour tout entier naturel $n$ on pose $z_n = \beta^n$ soit $M_n$ le point d affixe $z_n$

a) quel est l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points $M_n$ appartienne à l'axe des abscisses

b) vérifier que les points $M_{16}$ , $M_{2012}$, $M_{2014.}$ , $M_{2015}$ appartiennent à l'axe des abscisse .

c) quel est l'ensemble des valeurs de $n$ pour lesquelles on a O$M_n \leq 10^{-3}$ ?

d) Montrer que si $n$ tend vers $+\infty$ alors le point $M_n$ tend vers une position précise à déterminer

**solution6 :**

**1)** calculons $\beta = f(10-5i)$ on remplace $z$ $par$ $10-5i$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}}$$

$\frac{10-5i-3+4i}{10-5i-4-3i} = \frac{7-i}{6-8i} = \frac{(7-i)(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{(42+56i-6i+8)}{36+64} = \frac{(50+50i)}{100} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

$|\beta| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

arg $(\beta)$ = $\begin{cases} \cos\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ arg $(\beta) = \frac{\pi}{4}$

$forme\ trigonométrique :$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

**2) a** déterminons l'ensemble $\Gamma_1$

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3+4i}{z-4-3i}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_M - z_B}{Z_M - z_A}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

$$\boxed{\text{☞ } l'ensemble\ \Gamma_1\ est\ la\ médaitrice\ du\ segement\ [\mathrm{AB}]}$$

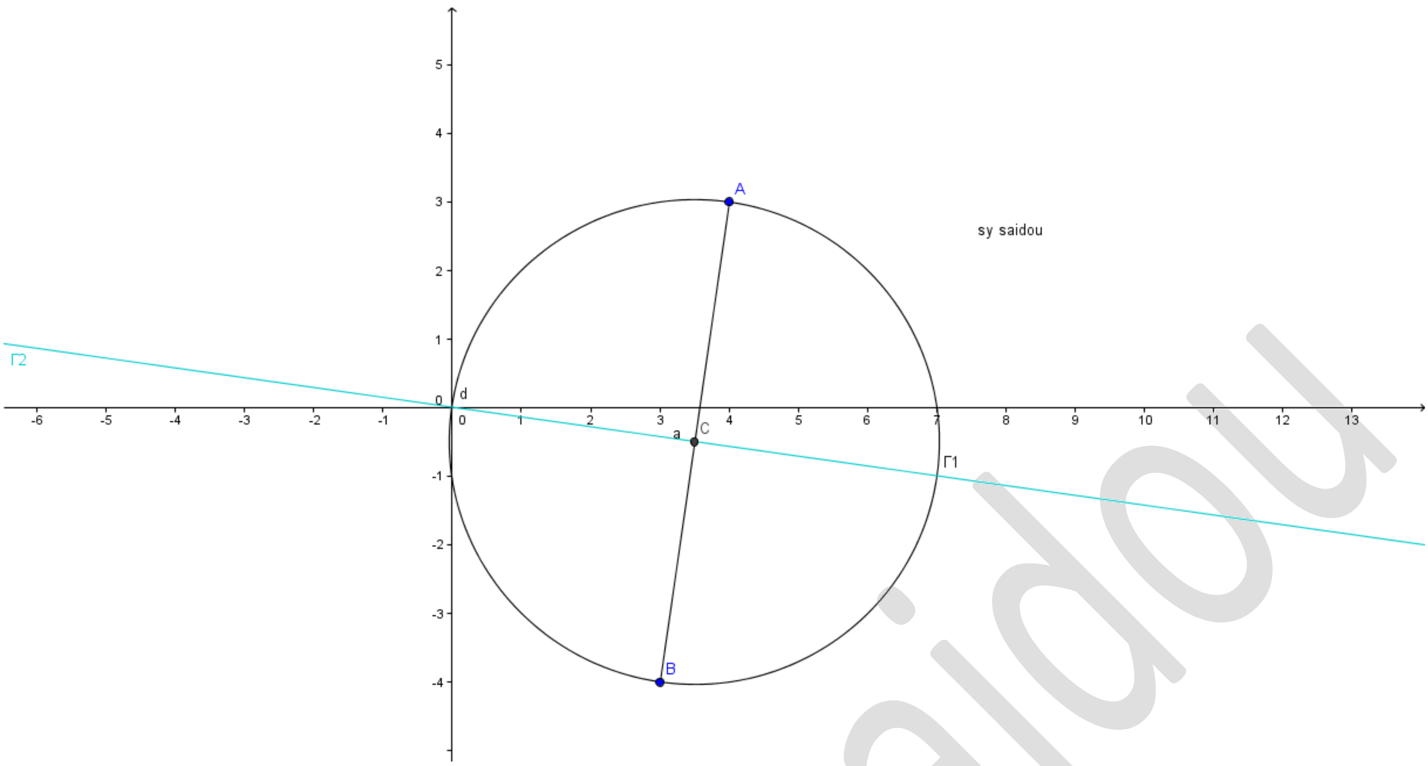
$b\ )f(z)\ est\ imaginaire\ pure \Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0\ où \\ arg f(z) = \frac{\pi}{2} \\ . \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \end{cases}$

$$\boxed{\text{☞ } l'ensemble\ \Gamma_2\ est\ un\ cercle\ de\ daimétre\ AB\ privé\ du\ point\ A}$$

***C)*** $|f(0)| = \left|\frac{-3+4i}{-4-3i}\right| = \left|\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16+9}}\right| = 1 \Rightarrow |f(0)| = 1 \Rightarrow 0 \in \Gamma_1$

$f(0) = \frac{-3+4\mathrm{i}}{-4-3\mathrm{i}} = \frac{(-3+4i)(-4+3i)}{(-4-3i)(-4+3i)} = \frac{12-9i-16i-12}{16+9} = \frac{-25i}{25} = -i$

$f(0) = -i \Rightarrow f(0) \in i\,R^* \Rightarrow 0 \in \Gamma_2$ DONC $0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$




**3)** $z^n = \beta^n$

a) $M_n$ $\epsilon$ à $l'axe\ des\ abscisses\ si\ et\ seulement\ si\ z \in \boldsymbol{R}$

$z \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow arg z^n = k\pi$

$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{n}{4} = k$

$\Leftrightarrow n = 4k$

$\boxed{M_n\ appartiennent\ à\ l'axe\ des\ abscisses\ si\ et\ seulement\ si\ l'entier\ n\ est\ multiple\ de\ 4}$

b)

☞ Vérifions que $M_{16} \in$ à l'axe des abscisses (OX) : 16 = 4 × 4

16 est multiple de 4 donc $M_{16} \in$ à l'axe des abscisses (OX)

☞ Vérifions que $M_{2012} \in$ à l'axe des abscisses (OX) : 2012 = 4 × 503

2012 est multiple de 4 donc $M_{2012} \in$ à l'axe des abscisses (OX)

*Le pilier du bac élaboré par le professeur chercheur sy saidou*

Nombre décimal

☞ Vérifions que $M_{2014} \in$ à l'axe des abscisses (OX) : 4× 503,5

2014 n'est pas multiple de 4 donc $M_{2014}$ $n'appartient\ pas$ $(\notin)$ à l'axe des abscisses (OX)

Nombre décimal

☞ Vérifions que $M_{2015} \in$ à l'axe des abscisses (OX) : 4 × 503,75

2015 n'est pas multiple de 4 donc $M_{2015}$ $n'appartient\ pas$ $(\notin)$ à l'axe des abscisses (OX)

c) $OM_n \leq 10^{-3} \Rightarrow |z_n| \leq 10^{-3}$

$$\Rightarrow |\beta.|^n \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow ln|\beta.|^n \leq ln\ 10^{-3}$$

$$\Rightarrow nln|\beta| \leq -3ln10$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{-3ln10}{ln|\beta|}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{-3ln10}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 20{,}29$$

$n \in \{21,\ 22,\ 23\ ,24\}$

d) $\lim_{n\to\infty} OM_n = \lim\limits_{n\to\infty} = |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = 0$

$si\ n \to +\infty\ le\ point\ M_n$ est confondu avec origine O

## ***Exercice 8***

Le plan complexe P est rapporté au repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ ;

$z_1$ le nombre complexe -1 -i $\sqrt{3}$.

1. On pose $z_2 = iz_1$, montrer que $z_2 = \sqrt{3} - i$

2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1$ et $z_2$.

2.b. Placer dans le plan P le point $M_1$ d'affixe $z_1$ et le point $M_2$ d'affixe $z_2$.

3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$ telles que :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$ ; $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$

3.a. Montrer que $z_A = 2\ z_1$ et que $z_B = -\ z_A$

3.b. Placer les points A,B et C dans le plan P.

3.c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

3.d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

**Solution8 :**

1.

$$z_2 = iz_1 = i\ (-1 - i\sqrt{3}) = -i - i^2\sqrt{3} = -i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - i$$

2.a . Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ des arguments respectifs de $z_1$ et $z_2$ :

$$|z_1| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

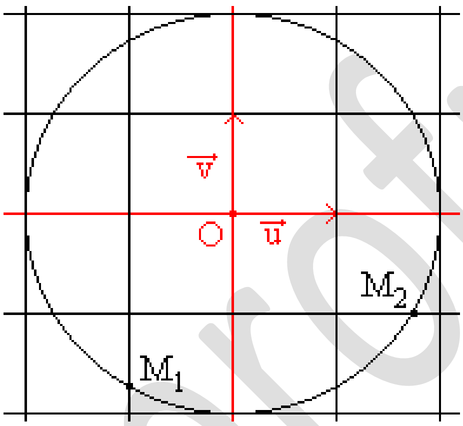
On peut aussi utiliser les propriétés du module d'un nombre complexe :

$$|z_2| = |iz_1| = |i| \cdot |z_1| = 1 \times 2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \theta_1 = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \theta_2 = \frac{-\pi}{6}$$

2.b.

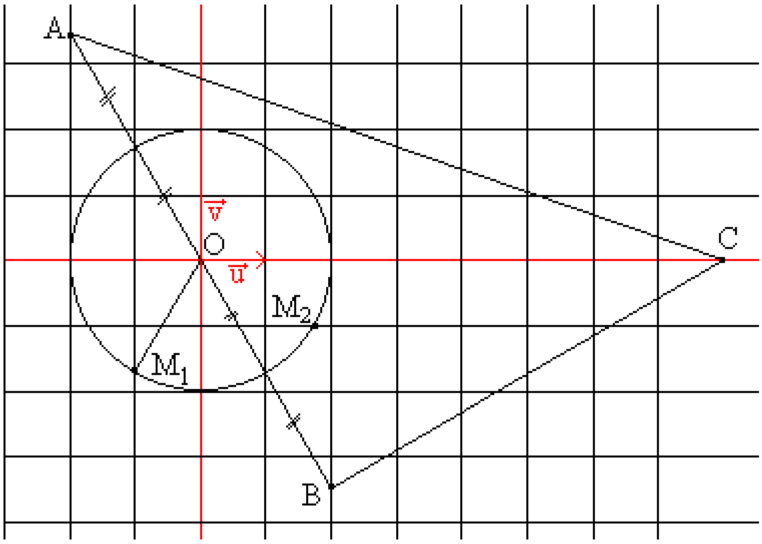



3.a.

$$2\overline{z_1} = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = z_A$$

$$-z_A = -(-2 + 2i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3} = z_B$$

3.b.




3.c.

$AB = |z_B - z_A| = |2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}| =$

$|4 - 4i\sqrt{3}| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$

$BC = |z_C - z_B| = |8 - 2 + 2i\sqrt{3}| = |6 + 2i\sqrt{3}| =$

$= \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |8 + 2 - 2i\sqrt{3}| = |10 - 2i\sqrt{3}| =$

$\sqrt{10^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100+12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + BC^2 = 64 + 48 = 112 \\ AC^2 = 112 \end{array}\right\} \text{donc } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.

3.d. Pour qu'ABCD soit un rectangle il suffit qu'ABCD soit un parallélogramme puisque ABC est un triangle rectangle.

Pour que ABCD soit un rectangle il suffit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soient $z_A$, $z_B$, $z_C$, $z_D$ les affixes respectifs de A, B, C, D

de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ on en déduit : $z_B - z_A = z_C - z_D$ soit $z_D = z_A - z_B + z_C$

$z_D = -2 + 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 8 = 4 + 4i\sqrt{3}$ est donc l'affixe du point D.

***Exercice9***

on considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right); \quad z_2 = 4; \quad z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$$

On appelle $M_1$, $M_2$, $M_3$ leurs images respectives dans le plan complexe (P) rapporté au repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$(unité graphique : 1 cm ) .

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1$ et de $z_3$.

2) Placer les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ dans le plan (P)

3) a) Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_1 - 2$ ; $z_2 - 2$ ; $z_3 - 2$

b) En déduire que les trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle.

**Solution9 :**

1) Mettons les nombres complexes $z_1$ et $z_3$ sous la forme algébrique

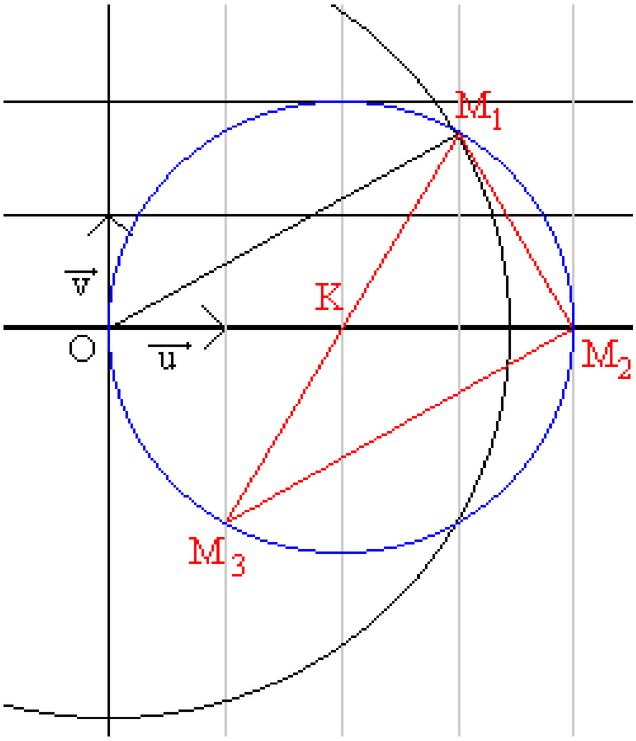
$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \boxed{3 + \left(\sqrt{3}\right)i}$$

$$z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right) = 2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$2\left(1 + \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{1 - \left(\sqrt{3}\right)i}$$

On en déduit les parties réelles et imaginaires de $z_1$ et $z_3$ :

$$\boxed{\mathrm{Re}(z_1) = 3 \quad \mathrm{Im}(z_1) = \sqrt{3} \quad \mathrm{Re}(z_3) = 1 \quad \mathrm{Im}(z_3) = -\sqrt{3}}$$




2)

3) a)

$$z_1 = 3+\left(\sqrt{3}\right)i \Rightarrow z_1 - 2 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_2 - 2 = 4 - 2 = 2 = \boxed{2\left(\cos 0 + i\sin 0\right)}$$

$$z_3 - 2 = 2\left(1+e^{4i\frac{\pi}{3}}\right) - 2 = 2e^{4i\frac{\pi}{3}} = \boxed{2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

b) on a par conséquent :

$|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 2$

Soit K le point d'affixe 2, on a donc :

$KM_1= KM_2= KM_3$ il en résulte que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ appartiennent au cercle de centre K et de rayon 2.

4)

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2 - 3 - \left(\sqrt{3}\right)i\right| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| =$$
$$\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|1 - \left(\sqrt{3}\right)i - 2\right| = \left|-3 - i\sqrt{3}\right| =$$
$$\sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$M_1M_3 = |z_3 - z_1| = \left|1 - \left(\sqrt{3}\right)i - 3 - \left(\sqrt{3}\right)i\right| =$$
$$\left|-2 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$\left.\begin{array}{l} M_1M_3^{\ 2} = 16 \\ M_1M_2^{\ 2} + M_2M_3^{\ 2} = 4 + 12 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1M_3^{\ 2} = M_1M_2^{\ 2} + M_2M_3^{\ 2}$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en $M_2$.

Autre méthode : montrer que le point K est le milieu du segment $[M_1M_3]$

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{3 + \left(\sqrt{3}\right)i + 1 - \left(\sqrt{3}\right)i}{2} = \frac{4}{2} = 2 = z_K$$

K est donc le milieu du segment $[M_1M_3]$ , par conséquent le triangle $M_1M_2M_3$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[M_1M_3]$, d'ou $M_1M_2M_3$ est rectangle en $M_2$

***Exercice10***

on désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = 8 \quad z_B = 8i \quad z_C = z_A e^{\frac{-i\pi}{3}} \quad z_D = z_B e^{2i\frac{\pi}{3}}$

1) Ecrire $Z_A$ et $Z_B$ sous la forme trigonométrique. Donner le module et un argument de $Z_C$ et $Z_D$ et écrire ces nombres sous la forme algébrique.

2) Montrer que les points A, B, C, D sont situés sur le même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3) Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points A, B, C, D.

4) a) On note $Z_1$ et $Z_2$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}$et $\overrightarrow{BD}$. Montrer que $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$ .

b) On note $Z_3$ et $Z_4$ les affixes respectives des vecteurs Calculer $|Z_3|$ et $|Z_4|$.

c) Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze isocèle.

***<u>Solution10</u>***:

1)

$$|z_A| = |8| = \sqrt{8^2} = 8$$

$$|z_B| = |8i| = \sqrt{8^2} = 8$$

Les deux nombres complexes $z_A$ et $z_B$ ont pour module 8.

soient $\theta_A, \theta_B$ des arguments respectifs de $z_A$ et $z_B$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta_A = \frac{8}{8} = 1 \\ \sin\theta_A = \frac{0}{8} = 0 \end{matrix}\right\} \theta_A = 0 \qquad \left.\begin{matrix} \cos\theta_B = \frac{0}{8} = 0 \\ \sin\theta_B = \frac{8}{8} = 1 \end{matrix}\right\} \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

on en déduit la forme trigonométrique des nombres complexes $z_A$ et $z_B$ ( et du même coup leurs formes exponentielle ) :

$$z_A = 8\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 8e^{i0}$$

$$z_B = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

on peut en déduire les formes exponentielles des nombres complexes $z_C$ et $z_D$ :

$$z_C = z_A e^{\frac{-i\pi}{3}} = 8e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

$$z_D = 8e^{i\frac{\pi}{2}}e^{2i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-5\pi}{6}}$$

on a donc :

$$|z_D| = 8 \quad |z_C| = 8 \quad A\text{rg}(z_C) = \frac{-\pi}{3} \quad Arg(z_D) = \frac{-5\pi}{6}$$

on en déduit leur forme algébrique :

$$z_C = 8e^{\frac{-i\pi}{3}} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{4 - 4\sqrt{3}i}$$

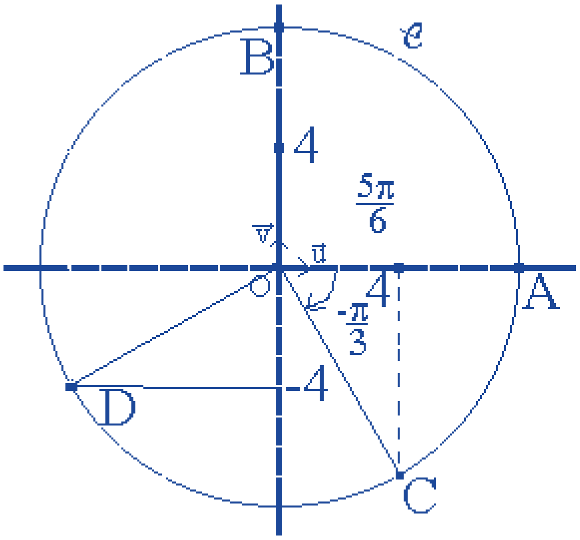
$$z_D = 8e^{i\frac{-5\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{-4\sqrt{3} - 4i}$$

( ce n'est pas la seule façon de déterminer les formes algébriques de ces deux nombres complexes )

2) on a :

$$\left.\begin{matrix} OA = |z_A| = 8 \\ OB = |z_B| = 8 \\ OD = |z_D| = 8 \\ OC = |z_C| = 8 \end{matrix}\right\} OA = OB = OC = OD = 8$$

les points A, B, C, D appartiennent par conséquent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8.




4) a)

$Z_2 = z_D - z_B = -4\sqrt{3} - 4i - 8i = -4\sqrt{3} - 12i$

$Z_1 = z_C - z_A = 4 - 4\sqrt{3}i - 8 = -4 - 4\sqrt{3}i$

$\sqrt{3}Z_1 = \sqrt{3}(-4 - 4\sqrt{3}i) = -4\sqrt{3} - 12i = Z_2$

une propriété sur les affixes se répercute sur une propriété vectorielle : de $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$ on en déduit :

$\overrightarrow{BD} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{AC}$

on en conclu au passage que les droites (BD) et (AC) sont parallèles puisque les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

4) b)

$|Z_3| = |z_B - z_A| = |8i - 8| = |-8 + 8i| =$

$\sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{2 \times 64} = \boxed{8\sqrt{2}}$

$|Z_4| = |z_C - z_D| = \left|4 - 4\sqrt{3}i - (-4\sqrt{3} - 4i)\right| =$

$\left|4 - 4\sqrt{3}i + 4\sqrt{3} + 4i\right| = \left|(4 + 4\sqrt{3}) + (4 - 4\sqrt{3})i\right| =$

$\sqrt{(4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 - 4\sqrt{3})^2} =$

$\sqrt{16 + \cancel{32\sqrt{3}} + 48 + 16 \cancel{-32\sqrt{3}} + 48} =$

$\sqrt{2 \times 64} = \boxed{8\sqrt{2}}$

$|Z_3| = |Z_4|$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

ont la même norme $8\sqrt{2}$ : AB = DC.

4) c) d'après ce qui précède le quadrilatère ABDC est tel que AB = DC et (AC) // (BD) donc c'est un trapèze isocèle

***Exercice11***

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z_1 = 1 + i$ , $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$

1)a) Mettre $z_1^3$ sous forme algébrique ( on pourra utiliser une identité remarquable ).

b) Mettre Z sous forme algébrique.

2)a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z_1$ , puis le module et l'argument

du nombre complexe $z_1^3$.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z_2$

c) Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z.

3) En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de Z, déterminer

les valeurs exactes de cos (11 π /12) et sin (11 π /12).

**Solution11**

1) a)

$$z_1^3 = (1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 =$$
$$(1+i)(1+2i+i^2) = (1+i)(2i) = 2i + 2i^2 = -2+2i$$

b)

$$Z = z_1^3 z_2 = (-2+2i)(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3} - 2i + 2i\sqrt{3} + 2i^2$$
$$= (-2\sqrt{3}-2) + (-2+2\sqrt{3})i$$

2) a)

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

soit $\theta_1$ un argument de $z_1$ on a :

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_1)^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

donc 3 π /4 est un argument de $z_1^3$ et $\sqrt{2}$ son module.

2) b)

$$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

soit $\theta_2$ un argument de $z_2$ on a :

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

on en déduit la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre $z_1$

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2) c) des formes exponentielle de $z_1^3$ et $z_2$ on en déduit la forme exponentielle du nombre complexe Z ainsi que sa forme trigonométrique :

$$Z = z_1^3 z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}+i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}+i\frac{2\pi}{12}}$$

$$Z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

3) On sait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont les même parties réelles et les même parties imaginaires :

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = (-2\sqrt{3}-2) + (-2+2\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

## Exercice12

**1.** Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$d'unité graphique 1 cm.

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

**1. a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

**1. b.** Ecrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

**2.** Dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$, placer les points A, B et I d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 3 - i\sqrt{3}, \quad z_I = 2.$$

**2. a.** Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

**2. b.** Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

**2. c.** Placer le point C d'affixe $z_C = -2i\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

**solution12:**

**1. a.**

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 36 - 48 = -12 < 0$

donc l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = \frac{2(3 - i\sqrt{3})}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

**1. b.**

Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ des arguments de $z_1$ et $z_2$ :

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

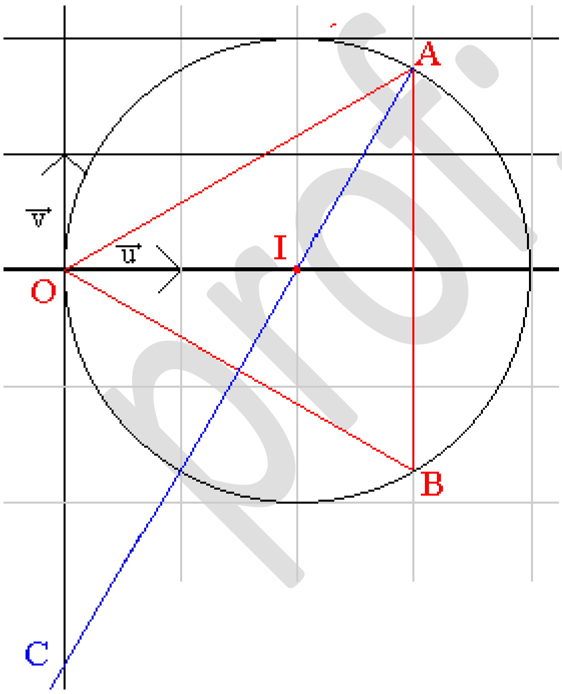
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}^2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{-\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}^2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$




**2. a**

$$IA = |z_A - z_I| = |3 + i\sqrt{3} - 2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$IB = |z_B - z_I| = |3 - i\sqrt{3} - 2| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$IO = |-z_I| = 2$$

IA = IB = IO = 2
donc les points A, B et O appartiennent au cercle de centre I et de rayon 2.
2. b.

**Première méthode :**

OA = $|z_A|$ = 2 $\sqrt{3}$

OB = $|z_B|$ = 2 $\sqrt{3}$

donc le triangle AOB est isocèle en O
de plus :

$$mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = mes\left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right) + mes\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right) \quad [2\pi]$$

$$= -Arg(z_A) + Arg(z_B) \quad [2\pi] = -\frac{\pi}{6} + \frac{-\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$= \frac{-\pi}{3} \quad [2\pi]$$

or un triangle isocèle ayant un angle de mesure 60° ou $\pi$ /3 radians est un triangle équilatéral
donc OAB est un triangle équilatéral.

***<u>Deuxième méthode</u>*** :

OA = $|z_A|$ = 2 $\sqrt{3}$

OB = $|z_B|$ = 2 $\sqrt{3}$

AB = $|z_B - z_A|$ = |3 - i $\sqrt{3}$ - ( 3 + i $\sqrt{3}$ )| = |-2i $\sqrt{3}$ | = 2 $\sqrt{3}$

OA = OB = AB donc le triangle AOB est un triangle équilatéral.

**2. c.**

$$\overrightarrow{AC}\,(z_C - z_A) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\left(-2i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AI}\,(z_I - z_A) \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(2 - 3 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(-1 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow 3\overrightarrow{AI}\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI} \Rightarrow \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AI} \text{ sont colinéaires}$$

donc les points A, C et I sont alignés.

**Exercice 13 :**

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$d'unité graphique 1 cm.

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

**1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$

**2.** Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 64$.

**a.** Calculer P(4)

**b.** Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$

**c.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation P(z) = 0

**3.** On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$ , $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 4$.

**a.** Etablir que :

$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Ecrire $z_B$ sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et $\theta$un nombre réel compris entre $-\pi$ et $\pi$.

**b.** Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

**c.** Déterminer la nature du triangle ABC.

**4.** On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$ , et on appelle $z_D$ l'affixe du point D.

**a.** Déterminer le module et un argument de $z_D$ .

**b.** En déduire la forme algébrique de $z_D$ .

**c.** Placer le point D sur le graphique précédent.

**Solution 13**

**1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$**

$\Delta = 4^2 - 4\times1\times16 = 16 - 64 = -48 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4-\sqrt{48}i}{2} = \frac{-4-\sqrt{16\times3}i}{2} = \frac{-4-4i\sqrt{3}}{2} = -2-2i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -2+2i\sqrt{3}$$

**2. Pour tout nombre complexe z, on pose P(z) = z3 - 64.**

**a. P(4) = 43 - 64 = 64 - 64 = 0 donc est une racine de P(z) donc**

**b. P(z) peut s'écrire sous la forme $P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$**

**$= az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = az^3 + (b - 4a)z2 + (c - 4b)z - 4c$**

**Par identification on a :**

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ -4c = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 16 \end{cases}$$

**$P(z) = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$**

**c. P(z) = 0 équivaut à : (z - 4)(z2 + 4z + 16) = 0 soit**
**z - 4= 0 ou z2 + 4z + 16 = 0 donc**

**z = 4 ou z = - 2 - 2i $\sqrt{3}$ ou z = - 2 + 2i $\sqrt{3}$**

**donc S = { 4 ; - 2 - 2i $\sqrt{3}$ ; - 2 + 2i $\sqrt{3}$ }**

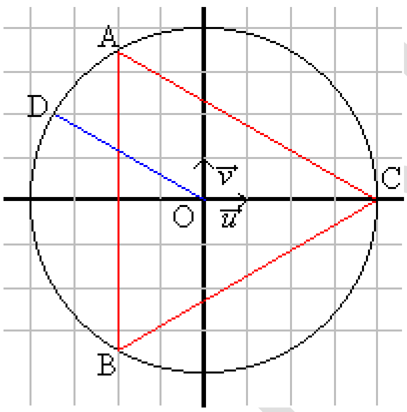
**3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :**

**$z_A$ = -2 + 2i $\sqrt{3}$ , $z_B = \overline{z_A}$ , $z_C$ = 4.**

**a.**

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$$
$$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_A = \frac{2\pi}{3} = Arg(z_A)$$
$$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_B = -2 - 2i\sqrt{3}$$
$$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_B = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_B = \frac{-2\pi}{3} = Arg(z_B)$$
$$z_B = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$

**b.**



**c.**

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-2 - 2i\sqrt{3} - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|-4i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|4 - \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12}$$

$$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|4 - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

**Conclusion : AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral.**

**4. a.**

$$z_D = z_A e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{4\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow |z_D| = 4, Arg(z_D) = \frac{5\pi}{6}$$

**b/**

$$z_D = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

***<u>Exercice 14</u>***

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\pi$ /2.

1) Montrer que (1 + i) 6 = - 8i

2) On considère l'équation (E) $z^2 = -8i$

a)Déduire de 1) une solution de l'équation (E)

b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

4) On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle 2 $\pi$ /3.

a) Déterminer l'affixe b du point B image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b) Montrer que b et c sont solutions de (E')

5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$(unité graphique 2cm ) ,

représenter les points A,B et C.

b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

**Solution14:**

1)

$(1 + i)^6 = [(1 + i)^2]^3 = (1 + 2i + i^2)^3 = (1 + 2i - 1)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = 8i \times i^2 = -8i$

2) a)

$z^2 = -8i \Leftrightarrow$

$z^2 = (1 + i)^6 \Leftrightarrow$

$z = (1 + i)^3$ ou $z = -(1 + i)^3$

$z = (1 + i)^3$ est une solution de l'équation (E)

2) b)

$z = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$ et $z = 2 - 2i$ sont les deux solutions de l'équation (E).

3) $z^3 = -8i$

$z^3 = (1 + i)^6$ d'où

$z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ est une solution de l'équation (E') .

4) a)

$$b = e^{i\frac{2\pi}{3}}2i = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)2i = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2i = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$$

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}}b = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - i$$

4) b)

$$b^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(-\sqrt{3} - i\right)^2 = \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(3 + 2i\sqrt{3} - 1\right)$$

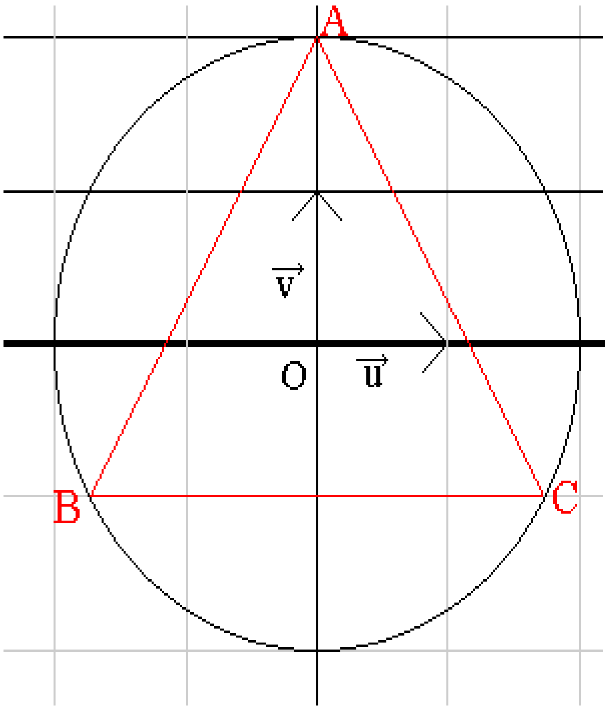
$$= \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(2 + 2i\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3} - 6i - 2i + 2\sqrt{3} = -8i$$

$$c^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(3 - 2i\sqrt{3} - 1\right)$$

$$= \left(\sqrt{3} - i\right)\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 6i - 2i - 2\sqrt{3} = -8i$$

*b* et *c* sont donc solution de l'équation (E' )

5) a)




5) b)

soit *a* l'affixe du point A :

$$AB = |b-a| = \left|-\sqrt{3}-i-2i\right| = \left|-\sqrt{3}-3i\right| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |c-a| = \left|\sqrt{3}-i-2i\right| = \left|\sqrt{3}-3i\right| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |c-b| = \left|\sqrt{3}-i-\left(-\sqrt{3}-i\right)\right| = \left|\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+i\right| = 2\sqrt{3}$$

AB = BC = AC donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

5) c) soit G le centre de gravité du triangle ABC ,

$$z_G = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2i-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i}{3} = 0$$

G est confondu avec le point O origine du repère

***Exercice 15***

**1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :
$z^2 - 6z + 13 = 0$
**2. a.** Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$
**b.** En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.
**3.** Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$
(unité : 2 cm )
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}, z_F = 3.$$

**a.** Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe ( sur papier millimétré).
**b.** Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle ($\Gamma$) de centre F.
**c.** Quelle est la nature du triangle ABE ?

**Solution15:**
**1.**

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4\times 13 = 36 - 52 = -16 \quad (= 16i^2)$$

$\Delta < 0$ donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i \quad z_2 = 3 + 2i$$

$$S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$$

**2.a.**

$$(z - 3)(z^2 + bz + c) =$$

$$z^3 + bz^2 + cz - 3z^2 - 3bz - 3c =$$

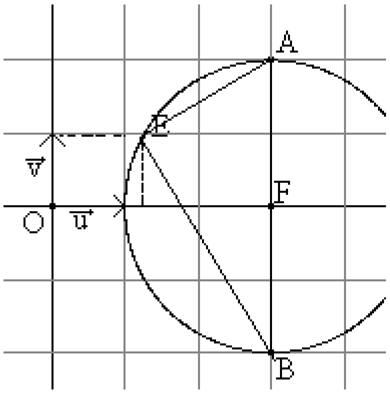
$$z^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

par identification ( avec le polynôme $z^3 - 9z^2 + 31z - 39$) on en déduit :

$$\begin{cases} b - 3 = -9 \\ c - 3b = 31 \\ -3c = -39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 13 \end{cases}$$

donc on peut en conclure que :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 - 6z + 13)$
**2.b.**
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$ équivaut à
$(z - 3)(z^2 - 6z + 13) = 0$ équivaut à
$z - 3 + 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$ équivaut à
$z = 3$ ou $z = 3 - 2i$ ou $z = 3 + 2i$
$S = \{ 3 ; 3 - 2i ; 3 + 2i \}$

**3. a**




**3.b.**

$$AF = |z_F - z_A| = |3-(3+2i)| = |-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$BF = |z_F - z_B| = |3-(3-2i)| = |2i| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$EF = |z_F - z_E| = \left|3-\left(\frac{5}{4}+i\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right| = \left|\frac{7}{4}-i\frac{\sqrt{15}}{4}\right|$$
$$EF = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16}+\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$$

AF = BF = EF = 2 donc A, B, E appartiennent au cercle ( Γ) de centre F et de rayon 2.

**3.c.**

$$\left.\begin{array}{l} z_F = 3 \\ \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{3+2i+3-2i}{2} = 3 \end{array}\right\} z_F = \frac{z_A+z_B}{2}$$

donc F milieu de [AB] or F est le centre du cercle ( Γ) , [AB] diamètre du cercle ( Γ),

E appartient au cercle ( Γ) or un triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés

est un triangle rectangle donc ABE est rectangle en E.

Autre méthode : calculer les distances AB, AE, BE et appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.

***Exercice 16***

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

L'unité graphique est 2 cm. On note *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

**1)** Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2}-4)z^2 + (8-8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

**a)** Calculer $P(-2\sqrt{2}) =$

**b)** Déterminer une factorisation de P(z) sous la forme :

$P(z) = (z+2\sqrt{2})(z^2 + \alpha z + \beta)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres réels que l' on déterminera.

**c)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : P(z) = 0.

**2)** On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$ , $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$

**a)** Placer les points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle $\Gamma$ de centre O, dont on donnera le rayon.
**b)** Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe

En déduire une mesure en radian de l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OA}$ )

**c)** Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CA})$

**d)** Démontrer qu'une mesure de l'angle ( $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$) est $3\pi/8$

**e)** En déduire l'égalité :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

**solution 16**

**1)** Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4) z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

**a)** $P(-2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} + 8(2\sqrt{2} - 4) + (8 - 8\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2}$

$= -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 32 - 16\sqrt{2} + 32 + 16\sqrt{2} = 0$ donc $-2\sqrt{2}$ est une racine de P( $z$ )

**b)**

$$P(z) = \left(z + 2\sqrt{2}\right)(z^2 + \alpha z + \beta)$$
$$= z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2\sqrt{2}z^2 + 2\alpha\sqrt{2}z + 2\sqrt{2}\beta$$
$$= z^3 + (\alpha + 2\sqrt{2})z^2 + (\beta + 2\alpha\sqrt{2})z + 2\sqrt{2}\beta$$

par identification :

$$\begin{cases} \alpha + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4 \\ \beta + 2\alpha\sqrt{2} = 8 - 8\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}\beta = 16\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 8 \end{cases}$$

$P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8)$

**c)**

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z + 2\sqrt{2}\right)(z^2 - 4z + 8) = 0$$

$$z + 2\sqrt{2} = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$z = -2\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 4z + 8 = 0$$

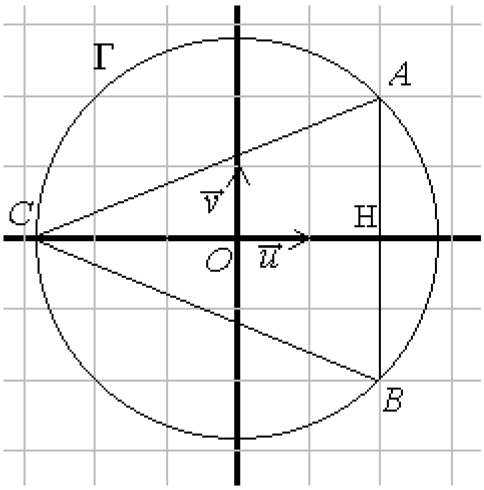
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i, \quad z_2 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

**2)** On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$

**a)**




$$OA = |a| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$OB = |b| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$OC = |c| = \left|-2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$$

OA = OB = OC donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$

**b)**

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_a = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_a = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_a = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_b = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_b = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_b = \arg(b) = \frac{-\pi}{4}$$

$(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA})$ = arg(a) - arg(b) [modulo $2\pi$] = $\pi/2$ [modulo $2\pi$]

**c)** Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$.

L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre donc :

$\widehat{ACB}$ = (1/2) $\widehat{AOB}$ = $\pi/4$

( $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA}$ ) = $\pi/4$ [modulo $2\pi$ ]

**d)** L'affixe de C est réel donc C appartient à l'axe des réels , il est son propre symétrique par rapport à l'axe des réels.
Les affixes de A et B sont conjugués donc A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Le triangle ABC est donc isocèle en C :

2 $\widehat{BAC}$ + $\widehat{ACB}$ = $\pi$

2 $\widehat{BAC}$ = $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$ soit $\widehat{BAC} = 3\pi/8$

on a donc ( $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$ ) = $3\pi/8$

**e)**
Soit H le point d'affixe 2 ,
c'est à dire le projeté orthogonal des points A et B sur l'axe des réels ,on a :

$$CH = |z_H - z_C| = \left|2 + 2\sqrt{2}\right| = 2 + 2\sqrt{2}$$
$$AH = |z_H - z_A| = |2 - (2 + 2i)| = |-2i| = 2$$
dans le triangle $CAH$ rectangle en H on a :
$$\tan\frac{3\pi}{8} = \tan(CAH) = \frac{CH}{AH} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

***<u>EXERCICE 17</u>*:**
Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$
**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

**2.** On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

**a)** Déterminer le module et un argument de $z_A$ et $z_B$.
**b)** Donner la forme exponentielle de $z_A$ .
**c)** Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$
**3.** On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

**a)** Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
**b)** On nomme C l'image du point A par la transformation R.
Déterminer la forme exponentielle de l'affixe $z_C$ du point C. En déduire sa forme algébrique.
**c)** Placer le point C.

**d)** Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

**Solution17 :**

**1.**

$z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times4 = 4 - 16 = -12 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

les deux solutions de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$

**2. a)**

$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad \boxed{|z_A| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_A = \boxed{\dfrac{\pi}{3} = Arg(z_A)}$

$z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \boxed{|z_B| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_B = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_B = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_B = \boxed{\dfrac{-\pi}{3} = Arg(z_B)}$

**b)** $z_A$ a pour module 2 et un argument est $\pi/3$ donc :

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

**c)** Voir figure

**3.** On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$

**a)** R est une rotation de centre O et d'angle de mesure $2\pi/3$ .

**b)**

$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = \underbrace{2e^{i\pi}}_{\text{forme exponentielle}} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2(-1) = \underbrace{-2}_{\text{forme algébrique}}$

**c)** Voir figure

**d)**

$e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\pi} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\frac{-\pi}{3}} = z_B$

donc B est l'image de C par la rotation R.

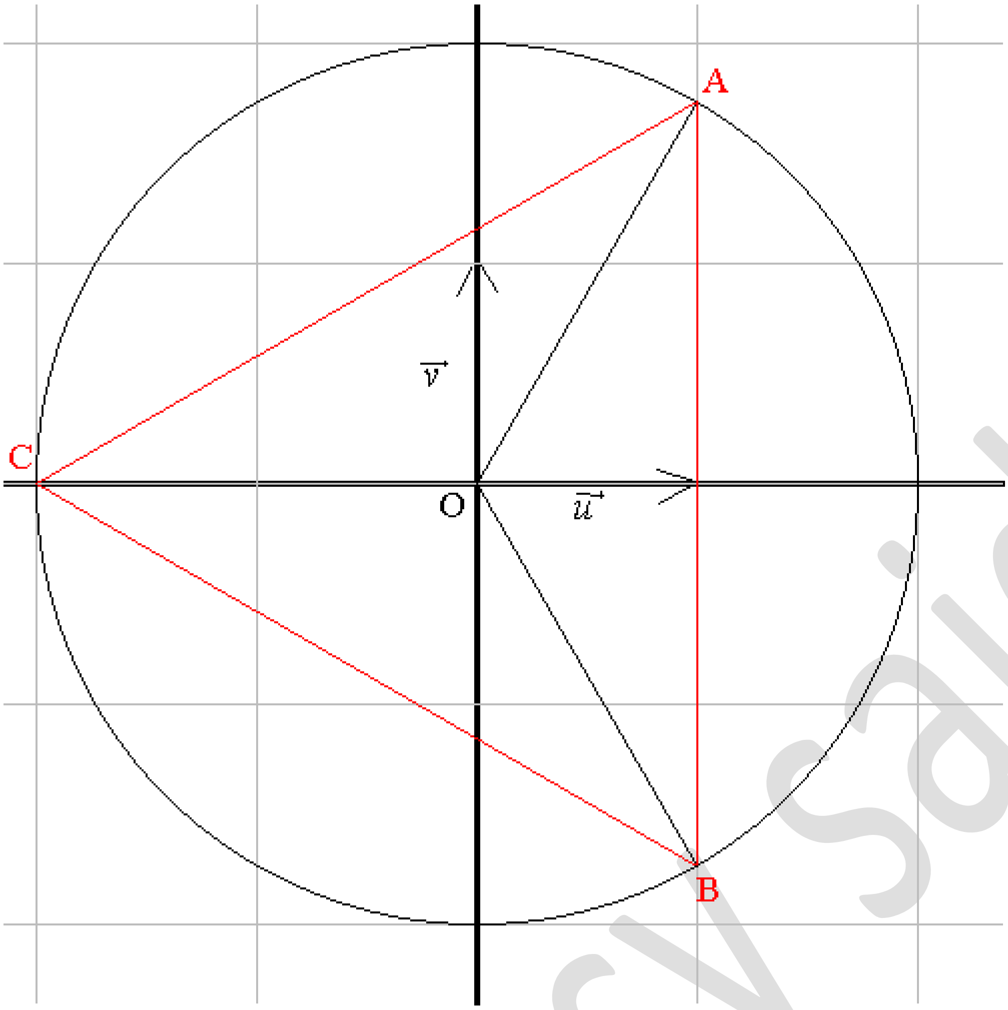
Montrons que ABC est un triangle équilatéral :

$AB = |z_B - z_A| = \left|1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})\right| = \left|-2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = \left|-2 - (1 - i\sqrt{3})\right| = \left|-3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = \left|-2 - (1 + i\sqrt{3})\right| = \left|-3 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

AB = AC = BC donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.






***EXERCICE 18***

Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$(unité graphique 2 cm), on considère

Les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

***Partie A***

**1. a)** Donner la forme exponentielle de $z_B$ puis de $z_C$ .

**b)** Placer les points A, B et C.

**2.** Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.

**3.** Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$

***Partie B***

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$ , on associe le point M'd'affixe z ' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}$$

**1. a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z = \frac{-4}{z-2}$$

**b)** En déduire les points associés aux points B et C.

**c)** Déterminer et placer le point G ' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

**2. a) Question de cours :**

**Pré requis :** le module d'un nombre complexe z quelconque, noté | z |, vérifie $|z|^2 = z\,\overline{z}$ où $\overline{z}$

est le conjugué de z.
Démontrer que :
• pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$ , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
• pour tout nombre complexe z non nul , $|1/z| = 1/|z|$
**b)** Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

**c)** On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D, où D est l'ensemble défini à la

Question **3.** de la partie A.
Démontrer que le point M' associe à M appartient à un cercle $\Gamma$ dont on précisera le centre et le rayon.

Tracer $\Gamma$.

**Solution18**
***Partie A***
**1. a)**

$$z_B = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

**b)** Voir figure
**2.**

$$AB = |z_B - z_A| = |1+i\sqrt{3}-2| = |-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$
$$AC = |z_C - z_A| = |1-i\sqrt{3}-2| = |-1-i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$$
$$OB = |z_B| = 2$$
$$OC = |z_C| = 2 \quad \boxed{\text{OB = OC = AB = AC = 2 donc OBAC est un losange}}$$

**3.** $|z| = OM$ et $|z-2| = |z - z_A| = AM$
L'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$ est l'ensemble des points M tels que OM = AM c'est la médiatrice du segment [OA].
***Partie B***
A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$ , on associe le point M'd'affixe z ' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}$$

**1. a)**

$$z=\frac{-4}{z-2} \Leftrightarrow z(z-2)=-4 \Leftrightarrow z^2-2z+4=0$$

$\Delta = 4-4\times1\times4=-12<0$ donc deux solutions complexes conjuguées

$$z_1=\frac{2-i\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}=z_C \qquad z_2=\overline{z_1}=1+i\sqrt{3}=z_B$$

**b)** Les points B et C sont solutions de l'équation z' = z donc ce sont des points invariant par

la transformation qui à z fait correspondre z' tel que :

$$z'=\frac{-4}{z-2}$$

donc les points associés à B et C sont respectivement B et C.

**c)**

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{2+1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$$

$$z_{G'}=\frac{-4}{z_G-2}=\frac{-4}{\frac{4}{3}-2}=\frac{-4}{\frac{4}{3}-\frac{6}{3}}=\frac{-4}{\frac{-2}{3}}=-4\times\frac{-3}{2}=6$$

**2. a) Question de cours :**

**Pré requis :**

$$|z_1\times z_2|=\sqrt{|z_1\times z_2|^2}=\sqrt{z_1\times z_2\times\overline{z_1\times z_2}}=\sqrt{z_1\times z_2\times\overline{z_1}\times\overline{z_2}}$$

$$|z_1\times z_2|=\sqrt{z_1\times\overline{z_1}\times z_2\times\overline{z_2}}=\sqrt{|z_1|^2\times|z_2|^2}=|z_1|\times|z_2|$$

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\frac{1}{z}\times\frac{1}{\overline{z}}}=\frac{1}{\sqrt{z\overline{z}}}=\frac{1}{\sqrt{|z|^2}}=\frac{1}{|z|}$$

**b)** Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$z'=\frac{-4}{z-2} \Rightarrow z'-2=\frac{-4}{z-2}-2=\frac{-4-2(z-2)}{z-2}=\frac{-2z}{z-2}$$

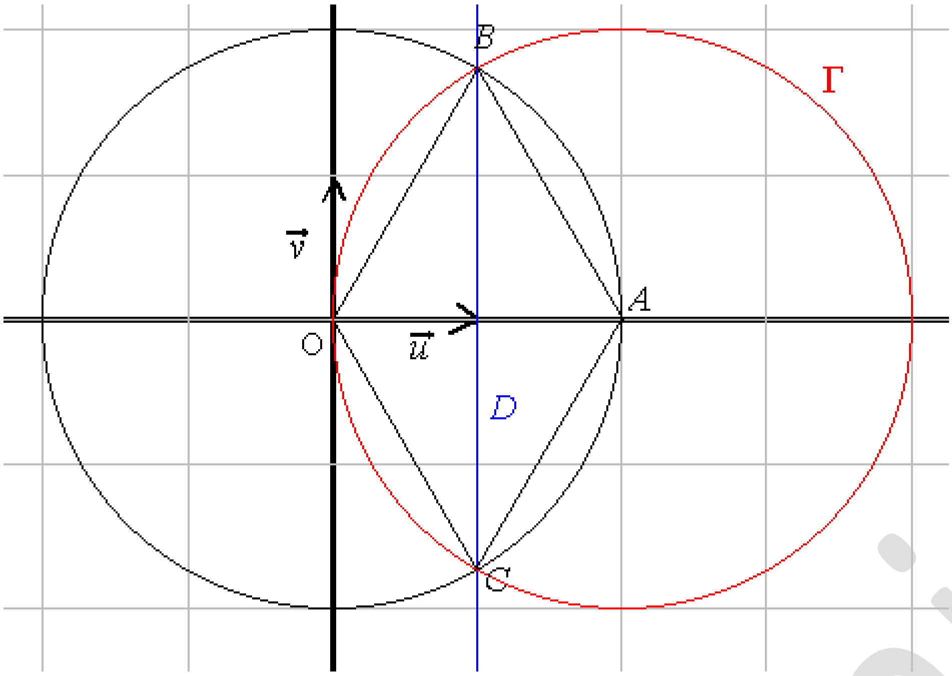
$$z'-2=\frac{-2z}{z-2} \Rightarrow |z'-2|=\left|\frac{-2z}{z-2}\right|=\left|-2z\times\frac{1}{z-2}\right|$$

$$|z'-2|=|-2z|\left|\frac{1}{z-2}\right|=|-2z|\frac{1}{|z-2|}=\boxed{\frac{2|z|}{|z-2|}}$$

**c)** M est un point quelconque de D donc | z | = |z - 2| d'où

$$|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}=\frac{2|z|}{|z|}=2$$

donc AM' = 2 , M ' appartient au cercle $\Gamma$ de centre A et de rayon 2.




***Exercice 19***

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, unité graphique : 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi$ /2.

**1.** On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe $z$ par : P($z$) = $z^3 - 4z^2 + 8z - 8$.
**a.** Démontrer que pour tout nombre complexe z , P($z$) = ($z$ - 2)($z^2$ - 2$z$ + 4).

**b.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation P($z$) = 0

**2.** On note A,B, C les points d'affixes respectives : $a = 2$ ; $b = 1 + i\sqrt{3}$ ; $c = 1 - i\sqrt{3}$

**a.** Déterminer le module et un argument de $a, b, c$.
**b.** En déduire le centre du cercle et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
**c.** Placer les points A, B et C en laissant visibles les traits de construction.
**d.** Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
**3.** On pose $d = a + b$ et on note D le point d'affixe $d$.
**a.** Construire le point D dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$
**b.** Démontrer que A est le milieu du segment [CD].
**c.** Ecrire $d$ sous forme exponentielle.
**d.** Démontrer qu'OCD est un triangle rectangle.

**Solution19**

**a.** $(z - 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 - 2z^2 + 4z - 2z^2 + 4z - 8 = z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = P(z)$ donc

Pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$

**b.** $P(z) = 0$ équivaut à $(z - 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$ équivaut à $z - 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

soit $z = 2$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 - i\sqrt{3})}{2} = \boxed{1 - i\sqrt{3}},\ \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}}$$

$$S = \left\{2; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\right\}$$

**2. a**

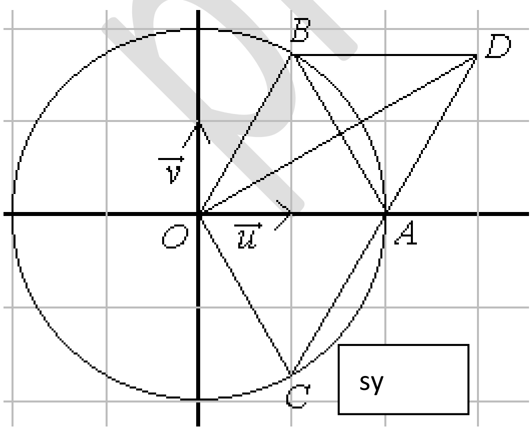
$$a = 2 \quad \boxed{|a| = 2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_a = \dfrac{2}{2} = 1\\ \sin\theta_a = \dfrac{0}{2} = 0\end{array}\right\}\theta_a = \boxed{0 = Arg(a)}$$

$$b = 1 + i\sqrt{3} \quad \boxed{|b| = \sqrt{1+3} = 2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_b = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_b = \boxed{\frac{\pi}{3} = Arg(b)}$$

$$c = 1 - i\sqrt{3} \quad \boxed{|c| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_c = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_c = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_c = \boxed{\frac{-\pi}{3} = Arg(c)}$$

**b.** OA = $|a|$ = 2 ; OB = $|b|$ = 2 ; OC = $|c|$ = 2 donc OA = OB = OC donc le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre O et pour rayon 2.

**c.**




**d.** Une méthode consiste à démontrer que OA = OB = AB = AC ( il y a d'autres méthodes ...)

OA = 2 ; OB = 2 ;

$$AB = |b - a| = \left|1 + i\sqrt{3} - 2\right| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$AC = |c - a| = \left|1 - i\sqrt{3} - 2\right| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

OA = OB = AB = AC donc OBAC est un losange.

**3. a**. voir figure

**b<u>. Première méthode</u> :**

$d = a + b$ donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc OABD est un parallélogramme.

On a par conséquent : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$

Comme OBAC est un losange on a : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow A$ milieu de [CD]

**<u>Deuxième méthode</u> :**

$d = a + b = 2 + 1 + i\sqrt{3} = 3 + i\sqrt{3}$

$\dfrac{c+d}{2} = \dfrac{1 - i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 = a$ donc $A$ milieu de [CD]

**c.**

$d = 3 + i\sqrt{3}$ $\quad \boxed{|d| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_d = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_d = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta_d = \boxed{\dfrac{\pi}{6} = Arg(d)}$$

$d = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

**d.** (il y a plusieurs méthodes pour démontrer )

$$CD = |d - c| = \left|3 + i\sqrt{3} - \left(1 - i\sqrt{3}\right)\right| = \left|2 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$OC = |c| = 2; \quad OD = |d| = 2\sqrt{3}; \quad OC^2 + OD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 = CD^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OCD est rectangle en O.

***Exercice20***

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

On pose a= $\sqrt{3}$ +i et b = $\sqrt{3}$ - i.

Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2.a. Soit r la rotation de centre O d'angle π/3.

Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport - $\frac{3}{2}$.

Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

3.a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = R^2$$
$$(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2$$
$$\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

b. En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis que

$$c + \bar{c} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$$

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R

**solution20**:

1. $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0$ $(\Delta = 4i^2)$

l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \frac{2(\sqrt{3} - i)}{2} = \sqrt{3} - i$$
$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

Forme exponentielle de a et b :

(vous pouvez calculer le module de a et b et un argument mais ici le plus rapide et de faire apparaître des valeurs remarquables de cosinus et sinus )

méthode "rapide"

$$b = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$a = \sqrt{3} + i = \overline{b} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

méthode en calculant le module et un argument :
soient $\theta_a$ et $\theta_b$ des arguments respectifs de a et b

$$|a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad |b| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_a = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_a = \frac{\pi}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_b = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_b = \frac{-\pi}{6}$$

on en déduit les formes exponentielles de a et b :

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2.a. L'application complexe f associée à la rotation r de centre O et d'angle $\pi/3$ est définie par :

z' = f(z) = $ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$$a' = f(a) = ae^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{2i}$$

2i est donc la forme algébrique de a (figure à la fin)

L'application complexe g associée à l'homothétie de centre O et de rapport - $\frac{3}{2}$ est définie par :

z' = g(z) = - $\frac{3}{2}$z

$$b' = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$ (forme algébrique de b')

3. a. R est le rayon du cercle de centre C circonscrit au triangle OA'B' donc R = OC = A'C = B'C
- de R = OC on en déduit R² = OC² d'ou R² = |c|²= cc
( voir propriétés modules et argument )
- de R = A'C on en déduit R² = A'C'² d'ou
R² = |c-2i|² = (c-2i).(c-2i) = (c - 2i).(c + 2i)
- de R = B'C on en déduit de la même façon que précédemment :

$$\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

b. en transformant la seconde égalité et on se sert de la première, on obtient la relation $c - \overline{c} = 2i$ :
(c - 2i).(c + 2i) = cc + 2i c -2i c -4i² = R² $\Leftrightarrow$
R² + 2i(c - c) = R² + 4i² $\Leftrightarrow$

c - c = 2i

De la même façon on transforme la troisième égalité :

$$\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2 \Leftrightarrow$$

$$c\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}c+\frac{3}{2}ci+\frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{c}+\frac{27}{4}+\cancel{\frac{9\sqrt{3}}{4}}i-\frac{3}{2}\bar{c}i-\cancel{\frac{9\sqrt{3}}{4}}i-\frac{9}{4}i^2=R^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{R^2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c})+\frac{36}{4}+\frac{3}{2}i(c-\bar{c})=\cancel{R^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c})+9+\frac{3}{2}i(2i)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c})+9-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c})=-6 \Leftrightarrow$$

$$c+\bar{c}=-6\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{-4}{\sqrt{3}}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$$

En sommant les égalités $c-\bar{c}=2i$ et

$$c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$$

on obtient c puis le rayon R :

$$\begin{cases} c-\bar{c}=2i \\ c+\bar{c}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$2c=-\frac{4\sqrt{3}}{3}+2i \Rightarrow \boxed{c=\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i}$$

$$R=|c|=\left|\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i\right|=\sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{12}{9}+\frac{9}{9}}=\sqrt{\frac{21}{9}}$$

$$R=\sqrt{\frac{7}{3}} \quad ou \quad \frac{\sqrt{21}}{3}$$

# Les suites

***Exercice 1***

**On considère les deux suites $(\mathbf{U_n})$ et $(\mathbf{V_n})$** définies pour tout entier naturel n par :

$$\mathbf{U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}, V_0 = 7 \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}}$$

**1 Calculer $U_1; V_1; U_2; V_2$**

**2 On considère la suite $(W_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $W_n = V_n - U_n$**

**a) Montrer que la suite $(W_n)$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison**

**b) Exprimer $W_n$ en fonction de n et préciser la limite de la suite $(W_n)$**

**3.a) Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante. On pourra utiliser le signe de $(W_n)$**

**b) Etudier les variations de la suite $(V_n)$**

**c) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?**

**On considère à présent la suite $(t_n)$ définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3U_n + 4V_n$**

**a)Démontrer que la suite $(t_n)$ est constante**

**b) En déduire les limite des suites $(U_n)$ et $(V_n)$**

**<u>solution1</u>**

**1.)** $u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3} = \frac{7}{3};\ v_1 = \frac{u_0 + 3v_0}{4} = \frac{21}{4};\ u_2 = \frac{119}{36};\ v_1 = \frac{217}{48}$

**2.a) On a** $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{4} - \frac{4(2u_n + v_n)}{3} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5w_n}{12}$

**Donc la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 7$**

**2.b) Ainsi $w_n = 7(\frac{5}{12})^2$ la raison de la suite est strictement comprise entre -1 et 1. Donc la limite de $(w_n)$ est 0.**

**Comme 7 et $\frac{5}{12}$ sont strictement positifs, alors pour tout entier naturel $n, w_n > 0$**

**3.a)** $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3} > 0$

**3.b)** $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} < 0$ **3.c) On sait que $(u_n)$ est strictement croissante, $(v_n)$ est strictement décroissante, et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc ces deux suites sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.**

**4.a)** $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3\frac{2u_n + v_n}{3} + 4\frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3v_n + 4v_n = t_n$

**Donc la suite $(t_n)$ est constante égale à $t_0 = 3v_0 + 4v_0 = 28$. D'où lim $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 28$.**

**4.b)** $u_n = v_n - w_n = \frac{t_n - 3u_n}{4} - w_n = \frac{t_n - 3u_n - 4w_n}{4}$; **soit** $4u_n = t_n - 3u_n - 4w_n$, **et** $u_n = \frac{t_n - 4w_n}{7}$

**Ainsi** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_n - 4w_n}{7} = \frac{28 - 4\times 0}{7} = 4$

***<u>Exercice 2</u>***

**On considère les deux suites $(\mathrm{U_n})$ et $(\mathrm{V_n})$ définie par :**

$\mathrm{U_0 = 0}$ **et** $\mathrm{U_{n+1}} = \frac{3\mathrm{U_n} + 1}{4}$; $\mathrm{V_0} = 2$ **et** $\mathrm{V_{n+1}} = \frac{3\mathrm{V_n} + 1}{4}$

**On considère la suite $(S_n)$ définie par : $\mathrm{S_n = U_n + V_n}$**

**a) Montrer par récurrence que la suite $(S_n)$ est constante**

**On considère que la suite $(d_n)$ définie par ; $S_n = \mathrm{V_n - U_n}$**

**b) Montrer que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.**

**c) En déduire $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{V_n - U_n})$**

**d) Ecrire $\mathrm{U_n}$ en fonction de $S_n$ et de $d_n$ puis en fonction de n. Ecrire $\mathrm{V_n}$ en fonction de $S_n$ et de $d_n$**

**Puis en fonction de n. En déduire la limite de $\mathrm{U_n}$ et celle de $\mathrm{V_n}$**

**Question subsidiaire : Les suites $(\mathrm{U_n})$ et $(\mathrm{V_n})$ sont-elles adjacentes ?**

**<u>solution2</u>**

**a) On a $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3(u_n+v_n)+2}{4}$ et $s_0 = u_0 + v_0 = 2$ : montrons alors, pour tout entier n, la propriété $(P_n)$: $s_n = 2$: $(P_0)$ est vraie ; supposons $(P_n)$ est vraie et montrons que $(P_{n+1})$ est vraie : $s_{n+1} = \frac{3(u_n+v_n)+2}{4}$ = $\frac{3\times 2+2}{4} = 2$ ; donc pour tout entier naturel n, $s_n = 2$ et $(s_n)$ est croissante.**

**b) On a $d_{n+1}$= $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3}{4} d_n$. Donc la suite $(d_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier**

**terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$ .**

**c) D'où $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ car la raison est strictement comprise entre -1 et 1.**

**d) On obtient $s_n - d_n = 2u_n$, d'où $u_n = \frac{1}{2}(2 - 2(\frac{3}{4})^n)$ ; $s_n + d_n = 2v_n$**

**d'où $v_n = \frac{1}{2}(2 + 2(\frac{3}{4})^n)$.**

**D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.**

**Question subsidiaire : Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes : il reste à montrer que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante : On a $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n + 1}{4}$ ; il suffit de montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n < 1$; on a $v_{n+1} - v_n = \frac{-v_n+1}{4}$ ; il suffit de montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, v_n > 1$…**

***<u>Exercice 3</u>***

**On considère la suite $(U_n)$ définie par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4}$**

**a) Montrer pour tout entier naturel n $U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4}$**

**b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $0 \leq U_n \leq 2$**

**c) On considère la suite $(V_n)$ définie pour tout entier naturel n, par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$**

**Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ dont on précisera le premier terme**

**d) Ecrire alors $V_n$ en fonction de n, Déterminer la limite de la suite $(V_n)$**

**e) Ecrire $U_n$ en fonction de n. Etudier la convergence de la suite $(U_n)$**

**<u>solution3</u>**

**a)$2 - \frac{5}{u_n+4} = \frac{2(u_n+4)-5}{u_n+4} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} = u_n$ .**

**b) $on\ considere\ la\ propriété\ (p_n)\ definie\ par\ 0 \leq u_n \leq 2.$**

$initialisation\ : (p_0)\ est\ vraie\ :\ u_0 = 0\ et\ 0 \leq u_n \leq 2$ ;

$hérédité : supposons\ p_n\ vraie\ pour\ un\ certain\ entier\ n\ et\ montrons\ que\ (p_{n+1})\ est\ vraie$:

**$0 \leq u_n \leq 2.$, d'où $4 \leq u_n + 4 \leq 6$ , $\frac{-5}{4} \leq 2 - \frac{5}{u_n+4} \leq \frac{-5}{6}$ , d' où $2 - \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{5}{u_n+4} \leq 2 - \frac{5}{6}$**

**d'ou $0 < \frac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{6} < 2$ ; $donc\ (p_{n+1})\ est\ vraie\ ; ainsi\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n\ non\ nul$**

$0 \leq u_n \leq 2$.

**c) On a** $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12} = \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5}v_n$ **, donc la suite et une suite géométrique de raison**

**q =** $\frac{1}{5}$ **et de premier terme** $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0+3} = \frac{-1}{3}$

**d) donc** $v_n = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{3 \times 5^n}$**. la raison suite étant strictement compris entre 0 et 1 , la limite de la suite** $(v_n)$ $\boldsymbol{est\ 0}$

**e) on a** $(u_n+3)v_n = u_n - 1$, $d'ou\ u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$, $d'ou\ u_n = \frac{-3v_n-1}{v_n-1} = \frac{\frac{1}{5^n}-1}{\frac{-1}{3\times5^n}-1}$ **comme** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = 0$, $on\ obtient\ \lim_{n\to\infty}(u_n) = 1$ . $la\ suite(u_n)\ converge\ vers\ 1$

***Exercice 4***

**On considère la suite** $(U_n)$ **définie par :** $U_0 = 3$ **et pour tout entier naturel n,** $U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n}$

**a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,** $0 \leq U_n \leq 3$

**b) On considère la suite** $(V_n)$ **définie pour tout entier naturel n, par** $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

**Montrer que la suite** $(V_n)$ **est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison**

**c) Ecrire alors** $V_n$ **en fonction de n, Déterminer la limite de la suite** $(V_n)$

**d) Ecrire** $U_n$ **en fonction de n. Etudier la convergence de la suite** $(U_n)$

**solution4**

**a) soit** $(p_n)$ **la propriété** $0 \leq u_n \leq 3$ $(p_0)$ **est vraie puisque** $u_0 = 3 \geq 0$**. Supposons (** $p_n$**) vraie pour un certain** $n$ **et montrons que** $(p_{n+1})$ **est vraie ; On a** $0 \leq u_n \leq 3$ **d'où** $1 \leq 1+u_n \leq 4$ **d'où** $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$ **d'où** $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2$ **;**

**donc** $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ **et pour tout entier naturel** $n$, $0 \leq u_n \leq 3$.

**b) On a** $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right) = \frac{-1}{2}v_n$ **; donc la suite** $(v_n)$ **est géométrique de raison** $\frac{-1}{2}$ **et de premier terme** $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$.

**c) Donc** $v_n = \frac{2}{5}(\frac{-1}{2})^n$**. Comme la raison est strictement comprise entre -1 et 1, la limite de** $(v_n)$ **est 0.**

**d) On a** $v_n(u_n+2) = u_n - 1$ **et** $u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} = \frac{-1-\frac{4}{5}(\frac{-1}{2})^n}{\frac{2}{5}(\frac{-1}{2})^n - 1}$ **et** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

**Donc la suite** $(u_n)$ **converge verge vers 1.**

***Exercice 5***

**On considère la suite numérique $(\mathbf{U_n})$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathbf{U_0 = 1}$ et $\mathbf{U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4}$**

**1 Calculer les quatre premiers termes de la suite $(\mathbf{U_n})$**

**2 On pose $\mathbf{V_n = U_n - 8}$**

a) **Montrer que la suite $(\mathbf{V_n})$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ préciser son premier terme.**

**b) En déduire $\mathbf{V_n}$ puis $\mathbf{U_n}$ en fonction de n**

3 **Etudier le sens de variation de la suite $(\mathbf{U_n})$**

**4 Quelle est la limite de la suite $(\mathbf{U_n})$ ?**

**5 Calculer la somme $\sum_{k=0}^{k=10} \mathbf{V_k}$**

**Solution 5 :**

**On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur N par $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4$.**

**1.) Les quatre premiers termes : $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 4 = \frac{9}{2}$ ; $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 4 = \frac{25}{4}$ ; $u_3 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 4 = \frac{57}{8}$ ;**

**2.) On pose $v_n = u_n - 8$.**

**a) Pour tout entier naturel $n, v_n + 1 = u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}u_n + 4 - 8 = \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 8) = \frac{1}{2}.v_n$ donc la suite $(v_n)$**

**est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 1 - 8 = -7$**

**b) Pour tout entier naturel $n, v_n = -7(\frac{1}{2})^n$ et $u_n = v_n + 8 = 8 - 7(\frac{1}{2})^n = 8 - \frac{7}{2^n}$**

**3) Pour tout entier naturel $n$ , $u_{n+1} - u_n = 7(\frac{1}{2})^{n+1} - \left(8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 7(\frac{1}{2})^n - 7(\frac{1}{2})^{n+1} = 7(\frac{1}{2})^n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 7(\frac{1}{2})^{n+1} >$ 0;donc la suite $(u_n)$ est strictement croissante**

**4.) Comme $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0, alors \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$**

**5.) $\sum_{k=0}^{k=10} v_k$ est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique$(v_n)$.**

**Donc : $\sum_{k=0}^{k=10} v_k = v_0 \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = -7\frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = -14\left(1 - \frac{1}{2048}\right) = -14\left(\frac{2047}{2048}\right) = \frac{-14329}{1024}$**

***Exercice 6***

**On considère la suite $(\mathrm{U_n})$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $\mathrm{U_0}$ strictement positif et $\mathrm{U_{n+1}} = \frac{\mathrm{U_n}}{1+3\mathrm{U_n}}$**

**1.a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(\mathrm{U_n})$ en fonction de $\mathrm{U_0}$**

b) **Calculer les inverses de ces quatre premiers termes**

**c) Que remarque-t-on ?**

**2. En posant pour tout entier naturel n,$\mathrm{V}_n = \frac{1}{\mathrm{U_n}}$ déterminer la nature de la suite $(\mathrm{V_n})$**

**3 Ecrire $\mathrm{V_n}$ puis $\mathrm{U_n}$ en fonction de n**

**4 Etudier les variations de la suite $(\mathrm{U_n})$**

**5 Etudier la convergence de la suite $(\mathrm{U_n})$**

**6 Déterminer $\mathrm{U_0}$ pour que $\mathrm{U_{10}}$ soit égale à 0,025**

**<u>Solution 6</u> :**

**On considère la suite $(u_n)$ définie sur N par $u_0$ strictement positif et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$**

**1.a) Les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$ en fonction de $u_0$ : $u_1 = \frac{u_0}{1+3u_0}$ qui est bien définie puisque $u_0 > 0$**

$$u_2 = \frac{u_1}{1+3u_1} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{1+3\frac{u_0}{1+3u_0}} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{\frac{1+6u_0}{1+3u_0}} = \frac{u_0}{1+6u_0};\ u_3 = \frac{u_2}{1+3u_2} = \frac{\frac{u_0}{1+6u_0}}{1+3\frac{u_0}{1+6u_0}} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{\frac{1+9u_0}{1+3u_0}} = \frac{u_0}{1+9u_0}$$

**b) Les inverses de ces premiers termes : $\frac{1}{u_1} = \frac{1+3u_0}{u_0} = \frac{1}{u_0} + 3$**

$;\ \frac{1}{u_2} = \frac{1+6u_0}{u_0} = \frac{1}{u_0} + 6;\ \frac{1}{u_3} = \frac{1+9u_0}{u_0} = \frac{1}{u_0} + 9$

**c) On remarque que la suite des inverses semble être une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{u_0}$**

**2.) Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+3u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 3 = v_n + 3$. Donc $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0}$**

**3.) Ainsi $v_n = \frac{1}{u_0} + 3n$ et $u_n = \frac{1}{\frac{1}{u_0}+3n} = \frac{1}{\frac{1+3nu_0}{u_0}} = \frac{u_0}{1+3nu_0}$**

**4.) Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n = \frac{u_0}{1+3(n+1)u_0} - \frac{u_0}{1+3nu_0} = \frac{u_0(1+3nu_0)-u_0(1+3(n+1)u_0)}{(1+3(n+1)u_0)(1+3nu_0)} =$**

**$\frac{-3u_0{}^2}{(1+3(n+1)u_0)(1+3nu_0)}$. Comme $u_0 > 0$ le dénominateur est strictement positif et le numérateur strictement négatif**

**donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite$(u_n)$ est strictement décroissante.**

**s.) $\lim_{n\to+\infty}(1 + 3nu_0) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la suite $(u_n)$ converge vers 0**

**6.) Si $u_{10} = 0,025$ alors $\frac{u_0}{1+30u_0} = 0,025$ soit $u_0 = 0,025(1 + 30u_0)$, soit $u_0 = 0,025 + 0,75\, u_0$ soit$0,25\, u_0 = 0,025$; soit $u_0 = 0,1$**

**<u>Exercice7</u>**

**On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{9}{U_n})$**

**1 Montrer par récurrence que la suite $(U_n)$ est minorée par 3**

**2 Etudier la convergence de la suite $(U_n)$**

**3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$**

**4 En déduire la limite de la suite $(U_n)$**

***<u>Solution 7</u>***

**On considère la suite $(u_n)$ définie sur N par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{9}{u_n})$**

**1.) On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$**

**Comme somme de fonction qui le sont et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ qui s'annule en $x = 3$ sur $]0;+\infty[$, et qui est négatif sur $]0;3]$ et positif sur $]3;+\infty[$ ; donc la fonction $f$ est décroissante sur $]0;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$**

**elle admet donc un minimum en $x = 3$ qui vaut $f(3) = 3$. Donc pour tout réel $x \geq 3, f(x) \geq 3$.**

**Montrons par récurrence que la suite $(u_n)$ est minorée par 3 :**

**Initialisation : $u_0 = 4 > 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.**

**Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel $k$: $u_k \geq 3$, et montrons que $u_{k+1} \geq 3$: On a $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_k \geq 3$, donc $f(u_k) \geq 3$ et $u_{k+1} \geq 3$**

**Conclusion : la suite $(u_n)$ est minorée par 3**

**2.) Montrons par récurrence que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante :**

**Initialisation :** $u_0 = 4$ $et$ $u_1 = \frac{25}{8} < u_0$, **donc la propriété est vraie pour** $n = 0$.

**Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel** $k$: $u_{k+1} < u_k$ **et montrons que** $u_{k+2} < u_{k+1}$: **sur** $[3; +\infty[$ **la fonction** $f$ **est strictement croissante, et pour tout entier naturel** $n, u_n \geq 3$ **donc** $f(u_{k+1}) < f(u_k)$ **, soit** $u_{k+2} < u_{k+1}$

**Conclusion : la suite** $(u_n)$ **est strictement décroissante.**

**3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel** $n, u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$

**Initialisation :** $u_0 - 3 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$, $donc\ la\ propriété\ est\ vraie\ pour\ n = 0$.

**Hérédité on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel** $k$ : $u_k - 3 \leq \frac{1}{2^k}$, **et montrons que** $u_{k+1} - 3 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$

: $u_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{9}{u_k}\right) - 3 = \frac{1}{2}(u_k - 3) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ **car**

$u_k \geq 3$ **entraine** $\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3}$ **entraine** $\frac{9}{u_k} \leq 3$ **entraine** $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) \leq \frac{3}{2}$

**Conclusion : pour tout entier naturel** $n, u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$

**4. Pour tout entier naturel** $n, 0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$ **, et on sait que** $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, **donc par le théorème des gendarme**

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ **. La suite converge vers 0**

**Exercice 8**

**1 On considère la suite (** $u_n$**) définie par** $u_0 = 1$ **et pour tout entier naturel n** $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

**On pose pour entier naturel n** $v_n = u_n - 6$

**a) Pour tout nombre entier naturel n calculer** $v_{n+1}$ **en fonction** $v_n$

**Quelle est la nature de la suite (**$v_n$**) ?**

**b) Démontrer que pour tout entier naturel n** $u_n = -5(\frac{1}{3})^n + 6$

**c) Etudier la convergence de la suite (**$u_n$**)**

**2 On considère la suite (**$w_n$**) dont les termes vérifient pour tout nombre entier** $n \geq 1$

**Le tableau suivant donne les premiers termes de cette suite :**

| $w_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

**2.a) Détailler le calcul permettant d'obtenir $u_{10}$**

**2.b) Donner la nature de la suite $(w_n)$ et calculer $w_{2015}$**

**<u>solution8</u>**

**1. a Pour tout nombre entier naturel n,** $u_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(u_{n+1} - 6) = \frac{1}{3}v_n$

**On en déduit que ( $v_n$) est géométrique de raison q =** $\frac{1}{3}$ **et de premier terme** $v_0 = u_0 - 6 = -5$

**b) D'après la question précédente, pour tout entier n,** $v_n = v_0 q^n = -5(\frac{1}{3})^n$ **et donc que pour tout entier n**

$$u_n = v_n + 6 = -5(\frac{1}{3})^n + 6$$

**c) Comme** $0 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$**, et donc** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 6$

**2. a Pour n=10,** $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ **d'où** $w_{10} = 21$

**b) D'après les valeurs de $w_n$ pour les premier entiers, on peut conjecturer que** $w_n = 2n + 1$

**<u>Démonstration de la conjecture :</u> Démonstration par récurrence**

**<u>Initialisation :</u> La relation est vraie pour tous les entiers**

**<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un certain entier n,** $w_n = 2n + 1$ **(hypothèse de récurrence),**

**Alors** $(n+1)w_{n+1} = (n+1)w_n + 1 = (n+2)(2n+1) + 1$ **d'après l'hypothèse de récurrence**

**On a donc** $(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3 = (n+1)(2n+3)$**, soit donc** $w_{n+1} = 2(n+1) + 1$

**Ainsi, l'expression est encore vraie au rang n+1**

**On a ainsi démontré d'après le principe de récurrence que pour tout entier n,** $w_n = 2n + 1$

**On en déduit que** $w_{2015 = 2 \times 2015 + 1 = 4031}$

# Les fonctions numériques

**Exercice 1**

1. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a. Vérifier que $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.

b. Etudier le signe de $P(x)$.

2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

a. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales Éventuelles.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c. Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

d. Tracer C dans le repère précisé ci-dessus.

3. a. Pour quelle abscisse $a$ la tangente au point d'abscisse $a$ est-elle horizontale ? Justifier.

b. Déterminer l'équation de la tangente T à C en $x = 3$ et la tracer dans le même repère que C.

4. Trouver $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-2}$.

5. On admet que $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$. On appelle $g$ la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et $P$ sa courbe représentative.

a. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) - g(x)$. Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

b. Etudier la position relative de C et P.

c. Tracer P dans le même repère que C et T en utilisant les résultats des questions a. et b.

**Correction1**

1. $P(x)=x^3-3x^2+2.$

a. $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)=x^3-2x^2-2x-x^2+2x+2=x^3-3x^2+2.$

b. Pour le trinôme, on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$. Un petit tableau de signes nous donne $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{3};1\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right[$.

2. $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

a. En $+\infty$et en $-\infty$ $f$ se comporte comme $\dfrac{x^3}{x}=x^2$ et tend vers $+\infty$ ;
en 2, on a $f(1{,}99)\approx -391$ et $f(2{,}01)\approx 409$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale, mais il y en a une verticale en $x$ = 2.

b.
$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-}{(x}$$
.

c. Le sens de variation de $f$ dépend uniquement du signe de $P$. On a donc le tableau de variations suivant.

| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{3}$ | | 1 | | 2 | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $+\infty$ | ↘ | −1,4 | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 19,4 | ↗ | $+\infty$ |

d. En fin de devoir.

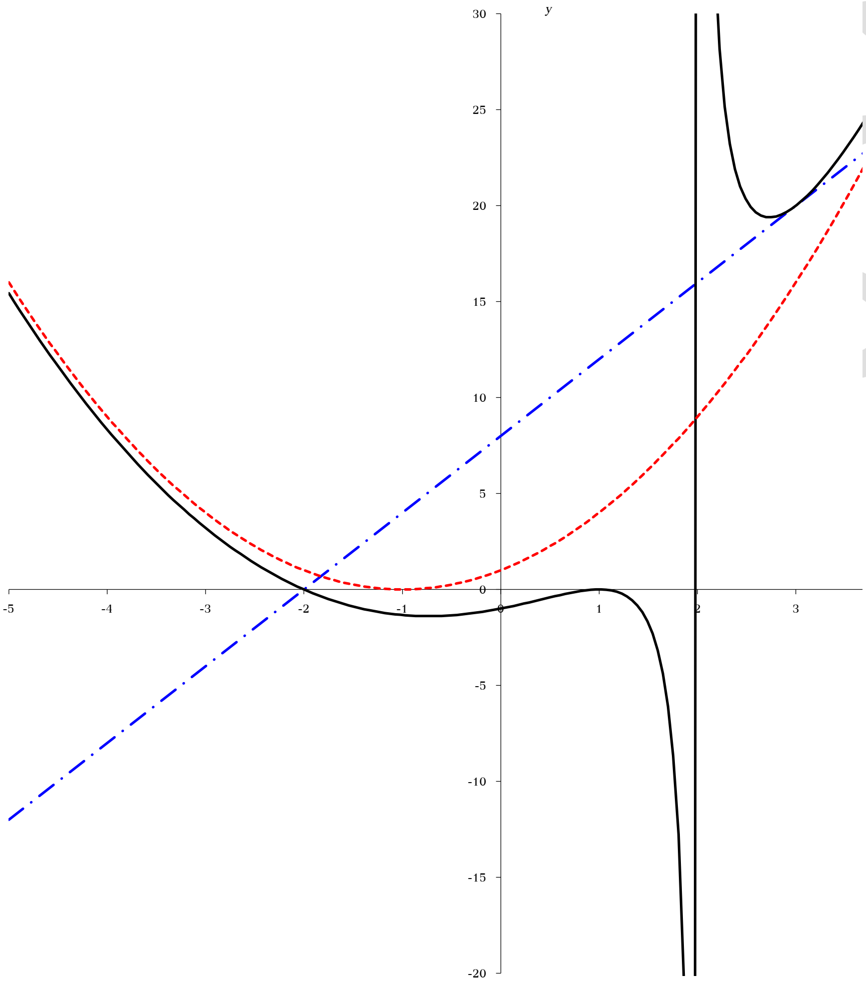
3. a. La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

b. $y=f'(3)(x-3)+f(3)\Leftrightarrow y=4(x-3)+20=4x+8.$

4.
$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)}{}$$
d'où

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-3 \\ d-2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2a=2 \\ c=2b-3=1 \\ d=2c+2=4 \end{cases}$.

5. $f(x)-g(x)=\dfrac{4}{x-2}$ donc tend vers 0 à l'infini ; lorsque $x > 2$, $f(x) - g(x)$ est positif et C est au-dessus de P ; lorsque $x < 2$, $f(x) - g(x)$ est négatif et C est en dessous de P. Les deux courbes sont asymptotes.



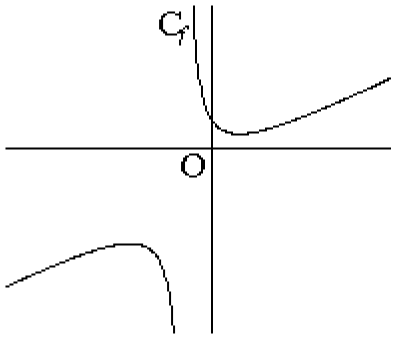
**Exercice2**

On considère la fonction *f* définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{2x+2}$$

et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

(l'allure de $C_f$ est donnée ci-contre, à titre indicatif)




1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*, en déduire l'existence d'une asymptote (D) dont on précisera l'équation.
2) Calculer $f'(x)$ , montrer que $f'(x)=\frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2}$.
3) Déterminer les variations de *f* sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).
4) Démontrer que la droite (D') d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à $C_f$ puis étudier la position relative de $C_f$ par rapport par rapport à (D').
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $C_f$ avec la droite d'équation y=1.
   On nommera A et B ces deux points, A étant celui des deux points dont l'abscisse est la plus petite.
6) A est le point d'abscisse 0 de $C_f$ , déterminer l'équation de la tangente $(T_A)$ à $C_f$ au point A.
7) Existe t-il d'autres points de $C_f$ où la tangente est parallèle à $(T_A)$, dans l'affirmative calculer les coordonnées de ces points.
8) Construire sur du papier millimétré dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm les droites (D), (D') , $(T_A)$ et la courbe $(C_f)$ .

**Correction2**

1) pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{2x+2}=\frac{x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}{x\left[2+\frac{2}{x}\right]}=\frac{x\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}{2+\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{2}{x}=2\end{array}\right\}\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{2}{x}=2\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} x^2-x+2=4 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} 2x+2=0^-\end{array}\right\}\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} x^2-x+2=4 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} 2x+2=0^+\end{array}\right\}\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$$

des deux dernières limites, on en déduit que la droite d'équation *x* = -1 est asymptote à $C_f$

$$2)\ f(x)=\frac{x^2-x+2}{2x+2}=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u(x)=x^2-x+2 \Rightarrow u'(x)=2x-1$$

$$v(x)=2x+2 \Rightarrow v'(x)=2$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(2x+2)-2(x^2-x+2)}{(2x+2)^2}=\frac{4x^2+4x-2x-2-2x^2+2x-4}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2}=\frac{2(x^2+2x-3)}{(2x+2)^2}$$

3) *f'(x)* est du signe de $x^2 + 2x - 3$ car $(2x + 2)^2 > 0$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\Delta = 4 - 4\times1\times(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc deux racines réelles pour $x^2 + 2x - 3$:

$$x_1=\frac{-2+4}{2}=1\ et\ x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$$

<u>Calcul des extremums :</u>

$$f(-3)=\frac{(-3)^2-(-3)+2}{2(-3)+2}=\frac{9+3+2}{-6+2}=\frac{14}{-4}=\frac{-7}{2}$$

$$f(1)=\frac{1-1+2}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

<u>tableau de variation de *f* :</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-7/2$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $1/2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$4)\ f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=\frac{x^2-x+2}{2x+2}-\frac{x-2}{2}=\frac{x^2-x+2}{2x+2}-\frac{(x-2)(x+1)}{2x+2}$$
$$=\frac{x^2-x+2-(x-2)(x+1)}{2x+2}=\frac{x^2-x+2-(x^2-2x+x-2)}{2x+2}=$$
$$=\frac{x^2-x+2-(x^2-x-2)}{2x+2}=\frac{4}{2x+2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}2x+2=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}2x+2=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$$
donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à $C_f$ en $-\infty$ et $+\infty$

<u>position de la courbe $C_f$ par rapport à l'asymptote (D') :</u>

2x + 2 < 0 si et seulement si x < - 1

2x + 2 > 0 si et seulement si x > -1

donc sur l'intervalle ]-∞ ; -1[ , $C_f$ est strictement au dessous de la droite (D')

et sur l'intervalle ]-1 ; + ∞[ , $C_f$ est strictement au dessus de la droite (D')

$$5)\ f(x)=1\Leftrightarrow\frac{x^2-x+2}{2x+2}=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2x+2\Leftrightarrow x^2-3x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3$$

la droite d'équation y = 1 coupe la courbe en deux points A et B de coordonnées

A(0 ; 1) et B( 3 ; 1).

6) Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$f'(0)=\frac{2\times(-3)}{2^2}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

l'ordonnée du point A est f(0) = 1 d'après la question 5)

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 : *y = f'(0) (x – 0) + f(0)*

$$(T_A): y=\frac{-3}{2}x+1$$

7) soit *x* l'abscisse d'un point éventuel où la tangente est parallèle à $(T_A)$

deux droites sont parallèles (où confondues ) si leurs coefficients directeurs sont égaux :

$$f'(x)=\frac{-3}{2}\Leftrightarrow\frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2}=\frac{-3}{2}\Leftrightarrow-3(2x+2)^2=4x^2+8x-12$$
$$\Leftrightarrow-3(4x^2+8x+4)=4x^2+8x-12\Leftrightarrow-12x^2-24x-12=4x^2+8x-12$$
$$\Leftrightarrow-16x^2-32x=0\Leftrightarrow-16x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ où } x=-2$$

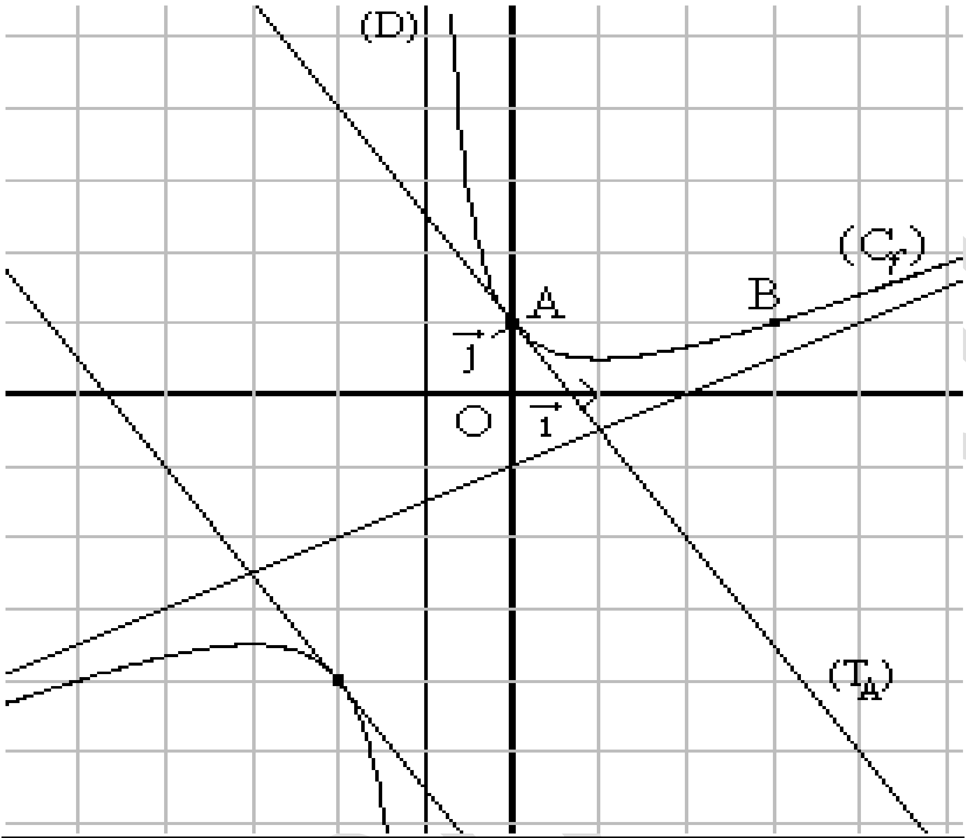
on retrouves l'abscisse du point A et l'abscisse d'un autre point : $x$ = -2

calculons l'ordonnées de ce point : $f(-2) = \frac{(-2)^2+2+2}{2(-2)+2} = \frac{8}{-2} = -4$

il existe un autre point de $C_f$ où la tangente est parallèle à $(T_A)$

c'est le point de coordonnées (-2 ; - 4)

**8)**



***Exercice3***

***Partie A***

Soit $\varphi$ la fonction numérique de la variable réelle *x* telle que : $\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminer les réels *a* et *b* pour que la courbe représentative de $\varphi$ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la Droite (T) d'équation *y* = 4*x* + 3.

***Partie B***

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* telle que : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans Un repère ortho normal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout *x* réel, on a $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$ ; $\alpha$ et $\beta$ étant deux réels que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de *f*. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de *f*.

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).

5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

**Correction3**

***Partie A***

$\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ est tangente en I si $\varphi(0)=3$ et $\varphi'(0)=4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0)=b=3$ et $\varphi'(x)=\dfrac{(6x+a)(x^2+1)-2x(3x^2+ax+3)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\varphi'(0)=a=4.$

***Partie B***

1. Ensemble de définition $\mathbb{R}$. $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\alpha}{x^2+1}\Rightarrow\alpha=3,\beta=4.$

2. $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ d'où les racines −1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

A l'infini $\dfrac{4x}{x^2+1}\approx\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{4}{x}$ qui tend vers 0 donc *f* tend vers 3, asymptote horizontale *y* = 3.

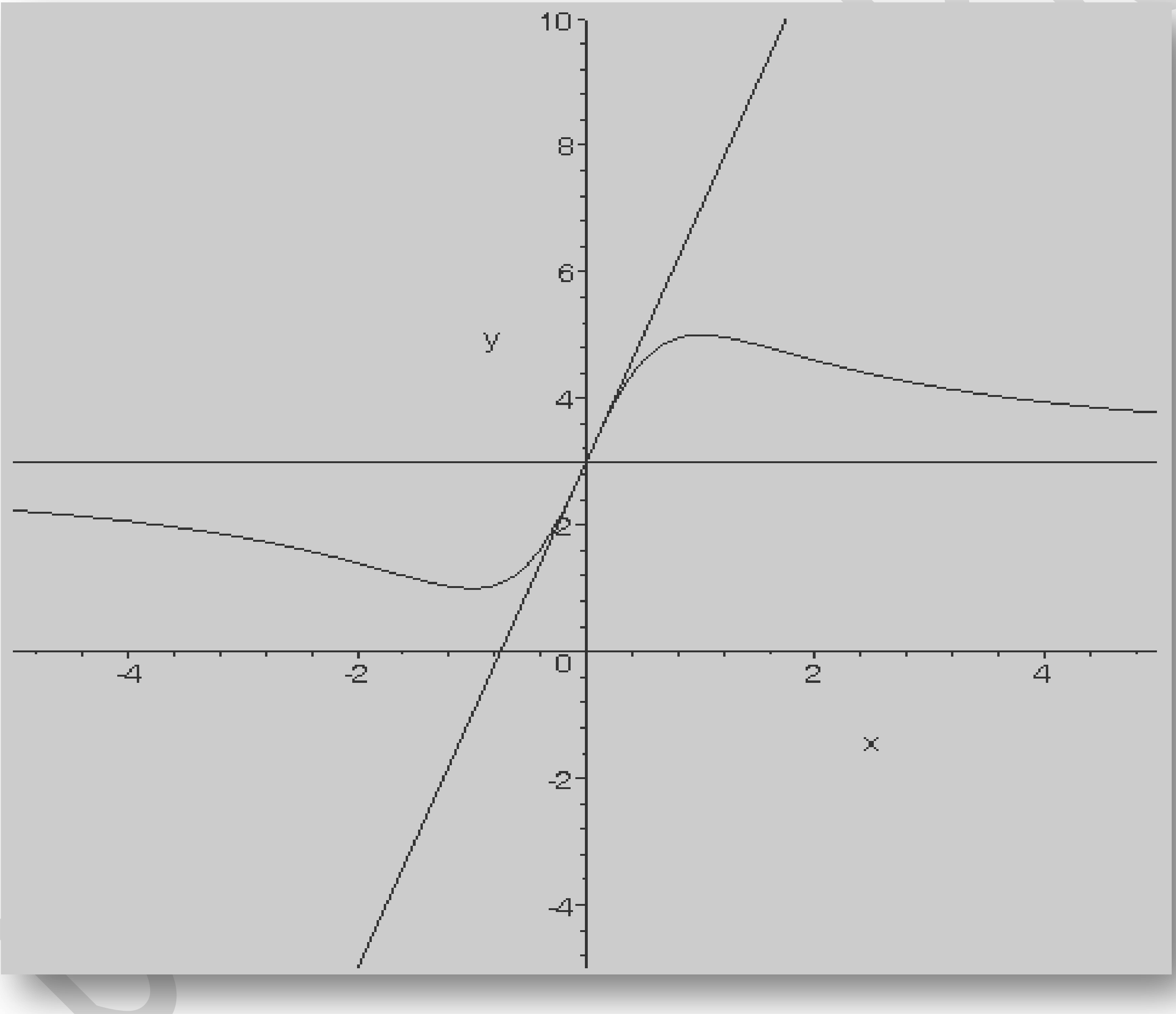
3. La tangente a évidemment pour équation *y* = 4*x* + 3. On fait le signe de

$$f(x)-(4x+3)=3+\frac{4x}{x^2+1}-4x-3=\frac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-4x^3}{x^2+1}$$

qui est du signe de −*x*, soit (C) est au dessus de (T) pour $x\leq 0$ et en-dessous pour $x\geq 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u,v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(u+x)+f(u-x)=2v$ ; ici ça donne :

$f(x)+f(-x)=3+\frac{4x}{x^2+1}+3-\frac{4x}{x^2+1}=6=2.3$, ok !




)

**Exercice4**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\frac{-2x^2+3x}{x-1}$.

1. Etudier les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire que la courbe C représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

2. a. Vérifier que, pour $x$ différent de 1, $f(x)=-3x+\frac{x^2}{x-1}$.

Peut-on en déduire que la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à la courbe C ? Justifier.

b. Trouver les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour $x$ différent de 1, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

En déduire que C admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une asymptote D dont on donnera une équation.

c. Etudier suivant les valeurs de $x$ la position de C par rapport à D.

3. Etudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation.

4. Construire la courbe C et ses asymptotes.

**Correction4**

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-2x=\mp\infty$ ;

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{0^+}=+\infty$ : asymptote verticale $x = 1$.

2. a. $-3x+\frac{x^2}{x-1}=\frac{-3x(x-1)+x^2}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}=f(x)$ ; on ne tire aucune information de cette écriture car $\frac{x^2}{x-1}$ tend vers l'infini à l'infini.

b. $ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b-a=3\\ c-b=0\end{cases}$ d'où

$$f(x)=-2x+1+\frac{1}{x-1}.$$

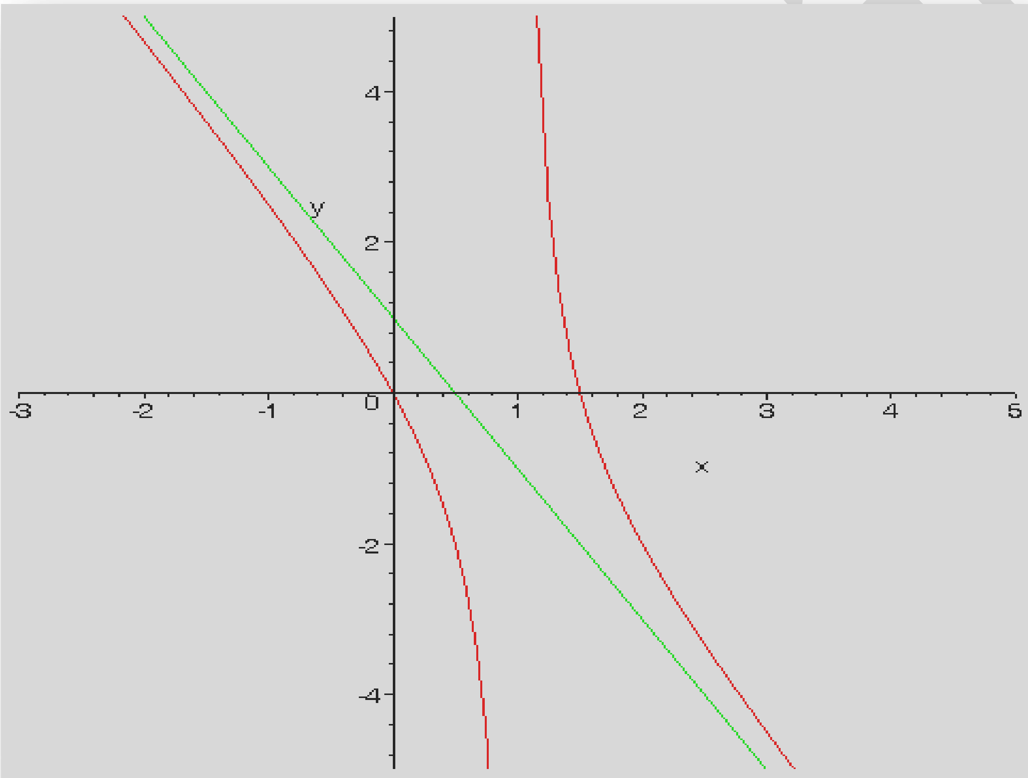
En $+\infty$ et en $-\infty$, $\frac{1}{x-1}$ tend vers 0, on a une asymptote D d'équation $y=-2x+1$.

c. Lorsque $x > 1$, $\frac{1}{x-1}>0$ donc C est au-dessus de D, lorsque $x < 1$, $\frac{1}{x-1}<0$ donc C est en dessous de D.

3. $f'(x) = \frac{(-4x+3)(x-1)-(-2x^2+3x)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-4x^2+7x-3+2x^2-3x}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+4x-3}{(x-1)^2}$.

Le discriminant est négatif, $f'$ est du signe de −2, soit négative.

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | \|\| | − | |
| $f$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |




4.

***Exercice 5***

On considère la fonction *f* définie sur $]1;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de $C_f$ avec la droite d'équation y = 3.
   A étant des deux points celui dont l'abscisse est la plus petite.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ en déduire les variations de *f*.
3. Déterminer les équations des droites ($T_A$) et ($T_B$) tangentes respectives aux points A et B de la courbe $C_f$.
4. Montrer que *f(x)* peut s'écrire sous la forme $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$
5. Etudier la position relative de la courbe $C_f$. par rapport à la droite (D) d'équation $y = x - 3$
6. Construire dans un même repère ortho normal $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm les droites ($T_A$) et ($T_B$), la droite (D) et la courbe $C_f$
7. Existe-t-il un point de la courbe $C_f$ tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D) ?
   ( justifier la réponse par le calcul )

***Correction 5***

I- Etude de fonction -1)

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-1}$$
$$\frac{x^2-4x+7}{x-1}=3$$
$$x^2-4x+7=3x-3$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=49-4\times1\times10=9>0$$
$$\text{donc } 2 \text{ racines réelles}$$
$$x_1=\frac{7-3}{2}=2 \quad et \quad x_2=\frac{7+3}{2}=5$$

La droite d'équation *y =3* coupe la courbe représentative de *f* en deux points d'abscisses 2 et 5. A(2 ; 3) et B(5 ;3) sont donc les deux points recherchés.

2)

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+7)\times 1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Calculons les racines du polynôme $x^2 - 2x - 3$

$$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-3)=4+12=16>0$$
$$\text{donc } 2 \text{ racines réelles :}$$
$$x_1=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad et \quad x_2=\frac{2+4}{2}=3$$

Ce polynôme admet deux racines réelles –1 et 3 donc $x^2-2x-3$ est positif à l'extérieur de ces racines –1 et 3 on en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de $f$

| $x$ | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | 2 | ↗ | |

$f$ admet un minimum en 3 qui est : $f(3)=\frac{3^2-4\times 3+7}{3-1}=\frac{9-12+7}{2}=\frac{4}{2}=2$

3) déterminons les équations réduites des tangentes ($T_A$) et ($T_B$) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe :

<u>coefficient directeur de la tangente au point A :</u>

$$f'(2)=\frac{2^2-2\times 2-3}{(2-1)^2}=\frac{4-4-3}{1}=-3$$

<u>Equation de la tangente au point A :</u>

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = -3(x - 2) + 3$

$y = -3x + 6 + 3$

($T_A$) : $y = -3x + 9$

<u>coefficient directeur de la tangente au point B :</u>

$$f'(5)=\frac{5^2-2\times 5-3}{(5-1)^2}=\frac{25-10-3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

<u>Equation de la tangente au point B :</u>

$y = f'(5)(x-5) + f(5)$

$$y=\frac{3}{4}(x-5)+3 \quad y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}+\frac{12}{4} \quad \boxed{(T_B): y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}}$$

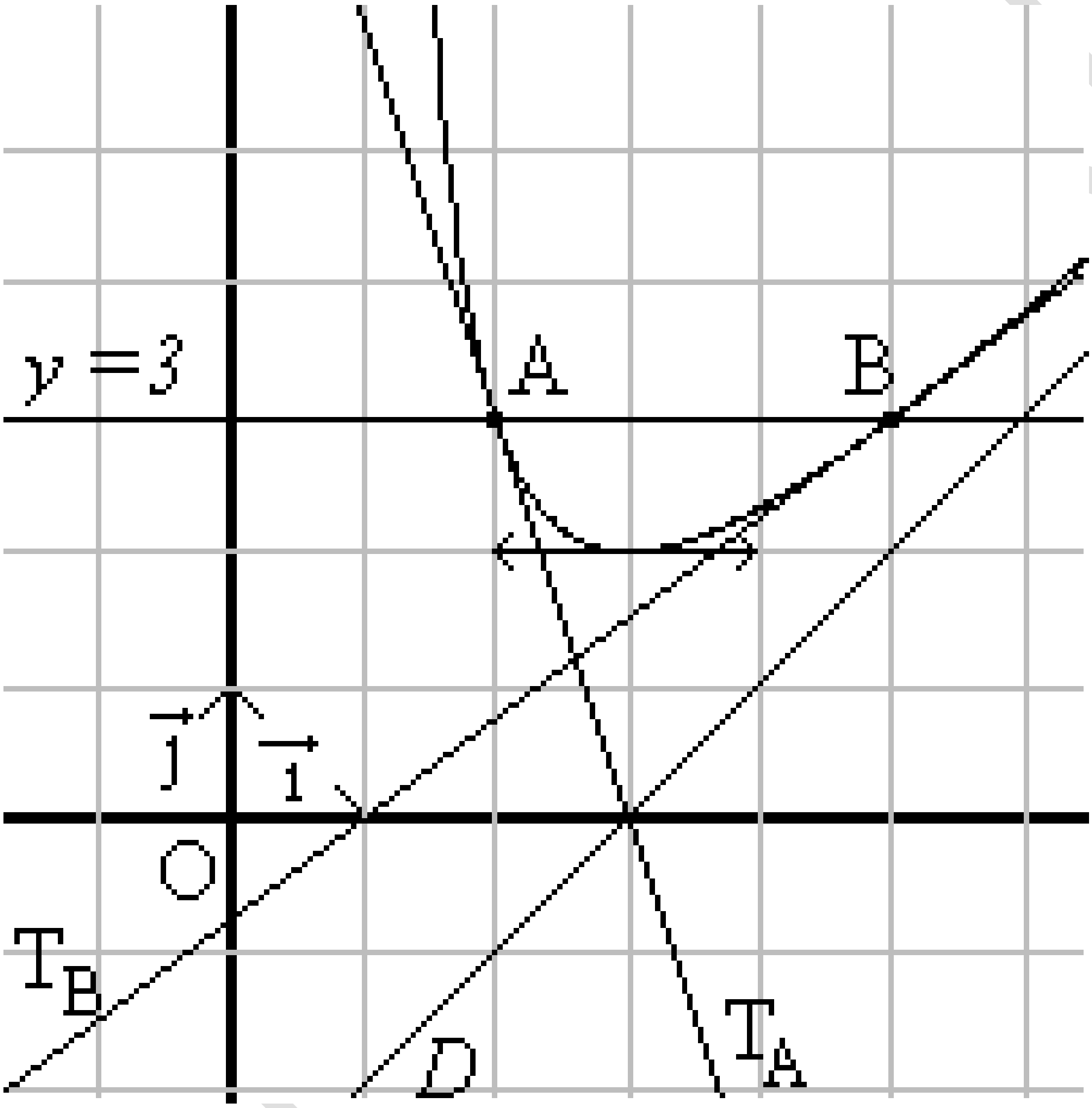
4) $x-3+\frac{4}{x-1}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}+\frac{4}{x-1}=\frac{x^2-x-3x+3+4}{x-1}=\frac{x^2-4x+7}{x-1}=f(x)$

donc $f(x)=x-3+\frac{4}{x-1}$

5) $f(x)-(x-3)=\frac{4}{x-1}>0$ sur $]1;+\infty[$

donc la courbe représentative de f est au dessus de la droite (D) d'équation *y = x-3*

6) Construction de la courbe $C_f$ et des droites (D), $(T_A)$, $(T_B)$




7) le coefficient directeur de la droite (D) est 1,
cela revient donc à résoudre l'équation *f'(x)* = 1

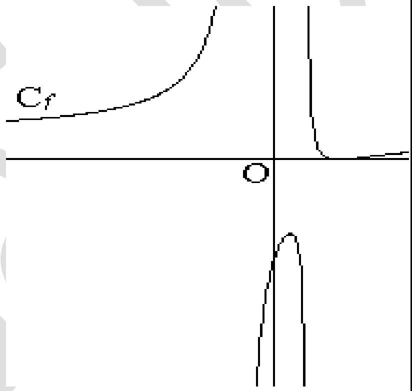
$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=1$$
$$x^2-2x-1=x^2-3x-3$$
$$-1=-3$$

cette équation n'a pas de solutions dans IR donc il n'existe aucun point de la courbe tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D)

***<u>Exerciec6</u>***

On considère la fonction *f* définie sur

$\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$




1) et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

( l'allure de $C_f$ est donnée ci-contre, à titre indicatif ) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*, en déduire l'existence De plusieurs asymptotes dont on précisera les équations.

1') Calculer $f'(x)$ , montrer que $f'(x)=\dfrac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}$.

2) Déterminer les variations de *f* sur son ensemble de définition,

3) on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).

4Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $C_f$

Avec l axe des ordonnées

Déterminer repère ortho normal d'unité graphique 1 cm, la courbe $C_f$, les asymptotes trouvées dans les questions précédentes et la droite l'équation de la tangente $T_A$ en la courbe au point A.

Construire dans un $(T_A)$

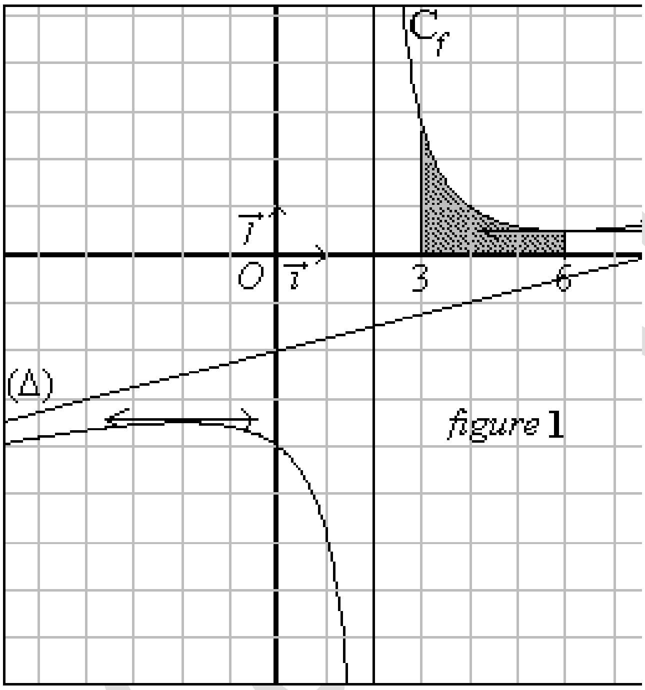
La droite $T_A$ coupe-t- elle la courbe $C_f$ en d'autre point que A

(justification par le calcul)

***Exercice7***

On considère la fonction $f$ définie sur $\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-10x+32}{4x-8}$

et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (voir **figure 1**)




1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   Préciser l'existence d'une asymptote

2) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{4(x-2)^2}$

3) Déterminer les variations de $f$ sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).

4) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme : $f(x)=\dfrac{1}{4}x-2+\dfrac{4}{x-2}$ .

   En déduire que la droite $\Delta$ d'équation $y=\dfrac{1}{4}x-2$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

5) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$ et en déduire la position relative de la courbe représentative $C_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

6) Déterminer une primitive F de la fonction $f$ sur l'intervalle$\left]2;+\infty\right[$, pour cette question utilisez l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 4) .
   Calculer l'aire en unités d'aire de l'ensemble des points M($x$ ; $y$) tels que :
   $3\le x\le 6$ et $0\le y\le f(x)$ ( voir partie grisée figure 1) , on donnera la valeur exacte simplifiée, puis la valeur arrondi à $10^{-1}$ près.

   (<u>Rappel :</u> Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction ln $|u|$)

***Correction7***

1) Pour tout réel x différent de 0 et de 2 on a :

$$f(x)=\frac{x^2-10x+32}{4x-8}=\frac{x^2\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]}{x\left[4-\frac{8}{x}\right]}=\frac{x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]}{\left[4-\frac{8}{x}\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}4-\frac{8}{x}=4\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}4-\frac{8}{x}=4\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}x^2-10x+32=16\\ \lim\limits_{x\to2^-}4x-8=0^-\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}x^2-10x+32=16\\ \lim\limits_{x\to2^+}4x-8=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$$

des deux dernières limites on en déduit l'existence d'une d'asymptote, la droite d'équation x = 2.

$$2)\,f(x)=\frac{x^2-10x+32}{4x-8}$$

$$u(x)=x^2-10x+32\Rightarrow u'(x)=2x-10$$

$$v(x)=4x-8\Rightarrow v'(x)=4$$

$$f'(x)=\frac{(2x-10)(4x-8)-4(x^2-10x+32)}{(4x-8)^2}=\frac{8x^2-16x-40x+80-4x^2+40x-128}{(4x-8)^2}$$

$$=\frac{4x^2-16x-48}{(4x-8)^2}=\frac{4(x^2-4x-12)}{16(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-12}{4(x-2)^2}$$

3) f'(x) est du signe de x² - 4x – 12 car 4(x-2)² > 0 sur l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-12)=16+48=64>0 \text{ donc 2 racines réelles :}$$

$$x_1=\frac{4-8}{2}=\frac{-4}{2}=-2\quad x_2=\frac{4+8}{2}=\frac{12}{2}=6$$

on en déduit le signe de f'(x) et les variations de f

calculons les extremums :

$$f(-2)=\frac{(-2)^2-10(-2)+32}{4(-2)-8}=\frac{4+20+32}{-16}=\frac{48}{-16}=-3$$
$$f(6)=\frac{6^2-10\times6+32}{4\times6-8}=\frac{36-60+32}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1/2$ | ↗ | $+\infty$ |

$$4)\ \frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}=\frac{x-8}{4}+\frac{4}{x-2}=\frac{(x-8)(x-2)}{4(x-2)}+\frac{16}{4(x-2)}=$$
$$\frac{x^2-2x-8x+16+16}{4(x-2)}=\frac{x^2-10x+32}{4(x-2)}=f(x)$$
$$f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=\frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=\frac{4}{x-2}$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}4=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x-2=-\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to-\infty}f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=0$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}4=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x-2=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=0$$
$$\text{donc la droite d'équation } y=\frac{1}{4}x-2 \text{ est asymptote à la courbe en } +\infty \text{ et } -\infty$$

5) Pour cette question, on peut se servir de la question 3) , $f$ atteint admet –3 comme maximum sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2[$ donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et $f$ atteint comme minimum ½ sur $]2\ ;\ +\infty[$ donc $f(x) > 0$ sur $]2\ ;\ +\infty[$ on peut donc en déduire que la courbe représentative de $f$ sera strictement en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et strictement au dessus de l'axe des abscisses sur $]2\ ;+\infty[$ . On peut sinon étudier le signe de $x^2 - 10x + 32$ et le signe de $4x – 8$ et en déduire le signe de $f(x)$.

$$6)\ f(x)=\frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}\quad F(x)=\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}-2x+4\ln|x-2|$$
$$or\ x-2>0 \text{ sur } ]2;+\infty[ \text{ donc } F(x)=\frac{x^2}{8}-2x+4\ln(x-2)$$

d'après la question 5) la courbe représentative de f est strictement au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle [3 ; 6] donc l'aire en unités d'aire de la partie grisée est :

$$\int_3^6 f(x)dx=[F(x)]_3^6=\left[\frac{x^2}{8}-2x+4\ln(x-2)\right]_3^6=$$
$$\left[\frac{36}{8}-12+4\ln4-\left(\frac{9}{8}-6+4\ln1\right)\right]=\frac{27}{8}-6+4\ln4=8\ln2-\frac{21}{8}u.a\approx2,9u.a$$

***<u>Exercice8</u>***

**<u>Partie A</u>**

**Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x - 4$**

**1 Etudier le sens de variation de g sur IR**

**2 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique que l'on notera $\alpha$**

**Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ prés**

**3 Déterminer le signe de g sur IR**

**Partie B**

**Soit la fonction f définie sur IR\\$\{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$ on note $C_1$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal**

**1 Etudier les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition**

**En déduire l'existence de deux asymptotes dont on donnera les équations**

**2 Calculer la dérivée de f sur IR\\$\{-1; 1\}$ et déterminer son signe**

**3 Dresser le tableau de variation de f**

**4 Montrer que pour tout $x$ de IR\\$\{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$**

**5 Justifier l'existence d'une asymptote oblique $\Delta$ à $C_f$**

**6 Etudier la position relative de $C_f$ et $\Delta$**

**7 Déterminer les abscisses des points de $C_f$ admettant une tangente parallèle a $\Delta$**

***Exercice9***

On considère la fonction f définie par : f$(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$

1) déterminer$D_f$ puis les réels a, b et c tel que : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$ [1]
2) 2 a) donner le tableau de variation de $f \ll pour\ calculer\ la\ dérivéede\ f(x)\ on\ peut\ utiliser\ l'écriture$ [1]

b) En déduire que : $\forall \ x \in \ ]0, 1[ : f(x) < 0$
3) $\mathcal{C}$ la courbe représentativité de $f$ dans un repère orthonormé ( $,\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) unité graphique 2cm
a) Démontrer que C admet trois asymptotes dont on donnera les équations

b) Démontrer que l'axe $\Delta$ d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C

C) Représenter $\Delta$ les asymptotes et la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère ( $o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

d) discuter graphiquement et suivant les valeurs du paramètre $m$ le nombre de solution de l'équation :$f(x) = m$

4) soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in N^*$ par $u_n\ f(n+1)$

a) calculer $u_1$ , $u_2$

b) Démontrer que $(u_n)$ est décroissante et minoré $\ll$ *on peut utiliser le tableau de variation de* $f$ $\gg$

5) soit $s_n = u_{1+}u_{2+} \dots \dots .. u_n$

Calculer $s_n$ en fonction de n $\ll$ *on peut utiliser l écriture* $[1]$ $\gg$

Calculer $\lim_{n\to\infty} s_n$ et démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n^2} = 2$

***EXERCICE 10***

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{3x^2+5x+1}{x+2}$

C sa courbe représentative dans un repère $(0\ ,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

1) Déterminer le domaine de définition de $f$ noté$D_f$, puis déterminer les réels a, b et c tels que ; $\forall\ x \in\ D_f$

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

2) Etudier les variations de $f$

3) Démontrer que C admet deux asymptotes (D) et( $D'$) l une (D) est oblique puis étudier la position relative de(D) par rapport à C

4) Déterminer l'équation de la tangente de (T) à C au point d'abscisse $x_0 = 0$

5a) Est-ce qu'il existe des points de C *où* la tangente est parallèle à la droite $2x - y + 1 = 0$ ?

b) Est-ce qu'il existe des points de C *où* la tangente est perpendiculaire à la droite (D) ?

6a) Démontrer que la courbe C admet un centre de symétrie le point Ω (-2,-7)

b) Déterminer les points d'intersections de C avec les axes.

7) soit g la restriction de f sur l'intervalle $I\ [-1, +\infty[$

a) Démontrer que g réalise une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera ; donner le TV de $g^{-1}$

b) donner l'équation de la tangente ($T'$) au courbe $C'$ de $g^{-1}$ au point d'abscisse $x_0$=$\frac{1}{2}$ et en déduire $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

8) Représenter les courbes C et $C'$

9) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre $m$ le nombre de solutions de l'équation :

$$3x^2 + (5 - m)x + 1 - 2m = 0$$

# Les fonctions exponentielles et logarithmes

***Exercice 1***

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle] 0 ; + ∞[

***Partie A***

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle I par :

$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$

1.a. On note g' la dérivée de la de fonction g ; calculer g'($x$) et étudier son signe, pour $x$ appartenant à l'intervalle I.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Les limites de la fonction g en 0 et en + ∞ ne sont pas demandées.

2. Calculer g(1), en déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle I.

***Partie B***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction f

dans un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

1. a. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.

b. Étudier la limite de f en + ∞.

2. a. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b. Déduire de la partie A le signe de f´(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.

c. Établir le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle I.

3. Soit D la droite d'équation y = ½ x dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe C et de la droite D.

c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe C par rapport à la droite D.

4. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D et la courbe C.

***Partie C***

1. On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

En remarquant que

$$\frac{\ln x}{x}$$

est de la forme u'(x).u(x), déterminer une primitive de la fonction h sur l'intervalle I.

2. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe C, la droite et les deux droites D’équations $x = 1$ et $x = e^{1/2}$

Calculer l'aire, exprimée en $cm^2$, de cette partie hachurée.

**Correction1 :**

***Partie A***

1.a. La fonction g est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

(x + 1) et x sont strictement positifs sur l'intervalle I donc g'(x) est du signe de x - 1.

1.b. On en déduit le tableau de variation de g :

| x | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | - | 0 | + | |
| g(x) | | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | |

2. a. g(1) = 1² + 3 - 2 ln 1 = 4

donc g admet sur un minimum absolu en 1 qui est 4, donc pour tout réel x de l'intervalle I, g(x) > 0.

**Partie B**

1.a.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{2x} = -\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

Par conséquent la droite d'équation x = 0 est asymptote à C ( asymptote verticale )

1.b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2.a.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+1+2-2\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2+3-2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

2.b.
f '(x) est du signe de g(x) puisque $2x^2 > 0$ sur I.
Or g(x) > 0 sur I , il en résulte f est strictement croissante sur I.
2.c.

| x | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| f '(x) | + | |
| f(x) | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

3.a.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0}_{\text{d'après partie B 1.b.}}$$

Donc la droite D d'équation y = ½ x est bien asymptote à la courbe C. ( asymptote oblique )
3. b.
Soit (x ; y ) les coordonnées de E , E est le point d'intersection de D et de C, donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

résolvons l'équation

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

sur  I pour trouver l'abscisse du point E :

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\frac{-1 + 2\ln x}{x} = 0$$

$$-1 + 2\ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

l'abscisse du point E est $\sqrt{e}$, son ordonnée est donc

$y = \sqrt{e}/2$

$E(\sqrt{e}\,;\,\sqrt{e}/2)$

c. pour étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D, il suffit d'étudier le signe de l'expression f(x) - x/2 =

$$\frac{-1 + 2\ln x}{x}$$

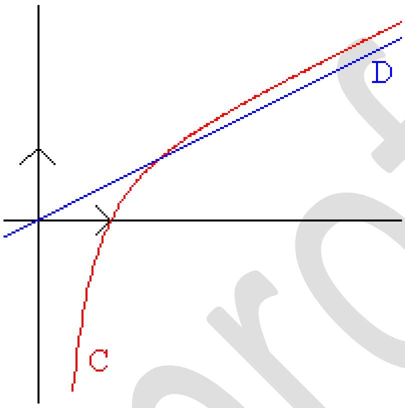
Cette expression est du signe de -1 + 2lnx puisque x > 0 sur I.

$-1 + 2\ln x > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 1/2 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$

C est au dessous de la droite D sur l'intervalle $[0\,;\,\sqrt{e}\,]$

C est au dessus de la droite D sur l'intervalle $[\sqrt{e}\,;\,+\infty[$

4.




**Partie C**

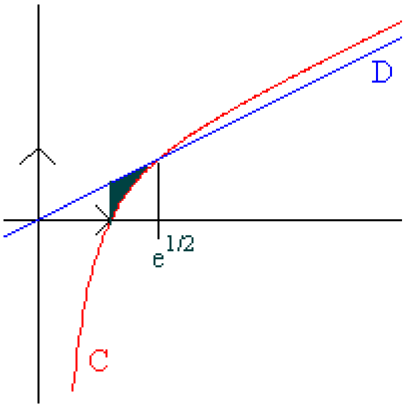
1.

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$$

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

2.




La droite D étant au dessus de la courbe C sur l'intervalle $[1; e^{1/2}]$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{x}{2} - f(x)\right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}\right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} h(x)dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} h(x)dx \times 4\,\text{cm}^2$$

$$\int_1^{e^{1/2}} h(x)dx = H(e^{1/2}) - H(1)$$

$$\frac{1}{2}\ln e^{1/2} - \frac{(\ln e^{1/2})^2}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} u.a.$$

$$\frac{1}{2} cm^2$$

***Exercice2***

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0\,;+\infty[$

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x \ln x - 2x + 3$

1.a. Déterminer la limite de g en 0.
( on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ )

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$
(on pourra mettre x en facteur ).

2. Déterminer à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de la fonction g.
Dresser le tableau de variations de g.

3. Calculer g(e). En déduire que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$

**Partie B**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$
On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ayant pour unités graphiques :

- 2 cm en abscisse,
- 1 cm en ordonnée.

1. Soit x appartenant à $]0\,;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = 4g(x)$.
2. a. Déterminer la limite de f en 0.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a. Déterminer une équation de la tangente $T_1$ à C en son point I d'abscisse 1.
b. Déterminer une équation de la tangente $T_2$ à C en son point K d'abscisse e.
5. Tracer $T_1$ , $T_2$ et C .

**Partie C**

1. Soit la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$
et h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln x$.
Vérifier que H est une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$ .
2. Soit D la partie du plan limitée par les droites d'équation x = 1 et x = e, l'axe des abscisses et la courbe C. Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, de la partie D. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

***Correction 2***

**Partie A**

1.a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(-2x+3) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

1.b.

$$g(x) = x\ln x - 2x + 3 = x\left[\ln x - 2 + \frac{3}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln x - 2 + \dfrac{3}{x}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

2. g est dérivable comme somme de fonction dérivable sur ]0 ; + ∞[,
calculons g'(x) :

$$g'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

Étudions le signe de g'(x) :

g'(x) > 0 ⇔ ln x - 1> 0 ⇔ ln x > 1 ⇔ x > e
donc g est décroissante sur [0 ; e] et elle est croissante sur [e ; + ∞ [

On en déduit le tableau de variation de la fonction g :

| x | 0 | | e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | - | 0 | + | |
| g(x) | 3 | ↘ | 3 - e | ↗ | +∞ |

3. g(e) = e ln e - 2e + 3 = e - 2e + 3 = 3 - e
g admet sur l'intervalle ]0 ; + ∞[ un minimum absolu en e qui est 3 -e ,
donc pour tout réel x de l'intervalle ]0 ; + ∞[
g(x) > 3 - e > 0.

**Partie B.**

1.
f est dérivable comme somme de fonctions
dérivables sur ]0 ; + ∞[

$$f(x) = 2x^2\ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 4x\ln x + 2x^2\cdot\frac{1}{x} - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x + 2x - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x - 8x + 12$$

$$= 4(x\ln x - 2x + 3) = 4g(x)$$

2. a.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2\ln x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(-5x^2 + 12x\right) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

b.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f(x) = x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -5 + \frac{12}{x} = -5\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = +\infty\end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. f'(x) = 4 g(x) donc f'(x) > 0 sur ]0 ; + ∞[ d'ou f est strictement croissante sur ]0 ; + ∞[.

| x | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | |
| f(x) | 0 | ↗ | +∞ |

4. a.

Tangente $T_1$ à C en son point I d'abscisse 1.

f'(1) = 4(1ln1-2+3) = 4

Le coefficient directeur de $T_1$ est 4.

f(1)= 2ln1 - 5 + 12 = 7.

y - f(1) = f'(1)(x - 1)

y - 7 = 4(x - 1)

$T_1$ : y = 4x + 3

b.

f'(e) = 4g(e) = 4(3 - e) =12 - 4e est le coefficient directeur de la tangente en e.

f(e) = 2e²lne - 5e² + 12 e = 2e² - 5e² + 12e = - 3e² + 12 e

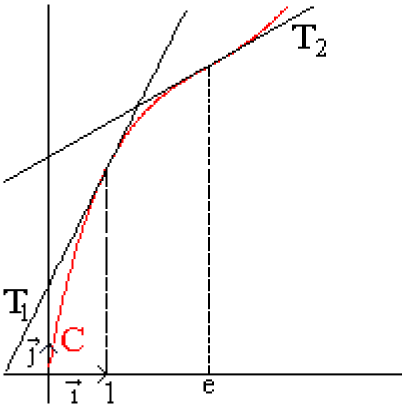
Équation de $T_2$

y = - 3e² + 12e + (12 - 4e)(x - e)

y = (12 - 4e)x - 3e² + 12e - 12e + 4e²

$T_2$ : y = (12 - 4e)x + e²

5.




**Partie C**

1.

La fonction H est dérivable sur ]0 ; + ∞[  et on a :

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

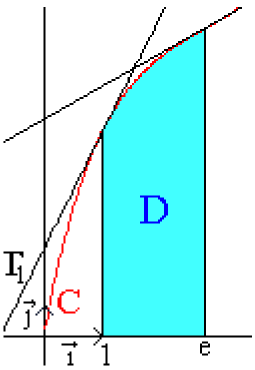
$$H'(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = h(x)$$

( forme (uv)' = u'v + uv' )

On en déduit que H est une primitive de la fonction h sur ]0 ; + ∞[ .

2.




Sur l'intervalle [1; e] , la courbe C est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire A de la partie D est égale en unité d'aire à :

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x)dx$$

$$= \left[2H(x) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}e^3\left(\ln e - \frac{1}{3}\right) - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \left(\frac{-2}{9} - \frac{5}{3} + 6\right)\right]$$

$$= \left[\frac{4e^3}{9} - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \frac{37}{9}\right]$$

$$= -\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9}$$

$$A = 2\left(-\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9}\right)cm^2$$

( vérifiez quand même ! )
soit environ  A $\approx$ 31,35 cm²

**EXERCICE 3**

**Partie A : étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur F intervalle [0 ;+ ∞[par $f(x) = x \ln(x + 1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée en annexe,

**1. a)** Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle [0; + ∞[.

**b)** L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

**2**. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

**a)** Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $x \neq -1$ ,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

**b)** Calculer I.

**3.** A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

**4.** Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].

On note $\alpha$ cette solution. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

**Partie B : étude d'une suite**

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par

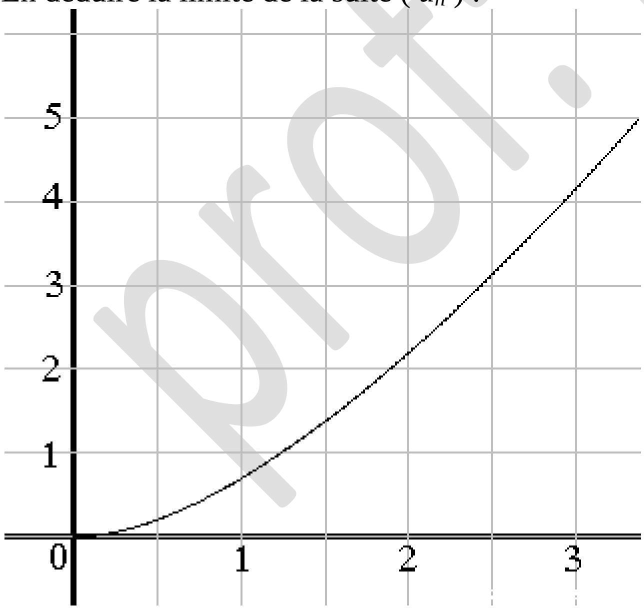
$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$$

**1.** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ La suite $(u_n)$ converge-t-elle ?

**2.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)$ .



**<u>Correction 3</u>**:
**Partie A : étude d'une fonction**
**1.a)** *f* est dérivable sur l'intervalle [0 ;+ ∞[ comme produit de deux fonction dérivables sur [0 ;+ ∞[ et

pour tout réel *x* de [0 ;+ ∞[ , on a :

$$f'(x) = 1\ln(x+1) + x \times \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

sur ]0 ;+ ∞[ , $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où $\ln(x + 1) > \ln 1$ il en résulte $\ln(x + 1) > 0$
sur ]0 ;+ ∞[ , $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

donc sur ]0 ;+ ∞[ ; $f'(x) > 0$ par conséquent *f* est strictement croissante sur [0 ;+ ∞[
**b)** Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 :
Coefficient directeur de la tangente : $f'(0) = \ln 1 + 0 = 0$
Ordonnée du point d'abscisse de (C) : $f(0) = 0$
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)x + f(0)$ soit y = 0
L'axe des abscisses est donc bien tangent à la courbe (C) au point O(0 ; 0).
**2**. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

**a)**

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$$

**b)**

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\frac{-1}{2} + \ln 2}$$

**3.** Si $x \geq 0$ ; $f(x) \geq 0$ puisque la fonction *f* est croissante sur [0 ;+ ∞[ donc la courbe (C) est au dessus de l'axe des abscisse sur [0 ; 1] par conséquent l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est donné en unités d'aires, par :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(x+1)dx \quad \text{posons } u'(x) = x \text{ et } v(x) = \ln(x+1)$$

$$\text{on a donc : } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}I$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}$$

**4.** La fonction $f$ est strictement croissante et continue sur [0;l] de plus $f(0) = 0 < 0{,}25$ et $f(1) = \ln 2 > 0{,}25$ donc l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].
Sur la calculatrice on lit $f(0{,}56) < 0{,}25 < f(0{,}57)$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$

**Partie B : étude d'une suite**

**1.** Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ln(x+1)dx = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx$$

$$x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ x - 1 \leq 0 \\ \ln(x+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^n(x-1)\ln(x+1) \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx \leq 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite $(u_n)$ est décroissante **(1)**

$$x \in [0;1] \Rightarrow x^n \ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \geq 0$$

la suite ( $u_n$ ) est donc minorée par 0 **(2)**
De (1) et (2) , on en déduit que la suite ( $u_n$ ) est convergente.

**2.** Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $x$ de l'intervalle [0 ; 1] on a

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \text{ soit } 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$$

en intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1] on obtient pour tout entier naturel non nul :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2dx \text{ d'où } 0 \leq u_n \leq \ln 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$$

$$\text{Pour tout entier naturel n, } 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0 \end{array}\right\} (\text{Théorème des gendarmes}) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

**_EXERCICE 4_**

## _Partie A_

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g($x$) = $e^x$ -2$x$.

**1.** Calculer g' ($x$) où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.

**2.** En déduire que pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}$, g($x$) > 0.

## _Partie B_

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f$ (x) = $e^x$ -$x^2$.

**1.** Déterminer la limite de $f$ en - $\infty$ puis la limite de $f$ en + $\infty$.

Pour la limite en + $\infty$, on pourra remarquer que pour $x$ non nul $f$ ($x$) peut s'écrire :

$$x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)$$

**2.** Calculer $f$ '($x$) où $f$ ' désigne la fonction dérivée de la fonction $f$ , puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de $f$

**3.** On admet que l'équation $f$ ($x$) = 0 admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

**a)** Calculer $f$ (-l) et $f$ (0).

**b)** Montrer que la solution de l'équation $f$ ($x$) = 0 est unique et qu'elle appartient à l'intervalle [-1 ; 0]

**c)** En utilisant une calculatrice pour calculer $f$ ($x$) pour différentes valeurs de $x$, donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de cette solution.

**Correction 4**

**Partie A**

**1.** Pour tout réel $x$ on a g' ($x$) = $e^x$ -2.

g' ($x$) > 0 équivaut à $e^x$ -2 > 0 équivaut à $e^x$ > 2 équivaut à $x$ > ln 2

donc la fonction g est croissante sur [ ln 2 ; + $\infty$[ et décroissante sur ] - $\infty$; ln 2 ]

g(ln2) = $e^{\ln 2}$ -2 ln2 = 2 - 2 ln2.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $2-2\ln 2$ | $\nearrow$ | |

**2.** Le minimum de la fonction g : g(ln2) = 2 - 2ln 2 > 0 donc pour tout réel x on a : g($x$) > 0.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f$ ($x$) = $e^x$ -$x^2$.

**1.**

$$f(x)=e^x-x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Pour tout réel $x$ non nul on a :

$$f(x) = e^{x} - x^{2} = x^{2}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x^{2}} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**2.** Pour tout réel $x$ on a : $f'(x) = e^{x} - 2x = g(x) > 0$ d'après la partie A.
on en déduit $f$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. a)** $f(-1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1$ ; $f(0) = e^{0} - 0^{2} = 1$

**b)** La fonction f est strictement croissante sur [-1 ; 0] et on a : $f(-1) < 0 < f(0)$ donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et elle appartient à l'intervalle [-1 ; 0]

**c)** $f(-0{,}704) < 0 < f(-0{,}703)$ donc la solution de cette équation est comprise entre -0,704 et -0,703 on peut donc

prendre -0,704 comme valeur approchée à $10^{-3}$ près de cette solution la valeur retenue.

***<u>Exercice 5</u>***

**On considère la fonction $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x}$ .**

**Dans le repère ortho normal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note $C_f$ sa représentation graphique et $C_{exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.**

**1.a. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.**

**b. Donner les valeurs de**

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2}e^{x} \quad \text{et de} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{x}$$

**c. En déduire que**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

**Que peut-on en déduire graphiquement ?**

**2.a. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = (x + 1)(x + 2)e^{x}$ .**

**b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$**

**c. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$**

**3. Déterminer le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

**4.a. Préciser les positions relatives de $C_f$ et de $C_{exp}$.**

**b. Construire ces deux courbes dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.**

**5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = (x^2 - x + 2)e^{x}$ .**

**Prouver que F est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$**

**6.a. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine D délimité par la courbe $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.**

**b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine D' délimité par les courbes $C_f$ et $C_{exp}$ , et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$**

**. correction5 :**

**1.a.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

**b.**

$$\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0=\lim_{x\to-\infty}xe^x$$

**c.**

$$f(x)=(x^2+x+1)e^x=x^2e^x+xe^x+e^x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$$

**La droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe représentative $C_f$ en - ∞**

**2.a.**

$$f(x)=(x^2+x+1)e^x \qquad f=uv\Rightarrow f'=uv'+uv'$$

$$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x$$

$$(x+1)(x+2)=x^2+x+2x+2=x^2+3x+2$$

$$donc\ f'(x)=(x^2+3x+2)e^x=(x+1)(x+2)e^x$$

**b. $f'(x)$ est du signe de $(x+1)(x+2)$ car $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$**

**le polynôme $(x+1)(x+2)$ a deux racines réelles distinctes -2 et -1 et son signe est positif à l'extérieur des racines.**

**c.**

$$f(-1)=(1-1+1)e^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e} \qquad f(-2)=(4-2+1)e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $3/e^2$ | ↘ | $1/e$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. D'après le tableau de variation $f(x)>0$ sur $\mathbb{R}$**

**4.a.**

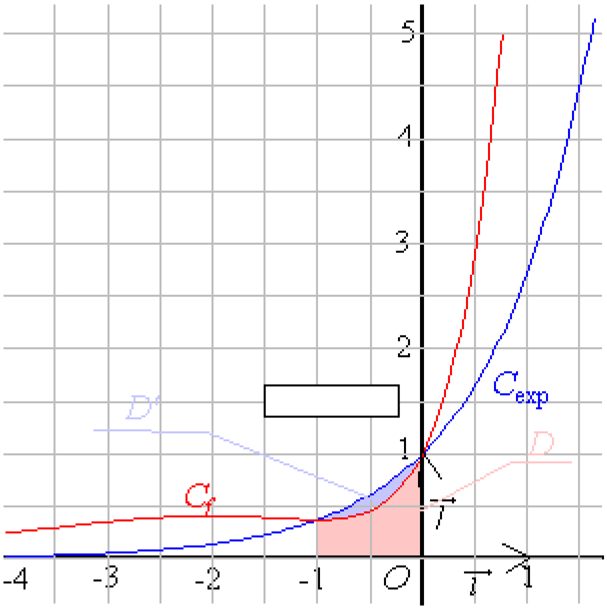
$$f(x)-e^x=(x^2+x+1)e^x-e^x=(x^2+x)e^x=x(x+1)e^x$$

**$f(x)-e^x$ est donc du signe de $x(x+1)$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-e^x$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

**sur l'intervalle ] - ∞; - 1 ] la courbe $C_f$ est au dessus de $C_{exp}$**

**sur l'intervalle [-1 ; 1 ] la courbe $C_f$ est en dessous de $C_{exp}$**
**sur l'intervalle [1 ; + ∞[ la courbe $C_f$ est au dessus de $C_{exp}$**
**b.**




**5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 2)e^x = (x^2 - x + 2 + 2x - 1)\, e^x =$**
**$(x^2 + x + 1)\, e^x = f(x)$ donc F est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.**
**6.a. Sur l'intervalle [-1 ; 0] la courbe $C_f$ est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire de D est donné en unité d'aire par :**

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{0} = \left[(x^2 - x + 2)e^x\right]_{-1}^{0}$$

$$= (0 - 0 + 2)e^0 - (1 + 1 + 2)e^{-1} = 2 - 4e^{-1}$$

$1u.a. = 4cm^2$ $\boxed{Aire(D) = \left(2 - 4e^{-1}\right) \times 4 = 8\left(1 - 2e^{-1}\right) cm^2}$

**b. Sur l'intervalle [-1 ; 0] la courbe $C_f$ est au dessus de courbe $C_{exp}$ donc l'aire de D' est donné en unité d'aire par :**

$$\int_{-1}^{0} e^x - f(x)dx = \left[e^x - F(x)\right]_{-1}^{0} = \left[e^x\right]_{-1}^{0} - \left[F(x)\right]_{-1}^{0}$$

$$= e^0 - e^{-1} - \left(2 - 4e^{-1}\right) = 1 - e^{-1} - 2 + 4e^{-1} = 3e^{-1} - 1$$

$$\boxed{Aire(D') = 4(3e^{-1} - 1)\ cm^2}$$

## ***Exercice 6***

**Partie 1**

**Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur [0 ; 9] par**

$$f(x) = \frac{10}{1 + x} - 1 \quad et \quad g(x) = \frac{x}{2}$$

**1. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$**
**2. Calculer l'intégrale I :**

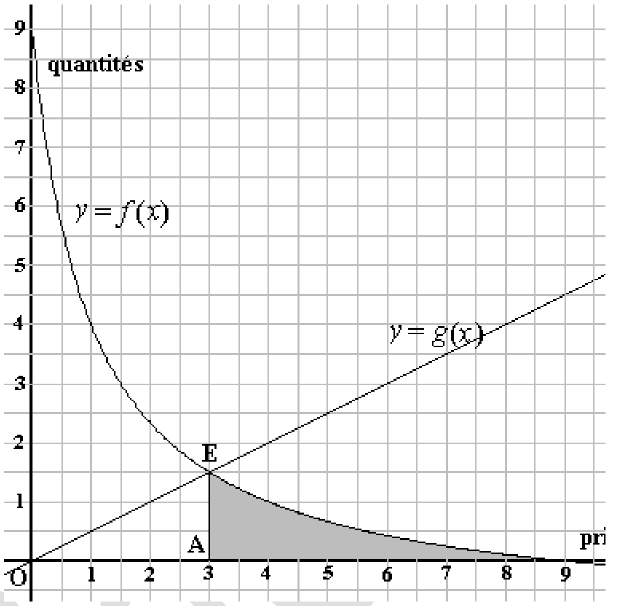
$$\int_{3}^{9} f(x)dx\ ;$$

**On donnera la valeur exacte de I.**

**Partie 2**
Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché. On désigne par *x* le prix d'une boîte de ce produit en dizaine d'ouguiyas.
On admet que la quantité acheté par les consommateurs, en fonction du prix *x* appliqué sur le marché, est donné par *f*(*x*) en centaines de boîtes.

On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente *x* auquel les producteurs sont disposés à vendre est donné par g(*x*) en centaines de boîtes.

Sur le graphique ci-contre sont tracées dans un repère ortho normal les courbes représentatives des fonctions *f* et *g*.




**1.** On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
**a.** Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 ouguiyas la boîte ?
**b.** Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre en ouguiyas et le nombre de boîtes correspondant.

**2.**
**a.D'après le graphique , les producteurs étaient disposés à vendre des boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre.**
**On appelle surplus des producteurs , le gain réalisé en vendant des boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'ouguiyas par l'aire du triangle OAE ( 1 unité d'aire = 1 millier d'ouguiyas ) .**
**Calculer ce surplus en ouguiyas**
**b. Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné en milliers d'ouguiyas par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ( 3 $\leq x \leq$ 9 )**
**Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'ouguiyas.**

**<u>Correction6 :</u>**

**Partie 1**
**Soients les fonctions f et g définies sur [0 ; 9] par**

$$f(x) = \frac{10}{1+x} - 1 \quad et \quad g(x) = \frac{x}{2}$$

**1.**

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{10}{1+x} - 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{10-(1+x)}{1+x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{9-x}{1+x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2(9-x) = x(1+x) \Leftrightarrow x^2 + x = 18 - 2x \Leftrightarrow$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times (-18) = 9 + 72 = 81 > 0$

donc deux solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-3-9}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \quad < 0$ ne convient pas

$x_2 = \frac{-3+9}{2} = \frac{6}{2} = 3$

**La seule solution acceptable est donc x = 3 (ce que l'on retrouve sur le graphique )**

**2.**

$\int_3^9 f(x)dx = \int_3^9 \frac{10}{1+x} - 1dx = \left[10\ln(1+x) - x\right]_3^9$

$= 10\ln 10 - 9 - (10\ln 4 - 3) = 10\ln 10 - 10\ln 4 - 6$

$= 10\ln 2 + 10\ln 5 - 20\ln 2 - 6$

$= \boxed{10\ln 5 - 10\ln 2 - 6 = 10\ln\frac{5}{2} - 6 = 10\ln 2{,}5 - 6}$

**1.**

**a. graphiquement on peut conjecturer f(4) = 1 , vérifions le algébriquement :**

$f(4) = \frac{10}{1+4} - 1 = \frac{10}{5} - 1 = 2 - 1 = 1$

**donc 100 boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 ouguiyas la boîte.**

**b. Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché atteint son équilibre ce qui se produit quand f(x) = g(x) graphiquement on peut conjecturer que l'équilibre a lieu pour x = 3 et y = 1,5 soit pour un prix de 30 ouguiya la boîte et 150 boîtes.**
**Algébriquement f(x) = g(x) si x = 3 d'après partie 1 . 1.**
**De plus :**

$f(3) = \frac{10}{1+3} - 1 = \frac{10}{4} - 1 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$

**2.**

**a/(OAE)** $.\frac{OA\times AE}{2} = \frac{3\times1{,}5}{2}$ **=2,25 um**

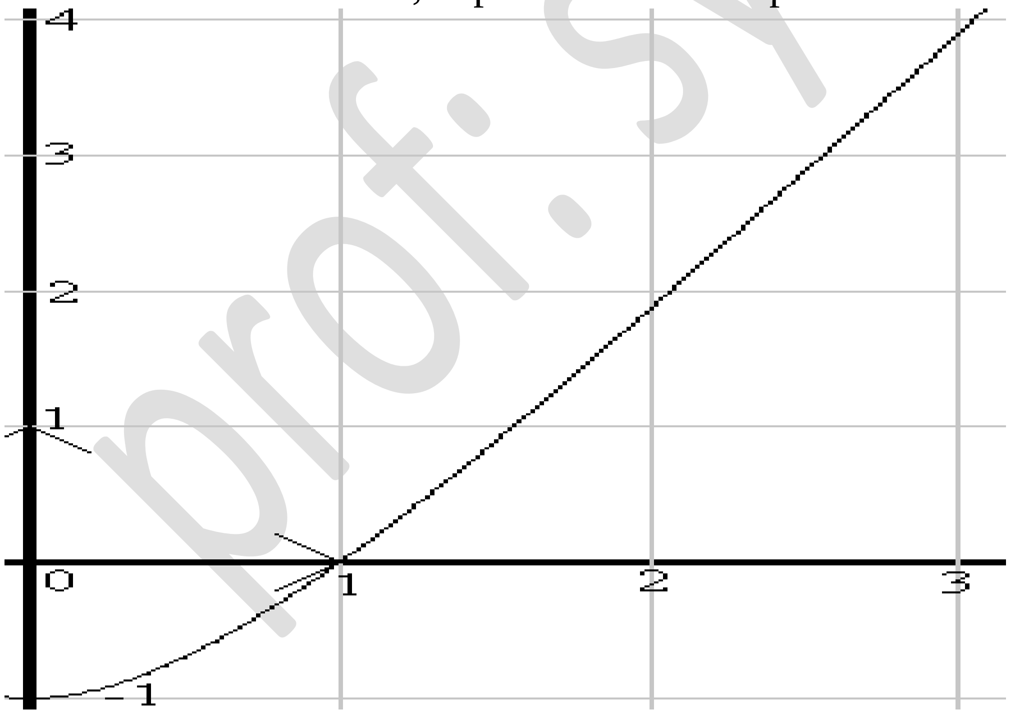
**Le surplus des producteurs est donc de 2250 ouguiyas.**

**b.** $\int_3^9 f(x)dx = 10ln(2{,}5) - 6ua = 10^3$**[10ln (2.5)-6]**
**≃3163um**

**Le surplus des consommateurs est donc de 3163 UM**

## Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[ par $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$
Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous (unité graphique 2 cm )
1.a. Etudier la limite de $f$ en + ∞
1.b. Montrer que la droite Δd'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C
1.c. Etudier les positions relatives de C et Δ
2.a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$
2.b. En déduire que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) > 0$
2.c. Préciser la valeur de $f'(0)$ , puis établir le tableau de variation de $f$
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C , la droite Δet les droite d'équation x = 1 et x = 3
4.a. Déterminer le point A ou la tangente est parallèle à Δ
4.b. Calculer la distance, exprimée en cm du point A à la droite Δ.



**<u>Correction7</u>** :

1. a.

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (2-e^{-x}) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1. b .

$$f(x) - (2x-2) = (x-1)(2-e^{-x}) - 2x + 2$$

$$= 2x - xe^{-x} - 2 + e^{-x} - 2x + 2 = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - \frac{x}{e^{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x-2) = 0$$

on en déduit que la droite $\Delta$ d'équation y = 2x - 2 est asymptote à la courbe représentative C de *f*.

1. c .

$$f(x) - (2x-2) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

*f*(*x*) - (2*x* - 2) est du signe de 1 - *x* car $e^{-x} > 0$ sur [0 ; + ∞[

- si $x \in [0\,;\,1]$ c'est à dire si $0 \leq x \leq 1$ , $1 - x \geq 0$ et dans ce cas la courbe C sera au dessus de la droite $\Delta$
- si $x \in [1\,;\,+\infty[$ , c'est à dire si $x \geq 1$ , $1 - x \leq 0$ et dans ce cas la courbe C sera au dessous de la droite $\Delta$.

2. a.La fonction *f* est dérivable comme produit de fonction dérivable sur [0 ; + ∞[ et pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; + ∞[

$$f'(x) = 1(2-e^{-x}) + (x-1)e^{-x}$$

$$= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$$

2.b.

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Rightarrow 2(1-e^{-x}) > 0$$

$$or\ xe^{-x} > 0 \text{ sur } [0;+\infty[$$

$$\text{donc } f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x}) > 0 \text{ sur } [0;+\infty[$$

2.c.

*f* '(0) = 0 + 2(1 - 1) = 0

*f*(0) = (0 - 1)(2 - 1) = -1

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Sur l'intervalle [1 ; 3] , la courbe C est en dessous de la droite $\Delta$, donc l'aire en unité d'aire du domaine demandée est :

$$\int_1^3 (2x-2) - f(x)dx = \int_1^3 (x-1)e^{-x}dx$$

$$\begin{cases} u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x} \\ v = x-1 \Rightarrow v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}dx = \left[(1-x)e^{-x}\right]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x}dx$$

$$= -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]_1^3 = -2e^{-3} - \left(e^{-3} - e^{-1}\right) = e^{-1} - 3e^{-3}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{3}{e^3}$$

ce qui donne en tenant compte de l'unité d'aire 4 cm² :

$$4\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{e^3}\right)cm^2$$

4. a. au point A la tangente est parallèle à $\Delta$, donc elle a le même coefficient directeur que $\Delta$soit $x$ l'abscisse de A :

$$\Delta : y = 2x - 2$$

$$\Delta : 2x - y - 2 = 0$$

$$d(A,\Delta) = \frac{|2x_A - y_A - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|2\times 2 - \left(2 - e^{-2}\right) - 2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5e^2} \text{ unité de longueur } = \frac{2\sqrt{5}}{5e^2}cm$$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 2$ qui est l'abscisse du point A

ordonnée de A

$$f(2) = (2-1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}$$

Le point A a pour coordonnées

$$A(2; 2 - e^{-2})$$

***Exercice 8***

**Partie A :**

Soit g la fonction définie sur ]0 ; + ∞[ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
( ln $x$ désigne le logarithme népérien de $x$)
**1.** Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
**2.** Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.
(Les limites ne sont pas demandées).
**3.** Calculer $g(1)$.
**4.** Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle ]0 ; + ∞[ .

**Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire**

On considère la fonction $f$ définie sur ]0 ; + ∞[ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle ($C$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

**1.a** Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

**1.b** Montrer que la droite ($D$) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à ($C$).
Y a-t-il une autre asymptote à ($C$) ? Si oui, donner son équation.

**1.c** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

**1.d** En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**1.e** Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote ($D$) et la courbe ($C$). Etudier la position de la courbe ($C$) par rapport à la droite ($D$).

**1.f** Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe ($C$) et les droites ($D$).

**2.a** Montrer que la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{-1}{x}(1 + \ln x)$$

est une primitive de la fonction $h$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

**2.b** Soit $\Delta$ le domaine plan limité par ($D$), ($C$) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. Hachurer $\Delta$; calculer la valeur exacte de l'aire, en $cm^2$, de $\Delta$; en donner une valeur approchée au $mm^2$

<u>Correction8</u>

***<u>Partie A : Etude du signe</u>* de $x^3 - 1 + 2 \ln x$**

**1.** La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ :

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0 \text{ pour tout réel } x \in \left]0;+\infty\right[$$

donc la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

**2.** Tableau de variation de la fonction $g$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | |

**3.** $g(1) = 1 - 1 + 2 \ln 1 = 0$

**4.**

Si $x \leq 1$ , alors $g(x) \leq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \leq 0$
Si $x \geq 1$ , alors $g(x) \geq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \geq 0$
conclusion : sur $]0 ; 1]$ , $g(x) \leq 0$ et sur $[1 ; +\infty[$ , $g(x) \geq 0$
On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | \|\| | - | 0 | + | |

***Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire***

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle $(C)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
(unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

**1.a**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \quad (*)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x - 1 = -1 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

(*) voir formulaire

**1.b**

$$f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x}{x^2} = 0$$

donc la droite $(D)$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(C)$.

Il y a une autre asymptote à la courbe (C) ( voir **1.a**.) , c'est la droite d'équation $x = 0$.

**1.c**

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

.

**1.d** $f'(x)$ est du signe de g($x$) car $x^3 > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et le signe de g($x$) a déjà été trouvé à la partie A :

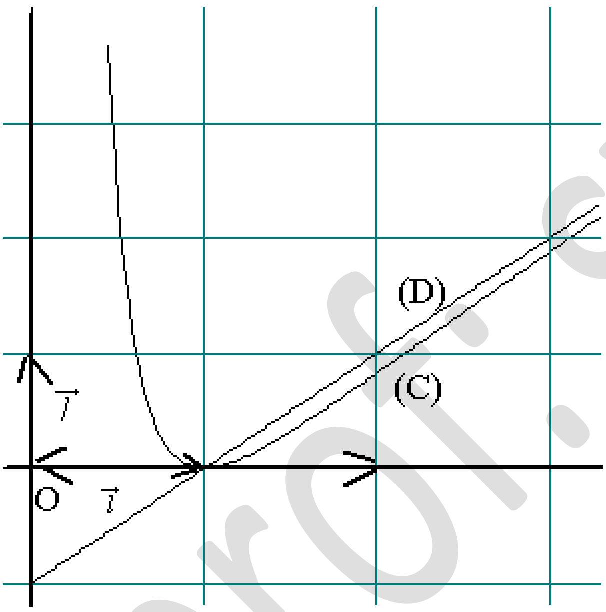
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(1) = 0$

**1.e** Soit $x$ l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote ($D$) et de la courbe ($C$) , on a :

$f(x) = x - 1$ soit $\ln x = 0$ , par conséquent $x = 1$.
l'ordonnée de ce point est $f(1) = 0$ .
La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées (1 ; 0 )
$f(x) - \ln x$ est du signe de $- \ln x$ ( voir **Partie B 1 .b**)
<u>Etudions le signe de - ln $x$ :</u>
$- \ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 0$ soit $\ln x \leq \ln 1$ d'où $x \leq 1$
sur $]0 ; 1]$ , $- \ln x \geq 0$ donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D)
sur $[1 ;+ \infty[$ , $- \ln x \leq 0$ donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)

**1.f**




**2.a**

Pour tout réel $x$ on a :

$$H'(x) = \frac{1}{x^2}(1+\ln x) + \frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$$

donc H est une primitive de la fonction $h$ définie sur $]0 ; + \infty[$

**2.b** Soit $\Delta$ le domaine plan limité par ($D$), ($C$) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$ .

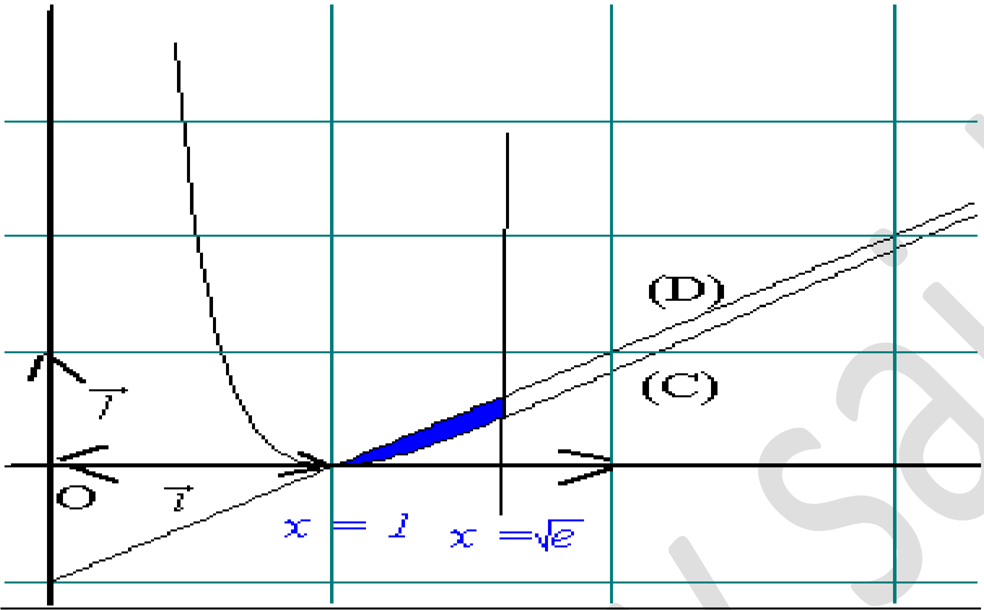
Sur $[1 ; \sqrt{e}\,]$ la courbe (C) est au dessous de (D) donc l'aire du domaine $\Delta$ limité par ($D$), ($C$) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$ est en unité d'aire :

$$\int_1^{\sqrt{e}} (x-1) - f(x)dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx = [H(x)]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left[\frac{-1}{\sqrt{e}}(1+\ln\sqrt{e}) + (1+\ln 1)\right] = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\ln e\right)+1 = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\right)+1 =$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\,u.a = \left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)\times 6cm^2 = 6-\frac{9}{\sqrt{e}}\,cm^2$$

on trouve en arrondissant au $mm^2$ : 0,54 cm².






***Exercice 9***

***Partie A - Étude d'une fonction***

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I= ]0 ; + ∞[ par :
f(x) = ln(2x) - ln(x+1)
1. Vérifier que pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I
b. calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition I.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ ; l'unité de longueur est 2 cm.
a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe (O ; $\vec{i}$ ).
b. déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
c. tracer la courbe (C) et la tangente (T)
4. Déterminer le nombre $\alpha$ tel que la tangente ( $\Delta$ ) à la courbe (C) au point d'abscisse $\alpha$ soit parallèle à la droite d'équation y = x.

***Partie B - Étude d'une fonction primitive***

Soit la fonction g définie sur I= ]0 ; + ∞[ par :
g(x) = x ln(2x) - (x + 1) ln(x + 1)
1. Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur I.
2.a.
Étudier le signe de f(x) d'après les résultats de la **partie A.**
b. En déduire les variations de g sur l'intervalle I
3. Calculer en cm² la valeur exacte de l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \le x \le 2$ et $0 \le y \le f(x)$
Préciser une valeur décimale approchée à 0,01cm² près.

***Correction9***

1. pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

donc pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2.a. la fonction f est dérivable sur I comme somme de 2 fonctions dérivables

$$f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1} =$$

sur I et $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

f'(x) > 0 sur I donc f est strictement croissante sur I.
b.

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

on en déduit que la courbe représentative (C) de la fonction f admet la droite x = 0 comme asymptote ( asymptote verticale )

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

or ln(1) = 0 donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

On en déduit donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$

La droite d'équation y = ln 2 est asymptote à la courbe représentative (C) de f ( asymptote horizontale ) c.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\ln 2$ |

3.a. Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses a une ordonnée nulle donc son abscisse x vérifie l'équation f(x) = 0

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(2x) - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(2x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow$

$2x = x + 1 \Leftrightarrow$

$x = 1$

C'est donc le point d'abscisse 1.

b. Calculons le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$f'(1) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

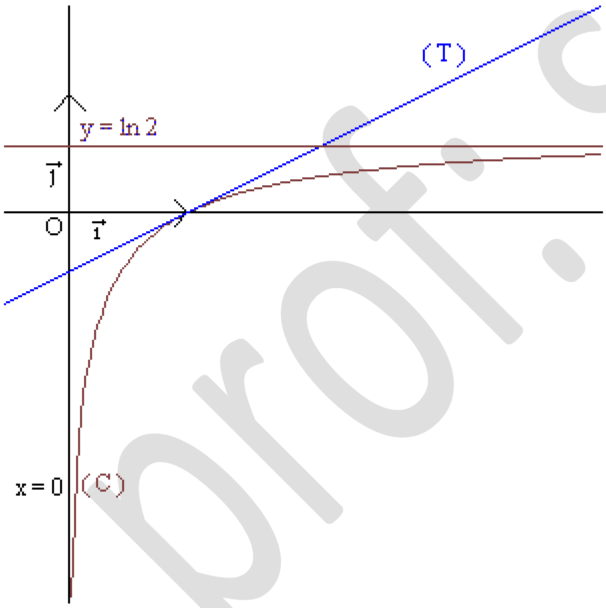
On sait de plus que f(1) = 0 d'après la question 3.a

L'équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe est : y - f(a) = f'(a)(x - a)

Donc l'équation de (T) est y - 0 = 0,5(x - 1)

$$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

c.




4. Pour ( $\Delta$ ) soit parallèle à la droite d'équation y = x il faut que ces deux droites aient le même coefficient directeur c'est à dire 1.

Par conséquent $\alpha$ doit vérifier l'équation f'(x )=1

$$\frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ donc 2 solutions pour l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ convient

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ne convient pas

donc $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

***Partie B.***

1. La fonction g est dérivable sur I, calculons sa dérivée :

$$g(x) = x\ln(2x) - (x+1)\ln(x+1)$$

$$g'(x) = 1\cdot\ln(2x) + x\cdot\frac{2}{2x} - 1\cdot\ln(x+1) - (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$= \ln(2x) + 1 - \ln(x+1) - 1$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1)$$

$$= f(x)$$

g'(x) = f(x) donc g est bien une primitive de f sur I.

2.a on sait que f(1) = 0 on en déduit donc le signe de f(x) :

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | ln 2 |
| f(x) | | - | 0 | + | |

2.b

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | - | 0 | + | |
| g(x) | | $\nearrow$ | -ln2 | $\searrow$ | |

$$g(1) = \ln 2 - 2\ln 2 = -\ln 2$$

3.La courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle [1; 2] donc l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \le x \le 2$ et $0 \le y \le f(x)$ est égale à :

$$\left(\int_1^2 f(x)dx\right)u.a$$

(u.a unités d'aire )

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x)dx = [g(x)]_1^2 = g(2) - g(1)$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 4 - 3\ln 3 + \ln 2$$

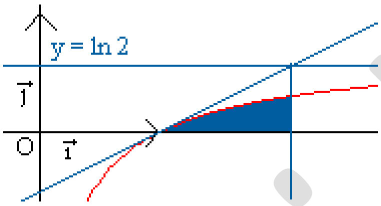
$$= 2\ln 2^2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 4\ln 2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 5\ln 2 - 3\ln 3 = \ln 2^5 - \ln 3^3 = \ln\frac{32}{27}$$

L'unité d'aire étant de 4 cm² ,
L'aire du domaine demandé est donc de :

$$\ln\frac{32}{27}\text{ u.a.} = 4\ln\frac{32}{27}cm^2 \approx 0.680\ cm^2$$




**EXERCICE10**

***Partie A***

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $g(x) = -x + x\ln x$.
( où ln désigne le logarithme népérien ).
**1.** Résoudre dans l'intervalle] 0 ; + ∞[l'équation $g(x) = 0$.
**2.** Résoudre dans l'intervalle] 0 ; + ∞[l'inéquation $g(x) > 0$.

**Partie B**

Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[ par :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x$$

On appelle ( Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ( unités : 2 cm ).

**1.** Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x)$$

**2.** Montrer que f '(x) = g(x) . Utiliser les résultats de la partie A pour établir le tableau de variations de f.

**3.** Calculer $f(e^{\frac{3}{2}})$. On fera apparaître le détail des calculs.
**4.** Soit A le point d'abscisse 1 de ( Γ).
Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe ( Γ).

**5.** Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente T ainsi que la partie de la courbe ( Γ ) , relative à l'intervalle [0 ; 6] .
**6.** Soit la fonction F définie sur ]0 ; + ∞[ par :

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3$$

**a.** Montrer que F est une primitive de f sur ]0 ; + ∞[.

**b.** Calculer en cm² l'aire du domaine limité dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe ( Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e . On en donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

***Correction10***

**Partie A**

**1.** *g(x)=0*

*-x + x ln x = 0*

*x(-1 + ln x) = 0*

*-1 + ln x = 0*

(x ne peut pas être égal à 0 puisque la fonction g est définie sur ]0 ; + ∞[ )

*ln x = 1*

*ln x = ln e*

*x = e*

*S ={e }*

**2.** *g(x) > 0*

*x(-1 + ln x) > 0*

*x* est toujours strictement positif puisque la fonction est définie sur *]0 ; + ∞[*.

*-1 + ln x > 0* si et seulement si *ln x > 1*

si et seulement si *ln x > ln e*

si et seulement *si x > e*

Signe de x(-1 + ln x) :

| x | 0 | | e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | + | | + | |
| -1+ ln x | ‖ | - | 0 | + | |
| x(-1+ ln x) | ‖ | - | 0 | + | |

*S = ]e ; + ∞[*

**Partie B**

**1. en + ∞**

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = x^2\left[\frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**en 0**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0\end{array}\right\} \text{donc } \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2\ln x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-3}{4}x^2 = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

**2.** *f* est dérivable sur *]0 ; + ∞[* et pour tout réel x de *]0 ; + ∞[* on a :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \ln x}_{uv}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4}(2x) + \underbrace{\frac{1}{2}(2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}}_{u'v+uv'}$$

$$= \frac{-3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = -x + x\ln x = g(x)$$

en utilisant les résultats de la partie A on en déduit les variations de *f*

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-e^2/4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f(e) = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \ln e = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{-1}{4}e^2$$

***3.***

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3 \times \frac{3}{2} = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$$

***4.***

$$f(1) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{-3}{4}$$

donc le point A d'abscisse 1 a pour ordonnée -3/4.

$$f'(1) = g(1) = -1 + 1\ln 1 = -1$$

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $f'(1) = -1$, on en une l'équation de la tangente au point d'abscisse A :

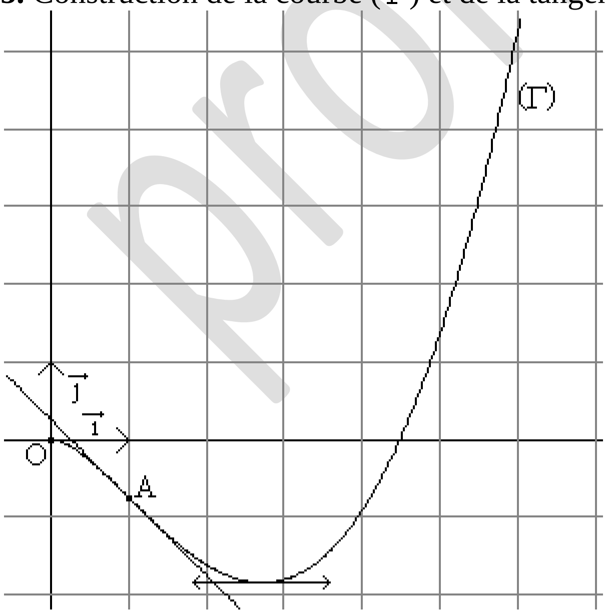
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -1(x-1) - \frac{3}{4}$$

$$y = -x + 1 - \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y = -x + \frac{1}{4}}$$

**5.** Construction de la courbe $(\Gamma)$ et de la tangente en A sur [0 ; 6]



**6.a.** F est une primitive de *f* sur ]0 ; + ∞[ si F est dérivable et *F'(x) = f(x)*
F est dérivable et

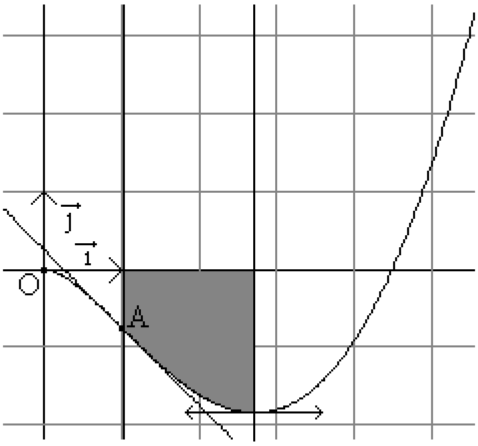
$$F(x) = \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3$$

$$F'(x) = \frac{1}{6}3x^2\ln x + \frac{1}{6}x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{11}{36}3x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{2}{12}x^2 - \frac{11}{12}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{9}{12}x^2 = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x$$

**On retrouve bien *F'(x) = f(x)* donc *F* est bien une primitive de *f* sur ]0 ; + ∞[**
b.




L'unité d'aire est de 4 cm²
sur l'intervalle [1 ; e], la courbe ($\Gamma$) est en dessous de l'axe des abscisses
en unités d'aire l'aire du domaine est :

$$\int_1^e -f(x)dx = -\left[\frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3\right]_1^e$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3\ln e - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{11}{36}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(-\frac{11}{36}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{6}{36}e^3 - \frac{11}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right]$$

$$= -\left[-\frac{5}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right] = \left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)ua$$

en cm² :

$$\left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)\times 4 = \frac{5e^3 - 11}{9}cm^2 \approx 9{,}94 \text{ cm}^2$$

**EXERCICE11**

***Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire***

**Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(x + 3) - 1$**

**1. Déterminer la limite de g en + ∞ et la limite de g en - ∞.**

**2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. En déduire le tableau de variation de g.**

**3. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle ]-4 ; 0[.**

**4. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.**

***Partie B: Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative***

**Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x + 2)e^x$**

**On note $(C_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ ( Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées )**

**1. a. Déterminer la limite de f en -∞.**

**b. Montrer que la droite d'équation y = -x est asymptote à courbe $(C_f)$ en -∞.**

**c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et $C_f$**

**2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire**

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

**déterminer la limite de *f* en + ∞.**

**3. Vérifier que pour tout réel, on a *f'(x) = g(x)***

**4. Dresser le tableau de variation de *f*.**

**5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_f)$ en son point A d'abscisse 0.**

**6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à $10^{-2}$ près, puis une valeur approchée de f(α) à $10^{-2}$ près.**

**7. Tracer, dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$? la courbe $(C_f)$, la tangente (T) et l'asymptote (D).**

***(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)***

**<u>Partie C.</u>**

**1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (x + 1)e^x$. Calculer H'(x) puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.**

**2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe $(C_f)$ , l'axe des abscisses , la droite d'équation y = -2 et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à $10^{-2}$ près.**

**correction 11**

**Partie A :**

**1.**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+3) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(x+3) = +\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = -1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g(x) = e^{x}(x+3) - 1 = xe^{x} + 3e^{x} - 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-1) = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

Remarque : la courbe représentative de g

admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote

**2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a**

$$g'(x) = e^{x}(x+3) + e^{x}$$

$$= e^{x}(x+3+1)$$

$$= e^{x}(x+4)$$

**$e^{x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x)$ est du signe de $x + 4$**

**On en déduit les variations de g**

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-e^{-4} - 1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

***$g(-4) = e^{-4}(-4+3) - 1 = -e^{-4} - 1$***

**3.**

***$g(0) = e^{0}(0+3) - 1 = 3 - 1 = 2$***

- **La fonction $g$ est dérivable sur $[-4 ; 0]$**
- **$g'(x) > 0$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-4 ; 0[$**
- **$0 \in [g(-4) ; g(0)] = [-e^{-4} - 1 ; 2]$**

**donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[-4 ; 0]$ (théorème de la bijection)**

**4.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-e^{-4}-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**pour x ∈ ]- ∞; α] , g(x) ≤0**
**pour x ∈ [α ; +∞ [, g(x) ≥0**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**<u>Partie B.</u>**

**1.a**

$$f(x) = -x + (x+2)e^x = -x + xe^x + 2e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

**1.b**

$$f(x) - (-x) = -x + xe^x + 2e^x + x$$

$$= xe^x + 2e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (-x)\right] = 0$$

**donc la droite d'équation y = -x est <u>asymptote</u> à courbe ($C_f$) en -∞.**

**1.c.**

***f(x) - (-x) = (x + 2)$e^x$*** **est du signe de *(x + 2)***

- **si x ≤-2 , la courbe $C_f$ est au dessous de la droite d'équation D : y = - x .**
- **si x ≥-2 , la courbe $C_f$ est au dessus de la droite d'équation D : y = - x .**

**( <u>voir position relative de 2 courbes</u> )**

**2. L'expression**

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

**est obtenue en mettant $e^x$ en facteur dans *f(x)*.**

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right] = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{-x}{e^x} + (x+2)\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

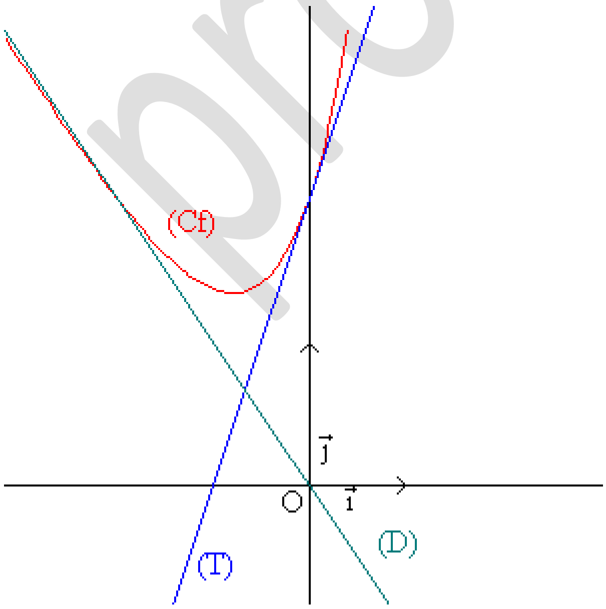
**3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :**

$$f'(x) = -1 + e^x + (x+2)e^x$$
$$= -1 + (x+2+1)e^x$$
$$= -1 + (x+3)e^x$$
$$= (x+3)e^x - 1 = g(x)$$

**4. On a déterminer le signe de g(x) à la question 4 de la partie A, on peut donc en déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.**
**- sur ]- ∞; α] f'(x) < 0 et f est décroissante**
**- sur [α ; +∞ [ f'(x) > 0 et f est croissante**
**f atteint son minimum en α.**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | |

**5. f '(0) = g(0) = 2 d'après la question 3 de la partie A**
**$f(0) = -0 + (0+2)e^0 = 2$**
**l'équation de la tangente au point A d'abscisse 0 :**
**$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$**
**$y - 2 = 2x$**
**$y = 2x + 2$.**
**6. On peut utiliser la méthode de dichotomie que l'on peut programmer sur calculatrice graphique. On trouve ainsi $f(-0{,}80) < 0$ et $f(-0{,}79) > 0$ donc une valeur approchée de α à $10^{-2}$ près est $\alpha \approx -0{,}79$.**
**Valeur approchée de $f(\alpha) \approx 1{,}34$ ( pour trouver cette valeur sur la calculatrice on est obliger de laisser les deux fonctions f et g dans le même tableau).**
**7.**



**Partie C.**

**1. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et**
**$H'(x) = e^x + (x + 1)e^x = e^x (x + 1 + 1) = e^x(x + 2)$**
**donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x(x + 2)$ admet H comme primitive sur $\mathbb{R}$.**
**f est dérivable sur $\mathbb{R}$, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ :**
**$f(x) = -x + e^x(x + 2)$**
**$F(x) = -x^2/2 + (x + 1)e^x$**

**2. L'unité d'aire en cm² est de 6 cm².**
**Sur l'intervalle [-2 ; 0 ] , $C_f$ est au dessus de l'axe des abscisses ( minimum > 0 ) donc l'aire est égale en unité d'aire à :**

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + (x+1)e^x\right]_{-2}^{0}$$

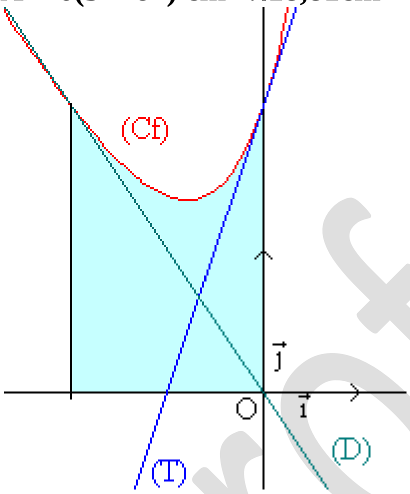
$$= \left(-\frac{0^2}{2} + (0+1)e^0\right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} + (-2+1)e^{-2}\right)$$

$$= 1 - \left(-2 - 1e^{-2}\right)$$

$$= 1 + 2 + e^{-2}$$

$$= 3 + e^{-2}$$

**$A = 6(3 + e^{-2})$ cm² $\approx 18,81$cm²**




***Exercice 12***

**Partie A**

**Soit g la fonction définie sur l'intervalle**
**I = ] 0 ; + ∞[ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.**
**1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.**
**( On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de I )**
**2) En déduire que pour tout réel strictement positif :**
**$g(x) > 0$**

**Partie B**

**Soit la fonction f définie sur l'intervalle I par :**

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$$

**On note ( C ) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ , d'unité graphique 2cm.**

**1) a) Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe ( C )**

**b) En remarquant que f(x) peut s'écrire :**

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

**étudier la limite de f en + ∞ .**

**2) a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I,**

$$f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$$

**b) Déduire de la partie A, le signe de f '(x), puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I**

**c) Dresser le tableau de variation de f.**

**3) Soit (D) la droite d'équation**

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

**a)Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe ( C ).**

**b) Déterminer par le calculs les coordonnées du point d'intersection de la courbe ( C) et de la droite ( D )**

**c) Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe (C ) par rapport à la droite ( D )**

**4) Construire avec soin, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C)**

**Partie C**

**On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :**

$$h(x)=\frac{\ln x}{x}$$

**1) En remarquant que h(x) est de la forme u'(x) u(x) , déterminer une primitive de la fonction h.**

**2. On considère la partie du plan limitée par la courbe ( C ) , la droite ( D ) et les droites d'équation : x = 1/e et x = e² Hachurer cette partie de plan, puis calculer son aire en cm² .**

**<u>Correction12</u>**

**Partie A**

**1) g est dérivable sur ] 0 ; + ∞[ et pour tout réel *x* appartenant à ] 0 ; + ∞ [ on a :**

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

**sur l'intervalle ]0 ; + ∞[ , 2(x + 1) et x sont strictement positif donc g'(x) est du signe de (x -1) on en déduit les variations de g :**

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | |

**2) g(1) = 1 - 2ln 1 = 1 > 0**
**g admet un minimum absolu en x = 1 qui est g(1) = 1**
**donc pour tout réel x appartenant à ] 0 ; + ∞[**
**g(x) > 0.**
**Partie B**
**1) a)**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$donc \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

**interprétation graphique la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation *x = 0.***
***b)***

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

***2) a) f* est dérivable sur I et pour tout réel x appartenant à I on a :**

$$f'(x) = \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x} =$$

$$\frac{x^2}{2x^2}-\frac{2x\ln x}{2x^2} = \frac{x^2-2x\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

**b) g(x) et 2x² sont strictement positif sur I par conséquent**
**f '(x) est strictement positif on en conclu que f est croissante sur I.**
**c)**

| x | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | |
| f(x) | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3) a)**

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right) = \frac{1+\ln x}{x}$$

or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = 0$

**( limite calculée partie A question 1) a) )**
**donc la droite (D) est asymptote à la courbe (C)**
**b) soit x l'abscisse du point recherché on :**

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -1 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

**1/e est l'abscisse du point recherché , il suffit de reporter cette valeur dans l'équation de (D) pour avoir l'ordonnée de ce point :**

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{e} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2e} - \frac{3}{2} = \frac{1-3e}{2e}$$

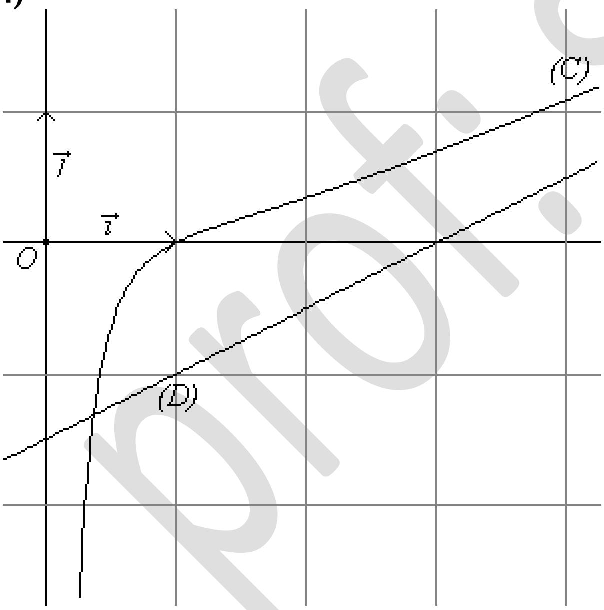
**C'est donc le point de coordonnées :**

$$\left(\frac{1}{e}; \frac{1-3e}{2e}\right)$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$1+\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

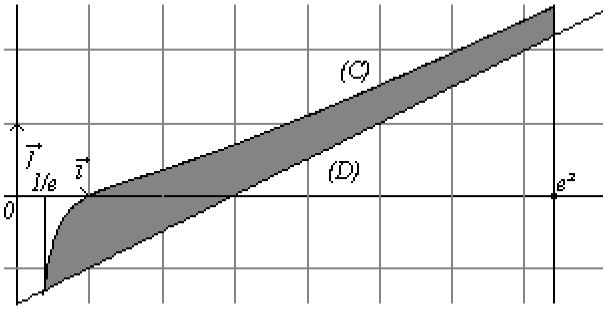
**sur l'intervalle ]0 ; $e^{-1}$[ , 1+ lnx < 0 donc la courbe (C) est strictement en dessous de la droite (D)**
**sur l'intervalle ]$e^{-1}$ ; + ∞[ la courbe (C) est strictement au dessus de la droite (D)**
**4)**




***<u>Partie C :</u>***

**1) h est dérivable sur I , soit H une primitive de h sur I**
**posons u(x) = ln x on a u'(x) = 1/x et par conséquent h est de la forme u'u**
**on en déduit : H = u²/2**

$$H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$




$$\int_{1/e}^{e^2} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_{1/e}^{e} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\, dx =$$

$$\left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1/e}^{e^2} = \ln e^2 + \frac{(\ln e^2)^2}{2} - \ln\frac{1}{e} - \frac{(\ln \frac{1}{e})^2}{2}$$

$$= 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

**L'unité d'aire est de 4 cm²**
**L'aire de la partie hachurée est donc 4 x 9/2 = 18 cm²**

**On considère la fonction f définie sur ]0 ; + ∞[ par :**

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

**et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal** $(O, \vec{i}, \vec{j})$
**( unité graphique : 5 cm )**
**Partie A : Etude de la fonction f.**
**1. Etudier les limites de f en 0 et en + ∞**
**(pour cette dernière on pourra remarquer que :**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x})$$

**2. a. Montrer que :**

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

**pour tout x appartenant à ]0 ; + ∞[**
**b. En déduire le sens de variation de f .**
**c. Dresser le tableau de variation de f.**

**Partie B : Etude de quelques points particuliers de C**
**1. Déterminer l'abscisse $x_1$ du point d'intersection $M_1$ de C avec l'axe des abscisses.**
**2. Soit $x_2 = 1/\sqrt{e}$ . On note $M_2$ le point de C d'abscisse $x_2$.**
**a. Déterminer une équation de la tangente $\Delta_2$ au point $M_2$.**
**b. vérifier que $\Delta_2$ passe par O.**
**3. Indiquer l'abscisse $x_3$ du point $M_3$ de C tel que la tangente $\Delta_3$ à C en $M_3$ soit parallèle à l'axe des abscisses.**
**4. Soit f'' la fonction dérivée de f' : calculer f''(x) pour**
**x appartenant à ]0 ; + ∞[ .**
**Déterminer le réel $x_4$ qui annule f''(x) .**
**On appelle $M_4$ le point de C d'abscisse $x_4$.**

**5. Vérifier que $x_1$, $x_2$, $x_3$ , $x_4$ sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.**

**6. Placer les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ , $M_4$ dans le repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$
**Construire les tangentes $\Delta_2$ et $\Delta_3$ puis la courbe C.**
**Partie C : Calcul d'une aire**
**1. On note g la fonction définie sur ]0 ; + ∞[ par :**

$$g(x) = (\ln x)^2$$

**Calculer la dérivée de g. En déduire une primitive de f sur ]0 ; + ∞[ ,après avoir remarqué que :**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

**2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1/e et x = 2. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².**
**Correction :**
**A 1.**

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

**on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

**On peut en déduire que la droite d'équation y = 0 est asymptote en + ∞**
**2. a.**
**f est dérivable sur ]0 ; + ∞[ et pour tout réel x de ]0 ; + ∞[ on a :**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

**2.b.**
**f '(x) est du signe de - ln x car x² > 0 sur ]0 ; + ∞[**
**- lnx > 0 si et seulement si lnx < 0 si et seulement si 0 < x < 1**
**on en déduit que sur l'intervalle ]0 ; 1] , f'(x) ≥0 donc f croissante**
**sur l'intervalle [1 ; + ∞[ , f'(x) ≤0 donc f décroissante .**
**2. c .**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$$

***Partie B*** **:**

**1. Le point $M_1$ a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad M_1\left(\frac{1}{e}; 0\right)$$

**2. a.**

**coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $x_2$ :**

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{\ln \sqrt{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}\ln e}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \times \frac{e}{1} = \frac{e}{2}$$

**ordonnée du point au point d'abscisse $x_2$ :**

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1 + \ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{e}}{1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

**équation de la tangente $\Delta_2$ au point $M_2$ :**

$$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{e}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x$$

**b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.**

**3. la tangente au point $M_3$ d'abscisse $x_3$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3) = 0$ on en déduit $x_3 = 1$ et $M_3$ ( 1 ; 1 )**

**4.**

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x-1}{x^3}=0\Leftrightarrow 2\ln x-1=0\Leftrightarrow 2\ln x=1\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{2}\ln e\Leftrightarrow\ln x=\ln\sqrt{e}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$$

$$x_4=\sqrt{e}$$

**5.**

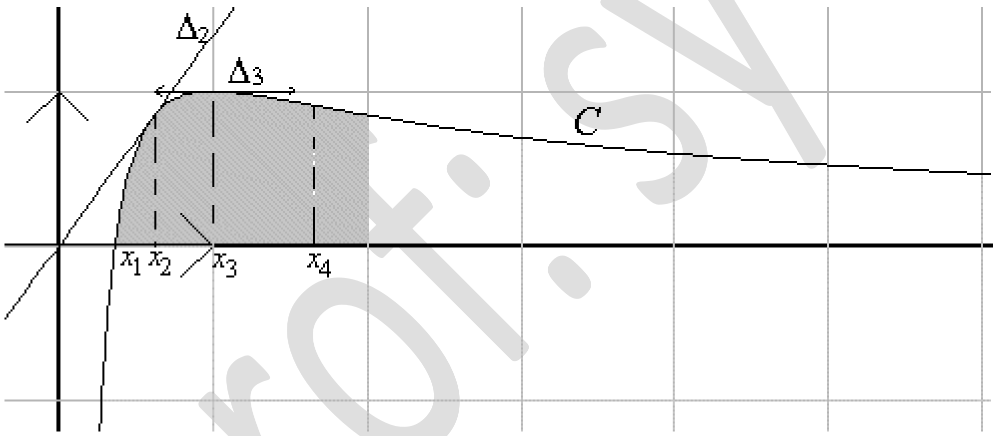
$$x_1=\frac{1}{e},\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{e}},\quad x_3=1,\quad x_4=\sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\times e=\sqrt{e}\qquad\frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}}=\sqrt{e}\qquad\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$$

**donc $x_1$, $x_2$, $x_3$ , $x_4$ sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison** $\sqrt{e}$

**6.**




***Partie C :***

**1. g est dérivable sur ]0 ; + ∞[ et pour tout réel x de ]0 ; + ∞[ on a :**

$$g(x)=(\ln x)^2$$

$$g'(x)=2\times\frac{1}{x}(\ln x)^1=2\,\frac{\ln x}{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

$$F(x)=\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

**2.**

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{2} =$$

$$\left[\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(\ln\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2\right)\right] =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2} \simeq 1,43\, u.a \simeq 35,8\, cm^2$$

***Exercice14***

**Partie A :** ***Résolution d'une équation différentielle***

**On considère l'équation différentielle (E):** $y' + y = -x - l$ **;**

**où** $y$ **désigne une fonction de la variable** $x$**, définie et dérivable sur l'ensemble des réels** $\mathbb{R}$**.**

**1. a) Résoudre l'équation différentielle** $y' + y = 0$**.**

**b) Déterminer la solution h de cette équation différentielle** $y' + y = 0$ **prenant la valeur** $1/e$ **en** $x = 1$**.**

**2. Déterminer le nombre réel** $a$ **tel que la fonction** $u$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $u(x) = e^{-x} + ax$ **soit solution de l'équation différentielle (E).**

**Partie B :** ***Étude d'une fonction auxiliaire f***

**La fonction** $f$ **est définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $f(x) = e^{-x} - x$**.**

**1. Déterminer les limites de la fonction** $f$ **en** $+\infty$ **et** $-\infty$**.**

**2.** $f'$ **désigne la fonction dérivée de la fonction** $f$

**Calculer, pour tout réel** $x$**,** $f'(x)$ **puis en déduire le tableau de variations de la fonction** $f$**.**

**3. a) Montrer que l'équation** $f(x) = 0$ **admet une solution unique** $\alpha$ **dans l'intervalle [0 ; l].**

**b) Donner un encadrement de** $\alpha$ **d'amplitude 0,01.**

**4. Préciser le signe de** $f(x)$ **sur l'intervalle [0 ; l].**

**Partie C :** ***Calcul de Faire d'une partie du plan***

**La représentation graphique** $C_f$ **de la fonction** $f$**, dans le plan muni d'un repère** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.**

**1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie D limitée par la courbe** $C_f$**, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.**

**2. Calculer en fonction de** $\alpha$ **la mesure, en unités d'aire, de l' aire de la partie D du plan.**

**Partie D :** ***Étude d'une fonction g et représentation graphique***

**La fonction g est définie sur** $]-\infty ; \alpha[$ **par :**

$$g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x}$$

**(où** $\alpha$ **désigne le nombre réel trouvé à la partie B) et on note** $C_g$ **sa courbe représentative dans un repère du plan.**

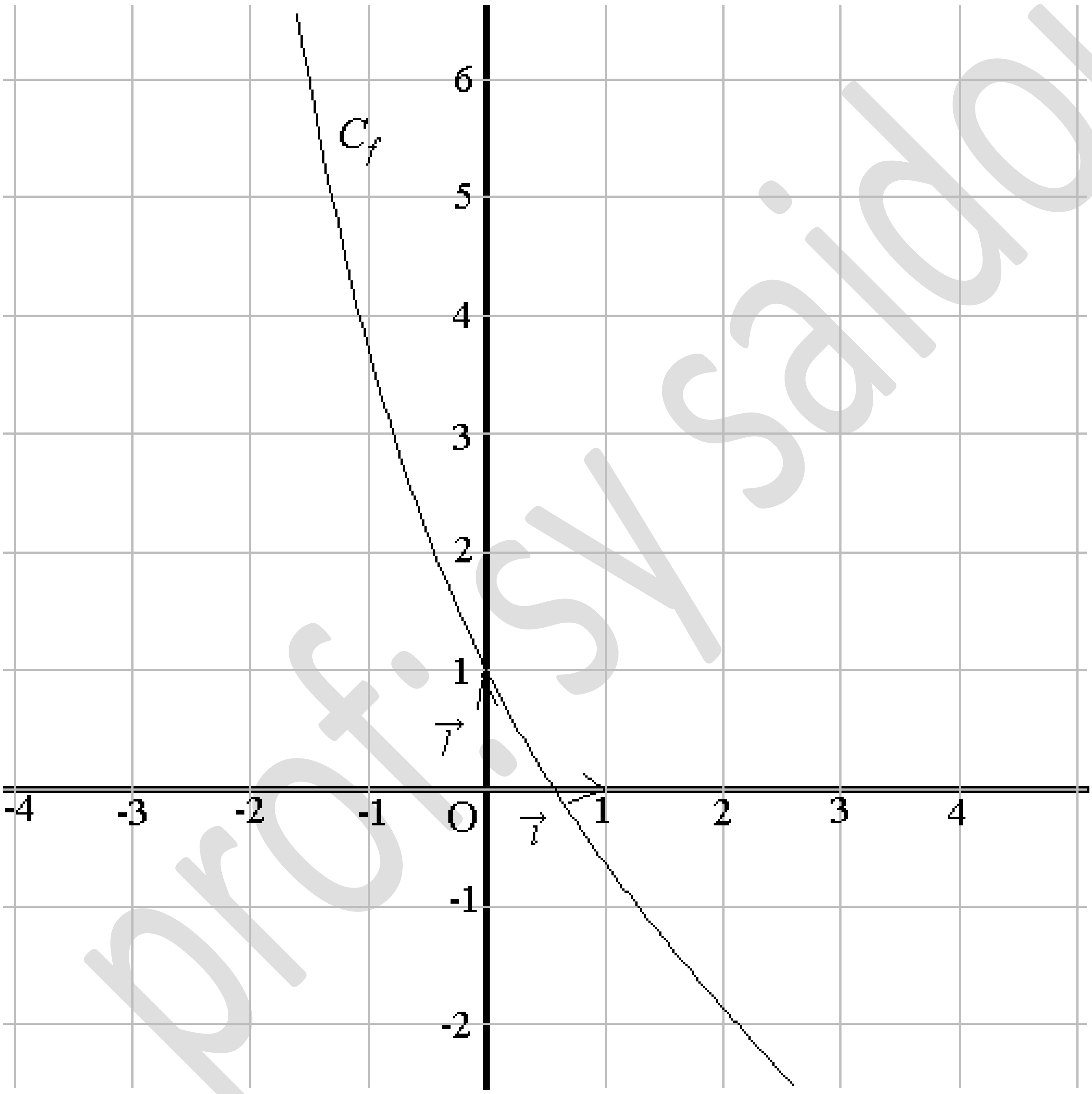
**1. a) Vérifier que, pour tout** $x \in\, ]-\infty ; \alpha[$

$$g(x) = \frac{xe^{x}}{1 - xe^{x}}$$

**b) En déduire la limite de la fonction g en - ∞ et interpréter graphiquement cette limite.**
**2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en $\alpha$. Interpréter graphiquement cette limite.**
**3. a) La fonction $g'$ désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ \alpha[$ :**

$$g'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}-x)^2}$$

**b) En déduire les variations de la fonction g sur ]- ∞ ; $\alpha$[ et dresser le tableau des variations de la fonction g.**
**4. Tracer la courbe représentative $C_g$ de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie**



**<u>Correction</u> 12**

**Partie A : Résolution d'une équation différentielle**

**1. a) Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\,e^{-x}$ où $k$ est une constante réelle quelconque.**

**b) $h$ est une solution de l'équation $y' + y = 0$ donc $h$ est de la forme : $h(x) = k\,e^{-x}$**
**$h(1) = 1/e$ d'où $k\,e^{-1} = 1/e = e^{-1}$ par conséquent $k = 1$.**
**La fonction $h$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$**

**2. $u(x) = e^{-x} + ax$ donc pour tout réel $x$ on a : $u'(x) = -e^{-x} + a$**
**de $u' + u = -x - 1$ on en déduit que pour tout réel $x$ on a : $-e^{-x} + a + e^{-x} + ax = -x - 1$**
**soit encore : $ax + a = -x - 1$ par identification : $a = -1$.**
**La fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x} - x$ est solution de l'équation différentielle (E).**

**Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire $f$**

**1.**

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty\end{array}\right\}\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\end{array}\right\}\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

**2. Pour tout réel $x$ on a : $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatif sur $\mathbb{R}$**
**$f$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ :**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

**3. a) $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1 < 0$ donc on a $f(0) > 0 > f(1)$ de plus la fonction est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; l] par conséquent : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur [0 ; 1]**

**b) $f(0{,}56) > 0 > f(0{,}57)$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$ est un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.**

**4. f est strictement décroissante sur [0 ; l] et $f(\alpha) = 0$ par conséquent on en déduit le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0 ; l] :**
**si $x$ appartient à $[0\,;\,\alpha[$ alors $f(x) > 0$**
**si $x$ appartient à $]\alpha\,;\,1]$ alors $f(x) < 0$**

**Partie C : Calcul de Faire d'une partie du plan**

**1. Voir figure :**

**2. L'aire D est délimité par les droites d'équation $x = 0$ ; $x = \alpha$, la courbe $C_f$ et l'axe des abscisses.**
**Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$ ; $f(x) \geq 0$ donc l'aire de la partie D en unités d'aire est donnée par :**

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha} = -e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - (-1) = \boxed{1 - e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2}}\,u.a.$$

( on peut aller plus loin sachant que $f(\alpha) = 0$ c'est à dire $e^{-\alpha} = \alpha$)

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \boxed{1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}}\,u.a.$$

**Partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique**

**1. a) Pour tout $x \in \,]-\infty\,;\,\alpha[$ :**

$$g(x)=\frac{x}{e^{-x}-x}=\frac{xe^{x}}{\left(e^{-x}-x\right)e^{x}}=\frac{xe^{x}}{e^{-x}e^{x}-xe^{x}}=\frac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$$

**b)**

$$g(x)=\frac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-xe^{x}\right)=1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$$

**donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizonte à la courbe $C_g$ en $-\infty$.**

**2.**

$$g(x)=\frac{x}{e^{-x}-x}=\frac{x}{f(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} x=\alpha>0\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\\ f(x)\geq 0 \text{ si } x\in[0;\alpha]\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x)=0^{+}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} g(x)=+\infty$$

**Interprétation graphique : la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à la courbe $C_g$**

**3. a) Pour tout $x \in \,]-\infty\,;\,\alpha[$ :**

$$g(x)=\frac{x}{e^{-x}-x}\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^{2}}$$

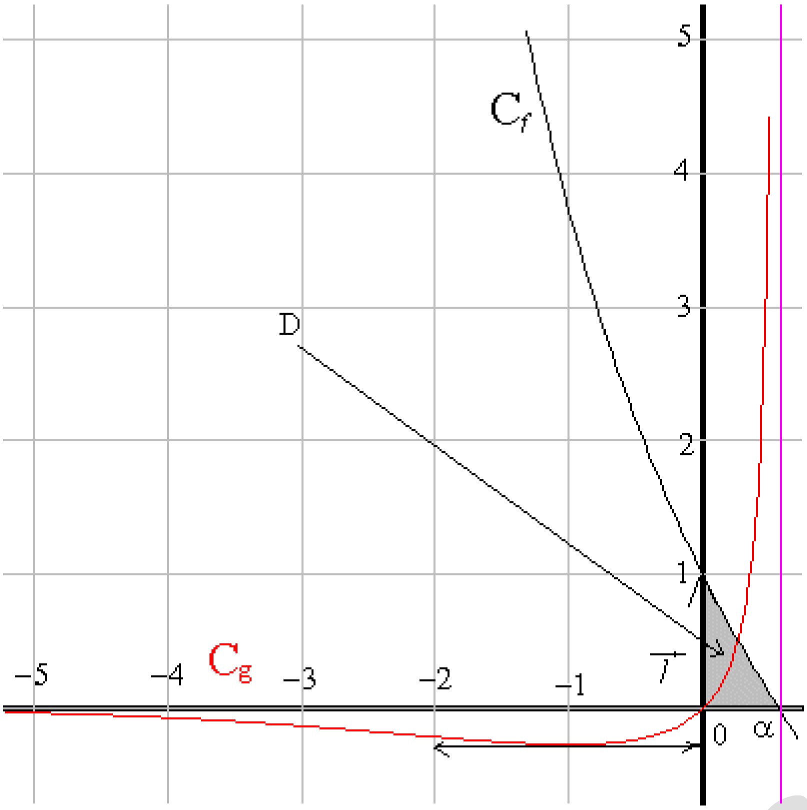
$$g'(x)=\frac{1(e^{-x}-x)-x(-e^{-x}-1)}{(e^{-x}-x)^{2}}=\frac{e^{-x}-x+xe^{-x}+x}{(e^{-x}-x)^{2}}=\frac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}-x)^{2}}=\frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}-x)^{2}}$$

**b) g'($x$) est du signe de $1 + x$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ car $(e^{-x} - x)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ :**
**$1 + x > 0$ si $x > -1$.**
**On en déduit que sur $]-\infty\,;-1]$ , $f'(x) \leq 0$ donc $f$ décroissante .**
**et sur $[-1\,;\,\alpha[$ , $f'(x) \geq 0$ donc $f$ croissante .**

$$g(-1)=\frac{-1}{e+1}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{-1}{e+1}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4.**




***Exercice15***

**Soit la fonction f numérique définie pour tout nombre réel par**
**$f(x) = 2 + (2 - x)e^{2x}$.**

**On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$**
**( unité graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées )**

**1. Déterminer la limite de *f* en + ∞.**
**2. a. Déterminer la limite de *f* en - ∞( on pourra poser X = 2*x* )**
**2. b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\Delta$ dont on donnera une équation.**
**2. c. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\Delta$.**
**3.a. Montrer que $f'(x) = (3 - 2x)e^{2x}$, où *f '* désigne la fonction dérivée de *f*.**
**4. a. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.**
**4. b. Tracer $\Delta$, T puis $\mathcal{C}$.**
**5. Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel *x* par :**

$$G(x) = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x}$$

**Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel *x* par**
**$g(x) = (2 - x)e^{2x}$ .**
**6.a Hachurer la partie A du plan limitée par $\mathcal{C}$, la droite d'équation y = 2 et l'axe des ordonnées.**
**6.b. Calculer l'aire de A.**
**En donner la valeur exacte en unités d'aire.**
**Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm², à $10^{-2}$ près.**

***Correction 15*:**

**1.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{2x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

**2.a.**

**Première méthode :**

$$f(x)=2+(2-x)e^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{x}e^{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}2=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}2e^{2x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

**Seconde méthode :**

**en posant X = 2*x* :**

$$f(x)=2+(2-x)e^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{2x}=2+2e^{X}-\frac{X}{2}e^{X}$$

$$\lim_{x\to-\infty}X=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to-\infty}2=2\\ \lim\limits_{X\to-\infty}2e^{X}=0\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{X}{2}e^{X}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{X\to-\infty}\left(2+2e^{X}-\frac{X}{2}e^{X}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

**2.b. de la dernière limite calculée on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite $\Delta$ d'équation *y* = 2 en - ∞.**

**2.c.**

**$f(x)-2=2+(2-x)e^{2x}-2=(2-x)e^{2x}$ .**

**$f(x)-2$ est du signe de $(2-x)$ car $e^{2x}>0$.**

| $x$ | $-\infty$      $2$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)-2$ | $+$    $0$    $-$ |

**- sur l'intervalle ]- ∞; 2 ] la courbe est au dessus de la droite $\Delta$.**

**- sur l'intervalle [2 ; + ∞[ la courbe est au dessous de la droite $\Delta$.**

**3.a.**

**la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel *x* on a :**

**$f'(x)=(-1)e^{2x}+(2-x)(2e^{2x})=(-1)e^{2x}+(4-2x)e^{2x}=(3-2x)e^{2x}$ .**

**3.b.**

**$f'(x)$ est du signe de $(3-2x)$ car $e^{2x}>0$, on en déduit les variations de *f* sur $\mathbb{R}$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $3/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2+\frac{e^3}{2}$ | $\searrow$ | $2$ |

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)e^{2\times\frac{3}{2}} = 2 + \frac{1}{2}e^3 = 2 + \frac{e^3}{2}$$

**4.a.**

**Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :**

**$f'(0) = 3$**

**Ordonnée du point d'abscisse 0 :**

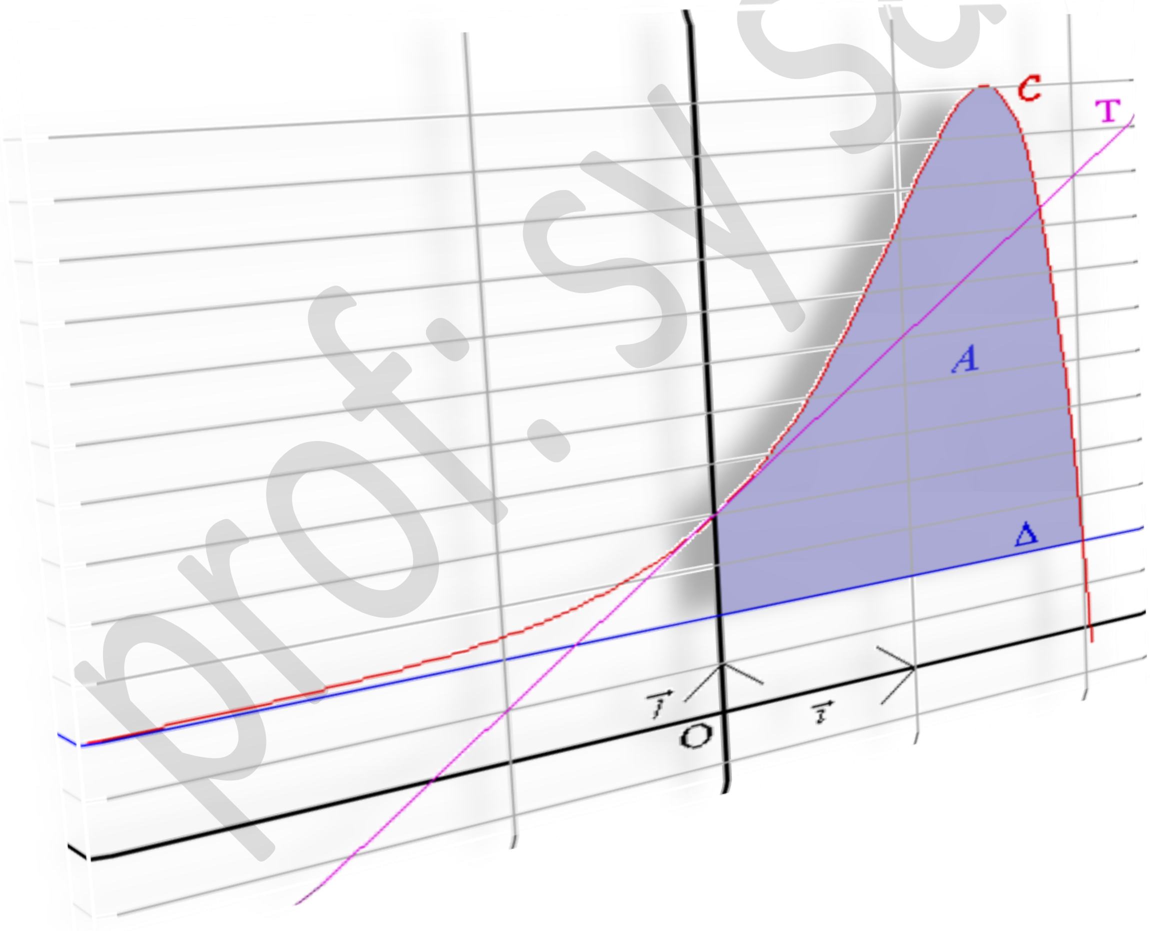
**$f(0) = 2 + 2 = 4$**

**Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :**

**$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$**

**$y = 3x + 4$**

**4. b.- 6.a**






**5.**

**La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ on a :**

$$G'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x(2e^{2x}) + \frac{5}{4}(2e^{2x}) = -\frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x}$$

$$= \frac{4}{2}e^{2x} - xe^{2x} = (2-x)e^{2x} = g(x)$$

**donc G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.**
**6.a voir 4.b**

**6.b.**
**L'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite $\Delta$ est le point de coordonnées (2 ; 2) voir question 2. a. ,**

**l'aire est donc délimitée par les droites d'équation $x = 0$ , $x = 2$, la courbe et la droite d'équation $y = 2$, sur l'intervalle [0 ; 2] la courbe représentative de $f$ est au dessus de la droite d'équation $y = 2$. (question 2. a ).**
**En unité d'aire :**

$$A = \int_0^2 (f(x) - 2)dx = \int_0^2 g(x)dx = [G(x)]_0^2 = \left[-\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x}\right]_0^2$$

$$A = \left[-\frac{1}{2}2e^4 + \frac{5}{4}e^4 - \left(-\frac{1}{2}0\times e^0 + \frac{5}{4}e^0\right)\right] = \left[-e^4 + \frac{5}{4}e^4 - \frac{5}{4}\right] = \frac{e^4 - 5}{4}$$

**l'unité**

**d'aire est de 4 cm² ( 4 $\times$1)**
**donc la valeur exacte de A en cm² est $e^4$ - 5 $\simeq$49,60 cm²**

**Exercice n°8 :**

**Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux Type de défauts, désignés par *a* et *b*. 2% des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10% le défaut *b*.**

**Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :**

- ***A* : « la montre tirée présente le défaut *a* » .**
- ***B* : « la montre tirée présente le défaut *b* » .**
- ***C* : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » .**
- ***D* : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».**

**On suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants.**

**1) Montrer que la probabilité de l'événement *C* est égale à 0,882.**

**2) Calculer la probabilité de l'événement *D*.**

**3) Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.**

**On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.**

**Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*.**

**On définit l'événement *E* « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».**

**Calculer la probabilité de l'événement *E*. On en donnera une valeur approchée à $10^{-3}$ près.**

***Solution8***

**1) A et B sont indépendants, donc P(A∩B) = P(A)× P(B) = 0,02×0,1 = 0,002.**

**On a P(C) = 1− P(A∪B) = 1−[P(A)+ P(B)− P(A∩B)]= 1−0,02−0,1+0,002 =0,882.**

**On a P(Avoir le défaut a seul) = 0,02−0002 = 0,018.De même P(Avoir le défaut b seul) = 0,1−0002 = 0,098.**

**Donc P(D) = 0,018+0,098 = 0,116.**

**3) On a une loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0,882**

$p(x=k)=C_5^K(0,882)^k\,(1\text{-}0,882)^{5-k}$

$P(E)=p(x=4)+p(x=5)=0,89110^{-3}$

**Exercice n°9 :**

**Chaque matin de classe, Ahmed peut être victime de deux évènements indépendants :**

- ***R* : « il n'entend pas son réveil sonner » ;**
- ***S* : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».**

**II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de *R* est égale 0,1 et que celle de *S* est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Ahmed est en retard au lycée sinon il est à l'heure.**

**1) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Ahmed entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.**

**2) Calculer la probabilité qu' Ahmed soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.**

**3) Au cours d'une semaine, Ahmed se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.**

**Quelle est la probabilité qu' Ahmed entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimal**

***Solution9***

*1) Il faut calculer $P(\overline{R} \cap S)$*

*Les évènements $\overline{R}$ et S étant manifestement indépendants, R et S le sont aussi.*

*Donc $P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times p(S) = (1-0,1)\times 0,05 = 0,9\times 0,05 = 0,045$.*

*2) Il faut qu'Ahmed entende son réveil et que son scooter marche. La probabilité qu'il soit à l'heure est donc égale à $P(\overline{R} \cap \overline{S})$ .( $\overline{R}$ et $\overline{S}$) sont deux événements indépendants)*

*$P(\overline{R} \cap \overline{S})) = P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) = (1-0,1)\times(1-0,05) = 0,9\times 0,95 = 0,855$.*

*3) Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Ahmed entend son réveil, X suit une loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0,9.*

*La probabilité qu'Ahmed entende le réveil au moins quatre fois est : $p(x=4)+p(x=5)=0,9185$*

.

**Exercice n°10:**

**Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.**

**1)On effectue trois tirages**

**successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.**

**a) Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?**

**b) Calculer $p(X = 0)$.**

**c) On se propose de déterminer maintenant $p(X = 1)$.Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée**

**soit obtenue au second tirage est égale à $8/45$**

**En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $p(X = 1)$.**

**2) On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.**

**On effectue maintenant $n$ tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. Soit $k$ un entier compris entre 1 et $n$.**

**Soit $N$ l'événement : « la $k$-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».**

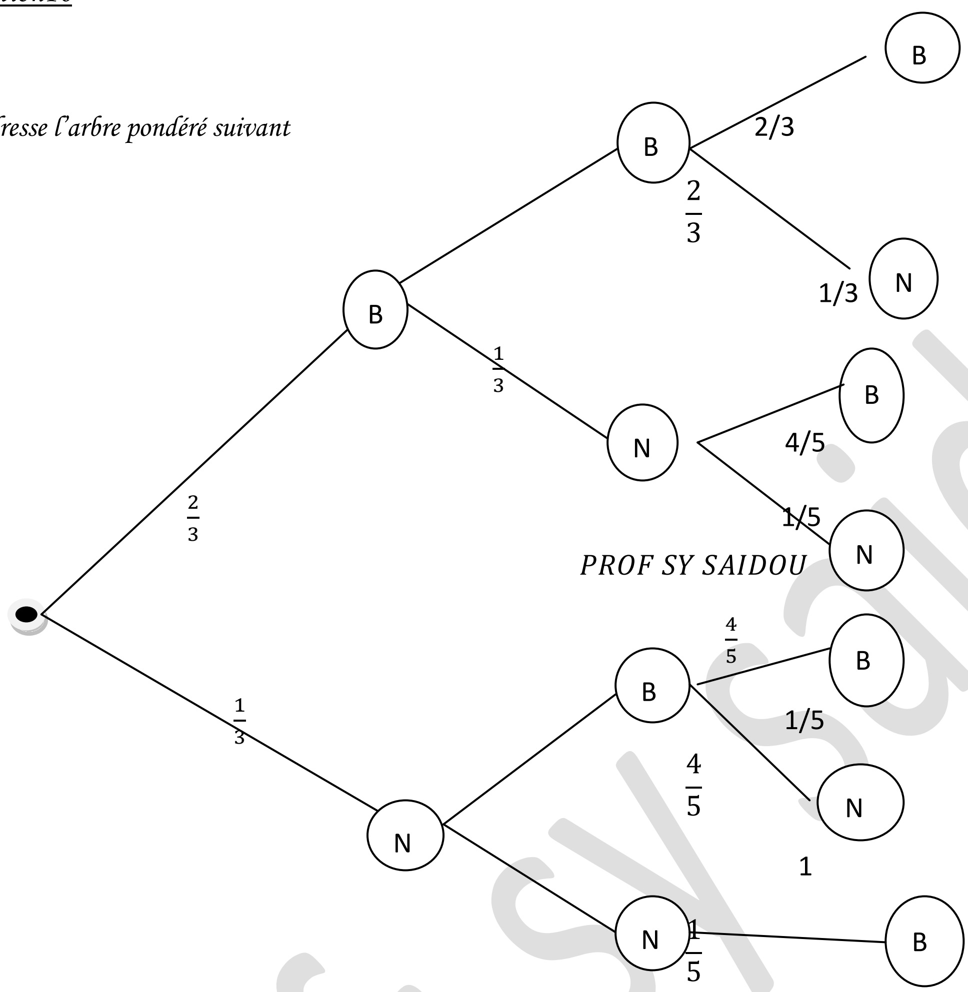
**Soit $A$ l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au $k$-ième ».**

**Soit $B$ l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».**

**Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$**

*Solution10*

*On dresse l'arbre pondéré suivant*






**LES valeurs prises par X sont ( de haut en bas ) 0, 1, 1, 2, 1, 2,2.**

**b)** $P\ (X = 0) = P\ (\frac{2}{3})^3$

**c) la probabilité demandée s'obtient en suivant la troisième branche. Elle est égale à**

$P\ (BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$**. On a de même** $P\ (NBB) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{75}$ **;** $P(BBN) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$P\ (X = 1) = P(BNB) + P(NBB) + P(BBN) = \frac{364}{675}$ **.**

**2 )**

- $P(A) = (\frac{2}{3})^{k-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{k-1}}{3^k}$
- $P_A(B)$. **on sait que donc que l'on a tiré une noire au k ieme tirage. il reste donc 4 blanches et une noire .on tire ( n-k) boules blanches avec une probabilité** $P_A(B) = (\frac{4}{5})^{n-k}$
- ***si seule la k ieme boule tirée est noire c'est que*** $N = A \cap B$

$$P(N) = P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \times (\frac{4}{5})^{n-k}$$

**<u>Exercice n°11 :</u>**

**Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel .**

**1) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?**

**2) a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle *X* la variable aléatoire égale au nombre**
**d'animaux malades parmi eux.**
**Montrer que *X* suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.**
**Calculer son espérance mathématique.**

**b) On désigne par *A* l'événement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».**
**On désigne par *B* l'événement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».**
**Calculer les probabilités de *A* et de *B*.**

**3) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8.Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note *T* l'événement**
**« avoir un test positif à cette maladie » et *M* l'événement « être atteint de cette maladie ».**

**a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.**

**b) Calculer la probabilité de l'événement *T* .**

**c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?**

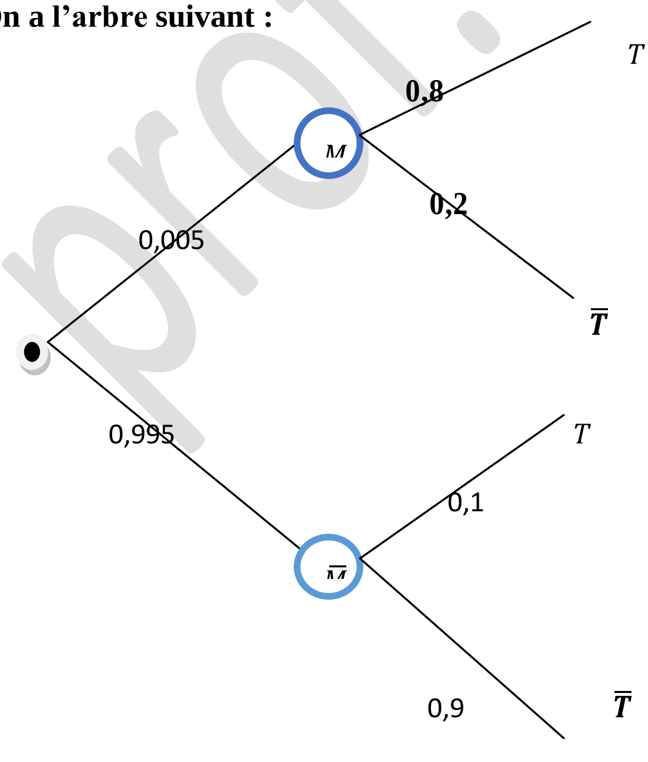
**<u>solution 11</u>**

**1) La probabilité est de 5/1000 = 0,005**

**2) a) On suppose le cheptel assez important, donc le tirage successif de 10 animaux *X* suit une loi binomiale de**
**paramètres : *n* = 10 et de probabilité *p* = 0,005.**
**E[X]=n p=0,05.**

**b)** $P(A) = C_{10}^{0}\ (0,005)^{0}\ (0,995)^{10}$ **= 0,951.** $P(B) = 1 - P(A) = 0,049$

**3) a) On a l'arbre suivant :**



b) on a $P(T) = P_M(T) + P_{\bar{M}}(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,0995 = 0,1035$.

C) $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{T} = \frac{0,005 \times 0,8}{0,1035} = 0,038$ .

***Exercice n°12*** **:**

**Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.**
**La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou encore loi exponentielle de paramètre >0.**

**1) Sachant que P(X>10) = 0,286 , montrer que = 0,125 au cenième près.**
**Dans la suite de l'exercice, on prendra = 0,125.**

**2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6mois.**

**3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.**

**4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?**

**solution12**

**1 )$X$ suit la loi exponentielle de parametre$\lambda$ ; $donc$**
$P(X > 10) = e^{-10\lambda}$ **0,286v**$\Leftrightarrow -10\lambda = ln0,86 \Leftrightarrow \lambda = -ln0,86/10$ **= 0,125**$10^{-3}$ **.**

**2) 6 mois = 0,5 année . on a donc** $P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,125\times 0,5}$**= 0,061.**
**3)l'appareil ayant déjà fonctionnée 8 ans , la probabilité qu'il ait une durée de voe supérieure à dix ans est Egale à**

$$P_{(X>8)}(X > 10) = \frac{P[(X>8)\cap(X>10)]}{P(X>8)} = \frac{P(X>10)}{P(X>8)} = \frac{1-e^{-0.125\times 10}}{1-e^{-0,125\times 8}} = 0,779$$

**4) On a ici un schéma de Bernoulli, avec comme succès le fait pour un oscilloscope d'avoir une durée de vie supérieure à 10 ans, dont la probabilité est égale à 0,286 et un nombre d'appareils égal à 15.**
**La probabilité de n'avoir aucun oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est donc : $(1-0,286)^{15}$ = 0,71415.**
**Donc inversement la probabilité d'avoir au moins un oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est égale à : $1-(0,714)^{15}$ = 0,994.**

**<u>Exercice n°13 :</u>**

**Tous les résultats seront arrondis à $10^{-2}$ prés.**
**Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à**
**0,1.**

**1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.**
**On note *X* la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit** stylos prélèves.

**a) On admet que *X* suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**
**b) Calculer la probabilité des événements suivants :**

**A « il n'y a aucun stylo avec un défaut »**
**B « il y a au moins un stylo avec un défaut »**
**C « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».**

**2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.**
**On prend au hasard un stylo dans la production. On note :**
**D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepte».**
**a) Construire un arbre traduisant les données de l'énonce.**
**b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepte au contrôle.**
**c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepte au contrôle est égale à 0,022 a $10^{-3}$ prés.**

**3) Apres le contrôle on prélève successivement et avec remise huit stylos parmi les stylos acceptes.**
**Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.**

***<u>Solution13</u>***

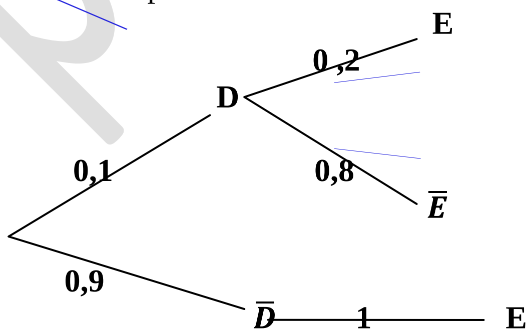
1) a) X suit à la loi binomiale de deux paramètres n=8 et p=0,1.

b) $P(A) = P(X=0) = C_8^0 (0,1) (0,9)^8 = 0,43 10^{-2}$

$P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,57 10^{-2}$

$P(C) = P(X=2) = C_8^2 (0,1) (0,9)^6 = 0,15 10^{-2}$

2) a) On a l'arbre de probabilité suivant :



**b)** $P(E)=P_D(E)\times P(D)+P(D)\times P_D(E)=0,1\times 0,2+0,8\times 1=0,92$ .

**c )** $P_E(D) = \quad p(E\cap D)/P(E) \quad = 0,02/0,92 = \quad 0,02210^{-3}$

***3)  On a à nouveau une épreuve binomiale de paramètre n = 8 et p = 1−0,022 = 0,978.***
***La probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est :***

$C_8^0\,(0,978)\,(0,022)^0=0,8369=0,8410^{-2}$

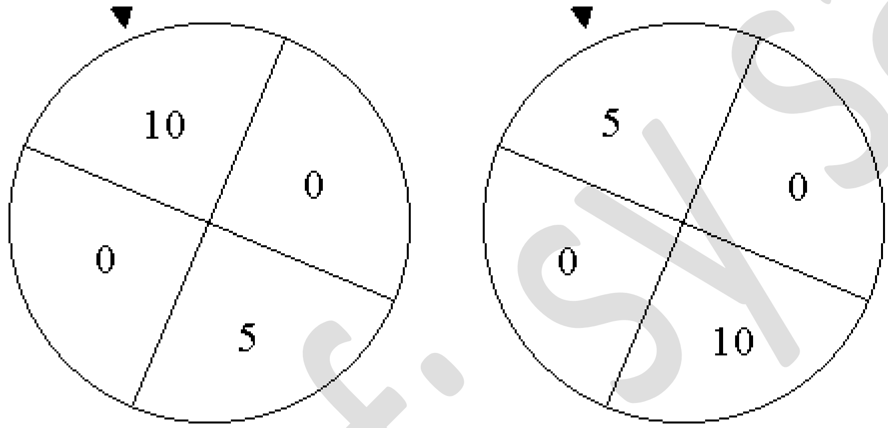
***EXERCICE 14***

**Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :**

**- Le joueur mise 10 ouguiyas.**

**- Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère. Chaque roue est divisée en Quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en ouguiyas : 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont La même probabilité de s'arrêter Devant le repère.**

**Le gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont Arrêtées les roues.**




roue n° 1 roue n° 2

**Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 UM.**

**1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 ouguiyas.**

**On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en ouguiyas.**

**a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :**

| roue n° 1 / roue n° 2 | 10 | 0 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | |
| 0 | | | | |
| 5 | | | | |
| 0 | | | | |

**b) Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.**

**c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.**

**d) Calculer la probabilité, notée p (G > 10), qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.**

**e) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.**

**2. Étude du bénéfice de l'association pour une mise d'ouguiyas.**

**On suppose dans cette question que la mise du joueur est ouguiyas.**

**On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire**
**la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.**
**a) Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.**
**b) Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5UM**

**Solution 14**

**1. a)**

| roue n° 1 \ roue n° 2 | 10 | 0 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 10 | 15 | 10 |
| 0 | 10 | 0 | 5 | 0 |
| 5 | 15 | 5 | 10 | 5 |
| 0 | 10 | 0 | 5 | 0 |

**b)** p(G $\geq$10) = P(G = 10) + P(G = 15) + P(G = 20) = 5/16 + 2/16 + 1/16 = 8/16 = 1/2 = 0,5 soit 50 %.
**c)** P(G = 0) = 4/16 = 1/4 ; P(G = 5) = 4/16 = 1/4 ; P(G = 10) = 5/16
P(G = 15) = 2/16 = 1/8 ; P(G = 20) = 1/16.
**d)** P(G > 10) = P(G = 15) + P(G = 20) = 2/16 + 1/16 = 3/16.
**e)**

$$E(G) = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 5 + \frac{5}{16}\times 10 + \frac{1}{8}\times 15 + \frac{1}{16}\times 20$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{25}{8} + \frac{15}{8} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} + \frac{40}{8} = 2,5 + 5 = 7,5$$

le gain moyen est donc de 7,5 UM. L'espérance de gain est donc plus petite que la mise.
**2.** B = m - G
**a)** E(B) = E (m - G) = m - E(G) = m - 7,5.
**b)** E(B) $\geq$5 équivaut à m - 7,5 $\geq$5 soit m $\geq$12,5 UM
Il faut donc que la mise soit d'au moins 12,5 UM pour que l'espérance de bénéfice soit de 5 UM.

***EXERCICE15***

**Dans un lycée de 1200 élèves, chaque élève étudie, comme première langue, l'allemand, l'anglais ou l'espagnol. Les élèves sont internes, externes ou demi-pensionnaires. La répartition de l'ensemble des élèves est la suivante :**
- **15 % étudient l'allemand en première langue et, parmi ceux-là, le tiers est demi-pensionnaire;**
- **75 % étudient l'anglais en première langue et, parmi eux, 16 % sont internes ;**
- **parmi les élèves étudiant l'espagnol en première langue, aucun n'est interne et 20 sont externes.**

**1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :**

| | Nombre d'externes | Nombre de demi-pensionnaires | Nombre d'internes | Total |
|---|---|---|---|---|
| ALLEMAND | | | | |
| ANGLAIS | 216 | | | |
| ESPAGNOL | | | | |
| Total | 300 | | | 1200 |

**2. Dans cette question et les suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.**
**On prend, au hasard, un élève parmi les 1 200 élèves du lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être Choisis.**
**On considère les événements suivants :**

**• A : " l'élève est demi-pensionnaire" ;**
**• B : " l'élève apprend l'anglais comme première langue vivante" ;**
**• C : " l'élève apprend l'espagnol ou l'allemand comme première langue vivante ".**
**a) Déterminer la probabilité de chacun des événements A, B et C.**
**b) Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement A $\cap$B. Calculer la probabilité de cet événement.**

**c) Déduire des questions précédentes, la probabilité de l'événement A $\cup$B.**
**3. On choisit au hasard un élève parmi les externes. Calculer alors la probabilité pour que cet élève apprenne L'espagnol Comme première langue vivante.**
**4. Sachant qu'un élève choisi apprend l'allemand comme première langue vivante, quelle est la probabilité Pour qu'il Soit externe ?**

**Solution15**
**1.**
**• 15 % étudient l'allemand en première langue soit 15 $\times$1200/100 = 180 élèves**
**et, parmi ceux-là, le tiers est demi-pensionnaire soit 180/3 = 60 élèves.**
**• 75 % étudient l'anglais en première langue soit 75 $\times$1200/100 = 900 élèves.**
**et, parmi eux, 16 % sont internes 16 $\times$900/100 = 144 élèves.**
**• parmi les élèves étudiant l'espagnol en première langue, aucun n'est interne et 20 sont externes.**

| | Nombre d'externes | Nombre de demi-pensionnaires | Nombre d'internes | Total |
|---|---|---|---|---|
| ALLEMAND | 64 | 60 | 56 | 180 |
| ANGLAIS | 216 | 540 | 144 | 900 |
| ESPAGNOL | 20 | 100 | 0 | 120 |
| Total | 300 | 700 | 200 | 1200 |

**2. Dans cette question et les suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.**
**On prend, au hasard, un élève parmi les 1 200 élèves du lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.**

**On considère les événements suivants :**
**• A : " l'élève est demi-pensionnaire" ;**
**• B : " l'élève apprend l'anglais comme première langue vivante" ;**
**• C : " l'élève apprend l'espagnol ou l'allemand comme première langue vivante ".**
**a) Déterminer la probabilité de chacun des événements A, B et C.**
**P(A) = card A/ card $\Omega$= 700/ 1200 = 7/12**
**P(B) = card B/ card $\Omega$= 900/ 1200 = 9/12 = 3/4**
**P(C) = card C/ card $\Omega$= (180 + 120)/1200 = 300/1200 = 3/12 = 1/4**
**b) A $\cap$B : " l'élève est demi-pensionnaire et apprend l'anglais comme première langue vivante "**
**P(A $\cap$B ) = card (A $\cap$B )/ card $\Omega$= 540/1200 = 9/20**
**c) P( A $\cup$B) = P(A) + P(B) - P(A $\cap$B ) = 7/12 + 3/4 - 9/20 = 35/60 + 45/61 - 27/60 = 53/60**
**3. Il y a 300 externes et parmi ceux ci 20 ont choisi l'espagnol comme première langue vivante donc la probabilité pour que cet élève apprenne l'espagnol comme première langue vivante sachant qu'il est externe est de 20/300 = 2/30 = 1/15**
**4. Il y a 180 élèves qui ont choisi l'allemand comme première langue et parmi ceux ci 64 sont externes donc la probabilité pour que l'élève soit externe sachant qu'il apprend l'allemand comme première langue vivante, est**
**64/180 = 16/45.**

***EXERCICE 16***

**Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de cinq questions : chacune comporte trois réponses, une réponse et une seule étant exacte.**

**Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, en cochant pour chaque question la case correspondant à la réponse proposée. Aucune justification n'est demandée.**

**La réponse exacte à une question rapporte 1 point ; une réponse fausse à une question (ou une réponse multiple) coûte 0,5point, l'absence de réponse ne rapporte rien. Si le total de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.**

**Une grande boulangerie propose 500 pains dont la répartition est donnée dans le tableau suivant.**

| | Nature | Sans sel | Complet | Total |
|---|---|---|---|---|
| Pain maison | 100 | 40 | 70 | 210 |
| Pain de campagne | 80 | 30 | 50 | 160 |
| Pain au levain | 60 | 40 | 30 | 130 |
| Total | 240 | 110 | 150 | 500 |

**1. Le pourcentage de pains maison parmi l'ensemble des pains à vendre est :**

**a) 20 % b) 42 % c) 35 %**

**2. Le pourcentage des pains au levain parmi les pains nature est :**

**a) 36 % b) 12 % c) 25 %**

**3. Le premier client achète au hasard l'un des pains de la boulangerie, la probabilité pour que ce soit un pain de Campagne ou un pain complet est :**

**a) 0,10 b) 0,52 c) 0,3**

**4. Un client achète au hasard un pain sans sel, la probabilité que ce soit un pain au levain est :**

**a) 13/50 b) 4/11 ; c) 11/50**

**5. Le prix d'un pain de campagne en 2000 était p0 OUGUIYAS. Le prix du même pain de campagne en 2006 est $p_6$ = 1,5 UM. Sachant que le prix de ce pain de campagne a augmenté de 4 % par an de 2000 à 2006, $p_0$ était :**

**a) 1,17 UM b) 1,09 UM c) 1,19 UM**

***Solution16***

| | Nature | Sans sel | Complet | Total |
|---|---|---|---|---|
| Pain maison | 100 | 40 | 70 | 210 |
| Pain de campagne | 80 | 30 | 50 | 160 |
| Pain au levain | 60 | 40 | 30 | 130 |
| Total | 240 | 110 | 150 | 500 |

**1. Le pourcentage de pains maison parmi l'ensemble des pains à vendre est :**

**210/500 = 0,42 soit réponse b) 42 %**

**2. Le pourcentage des pains au levain parmi les pains nature est :**

**60/240 = 0,25 soit réponse 25 %**

**3. A : " Le pain est de campagne " ; B : " le pain est complet "**

**card (A $\cap$B) = 50 ; card A = 160 ; card B = 150**

**card (A $\cup$B) = card A + card B - card (A $\cap$B) = 160 + 150 - 50 = 260**

**$P(A \cup B)$ = card $(A \cup B)$/card$(\Omega)$ = 260/500 = 0,52 donc réponse b) 0,52**
**4. Un client achète au hasard un pain sans sel, la probabilité que ce soit un pain au levain est :**
**40/110 = 4/11 soit réponse b) 4/11**
**5. Le prix d'un pain de campagne en 2000 était p0 euros. Le prix du même pain de campagne en 2006 est $p_6$ = 1,5 UM. Sachant que le prix de ce pain de campagne a augmenté de 4 % par an de 2000 à 2006, $p_0$ était : c) 1,19 UM**
**à une hausse de 4 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,04 ( voir coefficient multiplicateur )**
**$p_6 = (1,04)^6 p_0$ donc $p_0 = p_6/(1,04)^6 = 1,5/(1,04)^6$ = 1,19 UM soit réponse c) 1,19 UM**

***EXERCICE17***

**On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ».**
**Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.**

| Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois | 0 | 1 | 2 ou plus | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 262 | 212 | 73 | 547 |
| 1 | 250 | 73 | 23 | 346 |
| 2 ou plus | 60 | 33 | 14 | 107 |
| *Total* | 572 | 318 | 110 | 1000 |

**1. On choisit au hasard un individu de cette population.**
**a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.**
**b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.**
**2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).**
**On fait les hypothèses suivantes :**
**- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,46.**
**- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,66.**
**- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois , la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est encore 0,66.**
**On note $A_n$ l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,**
**$B_n$ l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », $C_n$ l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».**
**Les probabilités des événements $A_n$, $B_n$, $C_n$ sont notées respectivement $p_n$, $q_n$, $r_n$. a)**
**a) Pour le premier mois ( n = 1), les probabilités $p_1$, $q_1$et $r_1$ sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités $p_1$, $q_1$et $r_1$**
**b) Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$, $q_n$ et $r_n$ .On pourra s'aider d'un arbre.**
**c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = - 0,2\ p_n + 0,66$.**
**d) Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$.**
**Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.**
**e) Déterminer Lim $u_n$. En déduire Lim $p_n$**

**<u>solution17</u>**

**On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ».**

**Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.**

| Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois | 0 | 1 | 2 ou plus | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 262 | 212 | 73 | 547 |
| 1 | 250 | 73 | 23 | 346 |
| 2 ou plus | 60 | 33 | 14 | 107 |
| *Total* | 572 | 318 | 110 | 1000 |

**1.On choisit au hasard un individu de cette population.**

**a) A : " l'individu choisi a eu au moins un retard le premier mois "**

**$\overline{A}$: " l'individu choisi n'a eu aucun retard le premier mois "**

**P( $\overline{A}$) = card $\overline{A}$/ card $\Omega$= 572/1000 = 143/250 = 0,572**

**P(A) = 1- P( $\overline{A}$) = 107/250 = 0,428**

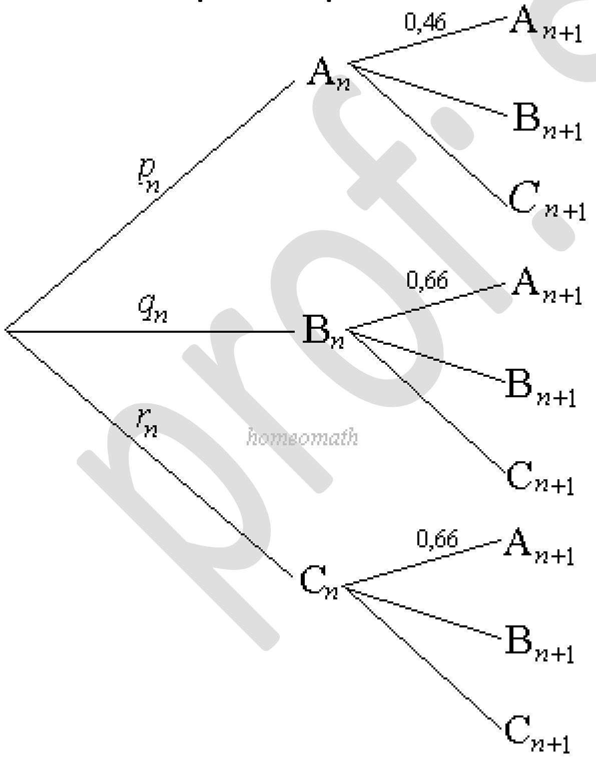
**b) B : " l'individu choisi a eu au moins un retard le deuxième mois "**

**card (B $\cap$ $\overline{A}$) = 250 + 60 = 310**

**on veut calculer**

**P(B\\$\overline{A}$) = P(B $\cap$ $\overline{A}$)/P( $\overline{A}$) = card (B $\cap$ $\overline{A}$)/card ( $\overline{A}$) = 310/572 = 155/286 $\simeq$0,542**

**2. Voila un arbre pondéré qui résume l'énoncé :**




**On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).**

**On fait les hypothèses suivantes :**
**- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,46.**
**- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,66.**
**- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois , la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est encore 0,66.**
**On note An l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,**
**Bn l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », Cn l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».**
**Les probabilités des événements An, Bn, Cn sont notées respectivement pn, qn, rn. a)**
**a) p1 = 0,572 ( voir question 1 ) ; q1 = 318/1000 = 0,318 ; r1 = 110/1000 = 0,110**
**b)**

$$p_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$$

$$\boxed{p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n}$$

**c) Pour tout entier naturel non nul on a :**

$$p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n = 0,46p_n + 0,66(q_n + r_n)$$

$$p_n + q_n + r_n = 1 \Rightarrow p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(q_n + r_n) = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66 - 0,66p_n = -0,2p_n + 0,66$$

**d) Pour tout entier naturel non nul on a :**

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 = -0,2p_n + 0,11 = -0,2(p_n - 0,55) = -0,2u_n$$

$$u_{n+1} = -0,2u_n$$

**donc (un) est une suite géométrique de raison -0,2.**
**e) On en déduit**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad (q = -0,2 \in \left]-1;1\right[)$$

$$p_n = u_n + 0,55$$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,55$$

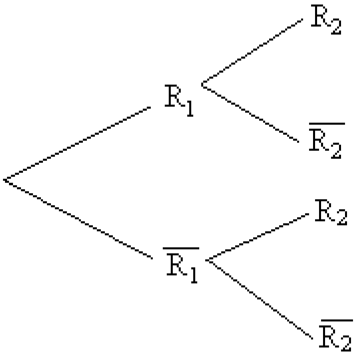
***<u>Exercice18</u>***

**Pour passer le temps Aissata et Soufi invente un jeu avec leur paquet de 32 cartes à jouer et un paquet de bonbons.**
**On rappelle que dans un jeu de 32 cartes on trouve quatre couleurs (pique, cœur, trèfle carreau) et dans chaque Couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as)**
**Margaux propose la règle suivante :**
**- On tire une carte et on regarde si c'est un roi. Sans remettre la carte dans le paquet, on tire une seconde carte et On regarde si c'est un roi.**
**- Si, sur les deux cartes, on a tiré exactement un roi, on gagne 10 bonbons ; si on a tiré deux rois, On gagne 20 bonbons ; sinon on a perdu !**
**On note :**
**$R_1$ : l'évènement " tirer un roi au premier tirage " et $\overline{R_1}$ son évènement contraire**
**$R_2$ : l'évènement " tirer un roi au deuxième tirage " et $\overline{R_2}$ son évènement contraire**
**1. Justifier les valeurs des probabilités suivantes :**

$$P(R_1) = \frac{1}{8} \quad P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31} \quad P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}$$

**2. On traduit le jeu par un arbre pondéré. Reproduire l'arbre ci-dessous en inscrivant les probabilités en écriture**

**Fractionnaire sur chaque branche.**




**Dans ce qui suit, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au milième**

**3. Calculer la probabilité des évènements :**

**A : " tirer un roi au premier et au deuxième tirage "**

**B : " tirer un roi à un seul des deux tirages "**

**4. On s'intéresse au nombre de bonbons X gagnés après deux tirages.**

**Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X .**

| Nombre de bonbons $x_i$ | 0 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | | 0,226 | |

5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au millième.

<u>**Solution 18**</u>

**1. Il y a 4 rois dans le jeu de 32 carte avant le premier tirage donc la probabilité de tirer un roi est de :**

$$P(R_1) = \frac{\operatorname{card} R_1}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

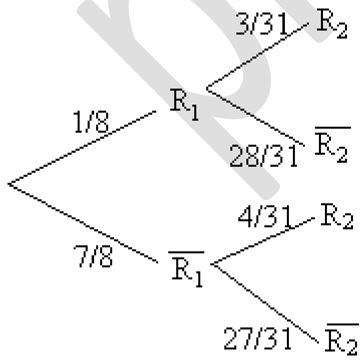
**Au deuxième tirage sachant qu'un roi a été tiré, il ne reste plus que 3 rois et le jeu ne compte plus que 31 cartes soit :**

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31}$$

**Au deuxième tirage sachant qu'aucun roi n'a été tiré au premier tirage il y toujours les 4 rois mais une carte**

**de moins dans le jeu donc la probabilité d'obtenir un roi est de :**

$$P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}$$




**2.**

**3.**

$$P(A) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 0{,}012$$

$$P(B) = P\left((R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)\right) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \frac{7}{62} + \frac{7}{62} = \frac{14}{62} = \frac{7}{31} \approx 0{,}226$$

**4.**

| Nombre de bonbons $x_i$ | 0 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,762 | 0,226 | 0,012 |

**5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au millième.**
**E $\simeq$ 2,5 bonbons.**

***<u>EXERCICE19</u>***

**l'urne d'AHMED contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.**
**10% des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.**
**MOUSSA tire un jeton au hasard.**
**S'il est rouge, il remporte le gain de base.**
**S'il est blanc, il remporte le carré du gain de base.**
**S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.**
**1. On suppose que le gain de base est 2 ouguiyas.**
**a. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.**
**b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.**
**2. On cherche à déterminer la valeur $g_0$ du gain de base, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'ouguiyas.**
**Soit *x* le gain de base en ouguiyas**
**a. Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction *f* définie sur [0 ; + $\infty$[par $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$.**
**b. On désigne par *f* ' la fonction dérivée de *f* sur l'intervalle [0 ; + $\infty$[ .**
**Déterminer $f'(x)$.**
**c. En déduire le sens de variation de *f* sur [0 ; + $\infty$[.**
**d. Conclure sur le problème posé.**

***<u>solution19</u>*:**
**déterminons le pourcentage de chaque jetons :**
**jetons bleus : 10%**
**jetons blancs : 30 %**
**jetons rouges : 60 %**
**1. a.**
**Soit X le gain obtenu,**
**X peut prendre les valeurs 2 ; $2^2$ ; $-2^3$ .**
**Loi de probabilité de X :**
**p( X = 2) = 60/100**

**p( X = 4) = 30/100**
**p( X = -8) = 10/100**
**1. b.**
**E(X) = 2 $\times$60/100 + 4 $\times$30/100 - 8 $\times$10/100 =**
**(120 + 120 - 80)/100 = 160/100 = 1,6.**
**2.a.**
**Loi de probabilité de X dans le cas d'un gain de *x* euros :**
**X peut prendre les valeurs $x$ ; $x^2$ ; $-x^3$ .**
**Loi de probabilité de X :**
**p( X = $x$) = 60/100**
**p( X = $x^2$) = 30/100**
**p( X = $-x^3$ ) = 10/100**
**E(X) = $x$ $\times$60/100 + $x^2$ $\times$30/100 - $x^3$ $\times$10/100 =**
**$-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$**
**On cherche à rendre maximal E(X) donc cela revient bien à étudier les éventuels extremums de la fonction *f***

**définie**

sur $[0 ; +\infty[$ par
$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$.
2. b.
$f'(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 0{,}6 = -0{,}3(x^2 - 2x - 2)$
2.c.

$$x^2 - 2x - 2$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0 \text{ donc 2 racines :}$$

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} \approx 2,73$$

| $x$ | $0$ | | $1-\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

**$g_0$ = 2,73 UM est le gain de base tel que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal.**

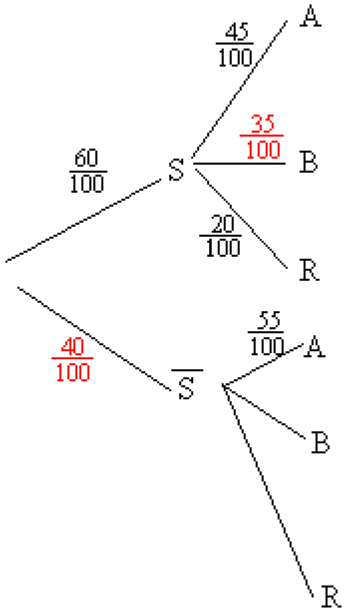
***EXERCICE 20***

**Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.**
**Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).**
**Le gestionnaire a constaté que :**
**- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien ;**
**- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de Studio et par 55% des locataires de deux-pièces ;**
**- 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.**
**On rencontre un résident au hasard.**
**Soit S l'évènement « Le résident a loué un studio »**
**A l'évènement « Le résident a souscrit la formule Simple »**
**B l'évènement « Le résident a souscrit la formule Confort »**
**R l'évènement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »**
**1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.**
**2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces?**
**b. Calculer $P_S(B)$.**
**3. a. Calculer $P(R \cap S)$ ; en déduire $P(R \cap \overline{S})$.**
**b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.**
**4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisissent la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.**
**5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 ouguiyas, celle d'un deux-pièces 480 ouguiyas.**
**La formule Simple coûte 20 ouguiyas et la formule Confort 40 ouguiyas.**
**Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs $L_i$ .**
**On désigne par $p_i$ , la probabilité que le coût de la semaine soit égal à $L_i$ .**
**a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.**

| $L_i$ | 350 | 370 | 390 | | 480 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 0,12 | | 0,21 | | | 0,12 |

**b. calculer l'espérance de L. en donnant une interprétation**
**.**

**<u>Solution 20</u> :**
**1. ( en rouge les déductions simples )**




**2a p($\overline{S}$) = 1 - p(S) = 1 - 60/100 = 40/100 = 0,4.**
**2. b. $P_S$(B) = 35/100**
**3. a.**
**P(R ∩ S) = $P_S$(R) × p(S) = (20/100) × (60/100) = 12/100 = 0,12**
**P(R ∩ $\overline{S}$) + P(R ∩ S) = p(R) donc :**
**P(R ∩ $\overline{S}$) = p(R) - P(R ∩ S) = 0,18 - 0,12 = 0,06**

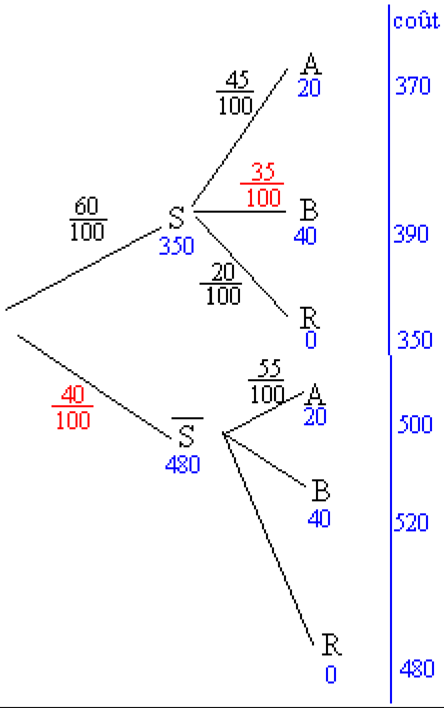
**3.b. il s'agit de calculer la probabilité de R sachant $\overline{S}$ :**

$$p_{\overline{S}}(R) = \frac{p(R \cap \overline{S})}{p(\overline{S})} = \frac{0,06}{0,4} = 0,15$$

**4.**

$$p(A) = p(A \cap S) + p(A \cap \overline{S})$$
$$= p_S(A)p(S) + p_{\overline{S}}(A)p(\overline{S})$$
$$= \frac{45}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{27}{100} + \frac{22}{100} = \frac{49}{100} = 0,49$$

**Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisissent la formule simple et le résultat le confirme.**




| $L_i$ | 350 | 370 | 390 | 480 | 500 | 520 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,12 | 0,27 | 0,21 | 0,06 | 0,22 | 0,12 |

**E( L ) = 350 $\times$0,12 + 370 $\times$0,27 + 390 $\times$0,21 + 480 $\times$0,06 + 500 $\times$0,22 + 520 $\times$0,12**
**E ( L) = 425 UM , c'est le coût moyen d'une location**.

# Les Sujets du bac national

## Bac 2014 session Normal

**Une cage contient six pigeons dont quatre femelles et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons,**

**on dispose de deux couples de plumage blanc et de deux femelles de plumage gris.**

**On tire au hasard et simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables) .**

**1) on considère les probabilités :**

$P_1$ **La probabilité de l événement *A* :** $\ll$ *les deux oiseaux tirés sont de plumage gris* $\gg$

$P_2$ ***La probabilité de l'événement B*** : $\ll$ *les deux oiseaux tirés sont de même couleur* $\gg$

$P_3$ ***La probabilité de l'événement C*** : $\ll$ *les deux oiseaux tirés sont du même sexe* $\gg$

**2) on suppose dans cette question, que le tirage a donné deux oiseaux de même couleur. On note** $P_4$

**La probabilité que ces deux soient de même sexe.**

**Parmi les réponses proposées pour chaque question ci- après, une seule réponse est exacte.**

| $N^{\circ}$ | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le nombre de tirages possibles est | $6^2$ | $A_6^2$ | $C_6^2$ |
| 2 | la probabilité $P_1$ est : | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |
| 3 | la probabilité $P_2$ est : | $\frac{1}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{8}{15}$ |
| 4 | la probabilité $P_3$ est : | $\frac{2}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{7}{15}$ |
| 5 | la probabilité $P_4$ est : | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{7}{15}$ |

**Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- contre en choisissant la bonne réponse.**

**Aucune justification n'est demandée :**

| QUESTION $n^{\circ}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Réponse | | | | | |

## ***Exercice2 :***

**On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$**

**1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes :**

$$z^2 - 2z + 17 = 0 \quad (E_1)$$

$$z^2 + 8z + 17 = 0 \quad (E_2)$$

**2) pour tout nombre complexe z tel que z≠ $-4 - i$ , $on\ pose$ :** $ff(z) = \frac{z-1+4i}{z+4+i}$

**on considère les points A , B , et C ; d'affixe respective $z_A = -4 - i$ , $z_B = 1 - 4i$ $et$ $z_C = 4 + i$ .**

**a) Placer dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A , B , C et déterminer la nature du triangle ABC .**

**b) Calculer le nombre $\propto = f(-1 + 4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.**

**c)Déterminer puis construire l'ensemble $\Gamma_1$ $des\ points\ M\ du\ plan\ d'affixe\ z\ tels\ que$ $|f(z)| = 1$**

**d) Déterminer puis construire l'ensemble**
**$\Gamma_2$ $des\ points\ M\ du\ plan\ d'affixe\ z\ tels\ que\ f(z)\ soit\ imaginaire\ pure$ .**

**3) on considère la suite de nombre complexe $(z_n)_{n\in N}$ definie par $z_0 = 4 + i$ et pour tout entier n ,**

**$z_{n+1} = \frac{\propto}{2} z_n$ . on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n$ .**

**a) calculer $z_1$ , $z_2$ .**

**b) Montrer que la suite de terme général $V_n = |z_n|$ et une suite géométrique.**

**c ) on pose $S_n = OM_0 + OM_1 + \ldots\ldots\ldots + OM_n$ . Donner l'expression de $S_n$ en fonction de n**

**Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ .**

## ***Exercice3***

**On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - 1 + 2e^x$ . soit (C) sa courbe représentative**

**dans un repère orthonormé ( O ; $\vec{i}$ ;$\vec{j}$ ) d'unité 1cm**

**1a) justifier que la $\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ .**

**b) calculer et donner une interprétation graphique de $\lim_{n\to-\infty}\left(f(x) - (2x - 1)\right)$ $et$ $\lim_{n\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ .**

**2a) Dresser le tableau de variation de f**

**b) $Montrer\ que\ f\ realise\ une\ bijection\ de\ R$ sur l'intervalle J que l'on donnera.**

**c) $Montrer\ que$ l'equation $f(x) = 0$ admet dans $R$ une unique solution $\propto$ puis vérifier**

**que $-0.3 < \propto < -0.2$ .**

**3) construire $C$ et$C'$ Représentant respectivement la fonction f réciproque $f^{-1}$dans repère ( O ; $\vec{\imath}$ ;$\vec{\jmath}$**

**4 a déterminer une équation de la tangente T à c au point d'abscisse $x_0 = \propto$.**

**b) vérifier que $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{-2\propto+3}$ .**

**5) on considère la suite numérique $u_n$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$**

**a) Montrer que la suite ( $u_n$ ) est la somme de deux suites : arithmétique et géométrique dont on**

**Déterminera le premier terme et la raison.**

**b) on pose $s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots u_n$ .Donner l expression de $s_n$ en fonction de n .**

**Calculer $\lim_{n\to\infty} s_n$ .**

*Exercice 4*

**On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; \quad +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + 3lnx$ .**

**1a) calculer la $\lim_{n\to 0^+} g(x)$ , $\lim_{n\to+\infty} g(x)$**

**b) calculer la dérivée de $g'(x)$ et dresser son tableau de variation de g .**

**b) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans** R un unique solution $\propto$ . Vérifier que 1,59 $\leq \propto \leq \mathbf{1,60}$

**b / En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; \quad +\infty[$ .**

**Partie B**

**Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; \quad +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-3)lnx}{x}$**

**On peut donc aussi écrire : $f(x) = \frac{(x-3)}{x} lnx \ (1) \ et\, f(x) = lnx - \frac{3lnx}{x} \ (2)$ .**

**On désigne par $(C)$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère ortho normal**

**(O ; $\vec{\imath}$ ;$\vec{\jmath}$ ) .**

**1a) Démontrer que $\lim_{n\to 0^+} f(x) = +\infty$ , $\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty \ et \lim_{n\to+\infty}(f(x) - lnx) = 0$ .**

**b) interpréter graphiquement les limites précédentes.**

**2a) calculer la dérivée $f'(x)$ .vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ $ont\ le\ meme\ signe$ .**

**b) montrer que $f(\propto) = \frac{-(\alpha-3)^2}{3\propto}$ et donner une valeur approchée de $f(\propto)$ à $10^{-1}$prés.**

**C ) Dresser le tableau de variation de la fonction f .**

**3a) déterminer l'équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 .**

**b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(C)$ avec l'axe des abscisses. Tracer $(C)\ et\ T$**

**C) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel $m$ le nombre de solution de l'équation :**

$$2x^2 - mx + xlnx - 3lnx = 0.$$

**4.a) Calculer l'intégrale J = $\int_1^e \frac{lnx}{x} dx$ .**

**b) En utilisant une intégrale par parties, calculer l'intégrale I = $\int_1^e lnx\, dx$ .**

**c) justifier que l'aire s du domaine plan limité par la courbe $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites**

**D'équation $x = 1$ et $x = e$ est donnée par $s = -\int_1^e f(x)dx$ . Calculer cette aire**

Fin

***[2] Solution bac 2014 session normal /professeur sy saidou***

***Solution1les probabilités***

| *Questions* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Réponses* | *c* | *b* | *b* | *c* | *b* |

***Solution 2 les nombres complexe s***

***1) résolvons les équations $E_1$ et $E_2$***

***$E_1$ = $z^2$ -2z + 17 = 0***

***On pose $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 17 = 4 - 68 = -64 \rightarrow \sqrt{\Delta}$ = 8i***

$Z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8i}{2} = \frac{2(1-4i)}{2} = 1 - 4i$

$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8i}{2} = \frac{2(1+4i)}{2} = 1 + 4i$ $\quad S\{1 - 4i , 1 + 4i\}$

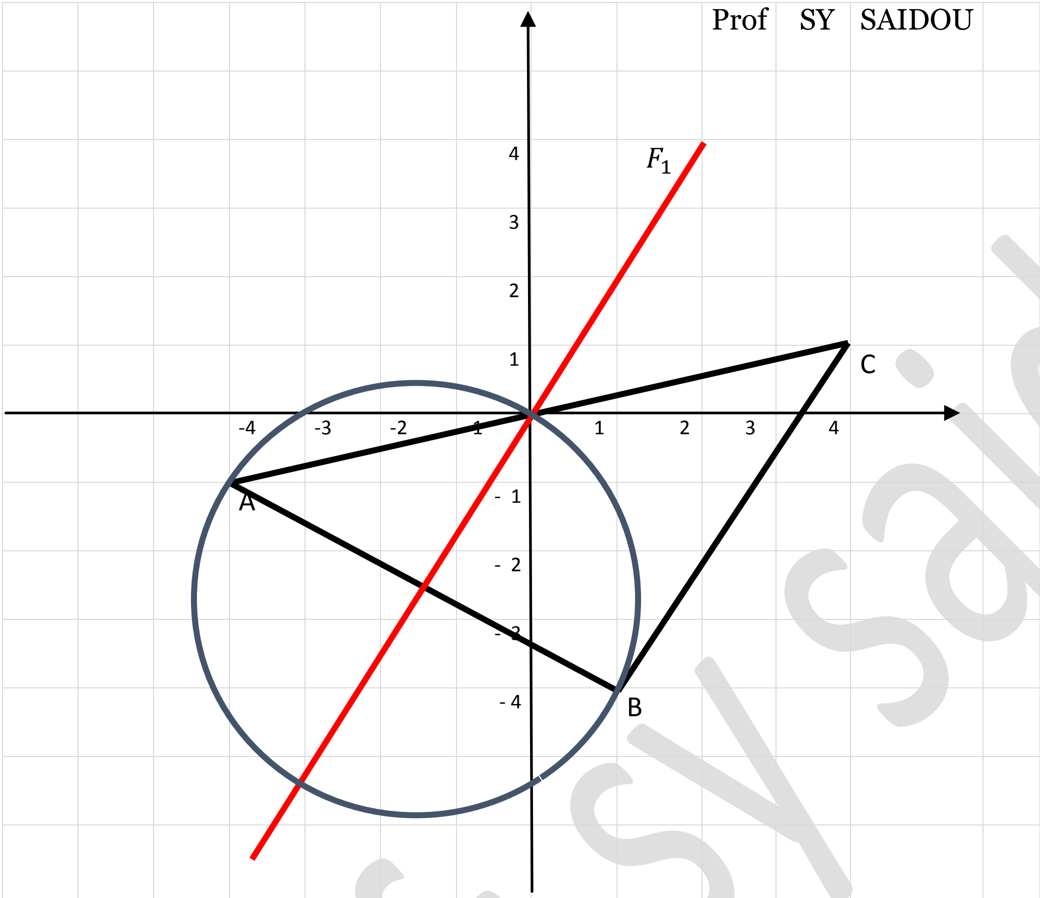
***$E_2$ = $z^2$ +8z + 17 = 0 On pose*** $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times 1 \times 17 = 64 - 68 = 2i$

$Z_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-2i}{2} = \frac{2(-4-i)}{2} = -4 - i$

$Z_4 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = = \frac{-8+2i}{2} = \frac{2(-4+i)}{2} = -4 + i$ $\quad S\{-4 - i , -4 + i\}$

***2) plaçons les points et déterminons la nature du triangle***

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….




***Déterminons la nature du triangle***

***<u>Méthode 1</u>***

$$z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{4+i-1+4i}{-4-i-1+4i} = \frac{3+5i}{-5+3i} = \frac{(3+5i)(-5-3i)}{(-5)^2+(3^2)} = \frac{-15-9i-25i+15}{25+9} = \frac{-34i}{34} = -i$$

<u>conclusion</u> ***Le triangle est rectangle et isocèle en B.***

***<u>$2^{eme}$ Méthode</u>***

***On calcule les distances pour voir si le triangle est isocèle et après passe par le théorème de Pythagore pour vérifier que le triangle est rectangle.***

***Maintenant calculons les distances :***

$|z_c - z_B| = |4 + i - 1 + 4i| = |3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ .

$|z_A - z_B| = |-4 - i - 1 + 4i| = |-5 + 3i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

***Conclusion les deux distances sont égales donc le triangle est isocèle***

- $\boldsymbol{verifions\ que\ le\ triangle\ est\ rectangle}$

$|z_C - z_A| = |z_C - z_B| + |z_A - z_B|$

$|4 + i + 4 + i| = \sqrt{34} + \sqrt{34}$

$\sqrt{68} = \sqrt{68}$

***<u>Conclusion</u>***

***Le triangle est rectangle en B .***

***b)*** $\propto = f(-1+4i)$ *on sait que* $f(z) = \frac{z-1+4i}{z+4+i} \Rightarrow f(-1+4i) = \frac{-1+4i-1+4i}{-1+4i+4+i} = \frac{-2+8i}{3+5i} = \frac{(-2+8i)(3-5i)}{(3)^2+(5)^2}$

$\frac{-6+10i+24i+40}{34} = \frac{34+34i}{34} = \frac{34(1+i)}{34} = 1+i$ *donc* $\propto = 1+i$

***Donnons la forme trigonométrique d'*** $\propto$

$|\propto| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $arg \propto = \theta$ $\begin{cases} cos \propto = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin \propto = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow arg \propto = \frac{\pi}{4}$ . $\sqrt{2}\ \left( cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

***Déterminons puis construisons l'ensemble*** $\Gamma_1$ ***tel que*** $|f(z)| = 1$

$\frac{z-1+4i}{z+4+i} = 1$ ***en remarquant que*** $-1+4i = -z_B$ , ***et*** $4+i = -z_A$ ***ce que nous donne***

$Z = \left|\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{MB}{MA} = 1$ $MA = MB$

$\boldsymbol{conclusion}$: $\boldsymbol{l'ensemble\ \Gamma_1\ est\ la\ mediatrice\ du\ segment\ [AB]}$

***d) déterminons puis construisons l'ensemble*** $\Gamma_2$ ***tel que*** $f(z)$ ***soit imaginaire.***

$f(z) \in i\,R \leftrightarrow arg\,( f(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

*Conclusion : l'ensemble* $\Gamma_2$ *est un cercle de diamètre* $[AB]$

*3) calculons* $Z_1$ *et* $Z_2$

***On sait que*** $z_{n+1} = \frac{\propto}{2} z_n \Rightarrow z_{(0+1)} = \frac{\propto}{2} z_0$ ***on sait que*** $\propto = 1+i$ ***et*** $z_0 = 4+i$ ***on remplace***

$z_1 = \frac{1+i}{2} \times 4 + i = \frac{(1+i)(4+i)}{2} = \frac{4+i+4i-1}{2} = \frac{3+5i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5i}{2}$

$z_2 = \frac{\propto}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{5i}{2} = \frac{(1+i)(3+5i)}{4} = \frac{3+5i+3i-5}{4} = \frac{-2+8i}{4} = \frac{2(-1+4i)}{2\times 2} = \frac{-1}{2} + 2i$

***b) Montrons que la suite*** $v_n = |z_n|$ ***est une suit géométrique.***

$v_{n+1} = |z_{n+1}| = \frac{\propto}{2} z_n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}$ = $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ = $\frac{\left|\frac{\propto}{2}\right||z_n|}{|z_n|}$ = $\left|\frac{\propto}{2}\right|$ =$\left|\frac{1+i}{2}\right|$ = $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ***donc $v_n$ est une suite géométrique de raison q***

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ***et de premier terme*** $v_0 = |z_0|$ =$|4+i|$ = $\sqrt{4^2 + 1^2}$ = $\sqrt{17}$

***c) donnons l'expression de $s_n$ en fonction de n***

$s_n$ = $0M_0$ +$0M_1$………………$0M_n$ = $|z_0| + |z_1|$……….$|z_{n+1}| + |z_n|$ = $v_0 + v_1$……………$v_{n+1} + v_n$

$s_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1+q}$ = $\sqrt{17} \times \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ =

***Calculons la limite de*** $lim_{n\to\infty}\, s_n$= $2(\sqrt{17} \times \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)})$ = $\sqrt{34}\,(\sqrt{2}-1)$

## ***<u>solution3 la fonction exponentielle</u>***

***1a) justifions que*** $lim_{n\to-\infty}(f(x))$ = - ∞_et $lim_{n\to+\infty}(f(x))$ = + ∞

$* \; lim_{n\to-\infty}(f(x)) = \lim_{n\to-\infty} 2x - 1 + 2e^x$ = $2\times -\infty - 1 + 2\times 0 = -\infty$

$* \; lim_{n\to+\infty}(f(x)) = \lim_{n\to+\infty} 2x - 1 + 2e^x = 2\times +\infty - 1 + 2\times +\infty = +\infty$

***b) calculons et donnons une interprétation graphique de*** $\lim_{n\to-\infty}\big(f(x) - (2x-1)\big)$ ***et*** $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

- $\lim_{n\to-\infty}\big(f(x) - (2x-1)\big)$ = $2x - 1 + 2e^x - 2x + 1$ = $2e^x = 0$
- $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = $\frac{2x-1+2e^x}{x} = \frac{2x-1}{x} + \frac{2e^x}{x}$ = 2 - $\frac{1}{x}$ + $\frac{2e^x}{x}$ = $+\infty$

***<u>Conclusion</u>***

$\lim_{n\to-\infty}\big(f(x) - (2x-1)\big) = 0$ ***A0 en*** $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = +∞ ***donc*** $C_f$ ***admet une branche parabolique de direction oy en*** $+\infty$

$\lim_{n\to-\infty}\big(f(x) - (2x-1)\big) = 0$ ***A0 en*** $-\infty$

***2a) dressons le tableau de variation de f***

***On calcule d'abord la dérivée*** $f'$ ***(x) =*** $2 + 2e^x > 0 \to 2e^x > -2$ ***ce qui est impossible signe de a*** $>$

*Le pilier du bac élaboré par le professeur chercheur sy saidou*

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

**b) Montrons que $f$ realise une bijection de R sur L'intervalle J**

***f est continue et strictement croissante il réalise donc une bijection vers l'intervalle***

$I\,]-\infty;\,+\infty[\ \rightarrow J\,]-\infty;\,+\infty[$.

**C) Montrer que l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution $\propto$**

***On sait que sait que f est bijective.***

$0 \in$ à $l'intervalle\ J\ ]-\infty;\,+\infty[$ ***Donc l'équation $f(x)$= 0 admet une unique solution $\propto$ tel que***

$-0.3 < \propto < -0.2$. $f(-0,3) = -0,12$; $f(-0,2) = 0,23$

***3) courbe***

Prof Sy Saidou

**4) a Déterminons l'équation de la tangente au point $x_0 = \propto$**

$$f'(x_0)(\,x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ = $2 + 2e^{\propto}$ , $f(x_0) = 2\propto$

$-1 + 2e^{\propto}$

$y = \ 2 + 2e^{\propto}\ (\,x{-}\propto) + 2\propto -1 + 2e^{\propto}$ =

$T_{\propto}$ : $y = (2 + 2e^{\propto})(x{-}\propto)$

*b) vérifions que* $(f^{-1})'(0)\ \frac{1}{-2\propto+3}$

$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1})'(0)} = \frac{1}{f'(\propto)} = \frac{1}{2+2e^{\propto}}$ *on sait* $f(\propto) = 0 \leftrightarrow 2\alpha - 1 + 2e^{\alpha} = .\ \ 2e^{\alpha} = -2\alpha + 1$

*on remplace par sa valeur* $\frac{1}{2+1-2\alpha} = \frac{1}{-2\propto+3}$

*5) Montrons que $u_n = f(n)$ est la somme de deux suites arithmétique et géométrique*

$u_n = f(n) = 2n - 1 + 2e^{n}$ . *on pose* $C_n = 2n - 1$ *montrons que* $C_n$ *est une suite arithmétique*

$C_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 =$

$C_{n+1}$ - $C_n$ = $2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$ . *Donc* $C_n$ *est une suites arithmétique de raison r = 2 et de*

*Premier terme* $C_0$ $=2 \times 0 - 1 = -1$

*on pose* $d_n = 2\ e^{n}$ , $d_{n+1} = 2e^{n+1} = 2\ e^{n}\ \times e$

*Montrons que $d_n$ est suites géométrique*

$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2\ e^{n}\ \times e}{2\ e^{n}} = e$ *donc $d_n$ est suites géométrique de raison $q = e$ et de premier terme*

$$d_0 = 2e^{0} = 2$$

*b) on pose* $s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots u_n$

*donnons l'expression de* $s_n$ *en fonction de n .*

*On sait que* $s_n$ *est la somme d'une suite arithmétique et géométrique donc*

$S_n = c_0 + c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n + d_0 + d_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_n$

$S_n = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2} + 2\times\frac{1-e^{n+1}}{1-\ e} = \frac{(n+1)(2n-2)}{2} + 2\times\frac{1-e^{n+1}}{1-\ e}$

$S_n = n^2 - 1 + 2 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-\ e}$

$*$ *Calculons la limite de* $s_n$ $lim_{n\to+\infty}\, s_n = lim_{n\to+\infty}\, n^2 - 1 + 2\times\frac{1-e^{n+1}}{1-\ e} = +\infty$

***solution : 4***

***1) Calculons les limites de $g(x)$ en $0^+$ et en $+\infty$ :***

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x - 3 + 3\ln x = 0 - 3 - \infty = -\infty$ ***donc*** $\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x - 3 + 3\ln x = +\infty - 3 + 3(+\infty) = +\infty$ ***donc*** $\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$

***b) Calculons la dérivée de $g(x)$ :***

$g(x) = x - 3 + 3\ln x \Longrightarrow g'(x) = 1 + \frac{3}{x} > 0.$

| $x$ | $0^+$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0^+$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

***2.a) $g(1,59) = 0,018$ et $g(1.60) = 0,010$ d'où $1,59 < \alpha < 1,60$, g est continue est strictement croissante.***

***Elle admet donc une unique solution α.***

| $x$ | $0^+$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $\phi$ | $+$ |

**Partie B :**

**1.a) Démontrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{0-3\ln(0^+)}{0^+} = +\infty$ **Donc :** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - 3 \times \frac{\ln x}{x} = +\infty - 3\times 0 = +\infty$ **Donc :** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - \frac{3\ln x}{x} - \ln x = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{3\ln x}{x} = 0$ **Donc :**

$$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - \ln x) = 0}$$

**b) Interprétons graphiquement les limites :**

- ✓ **La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale (A.V) à $C_f$**
- ✓ **La droite d'équation $y = \ln x$ est une asymptote oblique (A.O) à $C_f$**

**2.a) Calculons $f'(x)$ et vérifions que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe :**

$$f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x} = \ln x - \frac{3\ln x}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3\ \frac{1}{x}\times x - (-3\ln x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{3+3\ln x}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{3+3\ln x}{x^2} =$$

$$\frac{x-3+3\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

**Donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$**

**2.b) Montrons que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha+3)^2}{3\alpha}$**

$f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x} \Longrightarrow f(\alpha) = \frac{(\alpha-3)\ln \alpha}{\alpha}$**. On sait que** $g(\alpha) = \alpha - 3 + 3\ln\alpha$

$g(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha - 3 + 3\ln\alpha = 0 \Longrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha}$**. On remplace $\ln\alpha$ par sa valeur.**

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha-3)(-\alpha+3)}{\frac{3}{\alpha}} \Longrightarrow f(\alpha) = \frac{-(\alpha-3)^2}{3\alpha}$$

**2.c) Dressons le tableau de variation de la fonction f**

| $x$ | $0^+$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\phi$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-0,44$ | ↗ $+\infty$ |

***3.a) Déterminons l'équation de la tangente***

$$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f(x_0)=f(1)=\frac{(1-3)\ln 1}{1}=\frac{0}{1}=0$$

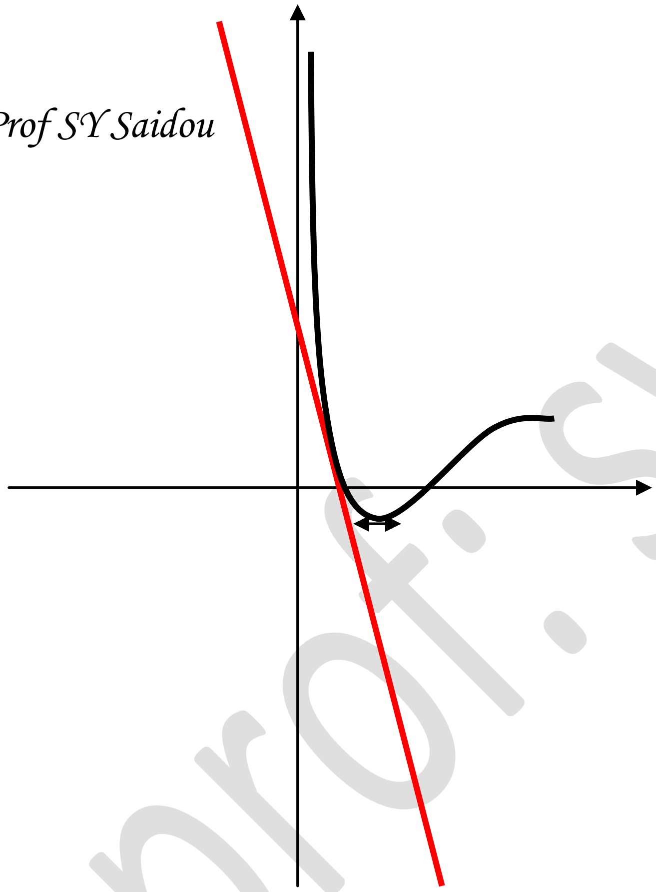
$$f'(x_0)=\frac{1-3+3\ln 1}{(1)^2}=\frac{1-3+3\times 0}{1}=-2$$

***Donc*** $y=-2(x-1)+0=-2x+1 \implies \boxed{y=-2x+1}$

***3.b) Déterminons les points d'intersections avec l'axe*** $(ox)$

***On pose*** $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow (x-3)\ln x=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ***ou*** $\ln x=0$





$\Leftrightarrow x=3 \quad ou \quad \ln x=e^0$

$\Leftrightarrow x=3 \quad ou \quad x=e^0$

$\Leftrightarrow x=3 \quad ou \quad x=1$

***3.c)*** *Discutons graphiquement suivant les valeurs de m*

$$2x^2-mx+x\ln x-3\ln x=0 \Leftrightarrow \frac{x\ln x-3\ln x}{x}=\frac{-2x^2+mx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x}-\frac{3\ln x}{x}=\frac{-2x^2+mx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln x-\frac{3\ln x}{x}=\frac{-2x+m}{.}$$

$$\Leftrightarrow \ln x-\frac{3\ln x}{x}=y$$

| $m$ | $m < 2$ | $m = 2$ | $m > 2$ |
|---|---|---|---|
| ***Nombre de solutions*** | **0** | **1** | **2** |

***4.a) Calculons l'intégrale de J***

$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ ***En remarquant que*** $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u'.u = \frac{u^2}{2}$

***Donc l'intégrale de J*** $= [\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)]_1^e = [\left(\frac{(\ln e)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)]_1^e = [\left(\frac{(\ln e)^2}{2}\right) - 0]_1^e$

***On sait que*** $\ln e = 1$***. Donc, On aura :*** $\left[\frac{1}{2}\right] \Longrightarrow$ $\boxed{J = \frac{1}{2}.AU}$

***5.a) Justifions que l'aire*** $S = -\int_1^e f(x)\, dx$

***5.b) Calculons l'intégrale***

$I = \int_1^e \ln x\, dx$

$\begin{cases} u'(x) = 1 \Longrightarrow u(x) = x \\ v(x) = \ln x \Longrightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$I = \int_1^e \ln x\, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$

$I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\, dx$

$I = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e \Leftrightarrow I = [x \ln x - x]_1^e$

$I = [e \ln e - e - (1 \ln(1) - 1]_1^e \Leftrightarrow I = [e \times 1 - e - (0 - 1)]_1^e \Longrightarrow$ $\boxed{I = [e - e + 1]_1^e = 1}$

***5.c)*** $[1; e]$ ***En remarquant que*** $S = -I + 3J$

$S = -\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e -I + 3J dx = [+\frac{1}{2} \times 3 - 1]_1^e = [\frac{1}{2}]_1^e = \frac{1}{2} UA$

$S = (3J - I)UA = \frac{1}{2} UA.$

***Exercice1***

**Soit la fonction f définie sur R par :** $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$

**(C) la courbe représentative dans un repère (o ;$\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$)**

**1.a) Calculer :** $\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty}(f(x) - (3x - 1))$ **interpréter graphiquement.**

**b) Montrer que** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ **interpréter graphiquement.**

**2.a) Calculer la dérivée** $f'(x)$ **et étudier son signe.**

**b) Dresser le tableau de variation de f.**

**3.a) Montrer que l'équation** $f(x) = 0$ **admet exactement deux solutions** $\alpha$ *et* $\beta$.

**Vérifier que** $-1,3 < \alpha < -1$ *et* $0,2 < \beta < 0,3$

**b) Représenter la courbe (C)**

**4) On définie les suites** $(u_n)$ *et* $(v_n)$ **pour tout entier naturel n par :** $u_n = e^{-2n-1}$ **et** $v_n = 3n - 1$

**a) Démontrer que la suite** $(u_n)$ **est géométrique décroissante.**

**b) Démontrer que la suite** $(v_n)$ **est arithmétique croissante.**

**c) Les suites** $(u_n)$ *et* $(v_n)$ **sont-elles adjacentes ?justifier.**

**5) Pour tout entier naturel n on pose** $s_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

**a) Calculer** $s_n$ **en fonction de n**

**b) Calculer** $\lim_{n\to+\infty} s_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n^2}$

***Exercice2***

**Partie : A**

**On considère la fonction g définie sur** $]0.+\infty[$ **par :** $g(x) = x^2 - 3 + 2lnx$

**1.a) Calculer** $\lim_{x\to0^+} g(x)$ , $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

**b) Calculer la dérivée** $g'(x)$ **et dresser le tableau de variation de g.**

**2.a) Montrer que g réalise une bijection de** $]0.+\infty[$ **sur un intervalle j que l'on déterminera.**

**b) Montrer que l'équation** $g(x) = 0$ **admet une unique solution** $\alpha$.

**Vérifier que 1,34**$< \alpha < 1,3$

**c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle** $]0.+\infty[$.

**Partie : B**

**On considère la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$**

**On note $\Gamma$ sa courbe représentative dans le plan, mini d'un repère (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{J}$) orthonormé.**

**1.a) Démontrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x-2)\big) = 0$**

**b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.**

**c) Etudier le signe de $d(x) = f(x) - (x-2)$, résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.**

**2.a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$**

**b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $10^{-1}$ $prés$**

**c) En déduire le tableau de variation de f**

**3.a) Donner l'équation de la tangente T à $\Gamma$ au point A d'abscisse $x_0 = 1$**

**b) Montrer que la courbe $\Gamma$ coupe l'axe des abscisse en un deuxième point autre que A d'abscisse**

**$\beta$ telle que $1,9 \le \beta \le 2$**

**c) Tracer l'allure de la courbe dans le repère (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{J}$)**

**4) Soit n un entier naturel $n \ge 3$, on considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe et les droites d'équations respectives $y = x - 2, x = 3$ $et$ $x = n$**

**a) Justifier que cette aire exprimé en $cm^2$ est donnée par : $I_n = \int_3^n \frac{-1 + \ln x}{x^2} dx$**

**b) Calculer $I_0 = \int_3^n \frac{lnx}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire $I_n$ en fonction de n**

**c) Calculer la limite de l'aire $i_n$ du domaine E quand n tend vers $+\infty$**

***Exercice3***

**Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} - \ln(x+1)$**

**Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{J}$) unité 1 cm.**

**1.a) $calculer$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.**

**b) Montrer que $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ interpréter graphiquement.**

**2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale dont on Donnera une équation.**

**b) Dresser le tableau de variation de f**

**3.a) Calculer $f''(x)$ et vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse 1.**

**b) Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse A.**

**4.a) Montrer que la restriction g de f sur $I = ]0;+\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on Déterminera**

**b) Dresser le tableau de variation de $g^{-1}$.**

**c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)$**

**5.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$**

**Vérifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$ et $5,3 < \beta < 5,4$**

**b) Placer sur le repère (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{j}$) les points d'intersections de la courbe (C) avec les axes, son point d'inflexion, Les tangentes précédentes puis représenter la courbe (C).**

**c) Représenter la courbe (C') de $g^{-1}$**

**6.a) Montrer que la fonction f admet des primitives sur $]-1;+\infty[$.**

**b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$ soit une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.**

**c) Calculer, en fonction de $\beta$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites D'équations $x = 0$ et $x = \beta$ donner une valeur approchée de cette aire à $10^{-2}$ prés.**

***Exercice4***

**Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$**

**Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{j}$) unité 1 cm.**

**1.a) Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ , interpréter graphiquement.**

**b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**

**Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote a la courbe (C).**

**c) Etudier la position relative de (C) et $\Delta$ .**

**2) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ : $g(x) = x^2 - \ln x$**

**a) Vérifier que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+ln2}{2}$**

**b) Calculer $g'(x)$**

**c) Etudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$ : $g(x) > 0$**

**3.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

**b) Dresser le tableau de variation de f.**

**4.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

**b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et vérifier que : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$**

**5.a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle à $\Delta$.**

**b) Représenter la courbe (C), les droites (T) et $\Delta$ dans (o ;$\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$)**

**c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x - 1 - \ln x = 0$**

**Soit un entier naturel, $n > 1$. On note $u_n$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'asymptote oblique $\Delta$ et les droites d'équation respectives $x = n$ et $x = n+1$**

**a) Exprimer $u_n$ en fonction de n**

**b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{n\to+\infty} u_n$**

***Exercice5***

**On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + 2 + e^x$ soit (C) sa courbe représentative dans Un repère orthonormé (o ;$\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$) unité 1 cm.**

**1 .a) Calculer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$**

**b) Calculer et donner une interprétation graphique de $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (x+2)\big)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.**

**2) Dresser le tableau de variation de f.**

**3) Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on déterminera.**

**4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ puis vérifier que $-2,5 < \alpha < -2$**

**5) Construire (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque $f^{-1}$ dans le repère (o ;$\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$).**

**6.a) Déterminer la primitive $F$ de $f$ qui vérifie que $F(0) = 0$**

**Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$**

**b) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$. Montrer $A(\alpha) = \frac{6 - 2\alpha - \alpha^2}{2}$**

**7.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse** $x_0 = \alpha$

**b) Vérifier que** $(f^{-1})'(0) = \frac{-1}{\alpha + 1}$

**8) On considère la fonction g définie par :** $g(x) = \ln(x + 2 + e^x)$

**a) Déterminer l'ensemble des définitions de g.**

**b) Dresser le tableau de variation de g.**

**c) Construire la courbe $\Gamma$ de g dans un nouveau repère** $(o; \vec{u}; \vec{v})$

***<u>Exercice6</u>***

**On considère la fonction numérique définie sur** $]0; +\infty[$ $par: f(x) = x^2 - 2 + (x-3)\ln x$

**Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o ;$\vec{i}$ ; $\vec{j}$) unité 2 cm.**

**1) Calculer et donner une interprétation graphique :**$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

**2.a) Calculer $f'(x)$ et montrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse $x_0 = 0$ une tangente horizontale**

**Dont on donnera une équation**

**b) Calculer $f''(x)$ en déduire les variations de $f'$ et le signe de $f$.**

**3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ exactement deux solutions $\alpha$ *et* $\beta$**

**Telles que :**$\alpha < \beta$ **et Vérifier que** $0,4 < \alpha < 0,5$ *et* $1,6 < \beta < 1,7$

**b) Construire la courbe (c).**

**1) Soit g la restriction de f sur l'intervalle** $I = ]0; 1[$

**a) Montrer que g réalise une bijection de $I$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

**b) Dresser le tableau de variation de $g^{-1}$ réciproque de g puis vérifier que :**$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(-1)}{x+1}$ $-\infty$

**c) Construire dans le repère précédent, la courbe (C') représentative de $g^{-1}$**

**5) Soit la suite numérique ($A_n$) définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par :** $A_{n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt}$

**a) Vérifier que la suite $A_n$ est croissante et positive.**

**b) Utiliser une intégration par parties pour calculer :** $G(x) = \int_1^x (t-3)\ln t\, dt$

**En déduire la primitive F de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie que** $F(1) = \frac{13}{12}$

**c) Donner l'expression de $A_n$ en fonction de n et $\alpha$ et montrer que :**

**d) Quelle interprétation géométrique peut-on donner à cette limite ?**

***Exercice7***

**On considère la fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x(x^2-1)}$**

**1.a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$**

**b) En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$**

**c) Calculer l'intégrale $I = \int_2^3 f(x)dx$ et montrer que $I = \ln\left(\frac{32}{27}\right)$**

**2) On considère la suite numérique $(u_n)$ définie pour tout n entier naturel, $n \geq 2$ par : $u_n = \frac{2}{n(n^2-1)}$**

**On pose $s_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$**

**a) Montrer que pour tout entier naturel, $n \geq 2$**

**$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ Et $u_n = \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}$**

**b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$ : $on\ a\ s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} s_n$**

**c) Simplifier la somme : $A = \frac{2}{1\times 2\times 3} + \frac{2}{2\times 3\times 4} + \frac{2}{3\times 4\times 5} + \cdots + \frac{2}{2006\times 2007\times 2008}$**

***Exercice8***

**On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0 = 6$ et pour tout n $\in N$**

**$u_{n+1} = 3u_n + 10n - 13$**

**1.a) Calculer $u_1, u_2$ et vérifier que $u_3 = 43$**

**b) Justifier que la suite numérique $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.**

**On définie la suite numérique $(v_n)$ par : pour tout n $\in N$, $v_n = u_n + 5n - 4$**

**a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on déterminer la raison et le premier terme.**

**Exprimer $v_n$ en fonction de n.**

**b) A partir de quel terme peut on avoir $v_n \geq 2013$**

**c) En déduire que pour tout n $\in N$, $u_n = 2\times 3^n - 5n + 4$**

**3) Pour tout entier naturel n, on pose : $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$**

**Déterminer l'expression de $s_n$ en fonction de n.**

## *Exercice9*

**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (o ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

**1.a) Résoudre dans C l'équation : $(E_1)$ $z^2 + 2z + 10 = 0$**

**On note $z_1$ *et* $z_2$ ses solutions avec $I_m(z_2) \leq 0$**

**b) Résoudre dans C l'équation : $(E_2)$ $z^2 - 4z + 20 = 0$**

**On note $z_3$ *et* $z_4$ ses solutions avec $I_m(z_4) \leq 0$**

2) On considère les points A, B, K, L, et E d'affixes respectives : $z_A = z_1$; $z_B = z_2$; $z_K = z_3$; $z_L = z_4$; $z_E = z_3 - 2i$

a) Placer les points A, B, K, L, et E dans le repère **(o ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

**b) Ecrire** $z_E = z_3 - 2i$ sous forme algébrique.

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.

3) Pour tout nombre complexe z tel que z ≠ $-1 + 3i$ on pose : $f(z) = \frac{z - 2 - 4i}{z + 1 - 3i}$

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun

des cas suivants :

- **$\Gamma_1$ tel que $|f(z)| = 1$**
- **$\Gamma_2$ tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$**

## *Exercice10*

1) On pose : (z)= $z^3 - 5z^2 + 12z - 8$

a) Calculer P(1)

b) Déterminer les réels a et b tels que : tels que pour tout z on a : P(z) = (z- 1) (z²+ az +b)

c) Résoudre dans C l'équation P(z)= 0

2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé **(o ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

**Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$; $z_B = 2 + 2i$ *et* $z_C = 2 - 2i$**

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres $z_1$; $z_2$ *et* $z_3$

b) Placer les points A, B et C dans le repère **(o ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

**3.a) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC**

**b) Déterminer et représenter l'ensemble $\Gamma$ des points M d'affixes z telle que $\left|\frac{z - 1}{z - 2 - 2i}\right| = 1$**

**Exercice11**

**Le plan complexe est mini d'un repère orthonormé (o ;$\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

**Pour tout nombre complexe z, ($z \neq$-2i), on pose :**

$f(z) = \frac{(-4\ +\ 2i)z\ -5}{z\ +\ 2i}$

**1) Calculer $z_1 = f(1)$ et l'écrire sous forme algébrique.**

**2) Résoudre dans C l'équation $f(z) = z$.**

**3) Placer dans le repère (o ;$\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) les points A et B d'affixes :**

$z_A = -2i\ et\ z_B = -1 - \frac{1}{2}i$

**b) Déterminer l'ensemble $\Gamma_1$ des points M du plan d'affixe z tel que : $|f(z) + 4 - 2i| = \sqrt{65}$**

**c) Vérifier que pour tout nombre complexe z, ($z \neq$-2i) on a : $f(z) = (-4 + 2i)\frac{z\ +\ 1 + \frac{1}{2}i}{z\ +\ 2i}$**

**En Déduire l'ensemble $\Gamma_2$ des points M du plan d'affixe z tel que : $|f(z)| = \sqrt{20}$**

**d) Construire $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ dans le repère (o ;$\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )**

***Exercice12***

**Le plan complexe est mini d'un repère orthonormé direct (o ;$\vec{u}$ ; $\vec{J}$ )**

**1) On pose $z_1 = \frac{10\ +\ 4i}{3\ +\ 7i}$, $z_2 = (1 + i)(1 - i)$ $et\ z_3 = \frac{7\ +\ 3i}{5\ -\ 2i}$**

**a) Donner la forme algébrique de chacune des nombres $z_1$, $z_2$ $et\ z_3$**

**b) Donner la forme trigonométrique de chacune des nombres $z_1$, $z_2$ $et\ z_3$**

**2.a) Placer dans le repère (o ;$\vec{u}$ ; $\vec{J}$ ) les points A, B et C d'affixes respectives :**

$Z_A = 1 - i, z_B = 2, z_C = 1 + i$

**b) Montrer que le triangle ABC est isocèle ; puis donner la nature du quadrilatère OABC.**

**c) Déterminer et construire l'ensemble $\Delta$ des points M du plan d'affixe z tel que : $\left|\frac{z}{z\ -\ 2}\right| = 1$**

**3) A tout point M d'affixe z, ($z \neq 2$), on associe le point M' d'affixe z' tel que : z'=$\frac{-\ 2}{z\ -\ 2}$**

**a) Résoudre dans l'ensemble C l'équation $z' = z$.**

**b) Montrer que pour tout nombre complexe z, ($z \neq$ 2) on a : $|z' -\ \ 1| = \frac{|z|}{|z\ -\ 2|}$ en déduire**

**une relation entre les distances OM, BM et $I$M' ou $I$ est le milieu du segment $[OB]$.**

**c) déduire que si M décrit $\Delta$, alors M' décrit un cercle $\Gamma$ dont on donnera le centre et le rayon.**

***Exercice13***

**Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.**

**On effectue au hasard un tirage de boule simultanément de l'urne.**

**On note $A_0$ l'événement ≪ *on a obtenue aucune boule noire* ≫**

**On note $A_1$ l'événement ≪ on a obtenue une seule boule noire ≫**

**On note $A_2$ l'événement ≪on a obtenue deux boules noires ≫**

**Soit $x$ la variable aléatoire qui, associe le nombre de boules noires tirées.**

**Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.**

**Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.**

**Aucune justification n'est demandée.**

| | Questions | Réponses A | Réponses B | Réponses C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le nombre de tirages possibles est : | $C_6^2$ | $A_6^2$ | $6^2$ |
| 2 | La probabilité p$(A_0)$ est : | $\frac{4}{6}$ | $\frac{6}{15}$ | $\left(\frac{4}{6}\right)^2$ |
| 3 | La probabilité p$(A_1)$ est : | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |
| 4 | La probabilité p$(A_2)$ est : | $\frac{4}{6}$ | $\frac{6}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |
| 5 | L'espérance mathématique de x est : | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{15}$ | 4 |

| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Réponses | | | | | |

***Exercice14***

**Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher dont trois sont rouges, deux sont vertes et une seule est jaune.**

**On tire simultané et au hasard, trois boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage,**

**on associe**

**le nombre de couleurs de boules tirées.**

**Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.**

| N° | Questions | Réponses A | Réponses B | Réponses C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le nombre de tirages possibles est : | $C_6^3$ | $A_6^3$ | $6^3$ |
| 2 | La probabilité que le tirage soit unicolore est : | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | La probabilité que le tirage soit tricolore est : | 0,3 | $\frac{11}{40}$ | $\frac{7}{6}$ |
| 4 | La probabilité que le tirage soit bicolore est : | $\frac{29}{40}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{13}{20}$ |
| 5 | L'espérance mathématique de x est : | $\frac{4}{9}$ | $-\frac{7}{20}$ | 4 |

**Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.**

**Aucune justification n'est demandée.**

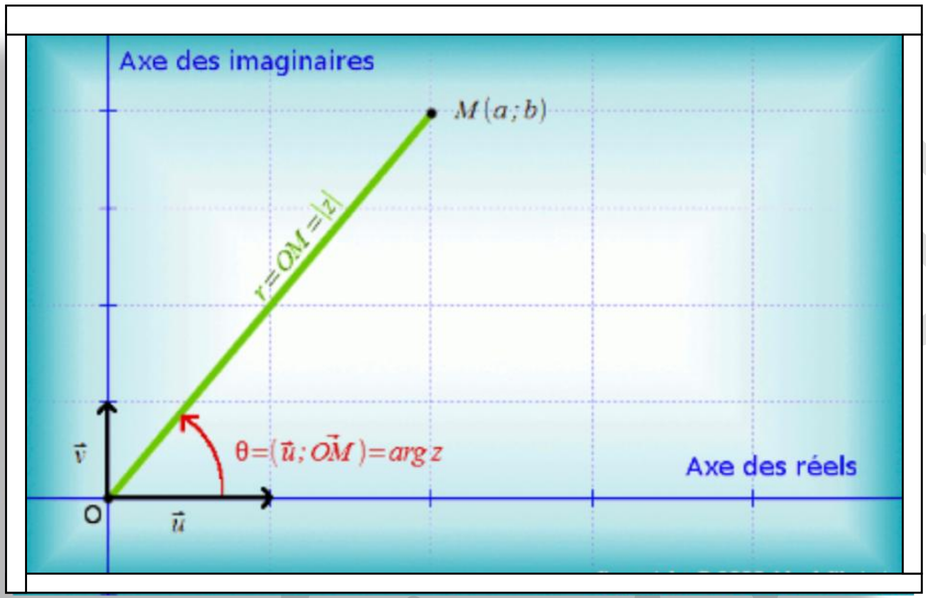
| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Réponses | | | | | |

# Cours complexes

L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$ , est l'ensemble des nombres $z$ tel que $z=a+ib$ avec $a\in\mathbb{R}$ , $b\in\mathbb{R}$ et $i^2=-1$ .

$a$ est appelé la **partie réelle** du nombre complexe (noté $\text{Re}(z)$ ) et $b$ la **partie imaginaire** (noté $\text{Img}(z)$ ).

On peut associer à tout nombre complexe $z=a+ib$ un point image $M(a;b)$ dans le plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ .




On appelle "**module** de $z$ " (noté $|z|$ ) le réel positif $r$ correspondant à la **distance** $OM$ et "**argument** de $z$ " (noté $\arg z$ ), le réel $\theta$ correspondant à une mesure de l'**angle orienté** $(\vec{u};\vec{OM})$ à $2k\pi$ près.

On dit que $M$ est l'**image du nombre complexe** $z$ et que $z$ est l'**affixe du point** $M$ .

On appelle **réel pur** tout nombre complexe $z=a$ ( $\text{Img}(z)=0$ ) et on appelle **imaginaire pur** tout nombre complexe $z=ib$ ( $\text{Re}(z)=0$ ).

Soit $z=a+ib$ , on appelle **conjugué** de $z$ le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$ .

Soit $M$ l'image du nombre complexe $z$ et $M'$ l'image du nombre complexe $\bar{z}$ alors $M'$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des réels (axe des abscisses).

Il existe trois écritures possibles pour un nombre complexe:

-L'**écriture algébrique**: $\boxed{z=a+ib}$.

-L'**écriture trigonométrique**: $\boxed{z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)}$.

-L'**écriture exponentielle**: $\boxed{z=|z|e^{i\theta}}$.

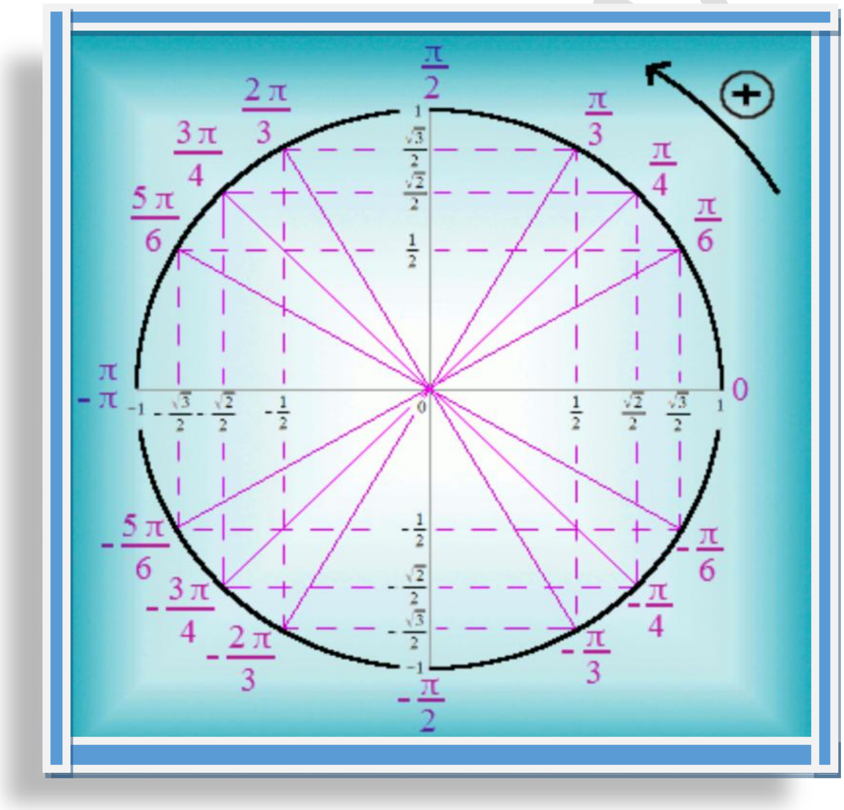
Le **module** $|z|$ d'un nombre complexe se détermine à partir de son écriture algébrique grâce à la formule

Suivante:

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

L'**argument** $\theta$ d'un nombre complexe se trouve à l'aide du cercle trigonométrique après avoir préalablement déterminé son cosinus et son sinus grâce aux relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{array}\right\}\quad \theta=\ldots\ +\ 2k\pi\ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}$$




Soit deux points $A$ et $B$ ayant pour affixe respective $z_A$ et $z_B$ , on peut alors calculer l'**affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

On peut également calculer la **distance** $AB$ :

$$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$$

On peut également déterminer un **angle orienté**:

$$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} = \arg(z_B - z_A)$$ Et plus généralement: $$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}) = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

Il est possible de déterminer des **solutions complexes** aux équations du second degré dont le **discriminent est négatif**. En effet pour l'équation $az^2 + bz + c = 0$ , si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors il existe deux solutions dans $\mathbb{C}$ :

$$z = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z' = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Quelques propriétés à connaître concernant les **modules**:

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$
$$|zz'| = |z| \times |z'|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Quelques propriétés à connaître concernant les **arguments**:

Pour tout $z \neq 0$:
$$\arg(-z) = \arg z + \pi \quad (2\pi)$$
$$\arg \bar{z} = -\arg z$$
$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)$$
$$\arg z^n = n \arg z \quad (2\pi) \text{ avec } z \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Quelques propriétés à connaître concernant les **opérations avec les conjugués** des nombres complexes:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$
$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$
$$z - \bar{z} = 2i\ \mathrm{Img}(z)$$
$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$
$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \text{ avec } z' \neq 0$$

Dans tous les calculs concertants les nombres complexes, on ne laissera jamais $i^n$ pour tout $n \geqslant 2$ dans un résulta final (se souvenir que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, etc... ) et on ne laissera jamais de $i$ au dénominateur (Penser à multiplier par l'expression conjuguée). Formule d'**Euler**:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

**Translation**: Soit deux points $M$ et $M'$ d'affixe respective $z$ et $z'$. Si $M'$ est l'image de $M$ par translation de **vecteur** $\vec{u}$ alors:

$$\boxed{z' = z + z_{\vec{u}}}$$

**Rotation**: Soit deux points $M$ et $M'$ d'affixe respective $z$ et $z'$. Si $M'$ est l'image de $M$ par rotation de **Centre** $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'**angle** $\theta$ alors:

$$\boxed{(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)}$$

**Homothétie**: Soit deux points $M$ et $M'$ d'affixe respective $z$ et $z'$. Si $M'$ est l'image de $M$ par homothétie de **centre** $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de **rapport** $k$ alors:

$$\boxed{(z' - \omega) = k(z - \omega)}$$

Il faut savoir **interpréter géométriquement une égalité complexe** et réciproquement savoir **transformer les propriétés géométriques en égalité complexe**. Voici un petit tableau non exhaustif afin de vous y aider:

| Egalité complexe | Interprétation géométrique |
|---|---|
| $\lvert z_B - z_A \rvert = 3$ | La distance $AB$ est égale à 3. |
| $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ | $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ alors<br>ABC est un triangle rectangle en B. |
| $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ | $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ et $AB = BC$<br>ABC est un triangle isocèle rectangle en B. |
| $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ | $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $AB = BC$<br>ABC est un triangle équilatéral. |
| $z_B - z_A = z_C - z_D$ | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ABCD est un parallélogramme. |
| $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = k$ | $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{DC}$ ABCD est un trapèze. |
| $\lvert z_M - z_A \rvert = \lvert z_M - z_B \rvert$ | $AM = BM$ Le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. |
| $\lvert z_M - z_A \rvert = R$ avec $R \in \mathbb{R}_+^*$ | $AM = R$ Le point M appartient au cercle de centre A et de rayon R. |

# Les Probabilités cours1

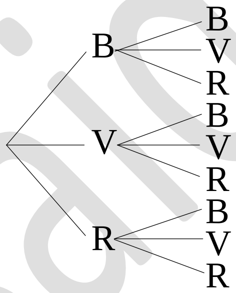
## I) Le vocabulaire des probabilités

### 1) Exemple

**Une urne contient 3 boules : une bleue, une rouge, une verte. On tire au hasard une boule de cette urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne que l'on agite. On tire alors une deuxième boule de l'urne en notant sa couleur.**

**On dit que l'ensemble des opérations ainsi réalisées constitue une épreuve ou expérience aléatoire. On peut représenter l'ensemble des résultats possibles ou éventualités par un tableau ou un arbre :**

| 2 \ 1 | B | V | R |
|---|---|---|---|
| **B** | (B,B) | (V,B) | (R,B) |
| **V** | (B,V) | (V,V) | (R,V) |
| **R** | (B,R) | (V,R) | (R,R) |




### 2) Evénement

**Considérons $\Omega$ = {(B,B);(B,V);(B,R);(V,B);(V,V);(V,R);(R,B);(R,V);(R,R)} l'univers ou ensemble des éventualités de cette expérience.**

**L'événement $A_1$ = {(B,B);(V,V);(R,R)} est l'événement "Obtenir 2 boules de même couleur"**

**$A_2$ = {(B,R);(B,V);(B,B)} est l'événement "Obtenir une boule bleue au premier tirage"**

**Remarque**

**Si une épreuve donne comme résultat (B,R), nous pouvons dire que l'événement $A_2$ est réalisé mais par contre $A_1$ ne l'est pas.**

### 3) Evénement élémentaire

$A_3$ = {(B,B)} est l'événement "obtenir deux boules bleues".

C'est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

### 4) Evénement "A et B"

**Considérons les événements $A_1$, $A_2$ et $A_3$ précédemment définis :**

**$A_1$ : "Obtenir 2 boules de même couleur"**

**$A_2$ : "Obtenir une boule bleue au premier tirage"**

**$A_3$ : "obtenir deux boules bleues".**

**Une épreuve étant accomplie, nous disons que l'événement $A_3$ est réalisé lorsque les événements $A_1$ et $A_2$ sont simultanément réalisés.**

**L'événement $A_3$ est l'événement "$A_1$ et $A_2$", noté $A_1$ et $A_2$ mais aussi $A_1 \cap A_2$.**

**$A_3 = A_1$ et $A_2 = \{(B,B)\}$**

**5) <u>Evénement incompatible</u>**

**Reprenons l'événement $A_2$ : "Obtenir une boule bleue au premier tirage" et soit $A_4 = \{(R,R)\}$ : "obtenir deux boules rouges".**

**Aucune éventualité ne réalise simultanément $A_2$ et $A_4$; on dit que $A_2$ et $A_4$ sont incompatibles et on note $A_2 \cap A_4 = \varnothing$**

**<u>Remarque</u>**

**Les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles**

**7) <u>Evénements contraires</u>**

**Soit $A_1$ : "Obtenir 2 boules de même couleur".**

**On note $\overline{A_1}$ l'événement contraire, c'est-à-dire "obtenir un tirage bicolore".**

**On a $A_1 = \{(B,B);(V,V);(R,R)\}$ et donc $\overline{A_1} = \{(B,V);(B,R);(V,B);(V,R);(R,B);(R,V)\}$**

**Ainsi, si une épreuve est accomplie, l'un et l'un seulement des deux événements $A_1$ et $\overline{A_1}$ est réalisé.**

# COURS de Probabilité2

**1) La notion de probabilité**

**Considérons l'épreuve suivante : elle consiste à lancer un dé ; l'univers associé est $\Omega$ = {1;2;3;4;5;6}. Notons $\{\omega_i\}$ l'événement élémentaire "obtenir le chiffre *i*", $1 \leq i \leq 6$**

| Nombre de lancers | Nombre d'apparitions du chiffre 1 | Fréquence |
|---|---|---|
| 1 000 | 173 | 0,1730 |
| 5 000 | 844 | 0,1688 |
| 10 000 | 1 650 | 0,1650 |
| 20 000 | 3 320 | 0,1660 |

**4 séries d'épreuves comportant 1 000, 5 000, 10 000 et 20 000 lancers ont été résumées pour l'apparition du chiffre 1 par le tableau ci-contre :**

**On remarque que les résultats sont très proches. On supposera, comme en physique, que l'on admet "une valeur exacte" (ou théorique) de la mesure.**

**Nous admettrons que la fréquence de $\{\omega_i\}$ est une valeur approchée d'un nombre réel compris entre 0 et 1 que l'on appelle la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ que l'on note $p(\{\omega_i\})$. Dans le cas présent, on supposera**

$p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.

**Définition**

**Soit *E* une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.**

**- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, élément de [0;1] appelé probabilité de l'événement élémentaire (représentation idéale de la fréquence) tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$**

**- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.**

**En particulier, $p(\Omega) = 1$.**

**- Si A = $\varnothing$ alors $p(A) = 0$**

**2) L'hypothèse d'équiprobabilité Supposons que tous les événements élémentaires soient tels que $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = ... = p(\{\omega_n\})$. On dit alors qu'ils sont équiprobables. L'égalité $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$ entraîne**

$p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$

**Les mots "au hasard", "indiscernable au toucher", "bien équilibré", ... sous-entendent des expériences équiprobables.**

**Propriété**

**Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant *n*, si un événement A est constitué de *m***

**Éventualités alors sa probabilité est** $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif de } \Omega} = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles}}$

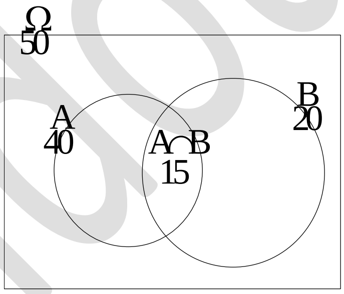
**3) Propriétés des probabilités**

**Probabilité de la réunion de deux événements**

**Exemple**

**Un sac contient un ensemble de 50 jetons de formes et de couleurs différentes. 20 sont ronds, 40 sont rouges et 15 sont à la fois ronds et rouges.**

**On tire au hasard un jeton du sac. Calculons la probabilité pour qu'il soit rond ou rouge.**




**Désignons par A et B les événements :**

**A : "obtenir un jeton rouge" et B : "obtenir un jeton rond"**

**On peut représenter la situation par le schéma ci-contre :**

**Par lecture du schéma, le nombre d'éléments de A∪B est 40 + 20 - 15 (on note Card (A∪B) = 40 + 20 - 15)**

**et** $p(\text{A ou B}) = \frac{(40 - 15) + 15 + (20 - 15)}{50} = \frac{40}{50} + \frac{20}{50} - \frac{15}{50} = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$

**Propriété**

**Si A et B sont deux événements quelconques alors** $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$

**Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles**

**Si A et B sont deux événements incompatibles, on a** $A \cap B = \varnothing$ **et** $p(\text{A et B}) = 0$

**Dans ce cas,** $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(A)$

**Conséquence**

**Soit A un événement quelconque. A et** $\overline{A}$ **sont deux événements contraires donc** $A \cap \overline{A} = \varnothing$ **et** $A \cup \overline{A} = \Omega$**.**

**L'application directe de la dernière propriété donne** $1 = p(\Omega) = p(\text{A ou } \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$**.**

**Soit** $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

## III) Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats est muni d'une loi de probabilité *p*.

*A* et *B* sont des événements de *E*, avec *A* de probabilité non nulle.

### 1) Définition

La probabilité de *B* sachant que *A* est réalisé**,** est le nombre réel, noté $p_B(A)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité de *B* sachant que *A* est réalisé devient alors :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

= proportion du nombre d'éléments de $A \cap B$ sur le nombre d'éléments de *A*.

*Exemples*

Bilal tire 1 carte parmi les 32 d'un jeu bien battu. On s'intéresse à la probabilité de l'événement *B* :
« la carte tirée est un as » .

- Dans le cas où Mohamed n'a rien vu, il est clair que la probabilité de l'événement *B* est
$$p(B) = 4/32 = 1/8.$$
- Supposons maintenant que Mohamed a pu se rendre compte que la carte tirée n'est pas un honneur
- (valet, dame ou roi). Appelons *A* l'événement « la carte tirée n'est pas un honneur »
- de probabilité 20/32 = 5/8.

On sait que cet événement *B* est réalisé. La probabilité cherchée est alors la probabilité conditionnelle :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{4/32}{5/8} = \frac{1}{5}$$

qu'on aurait pu aussi déterminer directement (4/20 = 1/5)

L'information apportée par la réalisation de l'événement *A* a permis de diminuer la probabilité de l'événement *B*.

- Supposons que Mohamed a pu se rendre compte que la carte tirée est rouge
- (événement *A'* de probabilité 1/2).
- Dans ce cas :

$$p_{A'}(B) = \frac{p(A' \cap B)}{p(A')} = \frac{2/32}{1/2} = \frac{1}{8}$$

La réalisation de *A'* ne change pas la probabilité de *B*.

### 2) Formule des probabilités composées

Il résulte de la définition d'une probabilité conditionnelle la propriété suivante :

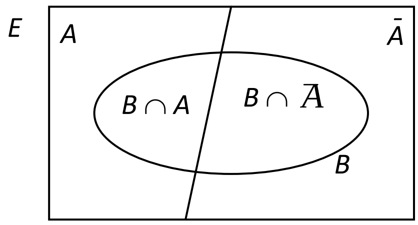
Si on connaît la probabilité de l'événement *A* et la probabilité conditionnelle de *B* sachant qu'A est réalisé, on en déduit la probabilité de $A \cap B$ (événement *A* et *B*) :

$$p(A \cap B) = p(A)\, p_A(B)$$

*On peut aussi écrire* $p(A \cap B) = p(B)\, p_B(A)$.

### 3) Formule des probabilités totales

Si *A* est un événement de probabilité non nulle et $\bar{A}$ son événement contraire, alors les événements $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ constituent une partition de




*B*.

**Par suite, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A)\, p_A(B) + p(\bar{A})\, p_{\bar{A}}(B)$.**

**$A$ et $\bar{A}$ constituent une partition de $E$. Cette situation se généralise à une partition quelconque de $E$.**

**Formule des probabilités totales**

> Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements de probabilités non nulles constituant une partition de l'univers $E$.
> La probabilité d'un événement $B$ de $E$ peut se calculer par la formule :
> $$p(B) = p(A_1 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$
> qu'on peut aussi écrire :
> $$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

## 4) Événements indépendants

Soit $E$ l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire ; $A$ et $B$ sont deux événements de $E$.

**Première définition**

> Les événements $A$ et $B$ sont indépendants lors que la probabilité de l'un est la même que l'autre soit * ou non réalisé.
> Autrement dit : $p(B) = p_A(B)$ ou $p(A) = p_B(A)$.

**Exemple**

- C'est le cas des événement $A'$ et $B$ étudiés au début du chapitre (voir l'exemple du tirage d'une carte)
- , mais pas des événements $A$ et $B$...
- On tire deux cartes au hasard une à une avec remise, dans un jeu de 32 cartes. On considère
- les événements $T_1$ :
- « la première carte tirée est un trèfle » et $T_2$ : « la deuxième carte tirée est un trèfle". Il est facile de
- montrer que
- les deux événements sont indépendants, mais que ce n'est plus le cas lorsque le tirage a lieu sans
- remise.

**Deuxième définition**

> Dire que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants signifie que :
> $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

## *5) Modélisation d'expériences indépendantes*

**On considère les deux expériences aléatoires suivantes :**

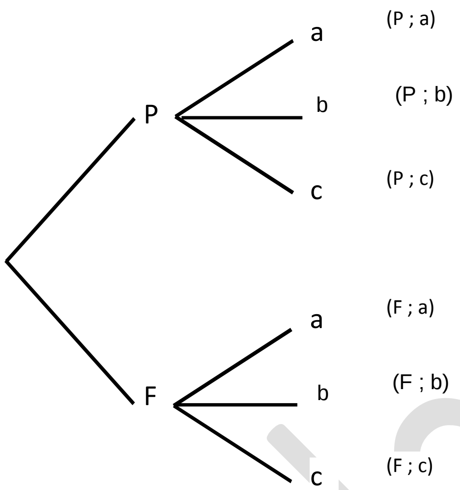
**$A$ : on lance une pièce de monnaie équilibrée, les issues de l'expérience sont notées $P$ et $F$.**

**$B$ : on tire au hasard un jeton dans une urne qui contient trois jetons portant les lettres $a$, $b$ et $c$.**

**Lorsqu'on effectue successivement les deux expériences $A$ et $B$, l'issue de l'une quelconque des deux expériences ne dépend pas de l'issue de l'autre.**

**Les issues de la nouvelle expérience qui consiste à effectuer successivement *A* et *B* sont des listes d'issues telles que ( *P* ; *c* ), …**

**L'arbre donnant toutes les listes de résultats possibles** est :




**On modélise cette expérience aléatoire en définissant la probabilité d'une liste d'issues comme le produit des probabilités de chaque issue.**

## IV) Lois

### 1) Espérance et variance d'une loi

**Un exemple**

**Un jeu consiste à jeter un dé truqué.**

**On sait que $p(1) = p(3) = p(5) = p(6) = 0{,}1$ et que $p(2) = 0{,}2$ et $p(4) = 0{,}4$.**

**Le joueur gagne 10UM si le 1 sort, 20UM si le 2 sort, 30UM si le 3 sort, …, 60UM si le 6 sort.**

**On considère l'ensemble des gains possibles, soit {10,20,30,40,50,60}.**

**et la loi de probabilité associant à chacun des gains la probabilité de l'obtenir.**

**Cette loi est donnée par :**

| Gain | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité du gain | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |

**On appelle espérance de cette loi le nombre**

$$m = 10\times0{,}1 + 20\times0{,}2 + 30\times0{,}1 + 40\times0{,}4 + 50\times0{,}1 + 60\times0{,}1 = 35.$$

**On appelle variance de cette loi le nombre :**

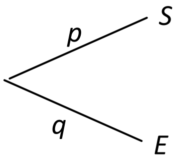
$$V = (10-35)^2\times0{,}1 + (20-35)^2\times0{,}2 + (30-35)^2\times0{,}1 + (40-35)^2\times0{,}4 + (50-35)^2\times0{,}1 + (60-35)^2\times0{,}1 = 205$$

**L'écart-type de cette loi, noté $\sigma$, est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$.**

## 2) Loi de Bernoulli

**Une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles (succès *S* ou échec *E*) est appelée**

***épreuve de Bernoulli*.**




**La loi de Bernoulli associée à cette épreuve est défini par :**

avec $q = 1 - p$

| $x_i$ | $S$ | $E$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $p$ | $q$ |

### Exemples

- **Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue un exemple simple d'épreuve de Bernoulli :**
- **la probabilité du succès (pile par exemple) est 0,5, ainsi que celle de l'échec.**

**La loi est résumée par le tableau**

| $x_i$ | $S$ | $E$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | **1/2** | **1/2** |

- **On lance un dé cubique bien équilibré et on s'intéresse à l'obtention ou non du 6. La probabilité du succès est**
- **1/6. La loi est résumée par le tableau :**

| $x_i$ | $S$ | $E$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | **1/6** | **5/6** |

## 3) Loi binomiale

> On appelle *schéma de Bernoulli* une expérience qui consiste à répéter plusieurs fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.

### Exemple

- Si on jette trois fois la même pièce de monnaie en appelant succès l'événement « obtenir pile » on est en présence
- d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.

- Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches.

Une expérience consiste à extraire trois boules de l'urne et à noter leur couleur.

Si le tirage se fait avec remise, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à trois épreuves, la probabilité

d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant 5/8, et celle d'un échec (obtenir une boule noire) 3/8.

Si par contre le tirage a lieu sans remise, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres (ainsi la probabilité d'obtenir une boule blanche dépend alors des tirages précédents).

Quand dans un schéma de Bernoulli où l'on répète $n$ fois une expérience de Bernoulli avec un succès De probabilité $p$, on s'intéresse au nombre de succès obtenu.
Ce nombre est dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, ..., n\}$.
La loi de probabilité sur cet ensemble est appelée *la loi binomiale de paramètres n et p*.

Propriété L'espérance de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est égale à $np$.

# FORMULAIRE – RESUME – MATHS en TERMINALE

## COMPLEXES

*Professeur sy saidou*

$M(x,y)$ dans $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ a pour affixe $z$ : $z = x + i\,y$ dans $\mathbb{C}$

Le conjugué de $z$ est : $\bar{z} = x - iy$

Module de $z$ : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $\theta =$ angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$

Forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$ (avec $|z| = \rho$ et $\theta =$ angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ = argument de $z$)

Conjugué de $z$ : $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Soient A et B d'affixes $z_A$ $z_B$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$

***Propriétés des modules***

$|\bar{z}| = |z|$ ; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ; $|zz'| = |z||z'|$

***Propriétés des arguments***

$\arg zz' = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$ $\qquad$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ $[2\pi]$ $\qquad$ $\arg \bar{z} = -\arg z$ $[2\pi]$

***Transformations usuelles***

soit une transformation telle que $M(z) \rightarrow M'(z')$

**Translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $t$ : $z' = z + t$

**Homothétie** de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $k$ : $z' - \omega = k\,(z - \omega)$

**Rotation** de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle $\theta$ : $z' - \omega = e^{i\theta}\,(z - \omega)$

**EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$**

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\boldsymbol{\Delta > 0}$ alors 2 solutions réelles $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ ; $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$

si $\boldsymbol{\Delta = 0}$ alors 1 solution réelle $z_0 = -\frac{b}{2a}$

si $\boldsymbol{\Delta < 0}$ alors 2 solutions complexes $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ; $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ ; $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$

si $\Delta \neq 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ et si $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

## IDENTITES REMARQUABLES

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ $\qquad$ $a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3\,ab^2 - b^3$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots\dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots\dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

*Professeur sy saidou*

## SUITES

**Suites arithmétiques** de raison r et premier terme $u_0$ alors $\quad u_{n+1} = u_n + r \quad ou \quad u_n = u_0 + nr$

Somme de n termes consécutifs de la suite = "nbre de termes" $\bullet \dfrac{\text{"1°terme" + "dernier"}}{2}$

en particulier $1+2+3+\dots\dots\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

**Suites géométriques** de raison q et premier terme $u_0$ alors $\quad u_{n+1} = q.u_n \quad ou \quad u_n = u_0q^n$

Somme de n termes consécutifs de la suite = "1° terme" $\bullet \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ avec $q \neq 1$

en particulier $1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$

## FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

$e^0 = 1$ ; $e^{a+b} = e^a e^b$ ; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ ; $(e^a)^b = e^{ab}$ ; $\ln e = 1$ ; $\ln 1 = 0$ ; $\ln ab = \ln a + \ln b$ ; $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$a^x = e^{x\ln a}$ ; $\ln a^x = x\ln a$ ; $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

## LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0 \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

## DERIVEES PRIMITIVES

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x$ | $1$ |
| $\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{-n}{x^{n+1}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |

***Opérations et application des dérivées***

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (k\,u)' = k\,u'$ $\quad (u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ $\quad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ $\quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(u^n)' = n\,u'u^{n-1}$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad (v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$ $\quad (e^u)' = u'e^u$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Equation de la tangente à la courbe $C_f$ en $A(a; f(a))$ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

## CALCUL INTEGRAL - EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Si $F$ primitive ce $f$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ et si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ alors $g'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$

si $a \le b$ et $f \ge 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \ge 0$ ; si $a \le b$ et $f \le g$ alors $a$ $\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$

si $a \le b$ et $m \le f \le M$ alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,dt \le M(b-a)$

***Intégration par parties*** $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \left[u(t)\,v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$

***Equa diff***

Les solutions de $y' = ay + b$ sont des fonctions $f(x) = C\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C$ est un réel

## PROBABILITES

***Dénombrements*** :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ avec $0! = 1$ et $(n+1)! = n! \times (n+1)$

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est noté $\binom{n}{p}$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad ; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad ; \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

Développement $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$

***Généralités*** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ; $P(\Omega) = 1$ ; $P(\emptyset) = 0$

En cas d'équiprobabilité $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{"nombre de cas favorables"}}{\text{"nombre de cas possibles"}}$

Proba de $B$ sachant $A$ : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ; si $A$ et $B$ sont indépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

## TRIGONOMETRIE - PRODUIT SCALAIRE

***Formules d'addition***

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

***Formules de duplication***

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

***Valeurs remarquables***

| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | n'existe pas | 0 |

***Produit scalaire***

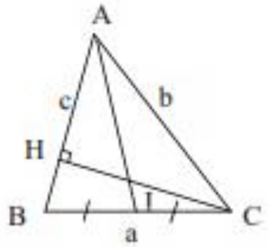
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ; soit $\theta =$ angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$

si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$

si $\overrightarrow{OB}$ se projette en $\overrightarrow{OH}$ sur $\overrightarrow{OA}$ alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = OA \times OH$ (si les vecteurs sont de même sens)

$\vec{u} \bullet \vec{v} = -OA \times OH$ (si sens contraires)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$




***Al Khashi*** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

***Théorème de la médiane*** : $c^2 + b^2 = 2AI^2 + \dfrac{a^2}{2}$

***Aire du triangle*** : $S = \dfrac{1}{2} bc \sin\hat{A}$

***Formule des sinus*** : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

***Equation de droite*** :

$ax + by + c = 0$ équation de D qui admet pour vecteur directeur $\vec{u}$ (-b;a) et normal ("⊥") $\vec{v}$ $(a;b)$