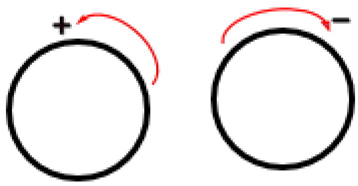
ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

ANGLES ORIENTES

Orientation du plan

Il existe deux façons et deux seulement de parcourir un cercle. On convient d'appeler **sens positif ou sens direct** le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre.



Sens direct **Sens indirect**

Orienter un cercle c'est choisir le sens de parcours pour ce cercle.

On dit qu'un plan est orienté si tous ses cercles sont orientés dans le même sens.

Une unité de longueur étant choisie, on appelle **cercle trigonométrique** du plan orienté, tout cercle orienté dans le sens positif de rayon 1.
Sa circonférence est 2π

Angles orientés

Dans le plan orienté, un angle orienté de sommet O est un couple de 2 demi-droites de même origine $([OA);[OB))$.
Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.

On distingue deux sens :

- **Le sens positif ou trigonométrique** qui est le sens contraire aux aiguilles d'une montre.
- **Le sens négatif** qui est le sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.

Le radian

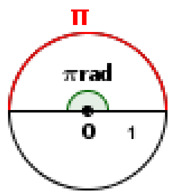
Le radian (*en abrégé **rad***) est une unité de mesure d'angles choisie de façon que l'angle plat (**180°**) mesure π radians.

On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de passer de degrés radians et inversement.

Degrés	180	x
Radians	π	α

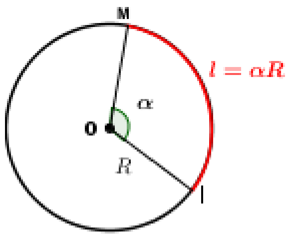
Sur un cercle $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1, le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.



Un angle de π rad intercepte sur le cercle $\mathcal{C}$ un arc de longueur π.

Cet angle a aussi pour mesure 180°

Si I et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon R tels que la longueur de l'arc $\widetilde{IM}$ soit égal à ℓ, alors la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ est égale à $\frac{\ell}{R}$



Conversion de 45° en rad

$180° \longrightarrow \pi$

$45° \longrightarrow x$

$180x = 45\pi \Leftrightarrow x = \frac{45}{180}\pi$

$x = \frac{\pi}{4}$

Conversion de $\frac{2\pi}{3}$ rad en degré

$180° \longrightarrow \pi$

$x \longrightarrow \frac{2\pi}{3}$

$\boldsymbol{x\pi = 180 \times \frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{180\times 2}{3}$

$x = 120°$

On obtient le tableau de conversion suivant :

Mesure en degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Mesure en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Mesure principale d'un angle

Soit x un angle.
α est la mesure principale de x si $\boldsymbol{\alpha \in \,]-\pi;\pi]}$ et il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{x = \alpha + 2k\pi}$.

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ et θ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$. On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ tout nombre réel de la forme $\boldsymbol{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$.

Exemple

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$; … ***sont des mesures d'un même angle.***

Soient $\alpha_1 = \frac{-3\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{-3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

Donc α_1 ***et*** α_2 ***sont deux mesures d'un même angle orienté.***

Soient $x = \frac{4\pi}{3}$ et $y = \frac{7\pi}{3}$

$x - y = \frac{4\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} = -\pi$

Donc α_1 ***et*** α_2 ***ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.***

Détermination de la mesure principale

➢ ***Méthode d'encadrement***

Déterminons la mesure principale de $x = \frac{43\pi}{7}$

Soit α la mesure principale de x. $x = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = x - 2k\pi$ avec $\alpha \in \,]-\pi;\pi]$

$-\pi < \alpha \leq \pi$

$-\pi < \frac{43\pi}{7} - 2k\pi \leq \pi$

$-\pi - \frac{43\pi}{7} < -2k\pi \leq \pi - \frac{43\pi}{7}$

$\frac{18}{7} \leq k < \frac{25}{7} \Leftrightarrow 2{,}57 \leq k < 3{,}57$

Donc $k = 3$.

D'où $\alpha = \frac{43\pi}{7} - 6\pi = \frac{\pi}{7}$

➢ ***Méthode de la division euclidienne***

Déterminons la mesure principale de $x = \frac{-2019\pi}{4}$ *et* $y = \frac{198\pi}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ \hline 3 & 504 \end{array}$$

$x = \frac{-2016\pi - 3\pi}{4}$

$x = -504\pi - \frac{3\pi}{4}$

la mesure principale de $x = \frac{-3\pi}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 198 & 5 \\ \hline 3 & 39 \end{array}$$

$y = \frac{198\pi}{5} = \frac{40\pi \times 5 - 2\pi}{5}$

$y = 40\pi - \frac{2\pi}{5}$

la mesure principale de $x = \frac{-2\pi}{5}$

La mesure principale d'un « nombre pair de π » est : 0

La mesure principale de $2\pi;\ 4\pi;\ -16\pi$ est 0.

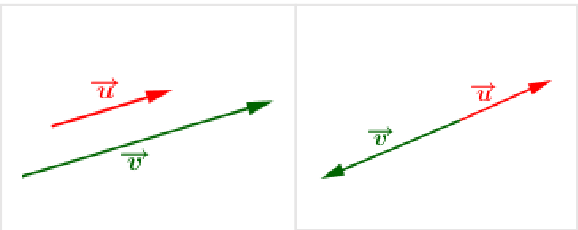
La mesure principale d'un « nombre impair de π » est : π.

La mesure principale de $-\pi;\ 3\pi;\ 29\pi;\ -397\pi$ est $\boldsymbol{\pi}$.

Propriétés des angles orientés

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

- ➢ $(\vec{u};\ \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u};\ -\vec{u}) = \pi$.
- ➢ Les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens si et seulement si : $(\vec{u};\ \vec{v}) = 0$
- ➢ Les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire si et seulement si : $(\vec{u};\ \vec{v}) = \pi$.



Relation de Chasles

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.

$$(\vec{u};\vec{w}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{w})$$

Angles orientés et vecteurs opposés

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

- ➢ $(\vec{v};\ \vec{u}) = -(\vec{u};\ \vec{v})$
- ➢ $(\vec{u};\ -\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\ \vec{v})$
- ➢ $(-\vec{u};\ \vec{v}) = \pi + (\vec{u};\ \vec{v})$
- ➢ $(-\vec{u};\ -\vec{v}) = (\vec{u};\ \vec{v})$

TRIGONOMETRIE

Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).
(C) le cercle trigonométrique de centre O.

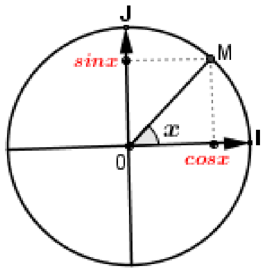
Pour tout réel x, il existe un unique point M de (C) tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

$\cos x$ est l'abscisse de M dans le repère (O,I,J).

$\sin x$ est l'ordonnée de M dans le repère (O,I,J).

Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$



Propriétés immédiates

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

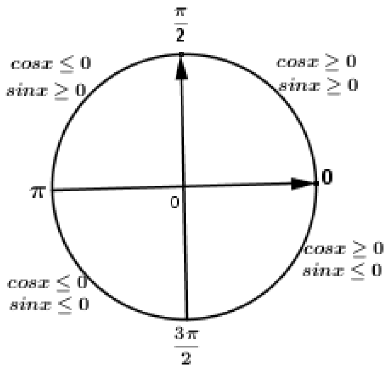
$\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

$\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + 2k\pi) = \sin x$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

$\tan(x + \pi) = \tan x$

Signe de cosinus et sinus



$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos x \geq 0; \sin x \geq 0$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \cos x \leq 0; \sin x \geq 0$

$\forall x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \cos x \leq 0; \sin x \leq 0$

$\forall x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \cos x \geq 0; \sin x \leq 0$

Exercice d'application

1) On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$

b) En déduire $\cos\frac{25\pi}{12}$

2) Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{2}{5}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Corrigé

1- a) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$

$\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} = 1$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$

D'où $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

b) $\cos\frac{25\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{25\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) Calculons $\cos x$

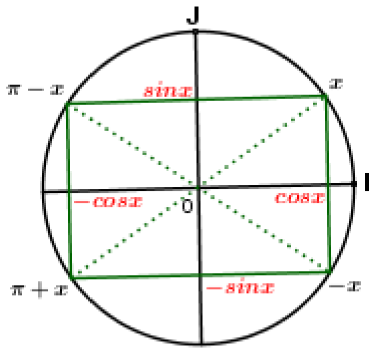
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$

Comme $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; $\cos x < 0$

Donc $\cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Relations trigonométriques

Configuration du rectangle

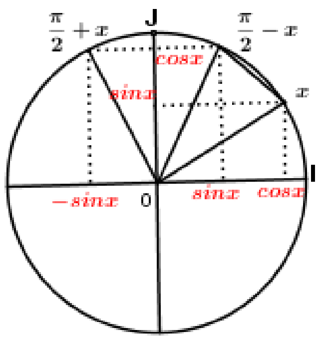


$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

Configuration du triangle



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Exercice d'application

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$

$B = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

Corrigé

$A = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$

$A = -\sin x + \sin x - \sin x$ $\boxed{A = -\sin x}$

$B = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$

$B = \sin x + \cos(\pi + x) + \sin(-x) + \cos(x)$

$B = \sin x - \cos x - \sin x + \cos x$

$\boxed{B = 0}$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$C = \cos x - \sin x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

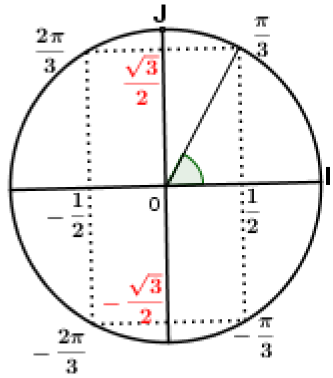
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

$C = \cos x - \sin x - \cos x$

$\boxed{C = -\sin x}$

Déterminons sinus et cosinus de : $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$



α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

On donne : $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

Calculons cosinus et sinus de $\frac{7\pi}{6}$ *et* $\frac{11\pi}{6}$

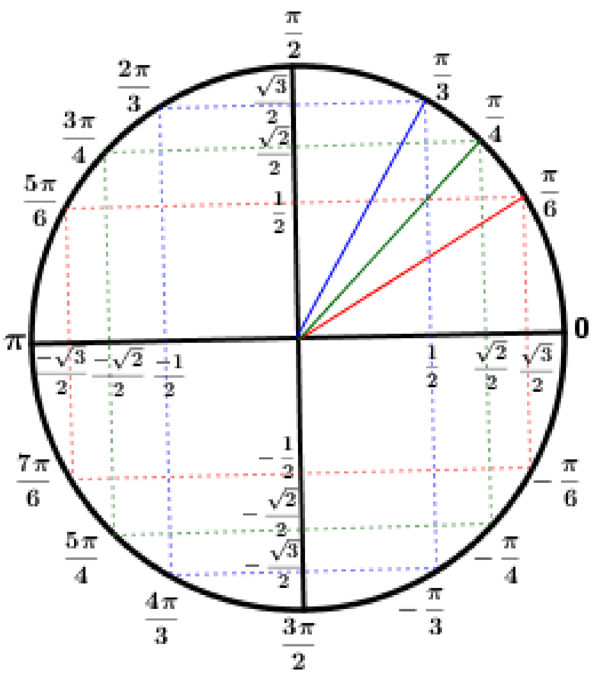
$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

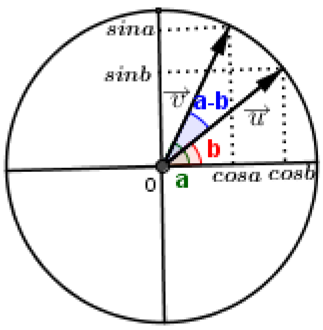
$\sin\frac{13\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

Graduation du cercle trigonométrique



Formules d'addition

Considérons le cercle trigonométrique suivant :



$\vec{u}\binom{\cos b}{\sin b}$ et $\vec{v}\binom{\cos a}{\sin a}$

Calculons le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de deux manières :

D'une part : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(a-b)$

D'autre part : $\vec{u}.\vec{v} = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

On en déduit que :

$\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

Comme le cercle est trigonométrique :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

Donc : $\mathbf{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b}$

- $\cos(a+b)$

$a+b=a-(-b)$

$\cos\big(a-(-b)\big)=\cos a\,.\cos(-b)+\sin a\,.\sin(-b)$

$\cos\big(a-(-b)\big)=\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b$

Donc : $\boldsymbol{\cos(a+b)=\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b}$

- $\sin(a+b)$

$\sin(a+b)=\cos[\frac{\pi}{2}-(a+b)]$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\cos[\frac{\pi}{2}-(a+b)]=\cos[(\frac{\pi}{2}-a)-b)]$

$\cos[\frac{\pi}{2}-(a+b)]=\cos(\frac{\pi}{2}-a)\,.\cos b+\sin(\frac{\pi}{2}-a)\,.\sin b$

$\cos[\frac{\pi}{2}-(a+b)]=\sin a\,.\cos b+\cos a\,.\sin b$

Donc : $\boldsymbol{\sin(a+b)=\sin a\,.\cos b+\cos a\,.\sin b}$

- $\sin(a-b)$

$\sin(a+b)=\sin\big(a+(-b)\big)$

$\sin\big(a+(-b)\big)=\sin a\,.\cos(-b)+\cos a\,.\sin(-b)$

$\sin\big(a+(-b)\big)=\sin a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b$

Donc : $\boldsymbol{\sin(a-b)=\sin a\,.\cos b-\cos a\,.\sin b}$

Résumé

$\boldsymbol{\cos(a-b)=\cos a\,.\cos b+\sin a\,.\sin b}$

$\boldsymbol{\cos(a+b)=\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b}$

$\boldsymbol{\sin(a+b)=\sin a\,.\cos b+\cos a\,.\sin b}$

$\boldsymbol{\sin(a-b)=\sin a\,.\cos b-\cos a\,.\sin b}$

$\boldsymbol{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\,.\tan b}}$

$\boldsymbol{\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,.\tan b}}$

Exemple :

Sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, Déterminons cosinus et sinus de $\frac{7\pi}{6}$

$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\,.\sin\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\,.\sin\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\boxed{\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\ et\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

Formules de duplication

$\cos(a+a)=\cos a\,.\cos a-\sin a\,.\sin a$

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

Or $\cos^2 a+\sin^2 a=1\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a$

$\cos(2a)=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cos^2 a-1$

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$

$\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

$\sin(a+a)=\sin a\,.\cos a+\cos a\,.\sin a$

$\sin(2a)=2\sin a\,.\cos a$

$\sin(2a)=2\sin a\cos a$

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1\Leftrightarrow\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\cos(2a)=1-2\sin^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\boldsymbol{\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}}$ $\qquad\boldsymbol{\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}}$

Transformation de produit en somme

$cos a+cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$cos a-cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$sin a+sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$sin a-sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin(\frac{a-b}{2})$

Transformation de produit en somme

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

Exercices

1) Déterminer la valeur principale de chacun des angles suivants puis préciser, dans chaque cas $\cos a\ \ et\ \ \sin a$

$a=\frac{373\pi}{4}$; $a=\frac{224\pi}{3}$; $a=\frac{358\pi}{6}$; $a=-\frac{93\pi}{4}$

2) Démontrer que pour tout réel α, on a :

a) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin(2\alpha)$

b) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$

3) x est un nombre réel tel que $\cos x\neq 0$

a) Démontrer que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

b) Sachant que $\tan x=\frac{1}{3}$ et $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

calculer $\cos x$ et $\sin x$.

4) x est un nombre réel non multiple de $\frac{\pi}{2}$

Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$

EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Equation du type $\cos x = a$

- Si $|a| > 1 \quad (a \in \mathbb{R})$

L'équation n'admet aucune solution.

- Si $|a| \leq 1 \quad (a \in \mathbb{R})$

Il existe un réel tel que
$\cos \alpha = a$ et l'équation devient :

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$
$(k \in \mathbb{Z})$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$
$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Equation du type $\sin x = \sin a$

Soit a un réel donné.

$\boldsymbol{\sin x = \sin a \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})}$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$
$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Equation du type $\tan x = \tan a$

Soit a un réel donné.

$\boldsymbol{\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi}$
$\boldsymbol{(k \in \mathbb{Z})}$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$
$\tan^2 x = \frac{1}{3}$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \\ \tan x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

EXERCICES D'APPLICATION

1) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, $\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 3x$

Correction

1) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$x \in]-\pi; \pi] \Leftrightarrow -\pi < \frac{\pi}{12} + k\pi \leq \pi$
$\Leftrightarrow -\frac{13}{12} < k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow -1{,}08 < k \leq 0{,}91$
$k \in \{-1; 0\}$
Si $k = -1$; $x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$
Si $k = 0$; $x = \frac{\pi}{12}$

$-\pi < -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{11}{12} < k \leq \frac{13}{12} \Leftrightarrow$
$-0{,}91 < k \leq 1{,}08 \Leftrightarrow \quad k \in \{1; 0\}$

Si $k = 1$; $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$
Si $k = 0$; $x = -\frac{\pi}{12}$

$$\boxed{S_{]-\pi;\pi]} = \{-\frac{\pi}{12};\ -\frac{11\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\}}$$

2) $\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{6}$
$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in]-\pi; \pi] \Leftrightarrow -\pi < \frac{5\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \leq \pi$
$\Leftrightarrow -\frac{41}{12} < k \leq \frac{31}{12} \Leftrightarrow -3{,}41 < k \leq 2{,}58$
$k \in \{-3; -2 - 1; 0; 1; 2\}$

Si $k = -3$; $x = -\frac{31\pi}{36}$ Si $k = -2$; $x = -\frac{19\pi}{36}$
Si $k = -1$; $x = -\frac{7\pi}{36}$ Si $k = 0$; $x = \frac{5\pi}{36}$
Si $k = 1$; $x = \frac{17\pi}{36}$ Si $k = 2$; $x = \frac{29\pi}{36}$

$$\boxed{S_{]-\pi;\pi]} = \{-\frac{31\pi}{36};\ -\frac{19\pi}{36}; -\frac{7\pi}{36}; \frac{5\pi}{36}; \frac{17\pi}{36}; \frac{29\pi}{36}\}}$$

3) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-3x)$
$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos[\frac{\pi}{2} - (-3x)]$
$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{6} - 2k\pi;\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Equation du type : $a\cos x + b\sin x = c$

Soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Posons $p(x) = a\cos x + b\sin x$

$p(x) = r\left(\frac{a}{r}\cos x + \frac{b}{r}\sin x\right)$

Soit $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{a}{r}\\ \sin\theta = \frac{b}{r}\end{cases}$

$p(x) = r(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x)$

$p(x) = r\cos(x-\theta)$

$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow r\cos(x-\theta) = c$

Il suffit donc de résoudre l'équation :

$\boldsymbol{\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}}$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 3$

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 3$

$2\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\cos x + \frac{3}{2\sqrt{3}}\sin x\right] = 3$

$2\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right] = 3$

$2\sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right] = 3$

$2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\end{cases}$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$

Autres types d'équations

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

Posons $X = \cos x$.

L'équation devient : $2X^2 - 5X + 2 = 0$

$X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 2$

$X_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\end{cases}$

$X_2 = 2 \Leftrightarrow \cos x = 2$: Pas de solution

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 1$

b) $3\sin x - 4\cos x = 2$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - 1 = 0$

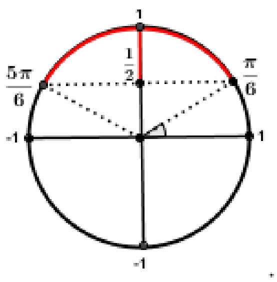
d) $-2\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Inéquation avec sinus

Exemple 1 : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

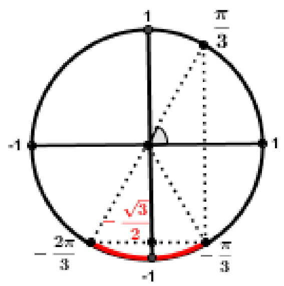


$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Exemple 2 : $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que $\sin\frac{-\pi}{3} = \sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



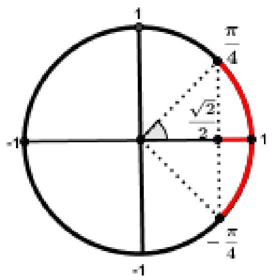
$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[$

Inéquation avec cosinus

Exemple 1 : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

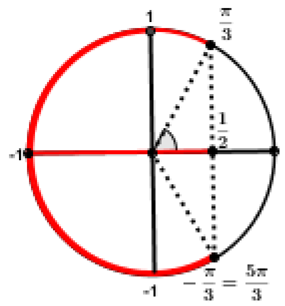


$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

Exemple 2 : $\cos x < \frac{1}{2}$

On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[$

Exemple 3

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$

$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{1}{2}$

Soit $X = 2x - \frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

$-\frac{\pi}{24} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi$

Si $k = -1$,

$x \in \left[-\frac{25\pi}{24}; -\frac{17\pi}{24}\right] \cap]-\pi;\pi]$

Si $k = 0$,

$x \in \left[-\frac{5\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}\right] \cap]-\pi;\pi] = \left[-\frac{5\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}\right]$

Si $k = 1$,

$x \in \left[\frac{23\pi}{24}; \frac{31\pi}{24}\right] \cap]-\pi;\pi] = \left[\frac{23\pi}{24}; \pi\right]$

$\boxed{S = \left]-\pi; -\frac{17\pi}{24}\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{24}; \pi\right]}$

Exercice d'application

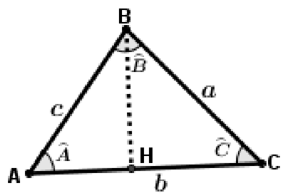
Résoudre dans dans $[0; 2\pi[$

a) $\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3}) < 1$

b) $(\cos x - \frac{1}{2})(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \leq 0$

RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

Considérons le triangle suivant



➢ **Formule d'AL KASHI**

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos\hat{A}$

Donc $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$

De maniére analogue, on trouve aussi :

$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$

Exemple :

Un triangle ABC est tel que $AB = 66\ m$, $AC = 78\ m$ et $\widehat{ABC} = 55°$

Calculons BC

$BC^2 = 78^2 + 66^2 - 2 \times 78 \times 66\cos(55°)$

$\boldsymbol{BC \approx 67{,}3\ m}$

➢ Calcul d'aire ($\mathcal{A}$)

$\mathcal{A} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{AC \times BH}{2}$

$\sin\hat{A} = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \times \sin\hat{A}$

Donc $\mathcal{A} = \frac{AC \times AB \times \sin\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

De façon analogue, on a aussi :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$

Donc $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}}}$

En multipliant cette suite d'égalités par $\frac{2}{abc}$, on a :

$\frac{2\mathcal{A}}{abc} = \frac{2bc\sin\hat{A}}{2abc} = \frac{2ab\sin\hat{C}}{2abc} = \frac{2ac\sin\hat{B}}{2abc}$

$\frac{2\mathcal{A}}{abc} = \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{C}}{c} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$

On conclut que : $\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}}}$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle :

1) $AC = 6$; $\hat{A} = 60°$; $\hat{C} = 45°$. Calculer AB.

2) $AB = 4$; $\hat{A} = 60°$ et $BC = 7$. Calculer $\hat{C}$.

3) $AB = 7, AC = 9$ et $\hat{A} = 60°$.
Calculer l'aire de ABC.

Réponses

1) $AB = 4{,}4$ 2) $\hat{C} = 30°$ 3) $\mathcal{A} = \frac{63\sqrt{3}}{2}$