COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

2de C

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques

2de C

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 VECTEURS ET POINTS DU PLAN

I- SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Comment l'enseignant exploitera en classe la situation d'apprentissage.

- *Le professeur met la situation à la disposition des élèves ;*
- *Lecture silencieuse par chaque élève ;*
- *Le professeur lit à haute voix la situation puis explique les notions de résistance et de condensateur.*
  - ✓ *Un circuit monté en série, est un circuit dont les composantes « suivent » tout le contour du circuit.*
  - ✓ *Une résistance dans un circuit électrique est un dispositif qui a pour rôle de résister à la circulation du courant électrique, elle régule l'intensité du courant électrique. Plus la résistance est élevée plus l'intensité du courant électrique est faible. Son unité de mesure est l'Ohm (symbole :Ω). Sans la présence d'une résistance, l'intensité du courant électrique pourrait endommager les appareils.*
  - ✓ *Un condensateur est un dispositif électrique qui stocke le courant électrique entre ses deux plaques (appelées armatures).*

1. Le professeur pose (par exemple) la question suivante pour faire ressortir le contexte.

Q1 : Dis à quelle occasion l'élève de 2^{nde} C rencontre-t-il le circuit R, C dans un manuel.

Réponse attendue : à l'occasion des recherches qu'il effectue sur ce type de circuits.

2. Le professeur pose (par exemple) les questions suivantes pour faire ressortir la circonstance.

Q2 : Dis quel type de circuit R, C rencontre-t-il dans l'exercice.

Réponse attendue : l'élève rencontre un exercice portant sur le circuit R, C montée en série. Il existe également des circuits R, C montés en parallèles.

3. Le professeur pose (par exemple) la question suivante pour faire ressortir la tâche.

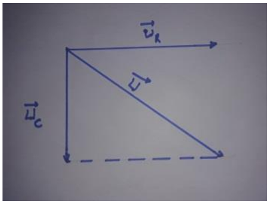
Q3 : détermine les différentes tâches d'exécuter dans cet exercice ?

Réponse attendue : il lui est demandé de construire le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_R + \vec{u}_C$ avec la figue qui accompagne puis de calculer l'intensité $\|\vec{u}\|$ de $\vec{u}$.

A la fin de cette partie, le professeur indique alors aux élèves qu'au terme de ce cours ils seront capables d'exécuter correctement les tâches qui ont été identifiées.

Réponse aux tâches identifiées (la résolution de ces tâches n'est pas à exiger aux élèves à ce stade)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$; $\|\vec{u}\| = 50\ volts$. *On est dans une configuration de triangle Pythagore*



A la fin de cette partie, le professeur indique alors aux élèves qu'au terme de ce cours ils seront capables d'exécuter correctement les tâches qui ont été identifiées.

Enfin il profitera de la tâche énoncée par ses élèves pour faire avec eux la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

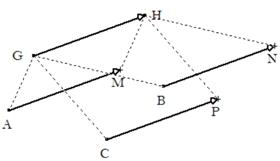
II- DECOUVERTE DES HABILETES

- **Activité 1 Représentant d'un vecteur**

Objectifs :

- ✓ Connaître la propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, où O est un point et $\vec{u}$ un vecteur.
- ✓ Noter un vecteur en utilisant une lettre minuscule.
- ✓ Construire le point M tel $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

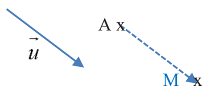
Solution



Pour chaque cas, on ne peut construire qu'un seul point.

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 1</u>

1



- **Activité 2 Combinaison linéaire de vecteurs**

Objectif :

- ✓ *Connaître la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs*

Solution

$\vec{w} = -\frac{7}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{u} - 4\vec{v}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2.

2 ABCD parallélogramme et I est milieu de [BC] donc $\overrightarrow{BI} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$. On a donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ d'où $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$

- **Activité 3 Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs**

Objectif :

Cette activité vise à connaître

- ✓ La définition de deux vecteurs colinéaires ;
- ✓ La propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs ;
- ✓ La caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.

Solution

Pour cette activité, il est conseillé au professeur d'insister sur la notion de **vecteurs de même direction** (notion vue en classe de $3^{ème}$) et de ne pas chercher à démontrer mais plutôt d'en faire plusieurs illustrations en donnant des valeurs variées du coefficient α.

Solution des exercices de fixation de l'activité 3 :

3 **– 1) Je démontre que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires.**

$6\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$ et $2\overrightarrow{KL} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$ **donc** $6\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{KL} \Rightarrow \overrightarrow{KL} = 3\overrightarrow{JK}$ **d'où les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires.**

2) J'en déduis la position des points L, J et K

D'après la question précédente les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires donc J appartient à la droite (KL) . on en déduit que les points L, K et J sont alignés.

4 **– Je démontre que les droites (JP) et (EG) sont parallèles.**

$\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{PG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{EJ} = -\overrightarrow{PG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{PG}$ sont colinéaires, les points E, P et G n'étant pas alignés, alors les droites (EJ) et (PG) sont strictement parallèles.

- **Activité 4 Base et repère du plan**

Objectifs :

Cette activité vise à connaître

- ✓ La définition d'un repère du plan.
- ✓ La définition d'une base du plan vectoriel.

Solution

1. ABC est un triangle. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires parce que les points A, B et C sont non alignés.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

$\boxed{5}$ **– 1 – F** ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – V ; 5 – V ; 6 – V ; 7 – V **.**

- **Activité 5 Coordonnées d'un vecteur dans une base**

Objectifs :

- ✓ Connaitre le couple de coordonnées d'un vecteur dans une base ;
- ✓ Décomposer un vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires algébriquement.

Remarque : par abus de lange, on dit simplement coordonnées d'un vecteur au lieu de couple de coordonnées d'un vecteur. Idem pour le point.

Solution

2- J'écris les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j}$; $\overrightarrow{OD} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

3- Je démontre que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$. Donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$ et alors $\overrightarrow{BD} = -4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 5:

$\boxed{6}$ **1)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$; **2)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$; **3)** $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$; **4)** $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ **1 -** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$

2 - $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$; $-0{,}8\overrightarrow{BA} - 2{,}4\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-15{,}2\end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ **donc** $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **dans la base** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

$\boxed{9}$ **1 -** $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{w} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$

2- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

- **Activité 6** **Base orthonormé**

Objectifs :

- ✓ Connaitre la définition d'une base orthonormée, d'un repère orthonormé.

Solution

1. $ABCD$ étant un carré, les points A, B et C sont non alignés donc le triplet (A,B,D) est un repère du plan.
2. $ABCD$ étant un carré, les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
3. $ABCD$ étant un carré, alors on a $AB = AD = 1$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6 :

10 **1-F ; 2-F ; 3- V**

- **Activité 7** **Norme d'un vecteur et vecteur unitaire**

Objectifs :

- ✓ Connaitre la définition de la norme d'un vecteur ;
- ✓ Connaitre la définition de vecteur unitaire.

Réponse

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ et dans la question 3, $AP = 1$.

1. I est le milieu de $[BD]$, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ soit $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. D'où le résultat.
2. La propriété de Pythagore donne : $AI = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + \frac{AD^2}{4}}$; $AI = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ puisque ABCD est un carré alors (AB) et (AD) sont perpendiculaires

donc d'après la propriété de Pythagore on a : $AP^2 = \frac{1}{4}AB^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 AD^2 = 1$ car AD =AB

= 1 par hypothèse. Donc $AP = 1$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7 :

11 $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \sqrt{4AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$ car AB = AD = 1

- **Activité 8** **Inégalité triangulaire**

Objectifs :

- ✓ Connaitre les propriétés de la norme d'un vecteur.

Solution

1. Si les points A, B et C sont alignés, alors on a une égalité du type : $AC = AB + BC$. Par contre s'ils ne sont pas alignés, alors $AC < AB + BC$ (inégalité triangulaire).
   Dans tous les cas, $AC \leq AB + BC$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = AC$ et $\|\vec{u}\| = AB$, $\|\vec{v}\| = BC$. D'après la question 1, on a le résultat.
3. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$. On a $\|-2\vec{u}\| = AD$ or$\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\|\vec{u}\| = AB$.
   D'où le résultat.

Solution des exercices de fixation de l'activité 8 :

12 **1-F ; 2- V ; 3- V ; 4- F**

13 **1- F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 - F**

- **Activité 9 Déterminant de deux vecteurs**

Objectifs :

✓ Connaître la définition du déterminant d'un couple de vecteurs.

Réponses aux questions de l'activité 8

1. Si l'un des vecteurs est nul, alors il est colinéaire à tout vecteur.
   Supposons que les deux vecteurs soient non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{u'} = k\vec{u}$. Alors $x' = kx$ et $y' = ky$.
   Supposons $x \neq 0$ auquel cas $k = \frac{x'}{x}$ et donc $x'y - xy' = 0$.
   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
   Si $x = 0$, la relation ci-dessus subsiste.

2. On a : $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{6}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{1}{-2}$. Ensuite $-3\text{x}(-2) - 1\text{x}6 = 0$. D'après la question 1), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et C sont alignés.

Solution des exercices de fixation de l'activité 9.

14 La bonne réponse est c)

15 $\vec{x} = -3\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{y} = \vec{u} + 2\vec{v}$ $\det(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - (-1) \times 1 = -5$

- **Activité 10 Equation cartésienne d'une droite**

Objectifs :

✓ Déterminer une équation cartésienne d'une droite à l'aide du déterminant.

Solution

Soit M un point de coordonnées (x ;y). Le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{7}{5}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). M ∈ (AB) ⟺ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, cela équivaut à $5(x+2) - 7(y+5) = 0$; soit $5x - 7x + 11 = 0$. C'est une équation cartésienne de la droite (AB).

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10 :

16

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\\ \frac{1}{4}-1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{22}{15}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{2}{3}\\ y-1\end{pmatrix}$,

M∈(AB) donc $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0\Rightarrow(AB):-\frac{3}{4}x-\frac{22}{15}y+\frac{29}{30}=0$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ 0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

M∈(AB) donc $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0\Rightarrow(AB):y=-\sqrt{2}$

- **Activité 11 Mesure algébrique**

Objectifs :

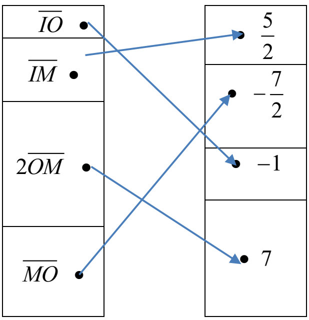
✓ Connaitre la définition de la mesure algébrique d'un couple de points.

Solution

1. $\alpha = -5$ et $\beta = 4$.
2. $x_M = 2$; $x_J = 3$; $x_F = -1$ et $x_L = -3$.
3. On a : $x_L - x_M = -5$; : $x_L - x_M = \alpha$. Ensuite : $x_J - x_F = 4$; : $x_L - x_M = \beta$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 11 :

17



18

1- $\overline{AB}=1$; $\overline{AE}=13$; $\overline{CD}=-2$; $\overline{FG}=-6$; $\overline{DF}=11$

2- $\overline{AD}+\overline{DG}=\overline{AG}=11$; $\overline{BF}-\overline{FG}=22$; $\overline{AC}+\overline{DE}=15$; $3\overline{DC}-\frac{5}{2}\overline{FE}=16$

$\overline{AC}\times\overline{CD}=-16$; $\frac{\overline{GC}}{\overline{GB}}=\frac{3}{10}$.

II- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	Comment démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ? $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$ d'où $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$ et on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2	Comment démontrer que trois points sont alignés ? Après calcul on obtient : $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $M\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right), N\left(0;\frac{1}{3}\right), P\left(\frac{3}{5};0\right)$ on déduit que $\det\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=0$ donc les points M, N et P sont alignés
3	Comment déterminer un vecteur unitaire colinéaire à un vecteur ? Après calcul on obtient : $\vec{u}_1=\frac{1}{\left\|\vec{w}\right\|}\vec{w}$ ou $\vec{u}_2=-\frac{1}{\left\|\vec{w}\right\|}\vec{w}$ or $\left\|\vec{w}\right\|=\sqrt{3+1}=2$ donc $\vec{u}_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

IV MES SEANCES D'EXERCICE

EXERCICES DE FIXATION

Combinaison linéaire

Exercice 1

$\vec{u}=-\frac{2}{5}\vec{x}-\frac{1}{5}\vec{y}$ et $\vec{v}=\frac{1}{5}\vec{x}+\frac{3}{5}\vec{y}$

Exercice 2

Tous les numéros sauf le numéro 1

Exercice 3

$\vec{u}=-2\vec{\imath}$; $\vec{v}=2\vec{\jmath}$; $\vec{w}=-2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$; $\vec{t}=-\frac{3}{2}\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$.

Vecteurs unitaires

Exercice 4

a) $\|\vec{a}\|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1$;

b) $\|\vec{b}\|=\sqrt{(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=1$;

c) $\|\vec{c}\|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1$;

d) $\|\vec{d}\|=\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{13}})^2+(\frac{2}{\sqrt{13}})^2}=1$

Exercice 5

1) On a $det(\vec{u},\vec{v}) = 3x6{,}25 - (-5)x(-3{,}75)$; $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$. D'où le résultat.
2) On a $\vec{u} = -\frac{4}{5}\vec{v}$ d'où le résultat.

Exercice 6

Une base……est une base ….. dont les vecteurs sont…. et ……. »

Solution : Une base **orthonormée** est une base **orthogonale** dont les vecteurs sont **orthogonaux** et **unitaires**.

Exercice 7

1) On lit graphiquement sans calcul, $\vec{u}\binom{-7}{5}$ et $\vec{v}\binom{-6}{-2}$.
2) Représentation graphique
3) $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{10}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{74}$; $\|\vec{w}\| = \sqrt{29}$.

Exercice 8

$\vec{X}\binom{-1}{7}$; $\vec{Y}\binom{-13}{0}$; $\vec{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$

Mesure algébrique

Exercice 9

1) Faux
2) Vrai
3) Vrai

Exercice 10

1) $\overline{CD} = -5$; $\overline{AB} = -2$; $\overline{GE} = 6$.
2) $CD = 5$; AB = 2 ; EG = 6

Réduction d'une somme de vecteurs

Exercice 11

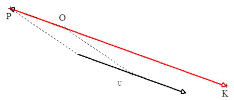
1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB}$. Donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
2) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$
3) $\frac{1}{4}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{3}{5}(2\vec{u} - \vec{v}) = \frac{29}{20}\vec{u} - \frac{17}{20}\vec{v}$

Exercice 12

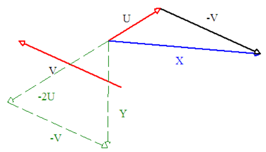
1) $2\vec{u} + (\vec{v} - 3\vec{u}) + 2(7\vec{u} + \vec{v}) = 13\vec{u} + \overrightarrow{3v}$
2) $-7(\vec{u} - \vec{w}) + 2(3\vec{v} - 3\vec{u} + \vec{w}) - 2(\vec{w} - \vec{v}) = -13\vec{u} + 8\vec{v} + 7\vec{w}$
3) $8(\vec{v} + 3\vec{u}) + 2(7\vec{u} + \vec{v}) - 10\vec{v} = 38\vec{u}$

Construction de vecteurs

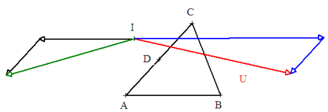
Exercice 13



Exercice 14



Exercice 15



Calcul de norme

Exercice 16

$\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{w}\| = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Exercice 17

1) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{53}}{2}$; $\|\vec{w}\| = \frac{1}{7}$.
2) On a les deux vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{7}}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{7}}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Calcul de déterminant

Exercice 18

On a :

1) $det(\vec{u}, \vec{v}) = -2$
2) $det(\vec{u}, \vec{v}) = 10$
3) $det(\vec{u}, \vec{v}) = 69$
4) $det(\vec{u}, \vec{v}) = 242$

Equation d'une droite

Exercice 19

1) $10x + y - 13 = 0$
2) $2x + 3y - 20 = 0$

Exercice 20

Considérons les deux droites (D) et (D') d'équation respectives : $x + y - 1 = 0$ et $x + y + 1 = 0$.

Ces deux droites ont même vecteur directeur $\vec{u}\binom{-1}{1}$ mais le point A de coordonnées (1 ;0) appartient à (D) mais il n'appartient pas (D'). Donc ces deux droites ont même vecteur directeur mais ne sont pas confondues.

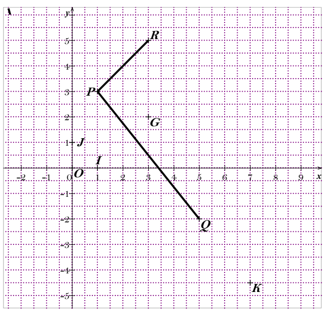
EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

Exercice 21

1) a) On a : $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{AC}$.
   Donc $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   b) On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{O}$.
   Donc $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 4\overrightarrow{IJ}$. Donc $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{JC}$.
   Donc $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JI} = \vec{O}$.
2) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JI} = \vec{O}$ signifie que J est le milieu du segment $[IC]$.

Exercice 22

1) Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on a $\overrightarrow{PQ}\binom{4}{-5}$ et $\overrightarrow{PR}\binom{2}{2}$ ensuite $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 8 + 10 = 18$.
   $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \neq 0$. Donc les points P, Q et R sont non alignés.
2) Voir figure ci-dessous.
3) On a $\overrightarrow{GP}\binom{-2}{1}$; $\overrightarrow{GQ}\binom{2}{-4}$; $\overrightarrow{GR}\binom{0}{3}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}$ a pour coordonnées $\binom{0}{0}$; donc
   $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$.
4) a)On a : $-\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{KP} + 3\overrightarrow{KQ}$. Or : $-\overrightarrow{KP} + 3\overrightarrow{KQ} = \vec{O}$. D'où
   $-\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OK}$.
   b)De la relation $-\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OK}$, on déduit les coordonnées de $2\overrightarrow{OK}$ puis $\overrightarrow{OK}\binom{7}{-4{,}5}$.
   Donc $K(7; -4{,}5)$.

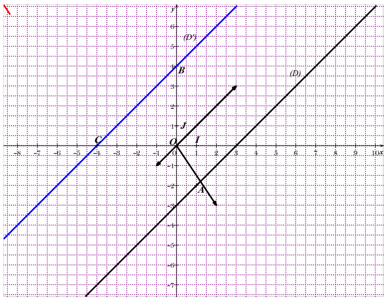


Exercice 23

1) Faux car $\|\vec{u}\| = \sqrt{17}$.
2) Vrai car $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.
3) Vrai car $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.
4) Faux car cette expression ne représente pas un vecteur.
5) Vrai ; c'est une propriété du cours.
6) Vrai .
7) Faux car $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc K(3 ;-1).
8) Vrai.

Exercice 24

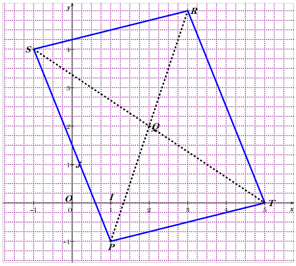
1) Voir graphique ci-dessous.
2) On a : $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il en résulte que les droites (D) et (D') sont parallèles.
3) On a : $det(\vec{u}, \vec{w}) = 5$. $det(\vec{u}, \vec{w}) \neq 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Il en résulte que les droites (D) et (L) sont non parallèles.
   Le point d'intersection des droites (D) et (L) est le point de coordonnées $(-\frac{6}{5}; -\frac{21}{5})$.
4) Voir graphique.



Exercice 25

1) On a : $\overrightarrow{PQ}\binom{1}{3}$ et $\overrightarrow{PR}\binom{2}{6}$; $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0$ donc les points P, Q et R sont alignés.
2) T est le symétrique de S par rapport à Q $\Leftrightarrow$le point Q est le milieu de [ST]
   $\Leftrightarrow \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OQ}$. Donc $T(5; 0)$.
3) Il suffit de démontrer que Qest le milieu $[PR]$. Or le milieu de $[PR]$ a pour coordonnées $(2 ; 2)$; c'est donc Q. Les diagonales du quadrilatère PTRS se coupent en leur milieu. D'où le résultat.

4)

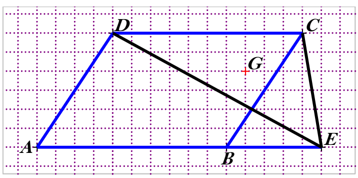


Exercice 26

1) I est à la fois le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{O}$ et $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=\vec{O}$. d'où le résultat.
2) En utilisant la relation de Chasles ($\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$)et la question1), on obtient : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$.
3) On utilise le fait que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.et $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$

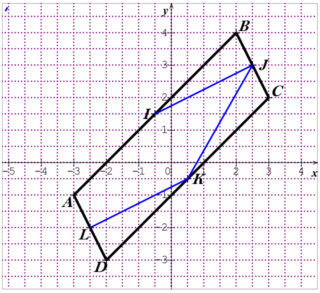
Exercice 27

1) On a d'après la relation de Chasles, $-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.
   Or $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$. Donc $-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}$.
2) Voir construction ci-dessous.
3) On sait que $-\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{O}$. Donc $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GE}$.
4) Il suffit de prouver que $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{O}$. Ce qui s'obtient par $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GD}=\vec{O}$ équivaut à $-2\overrightarrow{GE}-2\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GD}=\vec{O}$ soit $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{O}$. D'où le résultat.
   Voir construction ci-dessous.



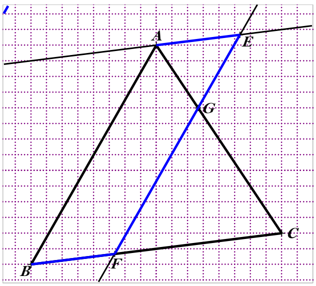
Exercice 28

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux car $\overrightarrow{AB}\binom{5}{5}$ et $\overrightarrow{DC}\binom{5}{5}$. D'où le résultat.
2) On a $\overrightarrow{IJ}\binom{3}{3}$ et $\overrightarrow{LK}\binom{3}{3}$.
3) D'après 2), $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ donc le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
4) On pouvait prévoir ce résultat ; en effet $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (propriété de la droite des milieux). Donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ d'où IJKL est un parallélogramme.



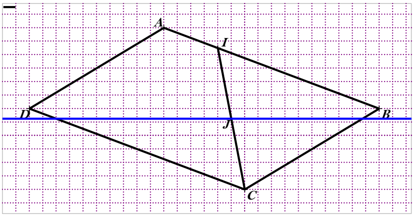
Exercice 29

1) Voir figure ci-dessous.
2) On sait que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Ensuite $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ entraine $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$. Donc EFBA est un parallélogramme.
   $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
3) Considérons la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Dans cette base, $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\0\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{GE}=-2\overrightarrow{GF}$.
   D'où E, F et G sont alignés.



Exercice 30

1) a) On a $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$; $\vec{u}=4\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MC}$ et $\vec{u}=4(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC})$;
   or $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}$; d'où $\vec{u}=8\overrightarrow{MJ}$.
   b) $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Mais $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$ car ABCD est un parallélogramme.
2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (MJ) et (BD) sont parallèles.
   L'ensemble des points M est donc la droite parallèle à (BD) en J.



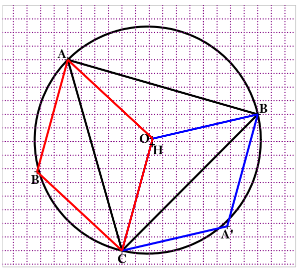
Exercice 31

1) La relation $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{O}$ est équivalente à : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. D'où la construction.
2) Compte tenu de la relation de la question ci-dessus,
$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM}$.

Exercice 32

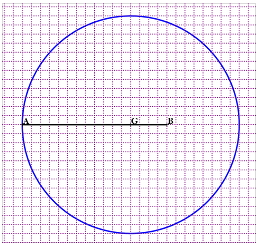
1) ABC est un triangle et O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, donc O est le centre de gravité du triangle ABC. On a donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$. Or A' est le symétrique de O par rapport à (BC) et $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, I milieu du segment [OA'] sur la droite (BC). On en déduit que $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{OA'}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ d'où $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{AO}$. Ainsi $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$
.

2) D'après 1) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA'}$. Donc $(AH) \perp (BC)$.
3) a) D'après 1), un point X symétrique de O par rapport à (AC) vérifie la relation :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX}$. Donc $X = B'$.
Donc B' est le symétrique de O par rapport à (AC).
b) La relation $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. D'où $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}$.
4) D'après ce qui précède, $(OB') \perp (AC)$ et $(BH) \parallel (OB')$. Donc $(BH) \perp (AC)$.
5) On a donc $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (AC)$. Les droites (AH) et (BH) sont des hauteurs du triangle ABC sécantes en H. Donc les hauteurs de ce triangle sont concourantes en H.
6) Figure



Exercice 33

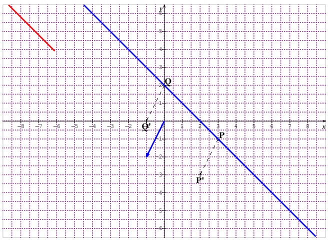
1)



2) Dans l'écriture $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|$, on remplace M par A, on trouve $3AB$. Or $3AB=12$ d'où A appartient à l'ensemble (C).
3) La relation $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ est équivalente à $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. En tenant compte de cette dernière relation, $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$.
4) En tenant compte de cette dernière réduction, on trouve : $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=12 \Leftrightarrow GM=3$.
   L'ensemble (C) est le cercle de centre G et de rayon 3.
5) Voir construction dans 1).

Exercice 34

1) Une équation de la droite (PQ) est : y=-*x*+2.
2) L'image de la droite (PQ) par la translation t, c'est la droite (P'Q'). l'image d'une droite (D) par une translation est une droite parallèle à (D). donc (P'Q') est parallèle à (PQ).
3) Une équation de la droite (P'Q') est y=-*x*-1



Exercice 35

1- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix};\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow AB=AD=BC=BD=\sqrt{13}$ **donc ABCD est** un parallélogramme
2- Le centre de gravité G est le milieu du segment [AC]. Donc G(-1 ;1)

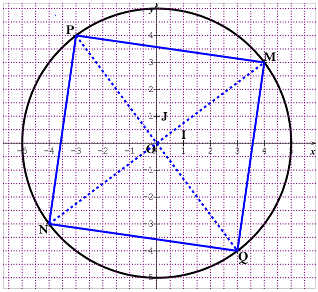
Exercice 36

1) $\overrightarrow{PM}\binom{7}{-1}$, $\overrightarrow{MN}\binom{-8}{-6}$, $\overrightarrow{NP}\binom{1}{7}$.
2) $PM=\sqrt{50}$, $PN=\sqrt{50}$, $NM=10$. On a $PM=PN$ et $MN^2=PM^2+PN^2$ d'où le résultat.

3) Le triangle MNP est rectangle en P. Donc les points M, N et P sont sur le cercle de diamètre $[MN]$.le centre du cercle est le point O de coordonnées (0,0)

4) a) On a : $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP}$. Donc $\overrightarrow{OQ}\binom{3}{-4}$.

b) On a : $PN = NQ = QM = MP = \sqrt{50}$ d'une part et d'autre part $MN = PQ = \sqrt{145}$. Donc PNQM est un carré.

5) 

Exercice 37

1) Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur, un vecteur de coordonnées $\binom{-b}{a}$. D'où pour la droite (D_m) on a : a = 2m – 1 et b = m + 2 donc

$\vec{u}\begin{pmatrix}-m-2\\2m-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D_m)

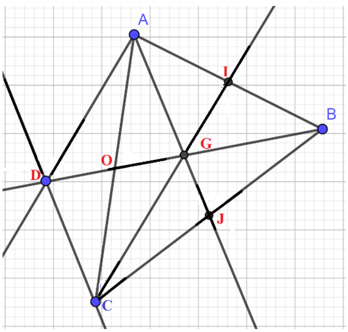
2) (D_m) est parallèle à (OI) si et seulement si $m = \frac{1}{2}$.

3) (D_m) passe par A si et seulement si $m = -\frac{7}{6}$.

4) Toutes les droites passent par le point B de coordonnées $(1, -1)$.

Exercice 38

1- Si les droites (CI) et (AJ) étaient parallèles, les points ABC seraient alignés ce qui est contradictoire à l'hypothèse. Donc les droites (CI) et (AJ) sont sécantes.

2- 

3- Les points I et G appartiennent respectivement aux droites (AB) et (BD) et sont les milieux respectifs de [AB] et [BD] donc la propriété réciproque de la propriété de Thalès appliquée au triangle BDA on a (IG) et (AD) sont parallèles. Or C est un point de la droite (IG), donc les droites (CI) et (AD) sont parallèles.

4- De même J milieu de [BC] et G milieu de [BD] donc la propriété réciproque de la propriété de Thalès appliquée au triangle BDC on a (JG) et (DC) sont parallèles.
5- (AG) // (DC) et (CG) // (AD) donc AGCD est un parallélogramme.
6- AGCD est un parallélogramme donc les diagonales [AC] et [GD] se coupent en leur milieu. Donc le point est le milieu de [AC]. Ainsi (BO) est la médiane de ABC issue du point B.
7- (CI) et (AJ) sont des médianes et sont sécantes de même (CI) et (BO) sont des médianes et sont sécantes. Ces trois droites les médianes issues des trois sommets d'un même triangle ABC donc elles sont concourantes.
8- a) G est le milieu de [BD] et O est le milieu de [GD] donc on a :

$$OG = \frac{1}{2}GD = \frac{1}{2}BG \Rightarrow BG = 2OG$$

b) GO = BO – BG or BG = 2 GO donc GO = BO – 2GO d'où $GO = \frac{1}{3}BO$

9- $GO = \frac{1}{3}BO$ et le point G appartient au segment [BO], donc on a: $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$

On a de même $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}$$

Or $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$ donc

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}\right) = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$$

donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice 39

1- Je détermine les coordonnées de M et N.

M=S_B(A) donc $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ or $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-1-x\\4-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ donc on déduis que M(0 ;7) et de même on a N(6 ;5)

2- a) Je détermine les coordonnées de P et Q.

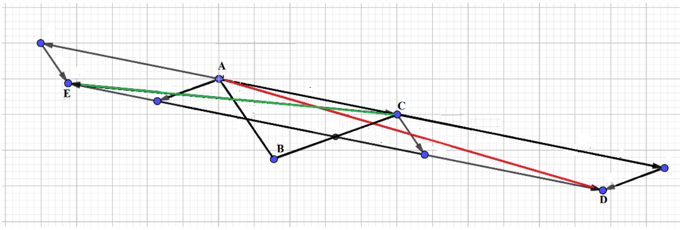
$\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB} \Rightarrow P(-5;-8)$; $\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AC} \Rightarrow Q(-14\ ;-5)$

b) Je démontre que les droites (PQ) et (MN) sont parallèles

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ de plus dét$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ}\right) = 0$ donc les droites (PQ) et (MN) sont parallèles.

Exercice 40

1-



2- Je justifie que les droites (DE) et (CA) sont parallèles.

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ or $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ d'où

$\overrightarrow{DE} = -3\overrightarrow{AC}$ donc les droites (DE) et (AC) sont parallèles.

V- SITUATION COMPLEXE

Exercice 41(**Erreur de numérotation dans le manuel, exercice 41 au lieu de de 39)**

Considérons le repère (A, B, H). Dans ce repère, $C(2,0), I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $J(1,\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IJ}$. Donc les points I, J et C sont alignés.

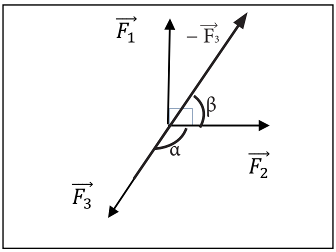
Exercice 42 (Erreur de numérotation dans le manuel, exercice 42 au lieu de de 40)

Notons β l'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ et $-\overrightarrow{F_3}$, et α, l'angle cherché.
En appliquant la propriété de Pythagore, on a :

$$\|\overrightarrow{F_3}\|^2 = \|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 = 16 + 48 = 64 \text{ soit } \|\overrightarrow{F_3}\| = 8\ N$$

$$\cos\beta = \frac{\|\overrightarrow{F_1}\|}{\|\overrightarrow{F_3}\|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} \quad \text{donc} \quad \beta = 30°$$

Par suite $\alpha = 150°$ car α et β sont supplémentaires



On a 8 > 7 et 140° < 150° <160° donc l'expérience est réussie.

2 ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

I- SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***Il s'agit d'une leçon de mathématique en classe de 2^nde^ C***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont le Professeur et les élèves.***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule en classe.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant une séance de cours***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est de prouver l'irrationalité de*** $\sqrt{2}$
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Le professeur ne termine pas ses propos et demande à ses élèves de démontrer que*** $\sqrt{2}$ ***est irrationnel***.

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les décident de faire des recherches sur l'ensemble des nombres réels***
- Comment les acteurs s'y prennent pour résoudre le problème ? ***les élèves forment des petits groupes, afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de leur professeur de mathématiques.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

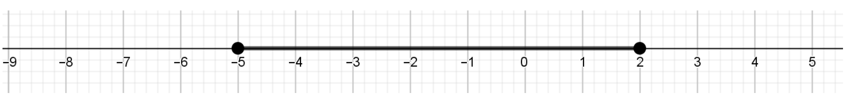
L'étude de l'ensemble des nombres réels nous permettra de non seulement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ***mais aussi de connaître d'autres sou- ensemble de l'ensemble des nombres réels et les propriétés qui en découlent***

I) Les activités

Activité 1 Majorant, Minorant d'un ensemble

Objectif de l'activité : ***Déterminer le majorant et le minorant d'un ensemble en utilisant les propriétés de comparaison de deux nombres***.

Solution

1. 

2. Un nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de A est 5.

3. Un nombre réel inférieur ou égal à tous les éléments de A est $-8{,}5$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 1

1

1- Minorants de A : -4 ; - 6

- Majorants de A : 5 ; 10

2- Ensemble de tous les majorants de A : [5 ; $\rightarrow$ [

3 – Ensemble de tous les minorants de A :] $\leftarrow$; -3]

2

1-F ; 2- V ; 3- V ; 4- V

Activité 2 Maximum, Minimum d'un ensemble

Objectif de l'activité : ***Déterminer le maximum et le minimum d'un ensemble en utilisant les propriétés de comparaison des nombres réels et de l'appartenance d'un élément à un ensemble.***

Solution

a) Le plus grand élément de B est 2.

b) Le plus petit élément de B est -5.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2

3

1- F ; 2- F ; 3- F ; 4- V

Activité 3 Valeur absolue d'un nombre réel

Objectif de l'activité : ***Déterminer la valeur d'un nombre réel en utilisant la distance à 0 d'un nombre réel.***

Solution

1- Le plus grand des nombres réels -10 et 10 est 10.

2- a) Lorsque a est négatif le plus grand des nombres réels $-a$ et a est $-a$.

b) Lorsque a est positif le plus grand des nombres réels $-a$ et a est a.

c) La valeur absolue de a est égale à la distance à zéro de a.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3

4

a) $\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$; b) $\left|\sqrt{13}-\sqrt{11}\right|=\sqrt{13}-\sqrt{11}$

Activité 4 Propriétés de la valeur absolue

Objectif de l'activité : ***Connaître les propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel***

Solution

1- a) Pour tout nombre réel x, on a : $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$ donc $0 \leq 2|x| \Longrightarrow 0 \leq |x|$

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ et $-x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Pour tout nombre réel x, $-x$ et x ont la même distance à zéro. Donc $|-x| = |x|$

2- a) $|x| = |y| \Leftrightarrow |x| = y$ ou $|x| = -y$ (car $|y| = y$ ou $|y| = -y$)

Or $|x| = y \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$ (car $|x| = x$ ou $|x| = -x$)

$\Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

b) $|x| \leq \mathrm{r} \Leftrightarrow x \leq \mathrm{r}$ et $-x \leq \mathrm{r} \Leftrightarrow x \leq \mathrm{r}$ et $x \geq -\mathrm{r} \Leftrightarrow x \leq \mathrm{r}$ et $-\mathrm{r} \leq x$

$\Leftrightarrow -\mathrm{r} \leq x \leq \mathrm{r}$

3- a) Je démontre que $|x \times y| = |x| \times |y|$

On sait que $|x\times y| = |xy|$ donc $|x\times y| = x.y$ si x et y ont le même signe ou $|x\times y| = -x.y$ si x et y sont de signes contraires.

De même $|x|\times|y| = x.y$ si x et y ont le même signe ou $|x|\times|y| = -x.y$ si x et y sont de signes contraires.

D'où $|x\times y| = |x|\times|y|$

b) Je démontre que si $x \neq 0$ $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

On sait que $x \times \frac{1}{x} = 1$ donc $\left|x \times \frac{1}{x}\right| = 1$ et d'après la question précédente $\left|x \times \frac{1}{x}\right| = |x| \times \left|\frac{1}{x}\right| = 1$

D'où si $x \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

c) Je démontre que si $y \neq 0$ alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

D'après les questions précédentes on a : $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \times \frac{1}{y}\right| = |x| \times \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \times \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$ d'où si $y \neq 0$ alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

4- a) Je développe $(x + y)^2$ et $(|x| + |y|)^2$.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$.

b) Je déduis que $|x + y| \leq |x| + |y|$

Je sais que $2xy \leq 2|x||y|$ de plus, $x^2 = |x|^2$ et $y^2 = |y|^2$.

Donc $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + y)^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$

$\Leftrightarrow |x + y| \leq \big||x| + |y|\big|$

$\Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$ (car $|x| + |y| > 0$).

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

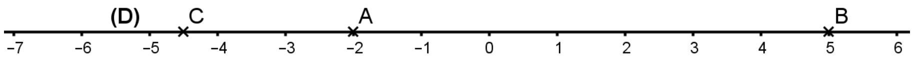
5 **a)** $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ **;b)** $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ **; c)** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **;d)** $|4x| = 12 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ **; e)** $\left|\frac{x}{-\sqrt{2}}\right| = 5 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$ ou $x = -5\sqrt{2}$.

<u>Activité</u> 5 Distance de deux nombres réels

Objectif de l'activité : *Calculer la distance de deux nombres réels*

Solution

1 **Je fais la figure**



2. **Je détermine par lecture graphique les distances AB, BC et AC.**
   Il suffit de repérer ces distances cherchées par rapport au repère choisi sur la droite. Ainsi on a:
   AB = 7 ; BC = 9,5 et AC = 2,5.

3. a) $|-2-5| = |-7| = 7$; $|5-(-4{,}5)| = |9{,}5| = 9{,}5$; $|-2-(-4{,}5)| = |2{,}5| = 2{,}5$
   b) $AB = |-2-5|$; $BC = |5-(-4{,}5)|$ et $AC = |-2-(-4{,}5)|$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 5

6 $AB = |4-(-5)| = 9$; $BC = |7-4| = 3$; $AD = |-1-(-5)| = 4$.

7 1-d) ; 2- a) ; 3- c) ; 4 – c) .

<u>Activité</u> 6 : Résolution algébrique d'équation du type $|x-a| = r$

<u>Objectif de l'activité</u> : *Résoudre algébriquement une équation du type* $|x-a| = r$

Solution

Résolution graphique d'équation du type $|x-a| = r$

1. a) $|x-4| = 2{,}5 \Leftrightarrow x-4 = 2{,}5$ ou $x-4 = -2{,}5$
   $\Leftrightarrow x = 6{,}5$ ou $x = 1{,}5$
   b) $S = \{6{,}5 ; 1{,}5\}$

2. a) Voir le récapitulatif
   b) Voir le récapitulatif
   c) Voir le récapitulatif

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

8 a) $|x-3| = 4 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$; b) $|x+4| = 1 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -5$;

c) $|2x-6| = 8 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$; d) $|-7x-4| = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}$;

e) $|-4x+7| = -1$ impossible donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

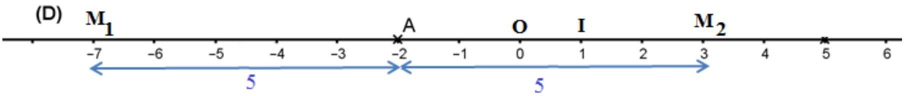
<u>Activité</u> 7 Résolution graphique d'équation du type $|x-a| = r$, $(r \geq 0)$

<u>Objectif de l'activité</u> : ***Résoudre graphiquement une équation du type*** $|x-a| = r$

<u>Solution</u>

1. a) $|x+2| = |x-(-2)| = d(x ; -2)$

b) **Je représente sur (D) les points M tel que AM = 5.**



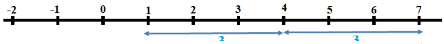
D'après la représentation graphique, $x_M = -7$ ou $x_M = 3$

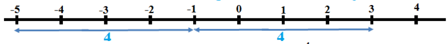
c) **Les solutions de l'équation $|x + 2| = 5$ sont -7 et 3.**

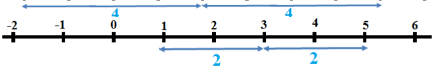
2- **Pour la méthode de résolution, voir le récapitulatif de l'activité 7 page 7.**

<u>Exercice de fixation de l'activité 7</u>

9

a)  Donc $S_{\mathbb{R}} = \{1 ; 7\}$

b)  Donc $S_{\mathbb{R}} = \{-5 ;3\}$

c)  Donc $S_{\mathbb{R}} = \{ 1 ; 5\}$

<u>Activité</u> 8 Résolution algébrique d'inéquation du type $|x - a| \leq r$

<u>Objectif de l'activité</u> : Résoudre algébriquement une inéquation du type $|x - a| \leq r$

1. $|x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$

2. a) Voir le récapitulatif de l'activité 8 page 7
   b) Voir le récapitulatif de l'activité 8 page 7
   c) Voir le récapitulatif de l'activité 8 page 7.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

10

a) $\left|x-\frac{1}{2}\right| \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-4 \leq x \leq \frac{1}{2}+4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ donc $S_{\mathbb{R}}=\left[-\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right]$

b) $|x+4| \prec 1 \Leftrightarrow -5 \prec x \prec -3$ donc $S_{\mathbb{R}}=]-5;-3[$

c) $|3x+6| \leq 12 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2$ donc $S_{\mathbb{R}}=[-6;2]$

d) $|-7x-4| \leq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{7}$ donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{4}{7}\right\}$

e) $|2x-1| \leq -1$ impossible donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

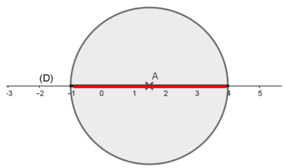
<u>Activité</u> 9 Résolution graphique d'inéquations du type $|x-a| \leq r$

<u>Objectif de l'activité</u> : *Résoudre graphiquement une inéquation du type $|x - a| \leq r$*

<u>Solution</u>

1- a) AM = $|x - 1,5|$

b) $|x - 1,5| \leq 2,5 \Leftrightarrow$ AM $\leq 2,5$

c) 

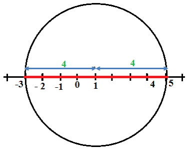
d) D’après la représentation graphique précédente l’ensemble des solutions de l’inéquation

$|x - 1{,}5| \leq 2{,}5$ est de S = [- 1; 4].

2- Voir le récapitulatif de l’activité 9 page 8

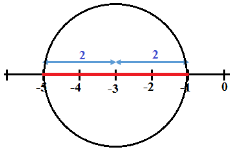
Solution de l’exercice de fixation de l’activité 9

11 a)



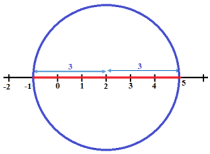
D’après la représentation graphique précédente S_R= [-3 ;5].

b)



D’après la représentation graphique précédente S_R=]-5 ; -1[.

c)



D’après la représentation graphique précédente S_R= [-1 ; 5].

Activité 10 Raisonnement par l’absurde

Objectif *En seconde un nouveau type de raisonnement apparait : le raisonnement par l’absurde. En guidant les élèves on le fera fonctionner dans des exercices, tout au long de l’année, sans en donner un énoncé.*
Le raisonnement par l’absurde ne fera pas l’objet d’interrogation écrite ni de devoir surveillé au premier trimestre. Il faut donner du temps aux élèves de se familiariser à ce raisonnement.
Voir récapitulatif de l’activité 10 page 8.

Solution des exercices de fixation de l’activité 10

12 Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
Ainsi $3a = 10^n$, ce qui signifie que 10^n est un multiple de 3. La somme de ses chiffres doit être donc divisible par 3 . Ce qui est absurde car la somme des chiffres de 10^n est toujours égal à 1 et donc n’est pas divisible par 3.

L'hypothèse « $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. » est donc fausse.

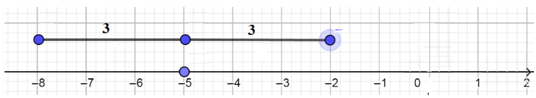
Par conséquent $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

13 Raisonnons par l'absurde. Supposons que tous les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes.
Alors il y aura au plus $1 + 1 + \ldots + 1 = n$ paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $(n + 1)$.
Donc un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

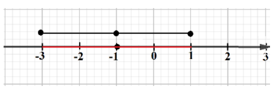
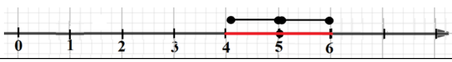
III-DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	Comment déterminer un majorant, le maximum d'un ensemble non vide ? Supposons que 3 est le maximum de A donc pour tout entier n non nul on a $3-\frac{1}{n}\leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{n}\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\geq 0$ et en particulier $\frac{1}{n}=0$ ce qui est impossible car n est un entier non nul par hypothèse. Donc 3 n'est pas le maximum de A

2	Comment résoudre algébriquement une équation du type $\lvert x - a\rvert = r$? 1- $\lvert 3x - 6\rvert = 3\lvert x - 2\rvert$ 2- $3\lvert x - 2\rvert = 2$ équivaut à $3(x - 2) = 2$ ou $3(x - 2) = -2$ d'où $x = 8/3$ ou $x = 4/3$

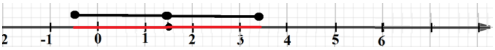
3	Comment résoudre graphiquement une équation du type $\lvert x - a\rvert = r$?  Donc $S_{\mathbb{R}} = [-8 ;-2]$

4	Comment résoudre algébriquement une inéquation du type $\lvert x - a\rvert \leq r$? (I_1) : $\lvert x+2\rvert \leq 4,5 \Leftrightarrow -6,5 \leq x \leq 2,5$ donc $S_1 = [-6,5 ;2,5]$ (I_2) : $\lvert x-3\rvert \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$ donc $S_2 = \{3\}$ $(I_3$: $\lvert x-5\rvert \leq -4$ donc $S_3 = \varnothing$

5	Comment résoudre graphiiquement une inéquation du type $\lvert x - a\rvert \leq r$? Exercice 1 (I_1) : $\lvert x+1\rvert \leq 2$ la distance de x à -1 est inférieure ou égale à 2  donc $S_1 = [-3 ; 1]$ (I_2) : $\lvert x-5\rvert \leq 1$, la distance de x à 5 est inférieure ou égale à 1  $S_2 = [4;6]$

Exercice 2

1- $\left|x-\frac{3}{2}\right| \prec 2$ la distance de x à 3/2 est strictement inférieure à 2



S_1 =]-0,5 ;3,5[

2-a) S_{IR} =]-0,5; 3,5[

b)S_{IR} =]-∞;0,5] ∪ [3,5;+∞[

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Majorant d'un ensemble

1 Réponses correctes : **b** et **d**

2 **Maj(A) = 5 ; MajB = 2 ; MajC = 4 .**

3

a. $\{-5\ ;\ 0\ ;\ 0{,}5\ ;1\}$

b. $\{-12\ ;\ -6\ ;\ -4\ ;-3-2\ \}$

c. $[-1{,}7\ ;\ -1{,}5]$

d. Les quatre majorants sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4

4

A : $\frac{4}{5}$; B :14 ; C : 1 ; D : O ;

E : $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

5 Un majorant de cet ensemble est : *a*

Minorant d'un ensemble

6 Les affirmations correctes sont : b) ; c) ; d).

7

1. A : -4 et -3
2. B : -6
3. C : -10

8

a. $\{2\ ;\ 3\ ;7{,}5\ ;\sqrt{51}\}$

b. $\{-5{,}6\ ;\ 0\ ;\ 0{,}5\ ;1\}$.

c. $0\ ;-1\ ;-\sqrt{3}$.

9

a) B : -1

b) B : 0 ;

c) $1-\sqrt{2}$

10 O est un minorant de cet ensemble

Maximum d'un ensemble

11 a - F ; b - V ; c - F

12 I : $\frac{22}{7}$; L : 2

13 1- F ; 2-V ; 3-F ; 4-V

Minimum d'un ensemble

14 1-V ; 2- V

16 1-V ; 2- V ; 3 -V

15 A- minA= -π , C- minC= -4.

17 C'est 1

Valeur absolue d'un nombre réel

18 a – V ; b – V ; c – F ; d - V

19 a : $|\pi - 5| = 5 - \pi$; b : $|\pi - 1| = \pi - 1$; c : $|2 - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - 2$;
d : $\left|-\frac{22}{7} - \pi\right| = \frac{22}{7} + \pi$

Distance de deux nombres réels

20 c) $|a - b|$

21

x	y	Distance de x et y
8	5	3
− 11	− 9	2
− 20	40,5	60,5

Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

22 1) V ; 2) V ; 3) F ; 4) V.

Résolution algébrique d'une équation du type $|x - a| = r$

23

a) $|x - 1{,}5| = 2{,}5 \Leftrightarrow x - 1{,}5 = 2{,}5$ ou $x - 1{,}5 = -2{,}5$
$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -1$
$S = \{-1 ; 4\}$

b) $\left|\frac{3}{2} + x\right| = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + x = \frac{7}{3}$ ou $\frac{3}{2} + x = -\frac{7}{3}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$ ou $x = -\frac{23}{6}$
$S = \left\{\frac{5}{6} ; -\frac{23}{6}\right\}$

c) $|2 - x| = 5 \Leftrightarrow 2 - x = 5$ ou $2 - x = -,5$
$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 7$
$S = \{-3 ; 7\}$

24

a) $3|x-1| = 6 \Leftrightarrow |x-1| = 2 \quad x-1 = 2$ ou $x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

$S = \{-1\,;3\}$

b) $\left|\frac{3}{5}x - 3\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x - 3 = 1$ ou $\frac{3}{5}x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ ou $x = \frac{10}{3}$

$S = \left\{\frac{20}{3}\,;\frac{10}{3}\right\}$

c) $|2x+1| = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2$ ou $2x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{-3}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\,;\frac{-3}{2}\right\}$

Résolution graphique d'une équation du type $|x - a| = r$

25 a) $S = \{-5\,;1\}$ b) $S = \{3\,;7\}$ c) $S = \{1{,}8\,;5{,}4\}$

26 a) $S = \{1\,;2{,}2\}$ b) $S = \{-8{,}3\,;4{,}3\}$

Résolution algébrique d'une inéquation du type $|x - a| < r$

27 a) $S =]-0{,}8\,;3{,}2[$ b) $S = \left]-\frac{9}{2}\,;-\frac{5}{2}\right[$ c) $S =]-5;3[$

28 a) $S =]-3{,}2\,;-0{,}8[$ b) $S =]-8\,;4[$

Résolution graphique d'une inéquation du type $|x - a| < r$

29 a) $S =]-4\,;6[$ b) $S =]-7\,;-1[$ c) $]2\,;4\,[$

30 a) $S =]-3\,;3[$ b) $S = \left]-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right[$ c) $S = [-6-3\sqrt{2}\,;-6-3\sqrt{2}\,]$

Démonstration d'une propriété en utilisant un raisonnement par l'absurde

31

Supposons par l'absurde que $[2;5[$ admet un maximum M.
Alors $M \in [2;5[$ et $\forall\, x \in [2;5[,\ 2 \leq x < M < 5$.
Mais $M < \frac{M+5}{2} < 5 \Rightarrow 2 < M < \frac{M+5}{2} < 5 \Rightarrow \frac{M+5}{2} \in [2;5[$ et $M < \frac{M+5}{2}$ ce qui est absurde. Donc $[2\,;5[$ n'admet pas de maximum.

32

1- Soit p un nombre entier naturel.
Démontrons par l'absurde que si p^2 est pair, alors p est pair.
P est impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$.
Alors $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow p^2$ est impair ce qui est absurde car p^2 est pair.
D'où si p^2 est pair, alors p est pair.

1- a) Je justifie que $p^2 = 2q^2$.

Par hypothèse $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2}$ donc $p^2 = 2q^2$

b) On sait que $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est paire. Or d'après la question 1) si p^2 pair alors p est pair.

c) Je justifie que q est pair

On sait que p est pair donc il existe un réel k tel que $p = 2k$. Donc $p^2 = 4k^2$ et on a :
$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2$ d'où $q^2 = 2k^2$ et on en déduit que q^2 est pair d'où d'après la question 1) q est pair.

d)Je conclue

On sait que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec p et q tous les deux pairs contredit le fait que $\frac{p}{q}$ est irréductible donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration d'une propriété en utilisant un raisonnement inductif ou déductif

33

a) Pour tout réel x, $|3-1{,}5x| = \sqrt{4{,}5} \Leftrightarrow |-1{,}5(-2+x)| = \sqrt{2{,}25 \times 2}$

$\Leftrightarrow 1{,}5\,|-2+x| = \sqrt{2{,}25}\times\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1{,}5\,|x-2| = 1{,}5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{2}$

D'où (E) $\Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{2}$

b) $S = \{2+\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2}\}$

III- EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

34

a) minorant : $n-2$
majorant : $n+2$
maximum : $n-1$
minimum : n

b) minorant :$-n-2$
majorant : $-n+2$
maximum : $-n+1$
minimum : $-n$

c) minorant : -1
majorant : 1
maximum : n'existe pas
minimum : -1

35

a) On a : $5x-7=(2x-8)+(3x+1)$ donc $|5x-7| \leq |2x-8|+|3x+1|$

b) On a : $|3x^5| = 3|x^5|$ donc $|3x^5+x| \leq |3x^5|+|x| \Leftrightarrow |3x^5+x| \leq 3|x^5|+|x|$

36

a) $A=\frac{13x}{6}$

b) $B=x+10$

37

$a-c=(a-b)+(b-c)$. Donc $|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b|+|b-c|$

38

On a $E = \left[-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$

Un minorant de E est $-\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ et un majorant de E est $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

39

1) $AM = |x-7|$; $BM = |x+4|$; $CM = |x-2|$

2) $AB = 11$; $BC = 6$ et $AC = 5$

3) Pour $x=-3$, $AM = 10$; $BC = 2$; $CM = 4$.

40

a) $\begin{cases}|x-4| \leq 3\\ |x-3| \leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3 \leq x-4 \leq 3\\ -4 \leq x-3 \leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 \leq x \leq 7\\ -1 \leq x \leq 7\end{cases} \Rightarrow S = [1\,;7]$

b) $\begin{cases}d(x\,;-1) \leq 2\\ d(3\,;x) \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x+1| < 2\\ |x-3| < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 \leq x+1 \leq 2\\ -1 \leq x-3 \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3 \leq x \leq 1\\ 2 \leq x \leq 4\end{cases} \Rightarrow S = \emptyset$

41

1) $x \in [2{,}325\ ;\ 2{,}46\ ] \Leftrightarrow 2{,}325 \le x \le 2{,}46$. Or $2{,}3 \le 2{,}325$.

Donc $x \in [2{,}325\ ;\ 2{,}46\ ] \Rightarrow 2{,}3 \le 2{,}325 \le x \le 2{,}46 \Rightarrow 2{,}3 \le x \le 2{,}46$

$\Leftrightarrow x \in [2{,}3;\ 2{,}46\ ]$

2) $x \in [2{,}3;\ 2{,}46\ ] \Leftrightarrow |x - 2{,}38| \le 0.08$

42

1- $|x - 12{,}4| \le 0{,}1 \Leftrightarrow 12{,}3 \le x \le 12{,}5$

$\Leftrightarrow 12{,}3^2 \le x^2 \le 12{,}5^2 \Leftrightarrow 151{,}29 \le A \le 156{,}25$

2- $|A - 153{,}77| \le 2{,}48$

3- a) $|x - 822{,}8| \le 153{,}8$

b) $|x - 5303{,}5{,}| \le 65{,}5$

43

1- $|x - 4{,}1| \le 0{,}1 \Leftrightarrow 4 \le x \le 4{,}2$ et $|y - 3{,}4| \le 0{,}3 \Leftrightarrow 3{,}1 \le y \le 3{,}7$

Donc $12{,}4 \le P \le 15{,}54$

2- $|P - 13{,}97| \le 1{,}57$

44 $S = \{-1\}$

45 $S = \left\{\frac{4}{3}\ ;\ 2\right\}$

46

1-

x	$-\infty$ $\quad -2$	5	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$
A	$-2x+3$	7	$2x-3$

2- $A = 11 \Leftrightarrow -2x+3 = 11$ ou $2x-3 = 11 \Leftrightarrow S = \{-4\ ;\ 7\}$

3- Soit $B = |x+2| - 2|x-5|$

x	$-\infty$ $\quad -2$	5	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$-2\lvert x-5\rvert$	$2x-10$	$2x-10$	$-2x+10$
B	$x-12$	$3x-8$	$-x+12$

B = 5 $\Leftrightarrow x - 12 = 5$ ou $3x - 8 = 5$ ou $-x + 7 = 5 \Leftrightarrow$ S = $\left\{\frac{13}{3} ; 7\right\}$

1- a) On a $a \leq b \Longrightarrow \min(a ; b) = a$; et $|a - b| = b - a$.

Donc $\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-b+a}{2} = a \Longrightarrow \min(a ; b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

b) Lorsque $a > b$, $\min(a ; b) = b$ et $|a - b| = a - b$.

Alors $\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = b \Longrightarrow \min(a ; b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

c) Pour tous nombres réels a et b, $\frac{a+b-|a-b|}{2} = \min(a ; b)$.

47 2- a) On a : $a \leq b \Longrightarrow \max(a ; b) = b$; et $|a - b| = b - a$.

Donc $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+b-a}{2} = b \Longrightarrow \max(a ; b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

Lorsque $a > b$, $\max(a ; b) = a$ et $|a - b| = a - b$.

Alors $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a \Longrightarrow \max(a ; b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

D'où pour tous nombres réels a et b, $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \max(a ; b)$.

c) $\min(a ; b) + \max(a ; b) = \frac{a+b-|a-b|}{2} + \frac{a+b+|a-b|}{2} = a + b$

48

1- Je démontre que : $2\sqrt{|xy|} \leq |x| + |y|$

On sait que pour tous réels x et y on a :

$\left(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow |x| + |y| - 2\sqrt{|x|} \times \sqrt{|y|} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{|xy|} \leq |x| + |y|$

1- Je démontre que $2|xy| \leq x^2 + y^2$

On sait que pour tous réels x et y on a : $(|x| - |y|)^2 \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \geq 0 \Rightarrow 2|x||y| \leq x^2 + y^2$

2- a) Je démontre que $|x| - |y| \leq |x - y|$

Pour $x = (x - y) + y$ on a $|x| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$

b) Je déduis que $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

On sait d'après la question précédente que $|x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

c) Je démontre que $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

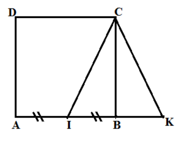
$x + y = x - (-y)$ donc d'après la question précédente on obtient :

$\big||x| - |-y|\big| \leq |x + y| \Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

49

1- **Je démontre que** $AK = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

AK = AI+IK or JK=IC



Calculons IC. $IC^2 = IB^2 + BC^2 \Leftrightarrow IC^2 = \frac{5}{4}$ d'où $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2- a) Je compare φ^2 et $\varphi + 1$

$\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc $\varphi^2 = \varphi + 1$

b) Je démontre que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

En divisant l'égalité □□□=□□□□□□□par□□□on a : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

c) **L'arrondi d'ordre 3 de □ est 1,678.□□**

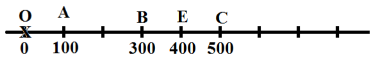
50

1- Désignons par x l'abscisse du point où le deux enfants jouent.

a) $|x - 100| \leq 300$

b) $|x - 500| \leq 200$

2- Pour ne pas désobéir à leurs parents, les enfants doivent jouer dans la portion délimitée par les points B et E d'abscisses respectives 300 et 400.



SITUATIONS COMPLEXES

51

L'aire de l'espace circulaire est :

A = 40²□ = 1600□ .

L'aire des cercles intérieurs :

- Petit cercle $A_p = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi = \frac{x^2}{4}\pi$
- Grand cercle intérieur : $A_G = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 \pi = \frac{25x^2}{4}\pi$

Aire intérieur totale : $A_p + A_G = \frac{26}{4}x^2\pi$

- L'aire de la partie à gazonner est $A = 1600\pi - \frac{25x^2}{4}\pi$
- Déterminons les valeurs pour lesquelles le souhait du Proviseur est respecté :

On a 2900 ≤ $2900 \leq 1600\pi - \frac{26x^2}{4}\pi \leq 3000 \Leftrightarrow \frac{4(1600\pi - 3000)}{26\pi} \leq x^2 \leq \frac{4(1600\pi - 2900)}{26\pi}$

Pour □ = 3,14 on a : $977{,}74 \leq x^2 \leq 1026{,}05$ d'où $31 \leq x \leq 32$

52

1- $|L - 2| \leq 0{,}1 \Rightarrow -0{,}1 \leq L - 2 \leq 0{,}1 \Rightarrow 1{,}9 \leq L \leq 2{,}1$

$|l - 1{,}5| \leq 0{,}15 \Rightarrow -0{,}15 \leq l - 1{,}5 \leq 0{,}15 \Rightarrow 1{,}35 \leq l \leq 1{,}65$

$|h - 0{,}75| \leq 0{,}01 \Rightarrow -0{,}01 \leq h - 0{,}75 \leq 0{,}01 \Rightarrow 0{,}74 \leq h \leq 0{,}76$

2 - a) On sait que le volume du pavé est $v = L \times l \times h$ et en tenant compte des résultats obtenus dans la question précédente on a : $1{,}8981 \leq v \leq 2{,}6334$.

b) On sait d'après la question précédente que $1{,}8981 \leq v \leq 2{,}6334$ or $1{,}8 \leq 1{,}8981 \leq v \leq 2{,}6334 \leq 2{,}7$ Donc $1{,}8 \leq v \leq 2{,}7$.

$a = \frac{1{,}8 + 2{,}7}{2} = 2{,}25$ et $r = \frac{2{,}7 - 1{,}8}{2} = 0{,}45$ donc $1{,}8 \leq v \leq 2{,}7 \Rightarrow |v - 2{,}25| \leq 0{,}45$.

$|v - 2{,}25| \leq 0{,}45$. Donc le ferronnier pourra satisfaire la classe.

3 UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **<u>Faire dégager le contexte</u>**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***le texte parle d'une gravure sur laquelle sont dessinés des lézards***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Le père de Akissi. Akissi et ses camarades***
- Où se déroule l'évènement ? ***Dans une classe de 2^{nde} C au Lycée HB de Korhogo.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule en classe***

- **<u>Faire dégager la (ou les) circonstance(s)</u>**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est de prouver qu'on peut obtenir tous les lézards de la figure à partir d'un seul en utilisant des symétries ou des translations***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Les élèves sont émerveillés par cette figure mais ne savent pas utiliser les symétries et le translations***.

- **<u>Faire dégager la (ou les) tâche(s)</u>**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident de s'informer sur l'utilisation des symétries et translation pour construire et démontrer des propriétés.***

- **<u>Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)</u>**

L'étude de l'utilisation des symétries et translations nous permettra de non seulement démontrer propriétés géométriques mais aussi de construire des figures.

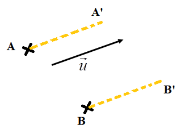
II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

<u>Activité</u> 1 Propriété caractéristique de la translation

Objectif : Connaître la propriété caractéristique d'une translation.

<u>Solution</u>

1-



2- $A' = t_{\vec u}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec u$ et $B' = t_{\vec u}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec u$ donc

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} = \vec 0$ d'où $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Exercices de fixation de l'activité 1

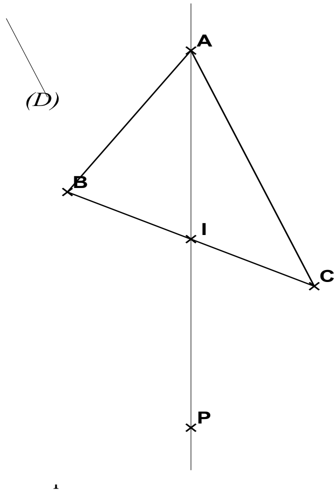
1 Le résultat qui permet d'avoir une affirmation vraie est : c) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF}$.

2 Les points A' et B' étant les images respectives des points A et B par une translation, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Ainsi : $2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\,\overrightarrow{AC}$.

<u>Activité 2</u> Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour construire
Objectif : **Utiliser une symétrie ou une translation pour construire**.

Solution



2. a) Utilisation d'une symétrie centrale pour construire

<u>Réponse aux questions de l'activité</u> :

1. P est le point d'intersection des droites (AI) et (D).

   a) Voir construction
   I est milieu de [BC], donc B = S_I(C)
   P = S_I(A) donc on construit la parallèle à (AC) passant par B. le point d'intersection de (AI) et (D) est P.

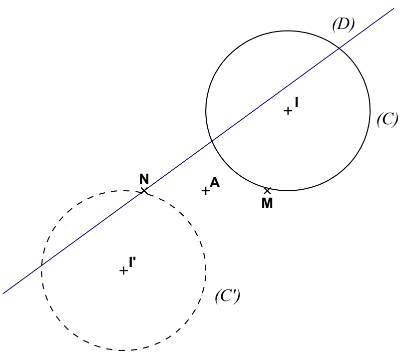
   b)

2. b) Utilisation d'une symétrie centrale pour construire

1. Apres avoir marqué un point M_1sur le cercle $(\mathcal{C})$et construis ι sur (D)tel que A soit le milieu du segment$[M_1N_1]$, la configuı l'image de M_1 par la symétrie centrale de centre A.

2. L'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale de centre A est u

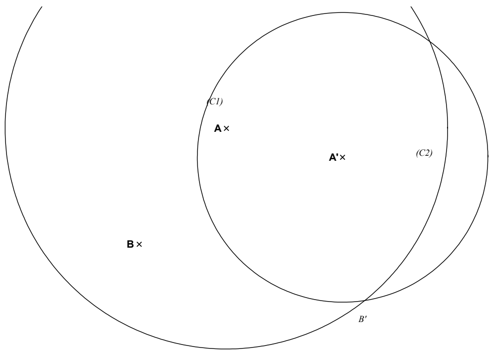
- Si$(\mathcal{C}')$ et (D) n'ont pas de point d'intersection alors le problèı
- $(\mathcal{C}')$ et (D)ont au moins un point d'intersection.
  Soit Nl'un de ces points. Comme$S_A\big((\mathcal{C})\big) = (\mathcal{C}')$, on a : $S_A\big((\mathcal{C}')\big) = (\mathcal{C})$.
  Or N appartient à$(\mathcal{C}')$, donc $M = S_A(N)$ appartient à$(\mathcal{C})$. Et A est bien le milieu du segment [MN].



3. On considère la symétrie centrale S_A de centre A ; on construit l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la symétrie S_A.
Si$(\mathcal{C}')$ et (D) n'ont pas de point d'intersection alors il est impossible d'avoir unpoint M de $(\mathcal{C})$ et un point N de (D) tel que A soit le milieu de[MN].
Si$(\mathcal{C}')$ et (D)ont au moins un point d'intersection, en notant N l'un de ces point alors le point M est l'image du point N par la symétrieS_A. Ainsi M appartient à$(\mathcal{C})$, N appartient à (D) et A est le milieu du segment [MN].

2. c) Utilisation d'une symétrie orthogonale pour construire

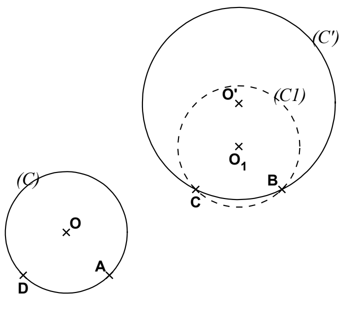
1.



2. Notons S la symétrie orthogonale qui applique A surA'.
On a : $S(A) = A'$et$S(B) = B'$ implique que $S(B') = B$.
Etant donné que la symétrie orthogonale conserve la distance, A'B' = AB et BA' = AB'.
Ainsi $B' \in \mathcal{C}(A'; AB)$ et $B' \in \mathcal{C}(A; BA')$.
On en déduit que B' est l'un des points d'intersection des cercles $\mathcal{C}(A'; AB)$ de centre A' et de rayon AB et $\mathcal{C}(A; BA')$ de centre A et de rayonBA'.
Mais l'un des points est à rejeter car il est le symétrique de B par rapport au milieu du segment[AA'].

2. d) Utilisation d'une translation pour construire

1. La méthode est identique à celle utilisée à l'activité **2.a) 2.**



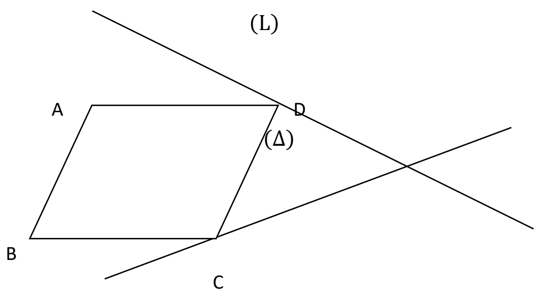
2. Considérons la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On construit l'image $(\mathcal{C}_1)$ du cercle $(\mathcal{C})$ par la translation$t_{\overrightarrow{AB}}$. $(\mathcal{C}_1)$ coupe $(\mathcal{C}')$ en et en un autre point.
Appelons C cet autre point.
$t_{\overrightarrow{AB}}((\mathcal{C})) = (\mathcal{C}_1) \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BA}}((\mathcal{C}_1)) = (\mathcal{C})$. Comme$C \in (\mathcal{C}_1)$; en notant$D = t_{\overrightarrow{BA}}(C)$, $D \in (\mathcal{C})$.
Ainsi Cest un point de$(\mathcal{C}')$, D est un point de $(\mathcal{C})$ et$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
Par suite le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. e) Synthèse
Le professeur veillera à aider les apprenants à formuler leurs réponses afin de ressortir la synthèse de ces activités. La synthèse est le récapitulatif juste au-dessous dans le manuel.

Exercices de fixation de l'activité 2

3 Les étapes de la résolution :
Etape 1 : lecture de l'énoncé
- **Les données de l'énoncé sont :**
  - (Δ) et (L) sont deux droites sécantes ;
  - Aet B sont deux points du plan ;
  - ABCD est un parallélogramme.
- **Les instruments nécessaires pour la construction sont** la règle non graduée et l'équerre**.**

Etape 2 : Recherche d'une démarche
- **Esquisse de figure**



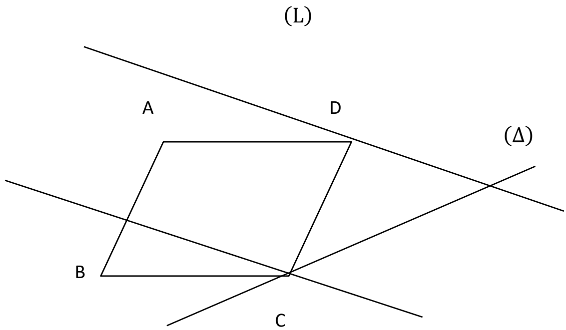
- **Analyse de l'esquisse**

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,
par suite C est l'image de D par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Comme $D \in (L)$ alors C qui est l'image de D par $t_{\overrightarrow{AB}}$ doit appartenir à l'image de (L) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
Ainsi C doit être le point d'intersection de l'image de (L) par $t_{\overrightarrow{AB}}$ et de la droite (Δ).
Et le point D s'obtient aisément puisque$C = t_{\overrightarrow{AB}}(D) \Leftrightarrow D = t_{\overrightarrow{BA}}$.

- **La recherche d'une méthode de construction :**
  On utilisera la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Etape 3 : Réalisation de la solution

- **Le programme de construction :**
  - Construisons la droite (L′) telle que (L′) soit l'image de (L) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  - Marquons C le point d'intersection des droites (L′) et (Δ).
  - Plaçons le point D, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
    Ainsi on obtient que $C \in (\Delta)$ et $D \in (L)$ de telle sorte que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
- **La figure**



- **Examen du nombre de solutions**

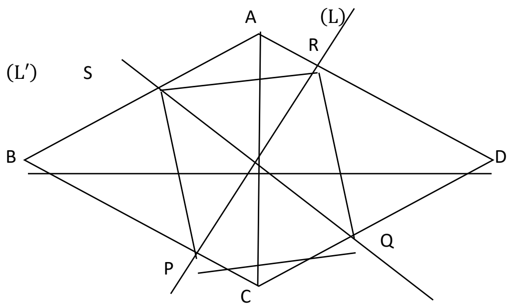
Le problème n'admet de solution que si les droites (Δ) et (L) sont sécantes.
(L′) est l'image de (L) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ donc (L′) est parallèle(L).
Comme (Δ) et (L) se coupent, alors (Δ) et (L′) se coupent. Donc le point C existe et par conséquent le point D existe.

4	1-C ; 2- A ; 3-B ; 4-C ; 5-C ; 6-B ; 7-A ; 8-B ; 9-C.

<u>Activité 3</u> **Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour démontrer une propriété**
Objectif : Utiliser diverses transformations pour démontrer une propriété.

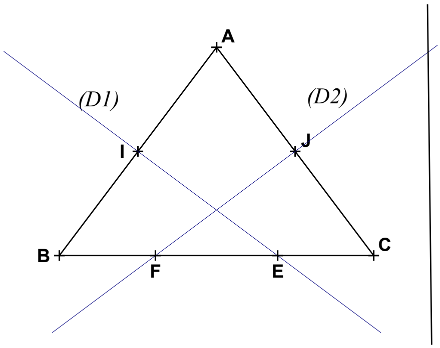
<u>**Solution**</u> :

a) Utilisation d'une symétrie centrale pour démontrer une propriété
Esquisse de figure



On considère la symétrie centrale S_O de centre O. On a : $S_O(B) = D$ et $S_O(C) = A$.
Comme P ∈ (BC) alors $S_O(P) \in S_O\big((BC)\big) = (AD)$.
Par suite $S_O(P)$ est le point d'intersection des droites (OP) et (AD). On en déduit que $S_O(P) = D$.
De même, on démontre que $S_O(Q) = S$.
Ainsi PQRS est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. PQRS est donc un parallélogramme.
Par hypothèse les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires.
En conclusion PQRS est un losange.

b) Utilisation d'une symétrie orthogonale
Esquisse de figure



Soit (Δ)la médiatrice du segment[BC]. Notons $S_{(\Delta)}$la symétrie orthogonale d'axe(Δ).
ABC est un triangle isocèle en A, donc $S_{(\Delta)}(A) = A$, $S_{(\Delta)}(B) = C$ et $S_{(\Delta)}(C) = B$.
Ainsi $S_{(\Delta)}([AB]) = [AC]$ et (BC)est globalement invariant par$S_{(\Delta)}$.
L'image par $S_{(\Delta)}$ du milieu du segment [AB] est le milieu du segment [AC], (D_1)Etant la perpendiculaire(AB), passant par le milieu de [AB], l'image par $S_{(\Delta)}$ de (D_1)est la perpendiculaire à (AC) passant par le milieu de [AC] ; c'est-à-dire (D_2).
E est le point d'intersection de (D_1) et (BC), donc l'image du point E par $S_{(\Delta)}$ est le point d'intersection de (BC) et (D_2). C'est-à-dire le point F.

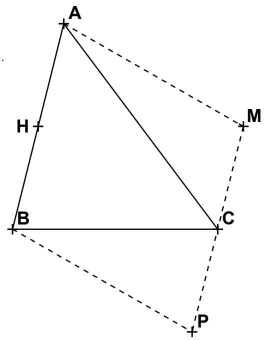
Finalement, on a :

$S_{(\Delta)}$	
A	A
C	B
E	F

$S_{(\Delta)}$ conserve la distance donc CE = BF.

c) Utilisation d'une translation pour démontrer une propriété

1.



2. Considérons la translation $t_{\overrightarrow{HC}}$ de vecteur $\overrightarrow{HC}$.

On a $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}$,

Donc $t_{\overrightarrow{HC}} = t_{\overrightarrow{AH}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AH}}$.

Ainsi $t_{\overrightarrow{HC}}(A) = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AH}}(A) = t_{\overrightarrow{BC}}(H) = M$

Et $t_{\overrightarrow{HC}}(B) = t_{\overrightarrow{AH}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}(B) = t_{\overrightarrow{AH}}(C) = P$

On en déduit que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BP}$. Ce qui équivaut à AMPB est un parallélogramme.

d) Synthèse

Le professeur veillera à aider les apprenants à formuler leurs réponses afin de ressortir la synthèse de ces activités. La synthèse est le récapitulatif juste au-dessous dans le manuel.

Exercices de fixation de l'activité 3

5 1-C ; 2-B. 3-B ; 4-B ; 5-A ; 6-C ; 7-A.

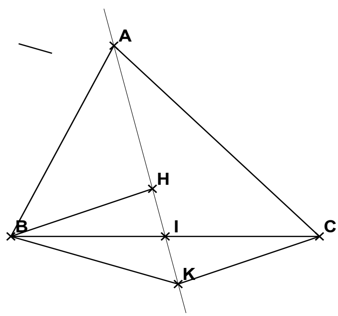
6 **Etape 1** : lecture de l'énoncé

- **Lecture effective de l'énoncé**
- **Les données de l'énoncé sont :**

- ABC est un triangle ;
- I milieu du segment[BC] ;
- H est le projeté orthogonal de B sur(AI) et K le projetés orthogonal de C sur (AI).

Etape 2 : Recherche d'une démarche

- Esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse et recherche d'une application qui convienne pour faire la démonstration

Il suffit de trouver une symétrie centrale qui transforme B en C et montrer que K est l'image de H par cette symétrie centrale.

I étant le milieu du segment [BC], on peut considérer la symétrie centrale S_I de centre I.

Etape 3 : Réalisation de la solution

- Rédaction de la démonstration ;

Considérons la symétrie centrale S_I de centre I.

On a :

S_I	
I	I
B	C

H est le point d'intersection des droites (BH) et (AI), donc $S_I(H)$ est commun à l'intersection des droites $S_I\big((BH)\big)$ et $S_I\big((AI)\big)$.

Les droites (BH) et (CK) sont perpendiculaires à la droite (AI) donc (BH) // (CK).

$S_I(B) = C$, étant donné que par une symétrie centrale, une droite et son image sont parallèles,

Alors $S_I\big((BH)\big) = (CK)$.

On sait que par une symétrie centrale, une droite passant par le centre de la symétrie est sa propre image, donc $S_I\big((AI)\big) = (AI)$.

On a $S_I\big((BH)\big) = (CK)$ et $S_I\big((AI)\big) = (AI)$, donc $S_I(H) = K$. Ainsi, I est le milieu du segment[HK].

Or $S_I(B) = C$, donc I est le milieu du segment [BC].

On en déduit que le quadrilatère BKCH est un parallélogramme, car les diagonales [BC] et [HK] se coupent en leur milieu.

- La démonstration respecte bien les contraintes de l'énoncé.

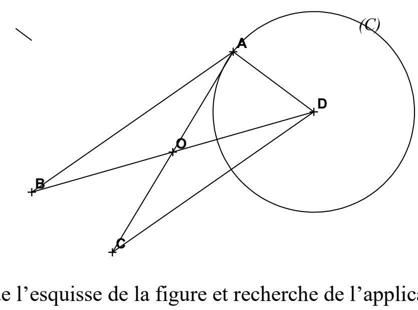
<u>Activité</u> 4 Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour trouver un ensemble de points

<u>Objectif de l'activité</u> : Utiliser diverses transformations pour déterminer un ensemble de points.

Solution

a) Utilisation d'une symétrie centrale pour trouver un ensemble de points

- Esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse de la figure et recherche de l'application appropriée pour répondre à la question

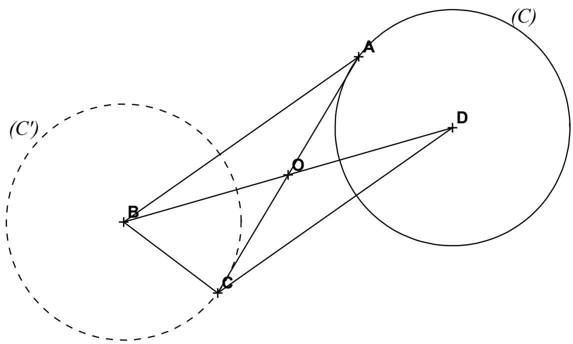
On considère le point O milieu du segment [BD] et on considère la symétrie centrale S_O de centre O.
Comme ABCD est un parallélogramme, O est le milieu du segment [AC]. Ainsi C est l'image de A par S_O.
Ainsi lorsque A décrit le cercle $(\mathcal{C})$, C décrit le cercle de centre $D = S_O(D)$.

- Soit O le milieu du segment [BD] et S_O la symétrie centrale de centre O, donc $B = S_O(D)$.

ABCD est un parallélogramme donc $S_O(A) = C$.
Ainsi lorsque A décrit $(\mathcal{C})$, $S_O(A) = C$ décrit le cercle de centre $B = S_O(D)$ et de même rayon que celui de $(\mathcal{C})$ c'est-à-dire r.

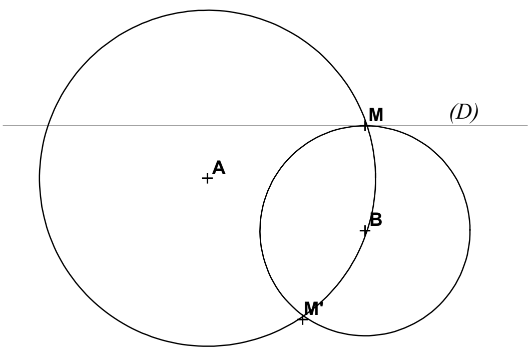
NB : Si A est sur [BD], alors C s'y trouve également et ABCD est un parallélogramme aplati.

- On obtient donc la construction ci-dessous :



b) Utilisation d'une symétrie orthogonale pour trouver un ensemble de points

- Esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse de la figure et recherche de l'application appropriée pour répondre à la question

Comme M' appartient au cercle de centre A et de rayon AM et au cercle de centre B et de rayon BM alors AM = AM' et BM = BM'. Ainsi (AB) est la médiatrice du segment [MM'].

Considérons donc la symétrie orthogonale $S_{(AB)}$ d'axe (AB). $S_{(AB)}(M) = M'$.

- Rédaction de la méthode à utiliser

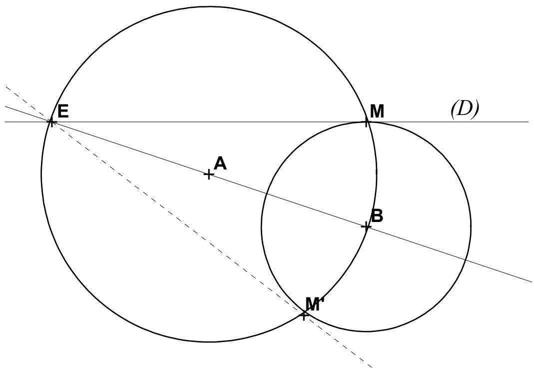
1. Si (AB) et (D) ne sont pas perpendiculaires :

Lorsque M décrit (D), $S_{(AB)}(M) = M'$.décrit l'image de (D) par $S_{(AB)}$ qui est une droite passant par le point d'intersection des droites(D) et (AB) que l'on peut noter E.

2. Si (AB) et (D) sont perpendiculaires, l'image de (D) par $S_{(AB)}$ est (D) donc lorsque M décrit (D), M' décrit aussi (D).

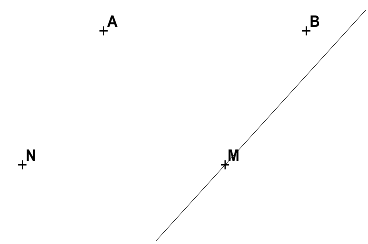
NB : si {M} = (AB)∩(D) alors M' = M.

- Construction de l'ensemble des points cherchés



c) Utilisation d'une translation pour trouver un ensemble de points

- Esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse de la figure et recherche de l'application appropriée pour répondre à la question

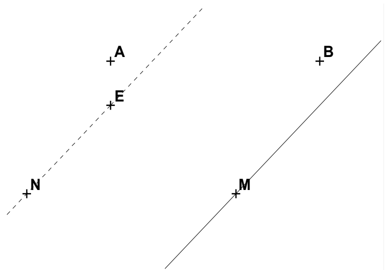
ABMN est un parallélogramme équivaut à$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN}$, cela suggère que le point N est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{BA}$. Considérons donc la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$ de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

- Rédaction de la méthode à utiliser

ABMN est un parallélogramme$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BA}}(M) = N$.

Ainsi lorsque M parcourt (Δ), $t_{\overrightarrow{BA}}(M)$parcourt l'image de (Δ)par$t_{\overrightarrow{BA}}$.
On en déduit que le lieu géométrique de N lorsque M parcourt (Δ) est une droite parallèle à (Δ).

- Construction de l'ensemble des points cherchés



b) Synthèse

Le professeur veillera à aider les apprenants à formuler leurs réponses afin de ressortir la synthèse de ces activités. La synthèse est le récapitulatif juste au-dessous dans le manuel.

Exercices de fixation de l'activité 4

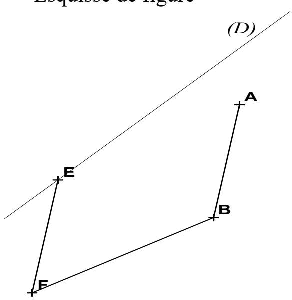
7 1-B; 2-C; 3-A; 4-B; 5-A; 6-B; 7-A; 8-C.

8 **Etape 1** : lecture de l'énoncé

- Lecture effective de l'énoncé ;
- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) est une droite ;
  - K et L sont deux points du plan n'appartenant pas à la droite (D) ;
  - Le point E appartient à la droite (D).
- Instruments à utiliser : règle non graduée et équerre.

Etape 2 : recherche d'une démarche

- Esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse et recherche et recherche d'une application appropriée pour répondre à la question

  ABFE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Considérons la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow F = t_{\overrightarrow{AB}}(E)$. Ainsi lorsque E parcoure (D), F parcourt l'image de (D)par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Etape 3 : Réalisation de la solution

- Rédaction de la méthode utilisée

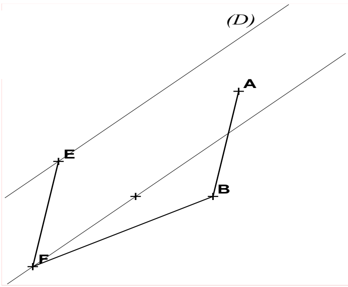
  Soit la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

  ABFE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Par conséquent $F = t_{\overrightarrow{AB}}(E)$.

  Ainsi si E appartient à la droite (D) alors $F = t_{\overrightarrow{AB}}(E)$ appartient à l'image de (D) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

  Etant donné qu'une droite et son image par une translation sont parallèles, on en déduit lorsque E parcoure (D), F parcourt la droite parallèle à la droite(D) passant par le point image de E par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

- Construction de l'ensemble cherché

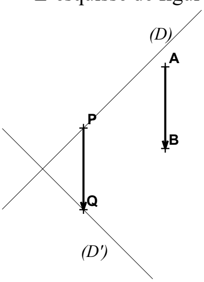


III - QUESTION D'EVALUATION

QUESTION 1 :

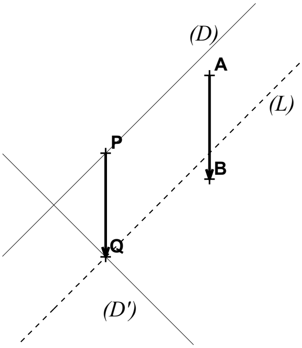
Solution de l'Exercice non résolu

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) et (D') sont deux droites sécantes ;
  - A et B sont deux points distincts.
- Les contraintes sont :
  - P appartenant à (D) et Q appartenant à (D') ;
  - $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.
- L'esquisse de figure



- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :
  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, donc Q est l'image de P par la translation $t_{\overrightarrow{AB},}$ de vecteur$\overrightarrow{AB}$.
  On peut donc considérer la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur$\overrightarrow{AB}$.

- Le programme de construction :
  Soit $t_{\overrightarrow{AB}}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  - Construire l'image (L) de la droite (D) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur$\overrightarrow{AB}$;
  - Noter Q le point d'intersection des droites (L)et(D) :
  - Placer le point P, image de Q par la translation$t_{-\overrightarrow{AB}}$.
- La construction de la figure codée



- L'examen du nombre de solutions :
  Les droites (D)et(D′) sont sécantes, (L) est l'image de(D) par $t_{\overrightarrow{AB}}$ donc (L) et (D) sont parallèles, par conséquent (L)et(D′) sont sécantes.
  Le point P est donc l'unique point du plan tel que $Q = t_{\overrightarrow{AB}}(P)$. Ainsi il existe un unique coupe (P, Q) de points tel que $P \in (D)$, $Q \in (D')$ et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

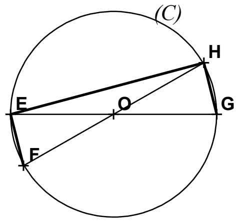
- La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :
  Q est le point d'intersection des droites (L) et (D), donc $Q \in (L)$.
  Or (L) est l'image de (D) par $t_{\overrightarrow{AB}}$, donc le point Pdont l'image par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est Q est tel qu'il appartient à la droite (D).
  Ainsi le point P appartient à la droite (D), le point Q appartient à la droite (D′) et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

QUESTION 2

Solution de l'Exercice non résolu
- Les données de l'énoncé sont :
  - $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre de centre O ;
  - [EG] et [FH] sont deux diamètres de $(\mathcal{C})$.
- La conclusion est :

Le quadrilatère EFGH est un rectangle.

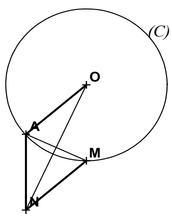
- L'esquisse de figure :



- L'analyse de l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable permettant de faire la démonstration :
  O est le centre de $(\mathcal{C})$, [EG] et [FH] sont deux diamètres de $(\mathcal{C})$ donc O est le milieu des segments [EG] et [FH]. On en déduit que les points G et H sont les images respectives des points E et F par la symétrie centrale S_O de centreO.
  On peut donc utiliser la symétrie centrale S_O de centreO.
- La recherche d'une démarche permettant d'obtenir la conclusion :
  - Démontrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme ;
  - Démontrer que le quadrilatère EFGH a un angle droit.
- La réalisation de la démonstration :
  - Considérons la symétrie centrale S_O de centreO.
    $S_O(E) = G$ et $S_O(F) = H$ donc O est milieu des segments [EG] et [FH].
    Or EFGH est un quadrilatère donc EFGH est un parallélogramme.
  - $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre [EG] et F appartient à $(\mathcal{C})$ donc le triangle EFG est rectangle en F.
    Par conséquent, l'angle $\widehat{EFG}$ est un angle droit.

  Il ressort de ce qui précède que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme qui a un angle droit.
  On en déduit quadrilatère EFGH est un rectangle.

QUESTION 3
Solution de l'Exercice non résolu
- Les données de l'énoncé :
  - $(\mathcal{C})$est un cercle de centre O ;
  - A est un point fixe du cercle$(\mathcal{C})$;
  - M du cercle $(\mathcal{C})$ distinct de A ;
  - N est le point tel que le quadrilatère OANM soit losange.
- L'esquisse de figure :



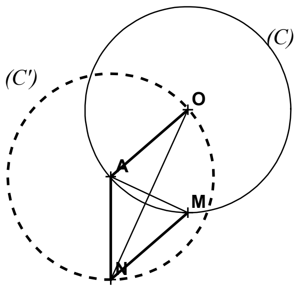
- Analyser l'esquisse de figure et rechercher une application appropriée permettant de répondre à la question :

Le quadrilatère OANM est un losange donc le quadrilatère OANM est parallélogramme.
Par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. On en déduit que le point N est le point image du point M par la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. On considère donc la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

- L'identification des instruments à utiliser :
  - la règle non graduée ;
  - l'équerre ;
  - le compas.
- La rédaction de la solution :

Considérons la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.
On a $t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ et $t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$.
lorsque le point M est tel que le segment [AM] soit un diamètre de $(\mathcal{C})$, les points $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{N}$ et M sont alignés ; dans ce cas il est impossible d'avoir un quadrilatère OANM.
On en déduit que lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C}) - \{\mathrm{A}\}$ tel que le segment [AM] soit un diamètre de $(\mathcal{C})$, le point N décrit le cercle $(\mathcal{C}') - \{t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}(\mathrm{A}); \mathrm{O}\}$ de centre A et de même rayon que celui de $(\mathcal{C})$.

- Construire l'ensemble des points cherchés



IV - MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Propriétés des symétries et translations

Exercice 1

1 - un segment ; 2 - même longueur ; 3 - la distance ;4 - la mesure des angles ;5 -orthogonale ;
6- les angles orientés ;7- parallèle.

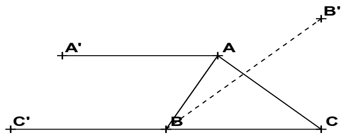
Exercice 2

1 - VRAI ; 2 -FAUX ; 3 - VRAI ; 4 - FAUX ; 5 - FAUX,
6 - VRAI ; 7 – VRAI ; 8 - VRAI ; 9 - FAUX.

Utilisation d'une symétrie et d'une translation pour démontrer une propriété

Exercice 3

Questions 1, 2 et 2 voir figure.



4. A' $= t_{\overrightarrow{CB}}(A)$ donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CB}$.

$C' = S_B(C)$ donc B est le milieu du segment$[CC']$. Par conséquent $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB}$.

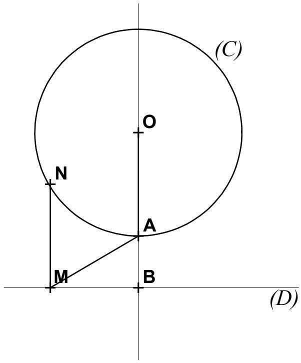
Ainsi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB}$. On en déduit que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC'}$.

Donc le quadrilatère ABC'A' est un parallélogramme.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 4

- Une esquisse de figure

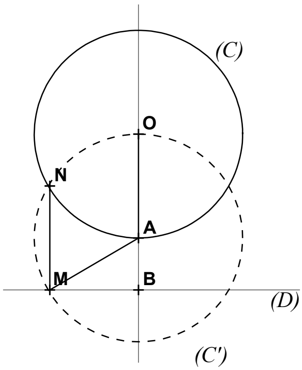


- L'analyse l'esquisse afin de trouver une application convenable

OAMN est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA}$. Par conséquent M est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. On peut considérer la translation $t_{\overrightarrow{OA}}$de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et on note $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{OA}}$. $(\mathcal{C}')$est le cercle de centre $A = t_{\overrightarrow{OA}}(O)$ et de même rayon que celui de$(\mathcal{C})$. L'intersection du cercle $(\mathcal{C}')$et de la droite (D)n'est pas vide,notons M l'un des points d'intersection de$(\mathcal{C}')$ et (D). Comme M appartient à $(\mathcal{C}')$ alors M est certainement l'image d'un point de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{OA}}$. Notons N ce point, ainsi $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA}$ et le quadrilatère OAMN est un parallélogramme.

- Le programme de construction
  - Construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par la translation $t_{\overrightarrow{OA}}$ de vecteur$\overrightarrow{OA}$;
  - Noter M un point d'intersection du cercle $(\mathcal{C}')$ et de la droite(D).
  - Construire le point image de M par la translation $t_{-\overrightarrow{OA}}$ de vecteur $-\overrightarrow{OA}$.
  - Noter N ce point image.

- La construction de la figure codée



- L'examen du nombre de solutions

Le cercle $(\mathcal{C}')$ coupe la droite (D) en deux points exactement et chacun des points d'intersection $(\mathcal{C}')$ et (D) admet une image par la translation $t_{-\overrightarrow{OA}}$ de vecteur $-\overrightarrow{OA}$.

On en déduit qu'il y a exactement deux couples de points répondant à la question.

- Justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé
    - Notons r le rayon de $(\mathcal{C})$, par la translation $t_{\overrightarrow{OA}}$ de vecteur $\overrightarrow{OA}$ l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon r.

On a $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ donc $OB = \frac{3}{2}OA = \frac{3}{2}r < 2r$. Par conséquent$d\big(A; (D)\big) < r$.

On en déduit que le cercle $(\mathcal{C}')$coupe la droite (D) en deux points exactement.

- M étant l'un des points d'intersection de $(\mathcal{C}')$et de(D), $N = t_{-\overrightarrow{OA}}(M)$ appartient à $(\mathcal{C})$.

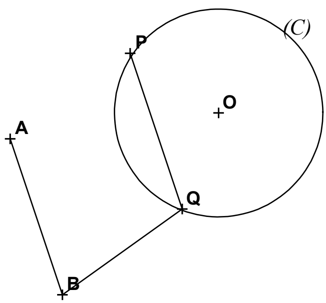
  Ainsi $M = t_{-\overrightarrow{OA}}(N)$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA}$.

  De ce qui précède on déduit qu'il existe exactement deux couple de points (M, N) tels que $M \in$ (D),

$N \in (\mathcal{C})$et que le quadrilatère OAMNest un parallélogramme

Exercice 5

- Une esquisse de figure

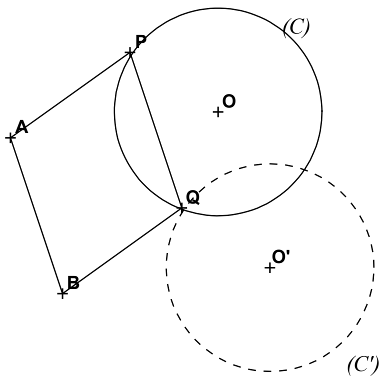


- L'analyse l'esquisse afin de trouver une application convenable

ABQP est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$. Par conséquent Q est l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. On peut considérer la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Soit O' l'image de O par$t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, on note $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$.$(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre O' et de même rayon que celui de$(\mathcal{C})$.
Supposons que l'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ 'est pas vide. On désigne par Q l'un des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
$Q \in (\mathcal{C}')$, il existe donc un point P de $(\mathcal{C})$ tel que $Q = t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(P)$. Ainsi ABQP est un parallélogramme.

- Le programme de construction
  - Construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ de vecteur$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$;
  - Si l'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.n'est pas vide, noter Q un point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$;
  - Construire le point image du point Q par la translation $t_{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ de vecteur $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$;
  - Noter P ce point image.

- La construction de la figure codée



- L'examen du nombre de solutions

On note r le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.
  - Si $AB > 2r$ alors l'intersection des $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ est vide. Dans ce cas il est impossible d'avoir deux points P et Q appartenant à $(\mathcal{C})$ tels que le quadrilatère ABQP soit un parallélogramme.
  - Si $AB = 2r$ alors l'intersection des $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ est un singleton. Par conséquent il existe un unique couple de points (P, Q) tel que $P \in (\mathcal{C}), Q \in (\mathcal{C})$ et que le quadrilatère ABQP soit un parallélogramme.
  - Si $AB < 2r$ alors l'intersection des $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ est une paire. Par conséquent il existe deux couples de points (P, Q) tel que $P \in (\mathcal{C}), Q \in (\mathcal{C})$ et que le quadrilatère ABQP soit un parallélogramme.

- Justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé

r est le rayon de $(\mathcal{C})$, O' est l'image de O par la translation $t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. L'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$est le cercle de centre A et de rayon r.

- Supposons que $AB \leq r$, $(\mathcal{C}')$ coupe $(\mathcal{C})$ en un point ou en deux points exactement. Notons Q l'un de ces points et P le point tel que $P = t_{-\overrightarrow{AB}}(Q)$.

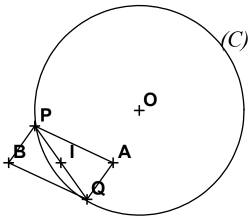
$$\begin{aligned} P = t_{-\overrightarrow{AB}}(Q) &\Leftrightarrow Q = t_{\overrightarrow{AB}}(P) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow ABQP \text{ est un parallelogramme} \end{aligned}$$

Q appartient à $(\mathcal{C}')$, $(\mathcal{C}') = t_{\overrightarrow{AB}}\big((\mathcal{C})\big)$ et $Q = t_{\overrightarrow{AB}}(P)$ donc P appartient à $(\mathcal{C})$.
En conclusion P et Q appartiennent à $(\mathcal{C})$ et le quadrilatère ABQP est un parallélogramme.

- Supposons que $AB > r$, l'intersection des cercles $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C})$ est vide. Dans ce cas il est impossible d'avoir les points P et Q vérifiant les conditions.

Exercice 6

- Une esquisse de figure

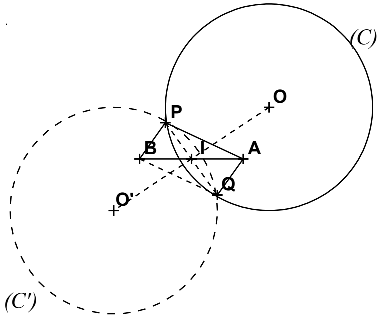


- L'analyse l'esquisse afin de trouver une application convenable

APBQ est un parallélogramme, donc les diagonales [AB] et [PQ] ont même milieu.
En désignant par I le milieu du segment[AB], on remarque que le point B est l'image du point A par la symétrie centrale S_I de centre I. On peut donc considérer la symétrie centrale S_I de centre I.
On note $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par S_I. $(\mathcal{C}')$ pourrait couper $(\mathcal{C})$ en de ux points qui sont symétrique l'un de l'autre par rapport au point I. En désignant par P et Q ces points, on obtient que le quadrilatère APBQ est un parallélogramme.

- Le programme de construction
  - Construire le milieu I du segment [AB] ;
  - Construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale S_I de centre I ;
  - Au cas où $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C})$ se coupent en exactement deux points, noter P et Q ces point de telle manière que les points A, B, C, et Q, cités dans cet ordre forme un cycle.

- La construction de la figure codée



- L'examen du nombre de solutions

On désigne par r le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ et par I le milieu du segment [AB]

- Si $OI < r$ alors l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale S_I de centre I coupe $(\mathcal{C})$ en deux points exactement et ces deux point constituent un unique coupe de points solution.
- Si $OI \geq r$ alors :
  - Soit l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale S_I de centre I coupe $(\mathcal{C})$ en un seul point ; auquel cas les points P et Q sont confondus au point I ; donc pas de solution ;
  - Soit l'intersection des cercles $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C})$ est vide ; auquel cas il est impossible d'avoirs deux points P et Q appartenant à $(\mathcal{C})$ tels que le quadrilatère APBQ soit un parallélogramme.

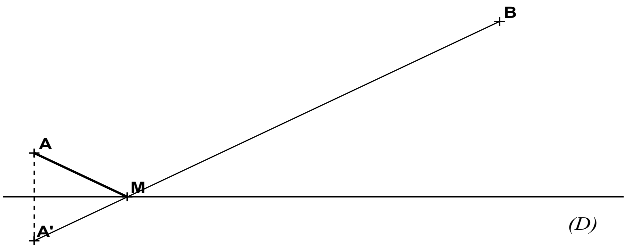
- Justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé

Exercice 7

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) est une droite ;
  - A et B sont deux points distincts situés du même côté de la droite(D).
- La contrainte est :

M est un point de (D) pour que $AM + BM$ soit la plus petite possible.

- L'esquisse de figure :

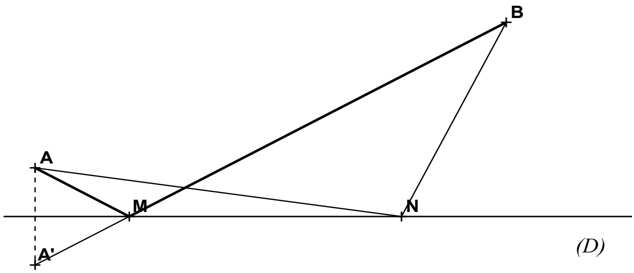


- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :

Soit A' l'image de A par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe(D). Les droites (D) et $(A'B)$ sont sécantes. Le point d'intersection M des droites (D) et $(A'B)$ est tel que pour tout point N de la droite(D),

$AM + BM < AN + BN$.
Ainsi, l'application convenable pour la recherche du point M tel que $AM + BM$ soit la plus petite possible est la symétrie $S_{(D)}$ d'axe (D).

- Le programme de construction :
  - Construire le pointA', image de A par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe(D) ;
  - Les droites (D) et (A'B) étant sécantes, noter M leur point d'intersection.
- La construction de la figure codée :



- L'examen du nombre de solutions :

Les droites (D) et (A'B) sont sécantes et leur point d'intersection M est l'unique point de la droite (D) tel que $AM + BM$ soit la plus petite possible.

- La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :

On a $A' = S_{(D)}(A)$ etM est le point d'intersection des droites (D) et (A'B).
Donc M appartient à médiatrice (D) du segment [AA'] et les points A', M et B sot alignés.
Soit Nun point quelconque de la droite(D), distinct du point M; on a $AN + BN = A'N + BN$
Par ailleurs $AM + BM = A'M + BM = A'B$ car les pointsA', M et B sont alignés.
Comme A'BN est un triangle, alors $A'B < A'N + BN$.
Ainsi $AM + BM < AN + BN$ et on en déduit que le point M est tel que $AM + BM$ est la plus petite possible.

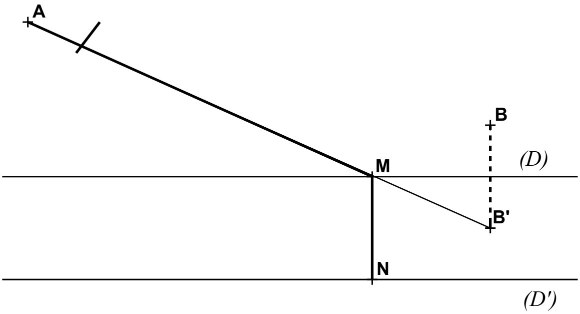
Remarque :
On aurait pu fait le raisonnement avec le point B', image de B par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe(D).

Exercice 8
1^er^ cas

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) et(D')sont deux droites parallèles ;
  - A et B sont deux points distincts.
- La contrainte est :

M est un point de (D), N est un point de (D'), pour que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

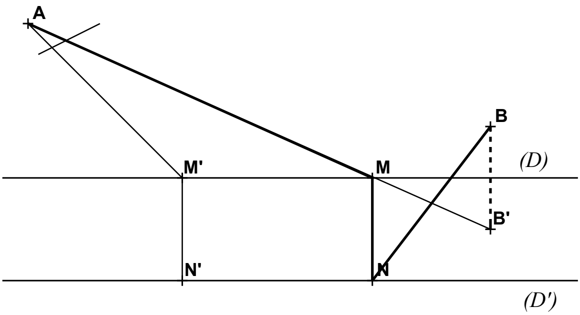
- L'esquisse de figure



- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :

Comme dans l'exercice précèdent, la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ permet de déterminer les points M et N appartenant respectivement aux droites (D) et(D') pour que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

- Le programme de construction :
  - Construire le pointB', image de B par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe(D) ;
  - Les droites (D) et (AB') étant sécantes, noter M leur point d'intersection ;
  - Construire le point N, projeté orthogonal de M sur la droite (D').
- La construction de la figure codée :



- L'examen du nombre de solutions :

Il existe une unique couple de (M, N)avec$M \in (D)$ et $N \in (D')$ tel que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

- La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :

On pourra s'inspirer de la justification de l'exercice 7.

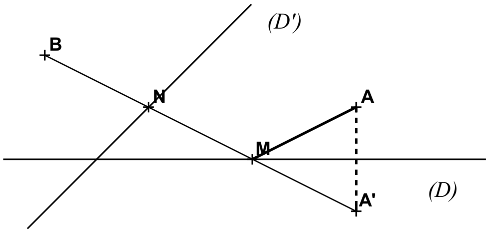
2^{è} cas :

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) et(D')sont deux droites sécantes ;
  - A et B sont deux points distincts.

- La contrainte est :

M est un point de (D), N est un point de (D'), pour que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

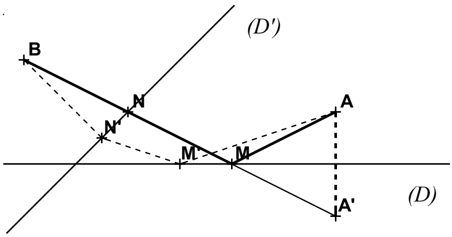
- L'esquisse de figure



- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :

Comme dans le premier cas, la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe (D)permet de déterminer les points M et N appartenant respectivement aux droites (D) et(D') pour que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

- Le programme de construction :
  - Construire le pointA', image de A par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe(D) ;
  - Les droites (D) et (AB') étant sécantes, noter M leur point d'intersection ;
  - Tracer la droite (BM). Elle coupe la droite (D') en ; noter N le point d'intersection des droites (BM) et (D').
- La construction de la figure codée :



- L'examen du nombre de solutions :

Il existe une unique couple de (M, N) avec $M \in (D)$ et $N \in (D')$ tel que $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

- La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :

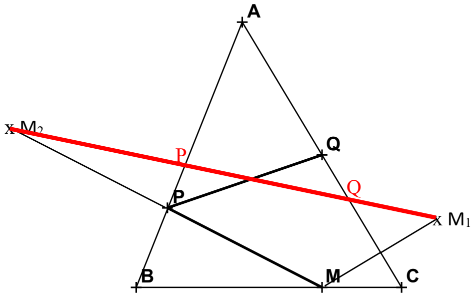
On pourra s'inspirer de la justification de l'exercice 7.

Exercice 9

- Les données de l'énoncé sont :
  - ABC est un triangle ;
  - M est un point appartenant au segment$[BC]$.
- **Les contraintes sont :**

P et Q sont deux points respectivement des droites (AB) et (AC) tels que MP + MQ + PQ soit la plus petite possible.

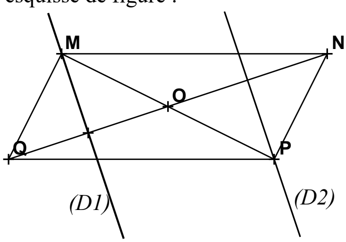
- **L'esquisse de figure :**



- **L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :**
  Posons $M_1 = S_{(AC)}(M)$ et $M_2 = S_{(AB)}(M)$.
- **Le programme de construction :**
  (AC) est la médiatrice de $[MM_1]$
  (AB) est la médiatrice de $[MM_2]$.
- **La construction de la figure codée** :
  Pour tout point P de (AB), on a : $MP = PM_2$ et pour tout point Q de (AC) on a : $MQ = QM_1$. Donc
  $MP + MQ + PQ = PM_2 + M_1Q + PQ = PM_2 + M_1P$
  $MP + MQ + PQ = M_1M_2$
- **La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :**
  $MP + MQ + PQ$ est minimal lorsque M_1, Q, P et M_2 sont alignés dans cet ordre.

  Il suffit pour cela de tracer la droite (M_1M_2).

Exercice 10
- Les données de l'énoncé sont :
  - MNPQ est un parallélogramme qui n'est pas un losange;
  - (D_1) est la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire à la droite (NQ).
- Les contraintes sont :
  La droite (D_2) perpendiculaire à (NQ) en P.
- L'esquisse de figure :



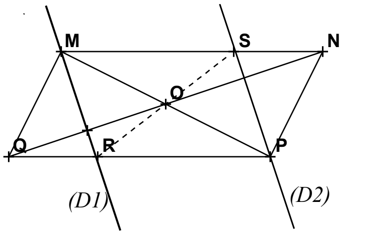
- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :
Notons O le centre du parallélogramme MNPQ, donc O est le milieu des segments [MP] et[NQ].

On peut donc considérer la symétrie centrale S_O de centre O.
Notons R le point d'intersection des droites(D_1) et (PQ), S le point image de R par S_O.
$S_O(M) = P$, $S_O(R) = S$, $S_O(Q) = N$ et $S_O(N) = Q$. Donc$S_O\big((NQ)\big) = (NQ)$ et $S_O\big((MR)\big) = (PS)$.
Comme les droites (NQ) et (MR) sont perpendiculaires alors les droites (NQ) et (PS) sont perpendiculaires et $(D_2) = (PS)$.

- Le programme de construction :
  - Noter O le centre du parallélogramme MNPQ
  - Noter R le point d'intersection des droites(D_1) et (PQ) ;
  - Noter S le point d'intersection des droites(MN) et (OR).

  Ainsi$(D_2) = (PS)$.

- La construction de la figure codée :



- L'examen du nombre de solutions :

La droite (D_2) existe et est déterminée de manière unique.

- La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :

$S_O(M) = P$, $S_O(R) = S$, $S_O(Q) = N$ et $S_O(N) = Q$. Donc $S_O\big((NQ)\big) = (NQ)$ et $S_O\big((MR)\big) = (PS)$.
Comme les droites (NQ) et (MR) sont perpendiculaires alors les droites (NQ) et (PS) sont perpendiculaires et $(D_2) = (PS)$.
Par ailleurs $S_O\big((PQ)\big) = (MN)$ et $R \in (PQ)$ donc$S_O(R) = S \in (MN) \cap (OR)$.

On en déduit que S est le point d'intersection des droites (MN)et(OR) avec R le point d'intersection des droites(D_1) et (PQ).

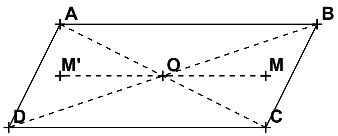
Exercice 11

1.

- Les données de l'énoncé sont :
  - ABCD est un parallélogramme de centre O :
  - M est un point du plan.
- La contrainte est:

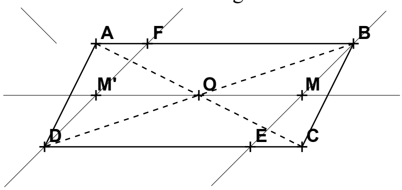
  Construction de l'image M' de M par la symétrie centrale de centre O en utilisant seulement la règle non graduée.

- L'esquisse de figure :



- L'analyse de l'esquisse de la figure :
  ABCD est un parallélogramme de centre O, donc O est le milieu des segments [AC] et [BD].
  Par conséquent les points C et D sont les images respectives des points A et B par la symétrie centrale S_O de centre O.
  Notons E le point d'intersection des droites (BM) et (DC) et F l'image de E par la symétrie centrale S_O de centre O. Comme $S_O\big((DC)\big) = (AB)$ et que $E \in (DC)$ alors $F = S_O(E) \in (AB)$.
  Ainsi F est le point d'intersection des droites (AB) et(OE), d'où $S_O\big((BE)\big) = (DF)$.
  $M \in (BE)$ on en déduit $M' = S_O(M)$ est le point d'intersection des droites (DF) et (OM).

- La construction de la figure codée :



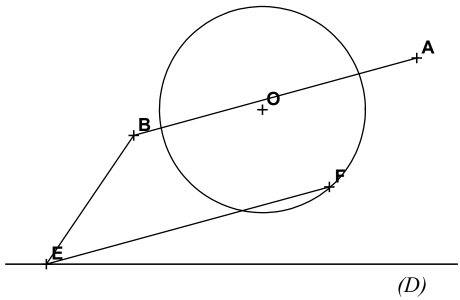
2. Le programme de construction :
   - Tracer la droite (BM) ;
   - Noter E le point d'intersection des droites (BM) et (DC) ;
   - Tracer la droite (OE) ;
   - Notons F le point d'intersection des droites (OE) et (AB) ;
   - Tracer les droites (DF) et (OM);
   - Notons M' le point d'intersection des droites (DF) et (OM).

Exercice 12

1.

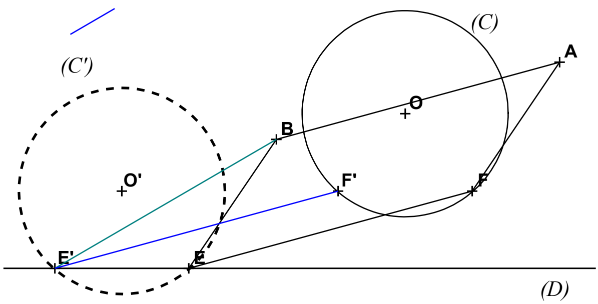
- Les données de l'énoncé sont :
  - $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O :
  - A et B sont deux points extérieures à $(\mathcal{C})$;
  - (D) est une droite n'ayant aucun point commun avec $(\mathcal{C})$.
- La contrainte est:
  Le quadrilatère ABEF soit un parallélogramme avec $E \in (D)$ et $F \in (\mathcal{C})$

- L'esquisse de figure :



- L'analyse l'esquisse de figure et recherche de l'application appropriée pour faire la construction:
  Le quadrilatère ABEF est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$; d'où E est l'image de F par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  On considère donc la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on considère le cercle $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
  Le cercle$(\mathcal{C}')$.
  - Si l'intersection $(\mathcal{C}')$ et (D)est vide alors il est impossible de construire les points E et F appartenant respectivement à (D) et $(\mathcal{C})$ tels que le quadrilatère ABEF soit un parallélogramme.
  - Si l'intersection $(\mathcal{C}')$ et (D) n'est pas vide, noter E l'un des points d'intersection de $(\mathcal{C}')$ et (D). L'image F de E par la translation $t_{-\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $-\overrightarrow{AB}$ est telle que le quadrilatère ABEF est un parallélogramme.

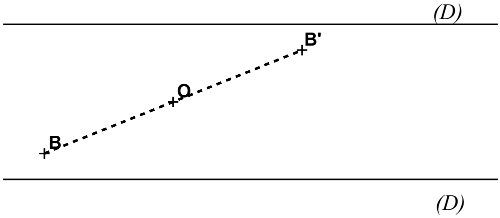
- La construction de la figure codée :



2. Le programme de construction :
   - Construire le cercle $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
   - Au cas où l'intersection de $(\mathcal{C}')$ et (D) n'est pas vide, noter E un point d'intersection de $(\mathcal{C}')$ et (D) ;
   - Construire le point F, image de E par la translation $t_{-\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $-\overrightarrow{AB}$.

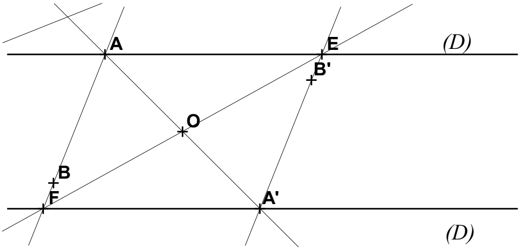
Exercice 13

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) et (D') sont deux droites ;
  - O est le point tel que les droites (D) et (D') sont symétriques par rapport à O ;
  - B est un point qui se trouve dans la bande formée par (D) et (D').
- Les contraintes sont :
  Construire à la règle non graduée uniquement le symétrique B' du point B par rapport à O.
- L'esquisse de figure :



- L'analyse l'esquisse de figure et la recherche d'une application convenable :
  (D) et (D') sont symétriques par rapport à O, B et B'sont symétriques par rapport à O. l'application convenable pour la construction du point B' uniquement avec la règle o graduée est la symétrie centrale S_O de centre$O$.

  Le programme de construction :
  - Placer un point A appartenant à la droite (D) ;
  - Tracer la droite (AB) puis noter F le point d'intersection des droites (AB) et (D').
  - Tracer la droite (OF) puis noter E le point d'intersection des droites (OF) et (D).
  - Tracer la droite (OA) puis noter A' le point d'intersection des droites (OA) et (D').
  - Tracer la droite (OB) puis noter B' le point d'intersection des droites (OB) et $(A'E)$.
- La construction de la figure codée :



- L'examen du nombre de solutions :

le point B' existe tant que le point est situé dans la bande formée par (D) et (D').

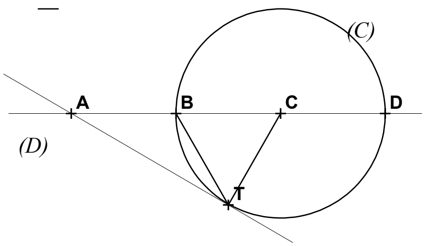
3. La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé :

Le point E, image du point F par la symétrie centrale S_O de centre O est le point d'intersection des droites (OF) et (D) car $F \in (D')$ et (D) et (D') sont symétriques par rapport à O.
A' étant l'image de A parS_O, la droite $(A'E)$ est l'image de la droite (AF) par S_O.

Le point B appartient à la droite (AF) donc le point d'intersection B' des droites (OB) et $(A'E)$ est l'image du point B par S_O.

Exercice 14

1.



2.

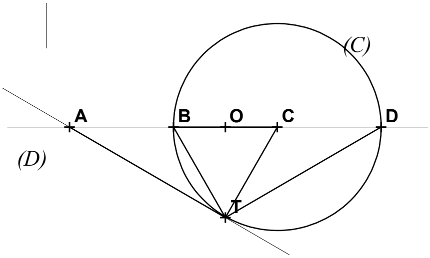
- les points A, B, C et D deux points deux à deux distincts, appartenant à la droite(D) tels que $AB = BC = CD$. Donc C est le milieu du segment $[BD]$ par conséquent le cercle $(\mathcal{C})$ e de diamètre $[BD]$ est le cercle de centre C est de rayon CB.
le triangle BTD est inscrit dans le cercle$(\mathcal{C})$, donc $CA = BC = CT$.
- T est le point de contact d'une tangente à $(\mathcal{C})$ menée parA. Donc les droites (AT) et (CT) sont perpendiculaires, ainsi le triangle ATC est rectangle en T donc inscrit dans le cercle de diamètre$[AC]$.
A, B et C sont des points de la droite (D) tels que $AB = BC$. Donc B est le centre du cercle de diamètre$[AC]$. on en déduit que $BA = BC = BT$.

Des deux points précédents on a $CA = CT = BC = BA = BT$. Donc$CT = BC = BT$.
On conclut que le triangle BTC est équilatéral.

3.

- les données de l'énoncé :
  - (D) est une droite ;
  - A, B, C et Dsont quatre points de(D)tels que $AB = BC = CD$;
  - $(\mathcal{C})$est le cercle de diamètre $[BD]$;
  - T est le point de contact d'une tangente à $(\mathcal{C})$menée parA.

- la conclusion : $TA = TD$.
- L'esquisse de figure



- Analyse de l'esquisse de figure et recherche d'une application pour faire la démonstration :

Soit O le milieu du segment [BC].

Comme le triangle BTC est équilatéral alors la droite (OT) est la médiatrice du segment [BC], par conséquent le point C est l'image du point B par la symétrie orthogonale $S_{(OT)}$ d'axe (OT).

- La rédaction de la démonstration

Considérons donc la symétrie orthogonale $S_{(OT)}$ d'axe (OT).

On a : (OT) perpendiculaire à (D), les points O, A, B, C et D appartiennent à (AD) et $OA = OB + BA = OC + CD = OD$. Donc (OT) est la médiatrice du segment [AD].

On en déduit que le point D est l'image du point A par la symétrie orthogonale $S_{(OT)}$ d'axe (OT).

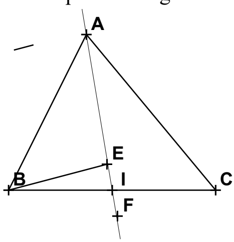
Ainsi $S_{(OT)}(T) = T$ et $S_{(OT)}(A) = D$. On en déduit que $TA = TD$.

- Vérifier que la démonstration respecte les contraintes de l'énoncé :

On vérifie aisément que la démonstration respecte les contraintes de l'énoncé.

Exercice 15

- Les données de l'énoncé :
  - ABC est un triangle ;
  - I est le milieu du segment [BC] ;
  - E et F les points de la droite (AI) tels que les droites (BE) et (CF) soient perpendiculaires à la droite (AI).
- la conclusion : $BE = CF$.
- L'esquisse de figue :



- L'analyse de l'esquisse de figure et recherche d'une application pour faire la démonstration :

I est le milieu du segment [BC]. Donc C est l'image de B par la symétrie centrale S_I de centreI.

Il suffira donc de démontrer que F est l'image de B par la symétrie centrale S_I de centreI. Et comme centrale conserve la distance, on aura donc $BE = CF$.

Ainsi l'application appropriée pour faire la démonstration est la symétrie centrale S_I de centre I.

- La rédaction de la démonstration :

Considérons la symétrie centrale S_I de centreI.

$S_I(I) = I$ et $S_I(B) = C$.

E est le point d'intersection des droites (BE) et (AI), donc $S_I(E)$ est commun aux droites $S_I\big((BE)\big)$ et $S_I\big((AI)\big)$.

Les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires à la droite (AI) donc (BE) $//$ (CF).

$S_I(B) = C$, étant donné que par une symétrie centrale, une droite et son image sont parallèles, donc $S_I\big((BE)\big) = (CF)$.

On sait que par une symétrie centrale, une droite passant par le centre de la symétrie est son propre image, donc$S_I\big((AI)\big) = (AI)$.

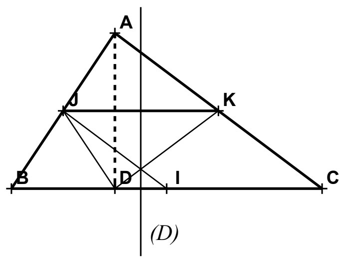
On a $S_I\big((BE)\big) = (CF)$ et $S_I\big((AI)\big) = (AI)$, donc $S_I(E) = F$.

Or $S_I(B) = C$, on en déduit que $BE = CF$.

- La démonstration respecte bien les contraintes de l'énoncé.

Exercice 16

1.



2-(Δ) est la médiatrice des segments [JK] et [DI], donc I, D et K sont les images respective des points D, I et J par la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).

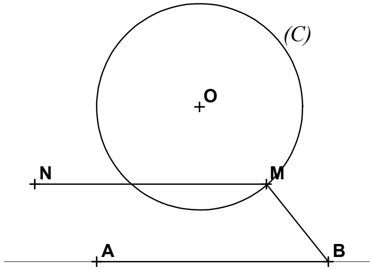
Ainsi l'image de l'angle $\widehat{DJI}$ par $S_{(\Delta)}$ est l'angle$\widehat{IKD}$.

On en déduit que mes $\widehat{DJI} =$ mes $\widehat{IKD} =$ mes $\widehat{DKI}$; car l'image d'un angle par une symétrie est un angle de même mesure.

Exercice 17

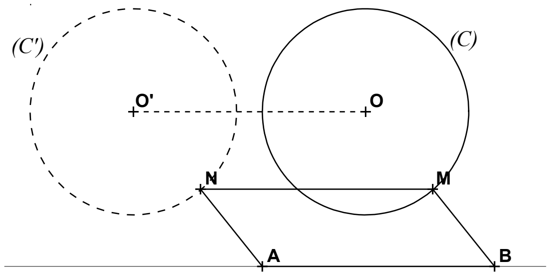
- Les données de l'énoncé :
  - $(\mathcal{C})$ est un cercle ;
  - A et B sont deux points distincts extérieurs à $(\mathcal{C})$ tels que la droite (AB) et le cercle $(\mathcal{C})$n'aient aucun point commun ;
  - M un point du cercle $(\mathcal{C})$;
  - N le point du plan tel que ABMN soit un parallélogramme.
- Les instruments à utiliser :
  - Une règle non graduée ;
  - Un compas.

- Une esquisse de figure :



- L'analyse de l'esquisse de figure et la recherche d'une application pour faire la démonstration :
ABMN est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$. Ainsi N est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$ de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
L'application convenable est la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$ de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
- La rédaction de la solution :
Considérons la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$ de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
ABMN est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$, par conséquent $N = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$.
Ainsi lorsque M parcoure le cercle$(\mathcal{C})$, son image N parcoure le cercle$(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par $t_{\overrightarrow{BA}}$ car l'image d'un cercle par une translation est un cercle.

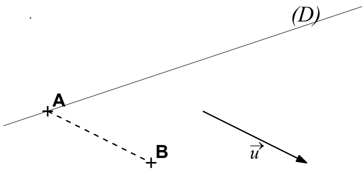
- La construction de l'ensemble des points cherchés :



Exercice 18
- Les données de l'énoncé sont :
  - (D) est une droite ;
  - $\vec{u}$est un vecteur qui n'est pas directeur de (D) ;
  - A un point de (D) ;
  - B est l'extrémité du représentant d'origine A du vecteur$\vec{u}$.

- Les instruments à utiliser :
  - Une règle non graduée ;
  - Un compas.

- Une esquisse de figure :



- L'analyse de l'esquisse de figure et la recherche d'une application pour faire la démonstration :

B est l'extrémité du représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Ainsi B est l'image de A par la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$.

L'application convenable est la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$.

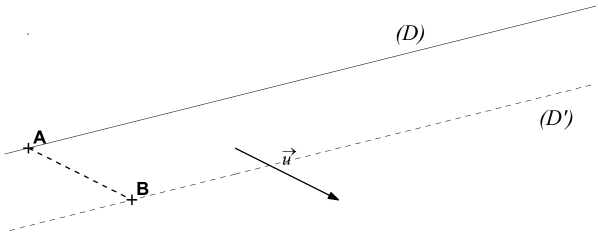
- La rédaction de la solution :

Considérons la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$.

B est l'extrémité du représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et par conséquent $B = t_{\vec{u}}(A)$.

Ainsi lorsque A parcoure la droite (D), son image B parcoure la droite (D'), image de (D) par $t_{\vec{u}}$ car par une translation, l'image d'une droite est une droite.

- La construction de l'ensemble des points cherchés :



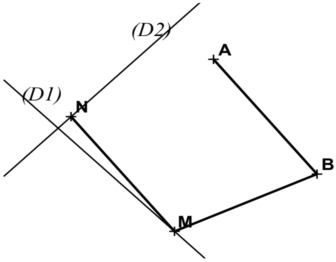
Exercice 19

1.

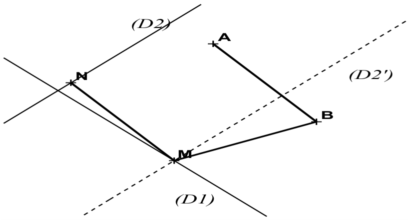
a.

- Les données de l'énoncé sont :
  - (D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes en O :
  - A et B sont deux points distincts donnés dans un même secteur angulaire.
- Les contraintes :

  Le quadrilatère ABMN soit un parallélogramme avec $M \in (D_1)$ et $N \in (D_2)$.
- Une esquisse de figure :



- Analyse de l'esquisse et recherche de l'application convenable :
  Le quadrilatère ABMN est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$; d'où M est l'image de N par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  Ainsi la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$ convient pour faire la construction.
- La construction de la figure :



b. Le programme de construction :

- Construire la droite (D_2'), image de la droite (D_2) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- Noter M le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2') ;
- Construire le point N, image de M par la translation $t_{-\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $-\overrightarrow{AB}$.

2. $M \in (D_2)$, $M = t_{\overrightarrow{AB}}(N)$ et $(D_2') = t_{\overrightarrow{AB}}\big((D_2)\big)$.
   Donc M décrit la droite (D_2') lorsque N décrit la droite (D_2).

Exercice 20

Pour donner mon point de vue sur la question qui oppose le riche cultivateur et son fils, je vais :

- D'abord analyser les données de l'énoncé et la figure pour trouver une application du plan convenable qui me permettra de faire mes démonstrations ;
- Ensuite déterminer l'image de la droite (PN) par cette application et voir si cette image est égale à la droite (KS) ;
- Enfin donner mon point de vue sur la question qui oppose le riche cultivateur et son fils.

<u>Je trouve une application du plan convenable qui me permettra de faire mes démonstrations</u>

Le quadrilatère KMNL est un parallélogramme de centre O. Donc O est le milieu des segments [KN] et [ML].

C'est-à-dire que les points K et N sont symétriques par rapport au point O ; il en est de même des points M et L.

De plus S est le symétrique de P par rapport au point O.

On peut donc considérer la symétrie centrale S_O de centre O.

Je détermine l'image de la droite (PN) par la symétrie centrale S_O de centre O

O est le milieu du segment[KN]. Donc K est l'image de N par S_O.

P est le projeté orthogonal de N sur la droite (KM) et S est le symétrique de P par rapport au point O. Donc S est l'image de P par S_O.

Donc la droite (KS) est l'image de la droite (PN)par S_O.

Je donne mon point de vue sur la question

La droite (KS) est l'image de la droite (PN) par S_O. Etant donné qu'une droite et son image par une symétrie centrale sont parallèles, les droites (KS)et(PN) sont parallèles.
On peut donc affirmer que le fils du riche cultivateur n'a pas raison, car je viens de démontrer que les droites (KS) et (PN) sont parallèles.

SITUATION COMPLEXE

Exercice 21

L'image de la droite (PN) par la symétrie de centre O est la droite (KS), donc les droites (KS) et (PN) sont parallèles. Donc son fils n'a pas raison

Exercice 22

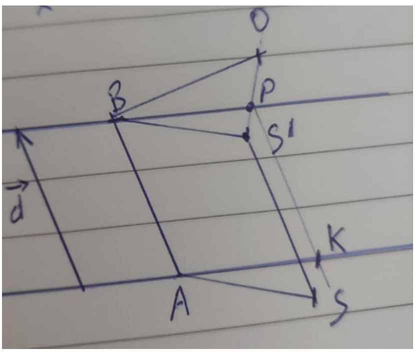
Construire le symétrique O' de O par rapport à (AB) (plus petite distance de O à (AB)).

Construire le symétrique O'' de O par rapport à (AC) (plus petite distance de O à (AC)).

$\{I\}=(O'O")\cap(AB)$ et $\{P\}=(O'O")\cap(AC)$

La distance minimum est : O'I + IP + PO''

Exercice 23



Posons L = SA + AB + BO

Soit S' le translaté du point S par la translation de vecteur $\vec{d}$

Posons L'= SS' + S'B + BO ; L = L', car SS'= AB et S'B = AS.

Rendre la distance L minimum, c'est aussi rendre la distance L'minimum.

Dans le triangle BS'O, S'O $\leq$ S'B +BO, donc L'$\leq$ SS' + S'O.

Soit P, le point d'intersection des droites (D_1) et (BO) et K le translaté de P par la translation de vecteur -$\vec{d}$. On a : SS' + S'O = SK + KP +PO, donc L'$\leq$ SK + KP +PO

Conclusion : Les points K et P, ainsi définis sont la solution du problème.

4 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I- Situation d'apprentissage

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle des courses en taxi compteur.***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont Monsieur Koffi et son fils.***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule à Abidjan.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant la fête de Noel.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est d'évaluer le budget des déplacements à Abidjan de M. Koffi.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Le prix d'une course en taxi compteur est constitué d'une partie fixe ou prise en charge (100 FCFA) et d'une partie proportionnelle à la distance parcourue (50 FCFA par Km)***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***M. Koffi veut évaluer la somme prévisionnelle à dépenser en taxi.***
- Comment les acteurs s'y prennent pour résoudre le problème ? ***M. Koffi demande à son fils en 2ndeC de l'aider.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

La détermination de la somme prévisionnelle se fait en fonction de la distance parcourue. On définit ainsi une fonction dont la distance parcourue est la variable. Dans cette leçon, nous parlerons des généralités des fonctions.

II- ACTIVITES DE DECOUVERTE

Activité 1 : **Notion de fonction**

Objectif de l'activité : Introduire la notion de fonction

Solution

La correspondance 2 est celle où chaque enfant préfère 0 ou un jouet.

Exercice de fixation de l'activité 2

1 **1- V ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F.**

Activité 2 Fonction définie par une formule explicite

Objectif de l'activité : Connaître une fonction définie par une formule explicite

1) Etapes de calcul de $f(x)$
   1ère étape : prendre un nombre réel x
   2ème étape : ajouter le chiffre 1 : $x + 1$
   3ème étape : élever le résultat précédent au carré : $(x + 1)^2$
   4ème étape : ajouter (-3) au résultat précédent : $(x + 1)^2 - 3$
   On a : $f(x) = (x + 1)^2 - 3$

2) La valeur de $f(x)$ pour $x = 4$ est $f(4) = (4 + 1)^2 - 3 = 22$.

Exercice de fixation de l'activité 2

2

a) Pour $f(x) = 2x^2 + 4$, $x_0 = 3$

$$\boxed{x} \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{Elever}} \boxed{x^2} \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{Multiplier}} \boxed{2x^2} \xrightarrow{\text{Ajouter 4}} \boxed{2x^2 + 4}$$

Pour $x_0 = 3$, $f(3) = 2\times3^2 + 4 = 22$

b) Pour $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4}$

$$\boxed{x} \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{Elever}} \boxed{x^2} \xrightarrow{\text{Ajouter 4}} \boxed{x^2+4} \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{Prendre}} \boxed{\dfrac{1}{x^2+4}}$$

$$\boxed{x} \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{Multiplier}} \boxed{2x} \xrightarrow{\text{Ajouter 1}} \boxed{2x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{Multiplier}} \boxed{\dfrac{1}{x^2+4}\times(2x+1)}$$

Pour $x_0 = 2$ on a : $f(2) = \dfrac{2\times2+1}{2^2+4} = \dfrac{5}{8}$

Activité 3 Ensemble de définition d'une fonction

Objectif de l'activité : Connaître l'ensemble de définition d'une fonction

Solution

L'ensemble des éléments de B qui ont une image est : $\{e; f; g; h\}$

3

Exercice de fixation de l'activité 3

1- $D_f = IR$; 2 – $D_f = IR\backslash\{1\}$; 3 – $D_f = IR$; 4 – $D_f = IR\backslash\{\sqrt{2}\}$.

Activité 4 Fonction définie par un tableau de valeurs

Objectif de l'activité : *Connaître une fonction définie par un tableau*

Solution

Voir récapitulatif de l'activité 4

Exercice de fixation de l'activité 4

4 Le tableau 2 définit une fonction parce que chaque élément de l'ensemble de départ a un seul correspondant dans l'ensemble d'arrivée.

Activité 5 Représentation graphique d'une fonction

Objectif de l'activité : *Connaître la définition de la représentation graphique d'une fonction*

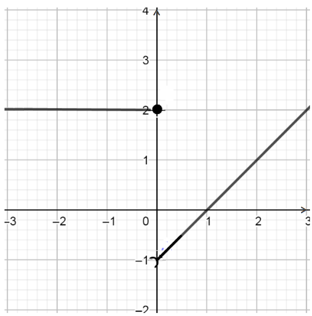
1) D'après la représentation graphique, le prix de 5 km est : 1500

2) D'après la représentation graphique, la distance parcourue pour une course qui a coutée 3000 est 10 km

3) L'ensemble des points M de E de coordonnées (x ;y) tels que $x \in [1; 10]$ est un segment de droite dont les extrémités ont pour coordonnées respectives (1 ;500) et (10;3000).

Exercice de fixation de l'activité 5

5



Activité 6 Fonction définie par une courbe

Objectif de l'activité : *Connaître une fonction définit par une courbe*

Solution

Voir récapitulatif de l'activité 6

Exercice de fixation de l'activité 6

6

a) Cette représentation n'est pas une fonction ;
b) et c) sont des représentations de fonctions

Activité 7 Image et antécédents d'un nombre par une fonction f définie par une formule explicite

Objectif de l'activité : Calculer l'image et les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction définit par une formule explicite.

1) $f(0) = 0^2 - 4\times0 = 0$; $f(-3) = (-3)^2 - 4\times3 = 3$; $f(1) = -3$

2) Les nombres réels x tels que $f(x) = 0$ sont : -2 ; 0 ; 2.

Exercice de fixation de l'activité 7

7 **1- c) ; 2 – c) ; 3 – b) ; 4 – d)**

Activité 8 Image et antécédents d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

Objectif de l'activité : *Calculer l'image et les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction définit par une représentation graphique de cette fonction*

Solution

Voir récapitulatif de l'activité 8

Exercice de fixation de l'activité 8

8

x	-2	-1 et 2	0	1 et -2	2
$f(x)$	-2	0	-1	-2	0

Activité 9 Fonctions égales

Objectif de l'activité : *Déterminer l'image directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique.*

Solution

a) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) $\forall x \in D_g, g(x) = x+2$

c) $]2,+\infty[\subset \mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc $\forall x \in]2,+\infty[, g(x) = x+2 = f(x)$ donc $\forall x \in]2,+\infty[, g(x) = f(x)$

Exercice de fixation de l'activité 9

9 $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x+2 > 0\}$; donc $D_f =]-2;+\infty[$ et $D_g = \{x \in \mathbb{R}, x+2 \geq 0\}$; donc $D_g = [-2;+\infty[$.

Donc les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

Pour tout x élément de $]-2;+\infty[$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x+2} = \sqrt{x+2} = g(x).$$

Donc, les fonctions f et g sont égales sur $]-2;+\infty[$.

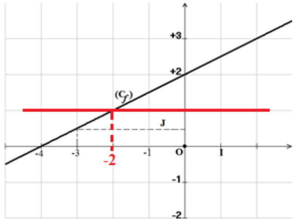
Activité 10 Exemple d'utilisation de la représentation graphique d'une fonction pour résoudre une équation ou une inéquation.

Objectif de l'activité : *Déterminer l'image réciproque d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique.*

Solution

a) $f(-3)=\frac{1}{2}(-3)+2=\frac{1}{2}$; $f(4)=\frac{4}{2}+2=4$

b) Détermination graphique des solutions de l'équation : $f(x) = 1$

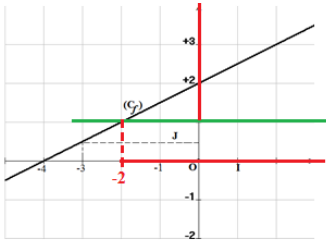


Donc $S_{\mathbb{R}}$ = {-2}

Résolution algébrique de l'équation $f(x) = 1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+2=1 \Leftrightarrow x=-2$. Donc $S_{\mathbb{R}}$ = {-2}.

c) Détermination graphique de $f(x) \geq 1$



Donc $S_{\mathbb{R}}$ = [-2 ; +∞[

Résolution algébrique de $f(x) \geq 1$.

$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -2$ donc $S_{\mathbb{R}}$ = [-2 ; +∞[.

Exercice de fixation de l'activité 10

10 **1-a) ; 2- a) ; 3- c) ; 4- b).**

<u>Activité</u> 11 Image directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

Objectif de l'activité : *Déterminer directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique.*

Solution

f([-2 ;0]) = [0 ; 4] ; f([2 ; 5]) = [1 ; 3] .

Exercice de fixation de l'activité 11

11 f([0 ;1]) = [0 ; 4] ; f([4 ; 5]) = [0 ; 6] ; f([-2 ; 2]) = [-3 ; 6] .

<u>Activité</u> 12 Image réciproque d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

Objectif de l'activité : *Déterminer l'image réciproque d'un intervalle*

Solution

D'après la représentation graphique donnée, l'image réciproque de l'intervalle [0 ; 4] par f est [-2 ; 2].

Exercice de fixation de l'activité 12

12 D'après la représentation graphique de f on a :

l'image réciproque par f de :

- [-3 ; 0] est [-2 ; - 1,5]
- [0 ;3] est [-1,5 ; 3,5]
- [2 ; 3] est [-1 ; 1,25] $\cup$[3 ;3,5]

<u>Activité</u> 13 Variation d'une fonction

Objectif : *Déterminer les variations et les extrema d'une fonction*

Solution

a) $f(-7) = 0$; $f(-4) = 3$; $f(0) = -3$; $f(2) = 4$

b) $f(-4) > f(-7)$; $f(0) < f(2)$

c) Le point au plus haut sommet sur l'intervalle [-7 ;-2] a pour coordonnées (-4 ; 3) donc a = -4 ainsi $\forall x \in I, f(x) \leq f(-4)$.

d) Le point au plus bas sommet sur l'intervalle [-2 ; 1] a pour coordonnées (0 ; -3) donc b = 0 ainsi $\forall x \in J, f(x) \geq f(0)$.

Exercice de fixation de l'activité 13

13 1- a) Variations de la fonction g

- g est strictement croissante sur [-2 ;-1] et sur [1 ;3]
- g est strictement décroissante sur [-1 ; 1] et sur [3 ;4]

b) Tableau de variation de g

x	-2		-1		1		3		4
g(x)	0	↗	1	↘	-2	↗	2	↘	1

2- Le minimum de g sur [-2 ;4] est -2
Le maximum de g sur [-2 ;4] est 2
Le minimum de g sur [-2 ; 0] est -1
Le maximum de g sur [-2 ;0] est 1
Le minimum de g sur [0 ;4] est -2
Le maximum de g sur [0 ;4] est 2

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	**Comment déterminer l'ensemble de définition de certains types de fonction ?** $D_f = \{x \in]-\infty;0], x+3 \geq 0\} = [-3;0]$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$; $D_h = [-3;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$; $D_k = \mathbb{R}^*$

2	**Comment démontrer algébriquement qu'un nombre donné est le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle I ?** $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 3+(x-1)^2 \geq 3$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 3$. On en déduit que 3 est le minimum de g sur IR.

3	**Comment justifier que deux fonctions sont égales sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$** 1- Si $x \in]-\infty ;-1] \cup [0 ;+\infty[$, $f(x) = x^2 + x$, si $x \in$IR, $g(x) = x^2 + x$. on en déduit que si $x \in [0 ;+\infty[$,$f(x) = g(x)$. 2- Si $x \in [-1 ;0]$, $f(x) = -x^2 - x$ et $g(x) = x^2 + x$ on constate que f et g ne sont pas égales sur $[-1 ;0]$. On $[-1 ;0] \subset \mathbb{R}$ donc f et g ne sont pas égales sur IR.

EXERCICES DE FIXATION

Notion de fonction

Exercice 1

a) La phrase définie une fonction. Son ensemble de définition est $[-3; +\infty[$

b) $f(x) = 2\sqrt{x+3}$

Exercice 2

a) A tout nombre réel x on associe un seul nombre réel y tel que y soit le carrée de x divisé par 3

La phrase définie une fonction. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{x^2}{3}$; $f(100) = \frac{100^2}{3} = 3333.33$

b) A tout nombre réel x on associe un ou zéro nombre réel y tel que y soit la racine carrée du double de x augmenté de 3 Donc la phrase définie une fonction Son ensemble de définition est $\left[-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

$f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f(100) = \sqrt{203}$ =14.24

Ensemble de définition

Exercice 3

$1 \to c$; $2 \to c$; $3 \to$ b

Exercice 4

$a)$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$; d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; e) $\mathcal{D}_f = \phi$; f) $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ g) $\mathcal{D}_f = [-1; 1]$ h) $\mathcal{D}_f = [-1; 1]$ i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Image et antécédents d'un nombre par une fonction définie par une formule explicite

Exercice 5

a)7 est l'image de 4 par f ; b) 4 est l'antécédent de 7 par f ; c) 4 a pour image 7 par f ; d) 7 a pour antécédent 4 par f.

Exercice 6

$f(3) = 0$; $f(-1) = 8$; $f(1) = 0$; $f(\sqrt{2}) = 5 - 4\sqrt{2}$.

Exercice 7

a) $f(2) = \frac{11}{3}$; $f(1) = 4$; $f(-2) = 1$.
b) Il est impossible de calculer l'image de -1 car $\frac{2}{0}$ n'existe pas

Exercice 8

$f(0) = 3$; $f(-1) = 8$; $f(1) = 6$; $f(4) = 3$

Exercice 9

a) g(2)=0 ; g(1) = - 1 ; g(-2) = 2
b) non il n'est pas possible de calculer l'image de 0 par g par ce que 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de g.

Exercice 10

a) Les antécédents de 5 sont -3 et 3
b) L'antécédent de -4 est 0

Exercice 11

a) L'antécédent de 0 est -1
b) L'antécédent de 3 est 8
c) Il n' est pas possible de déterminer l' antécédent de 2 car l' équation $\frac{2x*2}{x-2} = 2$ n' a pas de solution

Exercice 12

a) .$f(-2) = 1$; $f(4) = 25$
b) Les antécédents de -5 sont -1 et 1 ; celui de -7 est 0

Image et antécédents d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction.

Exercice 13

Tableau 1 est associé à la droite (D) et on a :

x	0	3	3,75
$f(x)$	2	-2	-3

Tableau 2 est associé à la droite (D') et on a :

x	-2	0	2
$f(x)$	-2	-1	0

Exercice 14

a) $f(-2) = 1$; $f(3) = -2$; $f(0) = 2$.

b) Antécédent de 0 par f est 1,25
Antécédent de 2 par f est 0
Antécédent de – 1 par f est 2.

Exercice 15

1-a) Une valeur de x pour laquelle $f(x) = 1$ est 3.

b) Une autre valeur de x pour laquelle $f(x) = 1$ est 6,5.

2- les valeurs de x pour lesquelles :

a) $f(x) = 2$ sont : 4
b) $f(x) = -2$ sont 0 et 1,75
c) $f(x) = 0$ sont 2,5 et 8.

3- Les réels qui n'ont qu'un seul antécédent par f sont : 2 et – 3 .

Exercice 16

a) f est définie sur l'intervalle [-4 ;3]
b) $f(-4) = 2$; $f(-2) = 3$; $f(1) = -1$; $f(3) = 2$

Variation d'une fonction – Maximum d'une fonction – Minimum d'une fonction – Image directe-Image réciproque.

Exercice 17

a) $\mathcal{D}_f = [0; 10]$
b) f est décroissante sur $[0; 2]$; croissante sur $[2; 6]$ et décroissante sur $[6; 10]$

Exercice 18

a) f est décroissante sur $[-4; -2]$ et f est croissante sur $[-2; 4]$

b)

x	-4		-2		4
$f(x)$	1	↘	-2.3	↗	2

Exercice 19

1) .a) g(2)<g(4) b) g(-2) < g(1)
2) .a) g(2)> g(4) b) g(-2) > g(1)

Exercice 20

.f peut être croissante sur $[-3; 3]$

Exercice 21

a) Oui f(-4) > f(1) ; b) non ; c) oui f(3) < f(4) ; d) oui f(-20) > f(-3)

Exercice 22

1) .$f(x) = x(1-x) = -x^2 + x$; or $-(x - \frac{1}{2})^2 = -x^2 + x - \frac{1}{4}$

$= f(x) - \frac{1}{4}$

Donc $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ donc $a = \frac{1}{4}$

2) .f est croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2} + \infty\right[$

Exercice 23

1- $2 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1} = g(x)$

2- g est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$

Maximum et minimum d'une fonction

Exercice 24

1) a) non ; b) oui $f(-5) > f(1)$; c) oui $f(3) < f(4)$ d) non
2) Le minimum de f sur $[-5; 6]$ est -2

Exercice 25

1- f est strictement décroissante sur [-4 ;-2] et sur [0 ;10]
f est strictement croissante sur [-2 ;0].

2- Le maximum de f sur :
- [-4 ;3] est 3
- [-2 ; 3] est 2
- [-4 ;0] est 3

Le minimum de f sur :

- [-4 ;3] est -5
- [-2 ; 3] est -5
- [-4 ;0] est -5

Exercice 26

1) Pour tout nombre réel x ; $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 6 \geq -6 \Rightarrow f(x) \geq -6$
2) L'antécédent de -6 est 0 et pour tout réel x ; $f(x) \geq -6$ donc -6 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 27

a) .g(x) = x^2 -6x +10 . pat la forme canonique g(x) = $(x - 3)^2 - 9 + 10$
.g(x) = $(3 - x)^2 + 1$
b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $(3 - x)^2 \geq 0 \Rightarrow (3 - x)^2 + 1 \geq 1$ ainsi $g(x) \geq 1$ et g (3) = 1 donc le minimum de g est 1 sur $\mathbb{R}$

Exercice28

$\forall x \in \mathbb{R}$ $-(1 + x)^2 \leq 0$ et $2 - (1 + x)^2 \leq 2$ ainsi $f(x) \leq 2$ et $f(-1) = 2$ donc le maximum de f est 2

Fonctions égales

Exercice 29

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; g(x) $= \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x - 3 = f(x)$ donc le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Exercice 30

Le plus grand ensemble sur lequel f et g sont égales est $[-3; +\infty[$.

Exercice 31

1).a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = [-1; +\infty[$

.b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

C) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

2) a) f et g coïncident sur $[-1; +\infty[$; b) f et g coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; c) f et g coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Exercice 32

a) .g et h coïncident sur I car g et h sont définies sur I et pour tout x appartenant à I, $g(x) = h(x)$
b) . g et h ne coïncident pas sur I car pour tout x de I $g(x) \neq h(x)$
c) .g et h coïncident sur I car g et h sont définies sur I et pour tout x appartenant à I $g(x) = h(x)$
d) .g et h coïncident sur I pour même raisons qu'en c).
e) .g et h coïncident sur I pour les mêmes raisons .
f) .g et h ne coïncident pas sur I car pour tout x appartenant $g(x) \neq h(x)$

Image directe – image reciproque d'un intervalle

Exercice 33

1- a) $-4 < x < 2$; $-2 < f(x) < 2.5$

b) $2 < x < 4$; $-1 < f(x) < 2.5$

2- L'image directe par f de :

- [-4 ;2] est [-2 ;2,5]
- [2 ;4] est [-1 ;2,5]

EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFODISSEMENT

Exercice 34

1- $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\in(C)$; $B(-2;2)\in(C)$; $C\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\notin(C)$; $D(-0{,}6;-1{,}5)\in(C)$.

2-a) l'abscisse du point de (C) d'ordonnée 2 est – 2.

b) l'abscisse du point de (C) d'ordonnée 5 est $-\frac{5}{4}$.

Exercice

1) Les points O(0 ;0) ; A(1 ; 1) C (-1 ;-1) D(5 ; 25)
2) .a) l'abscisse du point d'ordonnée 25 est 5
   .b)celui du point d'ordonnée -25 est -5

Exercice 35

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
2) .f(-4) $= \frac{4}{7}$; 3 n'a pas d'image
3) L'antécédent de -3 est $\frac{9}{4}$; 1 n' a pas d'antécédent

Exercice 36

1) $f(x') - f(x) = (x' - x)(2x' + 2x - 1)$
2) .a) si $x' > x \geq \frac{1}{4}$ alors $x' - x > 0$ et $2x' + 2x - 1 > 0$ (car $x' > \frac{1}{4}$ et $x \geq \frac{1}{4}$ alors $2x' + 2x > 1$)

   Ainsi $f(x') - f(x) > 0$ et $f(x') > f(x)$ alors f est croissante sur $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right[$

   .b) si $\frac{1}{4} \leq x < x'$ alors $x' - x > 0$ et $2x' + 2x - 1 < 0$ ainsi $f(x') - f(x) < 0$ et $f(x') < f(x)$ ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$

   .c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	

3) .a) $f(x) = 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f(x) = 2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1$

   $f(x) = 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $2(x - \frac{1}{4})^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$ ainsi $f(x) \geq \frac{7}{8}$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq \frac{7}{8}$ et $f(\frac{1}{4}) = \frac{7}{8}$ donc f admet un minimum égal à $\frac{7}{8}$.

4) .$f(-1) = 4$; $f(0) = 1$; $f(\frac{1}{4}) = \frac{7}{8}$; $f(1) = 2$; $f(2) = 7$.

Exercice 37

1) .a) $D_f = IR$

   b) Tableau de variations de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

.b) Le maximum de est 8.

2) La fonction définie en c) car $f(-2) = 0$ et le point A(-2 ;0) appartient à la courbe ;$f(0) = 6$ et le point B(0 ;6) appartient à la courbe ; de même $f(2) = 8$ et le point C(2 ;8) appartient à la courbe.

Exercice 38

1) .a) A(0 ;1) ; B(2 ; $\frac{1}{2}$) ; C(4 ; $\frac{1}{3}$)
2) f(1) = $\frac{2}{3}$ = 0.6 donc le point K(1 ; 0.6) appartient à la courbe ; f(3) = $\frac{2}{5}$ = 0.4 donc le point L(3 ;0.4) appartient à la courbe

Exercice 39

1) $\mathcal{D}_g = [-2; 1]$;   2) , g(1) = -1   ;   g(0.5) = -3 ;   g(-1) = 1

.3) les antécédents de -2 sont 0 et 0.8 . ceux de -1 sont -0.2 et 1 ; 2 n'a pas d'antécédent

.4) le point d'abscisse 0 a pour ordonnée -2

.5) non car f(-1) = 2 .

.6)

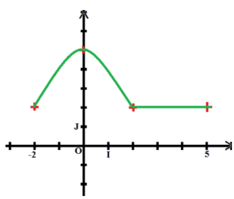
x	-2		-1		0.5		1
$f(x)$			2				-1
		↗		↘		↗	
	0				-3		

Exercice 40

a) **Tableau de variation de *f*.**

x	-2		0		2		5
$f(x)$			5				
		↗		↘		→	
	2				2		2

b) Allure de la courbe correspondant à f.



Exercice 41

1 → V ; 2 → F ; 3 → F ; 4 → V ; 5 → F ; 6 → F ; 7 → F

Exercice 42

1 → V ; 2 → F ; 3 → F ; 4 → F.

Exercice 43

1-a) La température est décroissante sur les intervalles [0 ;6] et [14 ;25] et elle est croissante dans l'intervalle [6 ;14].

b)Tableau de variation de *f*

x	0		6		14		25
$f(x)$	7	↘	5	↗	12	↘	6

2-Le maximum de *f* est 12 et il est atteint en 14

Le minimum de *f* est 5 et il est atteint en 6.

3-a) la température est 10°C à 10H et à 14H

b)à 3H la température est à 5,5°C

à 11H la température est 10,5°C

à 17H la température est à 11,5 °C

c)la température est inférieure ou égale à 7°C lorsque le temps est dans l'intervalle [0 ;8] et [24 ;25]

la température est strictement supérieure à 10 °C lorsque le temps est dans l'intervalle]10 ;19].

Exercice 44

1) .a) Le bilan au 5ème trimestre est 300000 ; le bilan à la fin de la 3ème année est 350000 celui du 3ème trimestre est 0.
.b) Le bilan est de 200000 au 4ème et au 16ème trimestre ; le bilan est de -100000 au 2ème trimestre
.c) Le bilan est négatif ou nul sur l'intervalle $[0; 3]$
.d) Le bilan est supérieur ou égal à 300000 sur l'intervalle $[5; 14]$
2) .a) détermine l'image par *f* des réels : 5 ; 12 ; 3.
.b) détermine l'antécédent par *f* de 200 et celui de -100.
.c) détermine l'image réciproque par *f* de $[-200; 0]$
.d) détermine l'image réciproque par *f* de $[300; 400]$

Exercice 45

1) L'impôt croit en fonction du revenu imposable
2) .a) le montant de l'impôt de Mme Kouamé dont le revenu imposable est 60000f est 8000
   .b) le revenu de M. et Mme Koné est 108000
3) .a)

x	0	25	45	75	120	145
$f(x)$	0	0,3	3,6	12,3	30,7	42

.b) $f(10) = -0,4$ ce résultat ne donne pas le montant des impôts à payer pour un

Revenu imposable de 10000 f car $f(10)$ est négatif.

Exercice 46

.a) la puissance est maximale pour 167 ohms

.b) pour une résistance de 45 ohms la puissance est 8 Wm^{-2}

.c) la puissance de 15.3 Wm^{-2} correspond à 100 ohms.

.d) les résistances pour lesquels la puissance est supérieur 14Wm^{-2} appartiennent à [89.7; 242] ohms.

<u>SITUATIONS COMPLEXES</u>

Exercice 47

L'aire de ce terrain est A = xy où x et y sont ses dimensions. Son périmètre P = $2(x+y)$ avec $x>0$, $y>0$

On a $xy = 400$ donc $y=\dfrac{400}{x}$. Par suite $P=2\left(x+\dfrac{400}{x}\right)$ ainsi le périmètre est une fonction de variable x.

On a : $P=2\left(\dfrac{x^2+400}{x}\right)$. Posons $f(x)=2\left(\dfrac{x^2+400}{x}\right)$. En remarquant que $400 = 20^2$ on a :

$$f(x)=2\left(\frac{(x-20)^2+40x}{x}\right)=2\frac{(x-20)^2}{x}+80 \text{ donc } f(x)-80=2\frac{(x-20)^2}{x}$$

Or $\forall x\in]0;+\infty[, \dfrac{(x-20)^2}{x}\geq 0$, donc $f(x)-80\geq 0$

$f(20) = 80$. Ainsi $\forall x\in]0;+\infty[, f(x)\geq f(20)$.

80 est donc le minimum de la fonction f sur]0 ; + ∞[et ce minimum est atteint en 20.

Je conseillerai à M. Kouadio le choix d'un terrain rectangulaire de 20 *m* sur 20 *m* soit un terrain carré de 20 *m* de côté afin de minimiser le périmètre de son terrain.

Exercice 48

Document 2

Soit T' le temps total du voyage. T' = T + 1 avec $T = \frac{D}{v} = \frac{14000}{4000} = 3,5$ d'où T' = 3,5 + 1 = 4,5

L'heure du départ est 1 h du matin, donc il arrivera à destination à 5 h 30.

A l'arrivée, l'intervalle de temps est donc [4 ;7].

Document 1

Dans cet intervalle [4 ;7], la température prévisionnelle est située entre 15° et 18°.

Papa ne doit pas reporter son voyage car à son arrivée, la température sera au-dessus de 15°.

5 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle d'une maison futuriste***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves de seconde***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au lycée.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant une séance de cours.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : Les élèves veulent reproduire le dessin cette maison sur leur cahier.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Maison futuriste ayant la forme d'une pyramide sectionnée par un plan. les élèves émerveillés par cette beauté architecturale.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident d'étudier les positions relatives des droites et des plans de l'espace et de construire des sections planes du solide.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

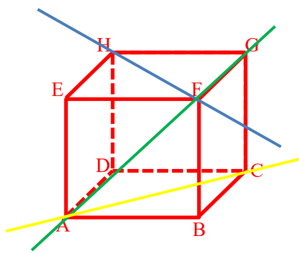
L'étude des positions relatives des droites et des plans de l'espace et la construction des sections planes du solide sont l'objet de la leçon que nous allons découvrir aujourd'hui : Droites et plans de l'espace.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

Activité 1 Notion de droite de l'espace

Objectif de l'activité : *définir la notion de droite de l'espace*

1- Je reproduis la figure



2- Je trace les lignes passant par des points donnés

<u>Activité</u> 2 Détermination d'une droite de l'espace

Objectif de l'activité : *déterminer une droite de l'espace*

Solution

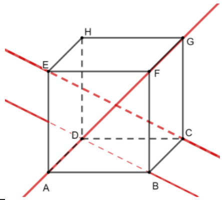
Faire tracer ces droites

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2</u>

1

<u>Les segments</u> $[BD]$ et $[CE]$ sont cachés donc sont en trait discontinu

<u>Le segment</u> $[AF]$ est visible donc est en trait continu



<u>Activité</u> 3 Notion de plan de l'espace

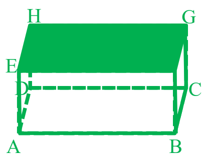
Objectif de l'activité : *Définir la notion de plan de l'espace*

Solution

1- voir figure ci-contre

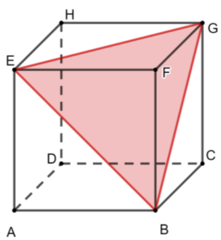
2-

3-H appartient à ce plan parce que ce point est contenu dans la surface plane représentée ci-dessus.



<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3</u>

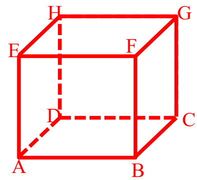
2



<u>Activité</u> 4 Plan passant par des points de l'espace

Objectif de l'activité : *Déterminer un plan passant par des points de l'espace.*

Solution



1- Reproduction du cube ABCDEFGH.

2- a) Il existe une infinité de plans qui contiennent la droite (BF).
   b) Les plans (ABC) et (ACG) contiennent les points A et C.
   c) Le plan (EBG) est le seul qui contient les points E, B et G.
      De même le plan (BCG) = (BFG) est le seul qui contient les points B, C et G.

3- Par trois points non alignés du plan, il passe un plan et un seul.

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4</u>

3 1 - F ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – V .

<u>Activité</u> 5 Droite contenue dans un plan

Objectif de l'activité : *Déterminer des droites contenues dans un plan.*

Solution

Voir récapitulatif de l'activité 5.

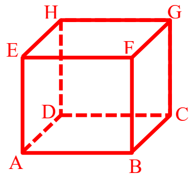
<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 5</u>

4 1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F

<u>Activité</u> 6 Position relative de deux plans de l'espace

Objectif de l'activité : *Déterminer les positions relatives de deux plans de l'espace.*

Solution



1-a) Je justifie que la droite (BC) est contenue dans chacun des plans (ABC) et (EBC).

Les points B et C sont contenues dans chacun des plans (ABC) et (EBC) donc la droite (BC) est contenue dans chacun des plans (ABC) et (EBC).

b) Je justifie que l'intersection des plans (ABC) et (EBC) est la droite (BC).

La droite (BC) est contenue dans chacun des plans (ABC) et (EBC) et le point A n'appartient pas au plan (EBC). Les plans (ABC) et (EBC) ne sont donc pas confondus, par conséquent donc la droite (BC) est l'intersection des plans (ABC) et (EBC).

2-Je justifie que les plans (ABC) et (EFH) n'ont aucun point en commun.

Les droites (AB) et (AD) sont parallèles au plan (EFG) et de plus ces deux droites sont sécantes en A, donc les plans (ABC) et (EFH) n'ont aucun point en commun.

3-Synthèse des consignes 1 et 2.

Deux plans de l'espace sont soit:

~ sécants suivant une droite

~ disjoints (Parallèles)

~confondus (Parallèles)

4-Je détermine la position relative d'un plan quelconque avec le plan (ABC).

- Le plan (EFB) est sécant au plan (ABC) suivant la droite (AB).
- Le plan (ABC) est confondu au plan (BCD)
- Les plans (ABC) et (EFG) sont disjoints.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

5 1 – V ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F ;

Activité 7 Position relative d'une droite et d'un point de l'espace

Objectif de l'activité : *Déterminer la position relative d'une droite et d'un plan de l'espace*

Solution

1-les droites (EA), (FB) et (GC) rencontrent chacune le plan (ABC) en un seul point.

2-a) les droites (AB) et (AC) sont contenues dans le plan (ABC).

b) la droite (EF) est disjointe du plan (ABC).

3- Synthèse des consignes 1 et 2 :

Une droite est soit :

- Sécante à un plan donné en seul point.
- Contenue (parallèle) dans un plan donné.
- Disjointe (parallèle) à plan donné.

4-La droite (AB) est contenue dans le plan (ABC).

-La droite (EH) est disjointe au plan (ABC).

-La droite (GB) est sécante au plan (ABC) en B.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

6 1 – c); 2 – b) ; 3 – a) ; 4 – c)

Activité 8 Position relative de deux droites de l'espace

Objectif de l'activité : *Déterminer la position relative de deux droites de l'espace.*

Solution

2-a) Les droites (AD) et (AB) sont contenues dans le plan (ABC).

b) On sait que la droite (HG) $\subset$ (EFG). (BF) est sécante au plan (EFG) en F et F n'appartient pas à (HG) donc les droites (HG) et (BF) sont non coplanaires.

3-a) (BC) et (CG) sont deux droites contenues dans le plan (BCG). Le point C appartient aux droites (BC) et (CG).

b) Les droites (BC) et (FG) sont contenues dans le plan (BCG) et leur intersection n'est pas un singleton. Elles sont dites disjointes ou parallèles.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

7 1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – V .

Activité 9 Diverses détermination d'un plan

Objectif de l'activité : *Connaître les diverses déterminations d'un plan de l'espace.*

Solution

1- Je démontre qu'il existe un plan et un seul contenant A et (D).

Soit B et C deux points distincts de la droite (D). Puisque A n'appartient pas à (D), alors les points A, B et C sont tous distincts et non alignés, ils définissent donc un plan les contenant. Or B et C appartiennent à (D) donc (D) est contenue dans ce plan. Ainsi il existe un unique plan contenant A et (D).

2- Je démontre qu'il existe un plan et un seul contenant les droites parallèles.

Soit (D_1) et (D_2) deux droites strictement parallèles**.** On considère A, un point de (D_2). D'après la question précédente, il existe un plan et un seul contenant A et (D_1). De même si on prend un point quelconque M de (D_1), on prouve aussi qu'il existe un unique plan contenant M et (D_2).

Ainsi, si les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles, alors il existe un et un seul plan contenant (D_1) et (D_2).

3- Je démontre qu'il existe un plan et un seul contenant deux droites sécantes

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A**.** On considère les points B et C appartenant respectivement aux droites (D_1) et (D_2) et tous deux distincts du point C. Les points A, B et C ainsi définis sont trois points distincts et non alignés. Par conséquent, il existe un plan et un seul contenant A, B et C. Ainsi les droites sécantes (D_1) et (D_2) définissent un unique plan qui les contient.

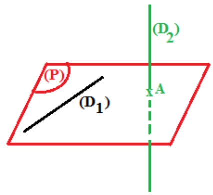
Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9

8 1 – F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – V .

Activité 10 Reconnaitre deux droites non coplanaires

Objectif de l'activité : *Justifier que deux droites sont non coplanaires.*

Je démontre que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.



Supposons que (D_1) et (D_2) soient coplanaires, alors (D_1) et (D_2) sont soit sécantes, soit parallèles.

- ***Supposons (D_1) et (D_2) sécantes.***
  On sait par d'après l'énoncé que (D_1) est contenue dans le plan (P) et (D_2) est sécante au plan (P) en un point A n'appartenant pas à (D_1). Ce qui est absurde car (D_1) et (D_2) sont sécantes par hypothèse. Donc les droites (D_1) et (D_2) telles que définies sont non coplanaires.
- ***Supposons (D_1) et (D_2) parallèles.***
  On sait par d'après l'énoncé que (D_1) est contenue dans le plan (P) et (D_2) est sécante au plan (P) en un point A n'appartenant pas à (D_1). Ce qui est absurde car (D_1) et (D_2) sont parallèles par hypothèse. Donc les droites (D_1) et (D_2) telles que définies sont non coplanaires.

Ainsi les droites (D_1) et (D_2) telles que définies sont non coplanaires.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

9 1 – F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F.

Activité 11 Droite passant par un point et parallèle à une droite donnée.

Objectif de l'activité : *Reconnaître une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée.*

Solution

Je démontre qu'il existe une et une seule droite passant par le point A et parallèle à la droite (D).

Soit A un point et (D) une droite de l'espace.

- Si A appartient à (D) alors on a : on sait que deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues. Donc (D) est l'unique droite passant par A.
- Si A n'appartient pas à (D) alors il existe un unique plan (P) contenant A et (D). Or dans ce plan (P), il existe une et une seule droite passant par le point A et parallèle à (D).

On a ainsi démontré que dans l'espace, il existe une et une seule droite passant par un point A donné et parallèle à une droite (D) donnée.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 11

10 1 – a) ; 2 – c) ; 3 – c)

Activité 12 Plan qui coupe deux droites parallèles

Objectif de l'activité : *Justifier que lorsque deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.*

Solution

1- On suppose que les droites (D_1) et (D_2) sont confondues et puisque (D_1) et le plan (P) se coupent en A, alors (D_2) coupe aussi le plan (P) en A.
2- On suppose que les droites (D_1) et (D_2) strictement parallèles. Soit (Q) le plan défini par les droites (D_1) et (D_2).

a)Je justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droit (Δ) passant par A.

On sait que (P) et (D_1) sont sécants en A. Or (Q) est le plan déterminé par (D_1) et (D_2), droites strictement parallèles. Donc $A \in (D_1)$ et $(D_1) \subset (Q)$ d'où $A \in (Q)$. Ainsi le point A appartient donc aux deux plans (P) et (Q) qui sont distincts. Donc les plans (P) et (Q) sont nécessairement sécants suivant une droite (Δ) passant par A.

b) Je justifie que (Δ) est sécante à (D_2) en un point B.
On sait que les droites parallèles (D_1) et (D_2) définissent le plan (Q). Donc dans le plan (Q), les droites (D_1) et (D_2) étant parallèles, A étant un point de (D_1) et de plus la droite (Δ) étant sécante à la droite (D_1) en A alors (Δ) est aussi sécante à (D_2) en un point B.

c) Je justifie que (D_2) est sécante à (P) en B.
(Δ) est la droite commune à (P) et (Q). B est le point d'intersection de (D_2) et (Δ), donc B appartient à (P). Ainsi B appartient à la droite (D_2) et au plan (P) donc (D_2) est sécante à (P) en B.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 12

11 Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (GC) sont parallèles. Le plan (P), parallèle au plan (ABC), coupe la droite (AE) en I, il en résulte que (P) coupe aussi la droite (GC).

Activité 13 Droites parallèles à une même droite

Objectif de l'activité : *Justifier que lorsque deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.*

Solution

1- On suppose que deux de ces droites ((D_1) et (D)) sont confondues

Je justifie que (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Ce cas est trivial puisque (D_2) et (D) sont parallèles par hypothèse et (D_1) et (D) étant confondues ($(D) = (D_1)$) alors $(D_1) // (D_2)$.

2- On suppose que les trois droites (D_1), (D_2) et (D) sont deux à deux distinctes.

a) Je démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont coplanaires.

A un point de (D_2) qui n'appartenant pas à (D_1). (P) est l'unique plan passant par A et contenant (D_1). Le plan (P) est sécant à la droite (D_2) au point A et de plus $(D_2) // (D_3)$ donc d'après l'activité précédente (P) est sécant à (D_3).

Le plan (P) est sécant à la droite (D_3) et de plus $(D_1) // (D_3)$ donc (P) est sécant à (D_1).
On a donc : $(D_2) // (D_3)$ et (P) est sécant à (D_3), de même $(D_1) // (D_3)$ et (P) est sécant à (D_1), ainsi les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au plan (P) donc elles sont coplanaires.

b) Je démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Supposons que les droites (D_1) et (D_2) soient sécantes, alors elles définissent un unique plan. Or par hypothèse, le plan (P) est l'unique plan contenant la droite (D_1) et passant par le point A de (D_2). Ce qui est absurde car par un point de l'espace il passe une unique droite parallèle à une droite donnée. Donc nécessairement $(D_1) // (D_2)$.

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 13</u>

12 Les droites parallèles à la droite (CG) sont : (BF), (AE) , (HD).

<u>Activité</u> 14 Caractérisation d'une droite parallèle à un plan

Objectif de l'activité : *Caractériser une droite parallèle à un plan*

Solution

1- Je démontre que (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite de (P)

Si la droite est incluse dans le plan (P) alors la propriété est toujours vraie parce qu'il existe toujours dans (P) une droite parallèle à (D).

2- Supposons que (D) n'est pas incluse dans le plan (P).

a) Je justifie que A et (D) déterminent un plan (Q).

A étant un point n'appartenant pas à la droite (D), alors A et (D) ainsi définie déterminent un plan (Q) passant par le point A et contenant la droite (D).

b) Je justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ).

Le point A appartient à la fois aux plans (P) et (Q) donc (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ) passant par A.

c) Je démontre par l'absurde que (D) est parallèle à (Δ)

Supposons que (D) et (Δ) soient sécantes. La droite (Δ) étant l'unique droite de (P) et (Q) passant par le point A alors nécessairement A appartiendrait aussi à (D) ce qui est absurde car par hypothèse A n'est pas un point de (D). Donc (D) et (Δ) sont parallèles.

d) Je déduis que si (D) est parallèle à (P) alors (D) est parallèle à une droite de (P).

Soit A un point quelconque de (P) et (Q) le plan contenant (D) et passant par le point A. Les plans (P) et (Q) ne sont pas confondus et ont le point A en commun, donc ces deux plans sont sécants en une droite (Δ) passant par le point A. Le point A n'appartient pas à la droite (D) et la droite (D) est parallèle au plan (P) par hypothèse, de plus la droite (Δ) passant par le point A est contenue dans (P) donc nécessairement (D) et (Δ) sont parallèles.

3- On suppose que (P) contient une droite (Δ) parallèle à la droite (D)

a) Je justifie que (Δ) et (D) déterminent un plan

Les droites (Δ) et (D) étant parallèles et disjointes, alors elles déterminent un plan (R).

b) Je justifie que (P) et (R) sont sécants suivant la droite (Δ).

Le point A est un point commun aux plans (P) et (R) donc les plans (P) et (R) sont sécants suivants une droite (Δ) passant par le point A.

c) Je déduis que (D) est parallèle à (P).

Les droites (D) et (Δ) étant parallèles alors elles définissent un plan (R). La droite (Δ) est l'unique droite commune de (P) et (R). Si la droite (D) et le plan (P) avaient un point commun, alors ce point appartiendrait à la droite (Δ). Ce qui est absurde car (D) et (Δ) sont disjointes. Donc nécessairement (D) est parallèle à (P).

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 14</u>

13 Droites passant E et parallèles au plan (BGC) : (AE), (EH), (ED)

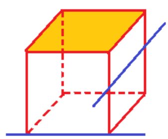
<u>Activité</u> 15 Conséquence relative au parallélisme d'une droite et d'un plan

Objectif de l'activité : *Connaître la conséquence de la caractérisation d'une droite parallèle à un plan.*

Solution

Je démontre que la droite (L) est parallèle à (P).

Soit (L) une droite parallèle à (D), d'après la propriété précédente, le plan (P) contient une droite (Δ) parallèle à (D) donc à (L). On en déduit de cette même propriété que (L) est parallèle à (P).



Remarque *: Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas*

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 15</u>

14

1- Les droites qui sont strictement parallèles au plan (EJF) sont : (HG), (AB), (DC).
2- Les droites qui sont strictement parallèles au plan (EJH) sont : ((FG), (BC), (AD).

<u>Activité</u> 16 Théorème du toit

Objectif de l'activité : *Connaître le théorème du toit.*

Solution

1- **Je justifie qu'il existe une droite (D_1) incluse dans (P_1) et une droite (D_2) incluse dans (P_2) telle que (D_1) soit parallèle à (D_2).**

(D) est parallèle à (P_1), donc il existe une droite (D_1) dans (P_1) tel que (D) soit parallèle à (D_1)

(D) est parallèle à (P_2), donc il existe une droite (D_2) dans (P_2) tel que (D) soit parallèle à (D_2)

Ainsi on a : (D) //(D_1) et (D) // (D_2) donc (D_1) // (D_2).

2- **Je justifie que toute parallèle à (D_1) et (D_2) passant par un point A de (Δ) est confondue avec (Δ)**

Soit A un point de (Δ). On sait que si une droite est parallèle à un plan, alors la parallèle à cette droite passant par un point du plan est incluse dans ce plan. Donc la parallèle à (D_1) et à (D_2) passant par A est incluse dans (P_1) et (P_2). Or (Δ) est la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Donc cette parallèle à (D_1) et à (D_2) passant par A est confondue avec (Δ).

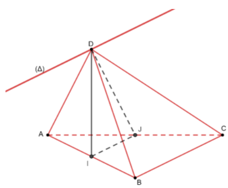
3- **Je déduis que (D) est parallèle à (Δ)**

On sait, d'après la question précédente que la parallèle à (D) passant par A est confondue avec (Δ) donc (D) // (Δ).

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 16</u>

15

On reconnait les hypothèses du « théorème du toit » :
On a :
● Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC).
● De plus, la droite (IJ) est incluse dans le plan (IJD) et la droite (BC) est incluse dans le plan (BCD).
● Les plans (BCD) et (IJD) sont sécants selon une droite **(Δ)** passant par le point D car (si ces deux plans étaient parallèles, ils seraient confondus car ils contiennent tous les deux, le point D).
Ainsi, d'après le théorème du toit, les trois droites (IJ), **(Δ)** et (BC) sont parallèles. **(Δ)** est donc la parallèle à (BC) passant par D



<u>Activité</u> 17 Caractérisation de deux plans parallèles

Objectif de l'activité : *Connaître la caractérisation de deux plans parallèles*

Solution

J'examine la situation lorsque (P_1) et (P_2) sont confondues

Lorsque (P_1) et (P_2) sont confondues alors la propriété est vraie parce que deux plans confondues sont par définition parallèles.

On suppose que les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas confondus.

a) ***Je suppose que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles et je justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles au plan (P_2)***

Par hypothèse (P_1) et (P_2) sont parallèles, donc si (D) et (L) sont deux droites sécantes en A incluses dans (P_1) alors ces deux droites sont nécessairement parallèles au plan (P_2).

b) ***Je suppose qu'il existe deux droites (D) et (L) sécantes, contenues dans (P_1) et parallèles à (P_2). Je démontre que (P_1) et (P_2) sont parallèles en utilisant le théorème du toit***.

Supposons que les plans (P_1) et (P_2) soient sécants suivant une droite (Δ).

Puisque (D) est contenue dans (P_1) et parallèle à (P_2) et (P_1) donc d'après le théorème du toit (D) // (Δ).

De même (L) est contenue dans (P_1) et parallèle à (P_2) et (P_1) donc d'après le théorème du toit (L) // (Δ).

On a alors (D) // (Δ) et (L) // (Δ) donc d'après la propriété précédente (*deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles*) les droites (D) et (L) sont parallèles. Ce qui est absurde car (D) et (L) sont sécantes par hypothèse. Donc nécessairement les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 17

16 Dans le plan (ABD), les points D,I,A et D,J,B sont alignés dans cet ordre.

De plus $\frac{DI}{DA} = \frac{DJ}{DB} = \frac{1}{2}$.

D'après la réciproque de Thales, on en déduit que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
La droite (AB) étant inclus dans le plan (ABC), alors la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).
● De manière analogue, on démontre que la (IK) est parallèle au plan (ABC).
● Les droites sécantes (IJ) et (IK) du plan (IJK) sont parallèles au plan (ABC).
On en déduit que le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC).

Activité 18 Plans parallèles à un même plan donné

Objectif de l'activité : *Connaître la propriété relative à la caractérisation de deux plans parallèles à un même plan donné.*

Solution

(P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles à un plan (P).

Soit (D) et (L) deux droites de (P), sécantes en un point A.

1- Je suppose que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ) et je démontre que (D) et (L) sont parallèles à (Δ).

D'après les données, (D) et (L) sont deux droites sécantes de (P) et de plus (P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles à (P) et sécants suivant la droite (Δ) alors d'après la propriété (*toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection*) les droites (D) et (L) sont parallèles à la droite (Δ).

2- Je déduis que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.

On vient de montrer que si les plans (P_1) et (P_2) étaient sécants alors les droites (D) et (L) seraient parallèles à la droite (Δ). On en déduirait donc que les droites (D) et (L) seraient aussi parallèles (*car deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles*). Ce qui est absurde car (D) et (L) sont deux droites sécantes par hypothèse. Donc nécessairement les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 18</u>

17 • $ABCDEFGH$ est un cube, donc les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
•On sait que le plan (P) parallèle au plan (ABC).
les plans (P) et (EFG) sont tous deux parallèles au plan (ABC).
Alors les plans (P) et (EFG) parallèles

<u>Activité</u> 19 Plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné

Objectif de l'activité : *Connaître la propriété relative à un plan passant par un point et parallèle à un plan donné*

Solution

1- On suppose que A est un point du plan (P).
Je démontre que par le point A il passe un plan et un seul plan parallèle à (P).
Si le point A appartient au plan (P), on choisit deux autres points quelconques de (P) deux à deux distincts. Par ces trois points il passe un et un seul plan confondu à (P) donc parallèle à (P).

2- On suppose que le point A n'appartient pas à (P).
a) Je justifie que (Q) est un plan passant par A et parallèle à (P)

Le plan (P) contient deux droites (D) et (L) sécantes en B. De plus (L)//(L') et (D)//(D').
Le plan (Q) déterminé par les droites (D') et (L') contient le point A et ces deux droites sécantes sont parallèles à (P) donc (Q) est le plan passant par A et parallèle à (P) (*car deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes et parallèles à l'autre*).

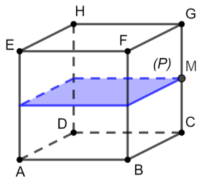
b) Je justifie que (Q) est unique

Soit (Q') un plan passant par A et parallèle au plan (P). Alors d'après la propriété précédente (*deux plans parallèles à une même troisième sont parallèles entre eux*) (Q) et (Q') sont deux plans parallèles.

Les plans (Q) et (Q') ayant A en commun alors ils sont confondus. Donc (Q) est l'unique plan passant par le point A et parallèle à (P).

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 19</u>

18



<u>Activité</u> 20 Plan sécant à deux plans parallèles

Objectif de l'activité : *Connaître la propriété relative à un plan sécant à deux plans parallèles*

Solution

1- **Je démontre que (P) est sécant à (P_2)**

Supposons que (P) soit parallèle à (P_2) alors on a :

(P_1) // (P_2) et (P) // (P_2) donc (P) // (P_1) ce qui est absurde car (P) est sécant à (P_1) suivant une droite (D_1).

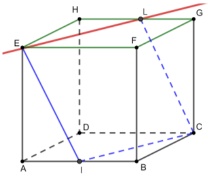
2- **Je démontre que (D_1) et (D_2) sont parallèles.**

- Si (P_1) et (P_2) sont confondus alors (P) coupe aussi (P_2) en la droite (D_2) confondue à (D_1).
- Si (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles alors le plan (P), sécant à (P_1) suivant la droite (D_1) est aussi sécant à (P_2) suivant une droite (D_2).
  Je dois démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles. Utilisons pour cela une démonstration par l'absurde.
  Supposons que les droites (D_1) et (D_2) soient sécantes en un point A, alors ce point appartiendrait aux deux plans (P_1) et (P_2) donc ces (P_1) et (P_2) seraient sécants suivant une droite passant par le point A. Ce qui absurde car les plans (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles. Donc nécessairement les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

<u>Solution de exercice de fixation de l'activité 20</u>

19

●E est un point commun aux deux plans (EIC) et (EFG).
●Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
●De plus, l'intersection des plans (ABC) et (EIC) est la droite (IC).
Donc l'intersection des plans (EIC) et (EFG) est la parallèle à (IC) passant par E.



<u>Activité</u> 21 Droite parallèle à deux plans parallèles

Objectif de l'activité : *Connaître la propriété relative à une droite parallèle ou sécante à deux plans parallèles*

Solution

1- **Je démontre que si (D) est parallèle à (P_1) alors (D) est parallèle à (P_2).**

(D) est parallèle à (P_1) par hypothèse. On sait que (P_1) est parallèle à (P_2) donc (P_2) contient deux droites sécantes (Q) et (L) parallèles à (P_1). Puisque (D) est parallèle à (P_1) alors (D) est parallèle à toute droite parallèle à (P_1) donc (D) est parallèle aux droites sécantes (Q) et (L) contenues dans (P_2) donc (D) est parallèle à (P_2).

2- **Je démontre que si (D) est sécante à (P_1) alors (D) est sécante à (P_2).**

Soit A le point d'intersection de la droite (D) et du plan (P_1). Par hypothèse (P_1) et (P_2) sont parallèles. Soit (Δ) la droite passant par le point A et contenue dans le plan (P_1). Alors la droite (Δ) est parallèle à toute droite (Δ') de (P_2).

On a donc : (D) sécante à (Δ) et (Δ) parallèle à (Δ') donc (D) est sécante à (Δ'). Puisque (Δ') est incluse dans (P_2) alors (D) est sécante à (P_2).

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 21</u>

20 ●On sait que la droite (Δ) est parallèle à la droite (AC). Or (AC) est incluse dans le plan (ABC). Donc la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC).

● $ABCDEFGH$ est un cube, donc les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

La droite (Δ) étant parallèle au plan (ABC) et les plans (ABC) et (EFG) étant parallèles.
Alors la droite (Δ) est parallèle au plan (EFG).

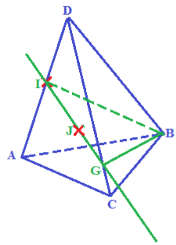
<u>Activité</u> 22 Section plane

Objectif de l'activité : *Construire une section plane d'un solide*

1- **a) Je construis l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).**

Pour construire l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD), on cherche l'intersection de (IJ) avec une droite coplanaire à (IJ) et incluse dans le plan (BCD). On utilise la droite (DC). Le point G est l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).

b) Je construis l'intersection de chaque face du tétraèdre avec le plan (BIJ).



La droite (BG) est l'intersection du plan (BIJ) avec la face (BCD) du tétraèdre

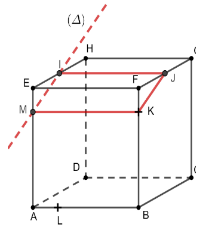
La droite (BI) est l'intersection du plan (BIJ) avec la face (ABD) du tétraèdre.

La droite (IG) est l'intersection du plan (BIJ) avec la face (ACD) du tétraèdre.

2- Je déduis la section du tétraèdre par le plan (BIJ).

D'après la question précédente, le triangle IGB est la section du plan (BIJ) avec les faces du tétraèdre ABCD.

<u>Solution de l'exercice de fixation de l'activité 22</u>



21 ●La droite (IJ) est contenue dans le plan (IJK) et dans le plan (EFG).
Donc l'intersection des plans (IJK) et (EFG) est la droite (IJ).

● De même on établit que l'intersection des plans (IJK) et (GBF) est la droite (JK).

● Les plans (HEA) et (GBF) sont parallèles. Or le plan (IJK) coupe le plan (GBF) en la droite (JK), il coupe donc le plan (HEA) en une droite parallèle à la droite (JK).
De plus le point I est commun aux plans (IJK) et (HEA).
On trace donc la droite (Δ), parallèle à la droite (JK) passant par I.
la droite (Δ) est contenue dans le plan (HEA), elle coupe la droite (EA) en un point M.
L'intersection des plans (IJK) et (HEA) est la droite (IM).

● les points M et K appartiennent aux plans (IJK) et (EFB).
L'intersection des plans (IJK) et (EFB) est donc la droite (MK).

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Notions de droite et de plan

<u>Exercice</u> 1

1-F ; 2- V ; 3- F ; 4- F ; 5-F ; 6- F ; 7- V ; 8- V ; 9 – V ; 10- F ; 11- V.

<u>Exercice</u> 2

a) Oui, I et J sont les autres points de ce plan.
b) Oui, J est un point de ce plan.
c) Non, parce que les points I,B, D sont alignés.

e) Oui, B est un point de ce plan.
f) Non parce que les droites (AD) et (BS) ne sont pas coplanaires.
g) Oui, B, I et D sont des points de ce plan.
h) Non parce que le point I appartient à la droite (AC).

Exercice 3

a) (BD) et (BC) sont deux droites coplanaires
b) (BC) et (AD) sont deux droites non coplanaires.
c) (BA) et (DA) sont deux droites sécantes.

Positions relatives

Exercice 4

a) Vrai ; b) Faux.

Exercice 5

1- V ; 2- Faux ; 3- Faux ; 4- Vrai.

Notions de droite et de plan

Exercice 6

1- V ; 2- F ; 3- V ; 4- F.

Exercice 7

La construction 2 est correcte parce que la droite (AC) est incluse à la fois au plan (ABC) et (CGE). Or la droite (IJ) est incluse dans le plan (CGE). Ainsi les droites (IJ) et (AC) sont coplanaires. Donc l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (ABC) est le point K, intersection des droites (IJ) et (DC).

Exercice 8

a) Droites coplanaires : (EB) et (FA).
b) Droites non coplanaires : (AF) et (BG).
c) Droites parallèles : (AF) et (DG).
d) Plans parallèles : (BCA) et ((HEF)
e) Plans sécants : (ABC) et (EFG).
f) Droite sécante à un plan : (EC) et (ABC).
g) Droite parallèle à un plan : (HF) et (DBC).

Exercice 9

a) (EG) et (BC) sont parallèles
b) (ABF) et (BCG) sont sécantes suivant la droite (BF).
c) (CH) et (ABD) sont disjoints.

Caractérisation d'un plan

Exercice 10

1- Oui : le point A n'appartient pas à la droite (CD) donc le point A et (CD) définissent un plan dénommé (ACD) ;
2- Non : parce que deux points E et F ne peuvent pas constituer un plan.
3- Oui : le point P n'appartient pas à la droite (MN) donc les points M, N et P définissent un plan nommé (NMP).
4- Non parce que les points E , Q et G sont alignés
5- Oui : les droites (HF) et (NB) sont parallèles non confondues, donc plan elle définissent un plan nommé (HBF).
6- Oui : les droites (DM) et (BN) sont sécantes en D, donc elles définissent un plan nommé (DCB).

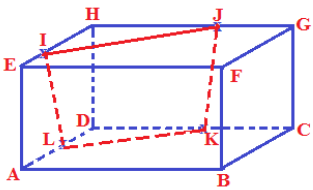
Exercice 11

a) A et B étant deux points distincts de (P) et le point C étant extérieur à (P) alors les points A, B et sont trois points distincts non alignés, ils définissent donc le plan (ABC).
b) Si D∈(CB) alors I et B sont confondus alors les points A, I et B ne peuvent définir un plan.
Si D∈(CA) alors I et A sont confondus alors les points A, I et B ne peuvent définir un plan.
Si D∉(CB) et D∉(CA) alors les points A, I et B sont trois points distincts :
   ✓ Si A, I et B sont alignés, ils ne peuvent définir un plan.
   ✓ Si A, I et B ne sont pas alignés, alors ils définissent donc le plan (AIB).

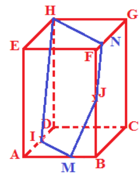
Section plane

Exercice 12

- I et J appartiennent à la face EFGH, donc la droite (IJ) est située dans le plan (EFG). La trace de cette droite sur la face EFGH est le segment [IJ]
- On peut tracer de même le segment [JK] sur la face DCGH.
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles donc le plan (IJK) coupe ces deux plans suivant deux droites parallèles, la droite (IJ) et la droite (Δ) parallèle à (IJ) passant par K.
- On trace la restriction de (Δ) à la face ABCD et on nomme L le point d'intersection de (Δ) et de (AD).
- On termine la section par le segment [LI], trace du plan (IJK) sur la face ADHE.



<u>Exercice</u> 13



- Le (HIJ) coupent les plans (ADH) et (BCG) parallèles par deux droites parallèles (HI) et (Δ). La droite (Δ) passe par le point J et coupe la droite (FG) en N.
- Les points N et H appartiennent au plan (HEF) donc l'intersection de (HIJ) avec (HEF) est la droite (HN).
- Le (HIJ) coupent les plans (ABC) et (HEF) parallèles par deux droites parallèles (HN) et (Δ'). La droite (Δ') passe par le point I et coupe la droite (AB) en M.

Exercices de renforcement/approfondissement

<u>Exercice</u> 14

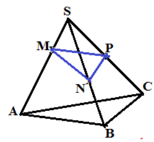
1- Deux droites coplanaires du cube : (BG) et (FC).
2- Deux droites non coplanaires : (ED) et (HC).

<u>Exercice</u> 15

1- La droite (AK) est **sécante** au plan (BIJ).
2- La droite (IJ) est **parallèle** au plan (ADC).

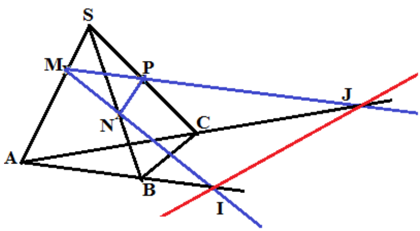
<u>Exercice</u> 16

NB : Figure de cet exercice n'est pas correcte. Il faut la remplacer par celle-ci :



Représentation de la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNP).

- Les droites (MP) et (AC) sont coplanaires et se coupent en J
- De même les droites (AB) et (MN) se coupent en I.
  Donc l'intersection des plans (MNP) et (ABC) est la droite (IJ).



Exercice 17

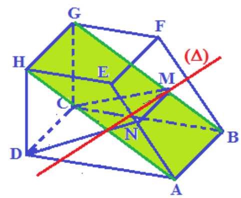
1- Vrai ; 2- Vrai ; 3- Vrai.

<u>Exercice</u> 18

a) Vrai. (IJ) et (DB) sont coplanaires et sécantes en un point E. donc la droite (IJ) est sécante au plan (DBC) .
b) Vrai parce que la droite (IK) est l'intersection des plans (ABD) et (IKC).

<u>Exercice</u> 19

1- **Je construis la droite d'intersection des plans (DCM) et (ABE).**



Comme (DC) // (AB), d'après le théorème du toit, la droite d'intersection des plans (DCM) et (ABM) est une droite parallèle à (DC) et à (AB). On construit donc la parallèle à (AB) passant par M.

2- **Je déduis la trace de la section du prisme par le plan (DCM).**

Il suffit de déterminer le tracé sur les faces AEHD et CBFG où l'on connait deux points du plan (DCM).

3- **Je construis la droite (Δ), intersection des plans (HAB) et (DCM).**

Sur les faces AEHD et CBFG, on connait deux points communs aux plans (DCM) et (HAB). L'intersection est donc la droite passant par ces deux points : soit (Δ) cette droite.

4- **Position relative de la droite (Δ) par rapport aux droites (DC) et (AB).**

La droite (Δ) est elle aussi parallèle à (DC) et (AB) d'après le théorème du toit.

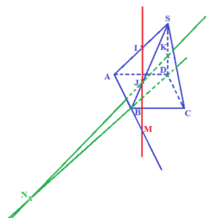
<u>Exercice</u> 20

Je démontre que les droites (FH) et (CE) sont sécantes.

Considérons le plan (CAE).

Les points F et H appartiennent au plan (CAE) et sont tels que F est le milieu de [AC] et H appartient à la droite (AE) tel que $AH = \frac{3}{4}AE$. Donc les droites coplanaires (FH) et (CE) sont sécantes.

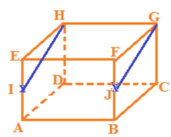
<u>Exercice</u> 21



- les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires, donc l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC) est l'intersection des droites (AB) et (IJ) soit M.
- les droites (KJ) et (BD) sont coplanaires, donc l'intersection de la droite (JK) et du plan (ABC) est l'intersection des droites (BD) et (JK) soit N.

<u>Exercice</u> 22

Je démontre que les droites (IH) et (JG) sont parallèles.



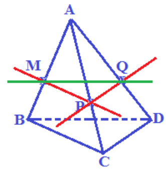
ABCDEFGH est un cube donc (EF) // (HG) et (IJ) // (EF) donc (IJ) // (HG) (1)

On a aussi IJ = EF = HG (2).

D'après (1) et (2) le quadrilatère IJGH est un parallélogramme donc (IH) // (JG).

Exercice 23

Je démontre que la droite (MQ) est parallèle au plan (BCD).



On sait par hypothèse que : (MP)// (BC) ; (PQ) // (DC) et (MP) et (PQ) sont sécantes donc les plans (MPQ) et (BCD) sont parallèles, de plus (MQ) est incluse dans (MPQ) donc (MQ) est parallèle au plan (BCD)

Exercice 24

1) La droite (DE) est contenue dans le plan (BCE)
2) L'intersection du plan (P) avec la droite (DE) est le point d'intersection des droites (DE) et (BC).

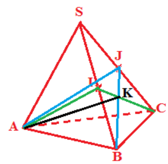
Exercice 25

1) (IK) // (BC) et (BC) ⊂ (BCD) donc (IK)// (BCD) ainsi les droites (IK) et (DC) ne sont ni parallèles ni sécantes donc elles ne sont pas coplanaires.
2) J∈ (DC) et de plus (IK) et (DC) ne sont pas coplanaires donc les points I, J et K ne sont pas alignés.

Exercice 26

Le point S appartient au plan (HBG), S est le milieu de [BG] donc la droite passant par S et parallèle à (BH) passe par le milieu K de [HG]. Donc l'intersection de la droite (SK) et du plan (FEH) est le point K.

Exercice 27



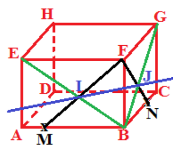
Soit K le point d'intersection des droites (IC) et (JB). On a A∈ (AJB) et A∈ (AIC) donc la droite (AK) est l'intersection des plan (AJB) et (AIC).

Exercice 28

(AB) est incluse dans le plan défini par B et la droite (D). (AB) est aussi incluse dans le plan défini par A et la droite (□) donc la droite (AB) est l'intersection des plans définis par A et (□) d'une part et B et (D) d'autre part.

Exercice 29

Je détermine la droite d'intersection des plans (FMN) et (BEG).



Soit $\left.\begin{array}{l}\{I\} = (BE) \cap (MF) \\ \{J\} = (BG) \cap (FN)\end{array}\right\}$ $(IJ) = (FMN) \cap (BEG)$

Exercice 30

1- Je démontre que (IJ)//(BC)

I est milieu de [SB] et J est milieu de [SC] donc (IJ) // (BC). Or ABCD est un carré, donc (BC) // (AD) et on en déduit que (AD) // (IJ).

2- a) Je démontre que le point K appartient aux plans (SAB) et (SDC)

On sait par hypothèse que K appartient à la droite (AI) et que (AI) est contenue dans le plan (SAB) donc le point K appartient au plan (SAB).

De même K appartient à la droite (DJ) et (DJ) est contenue dans le plan (SDC) donc le point K appartient au plan (SDC).

Ainsi K appartient aux plans (SAB) et (SDC).

b) Je détermine la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC)

D'après la question précédente $K \in (SAB) \cap (ADC)$ et de plus $S \in (SAB) \cap (ADC)$
donc $(SAB) \cap (ADC) = \{(KS)\}$

c) J'en déduis-en que la droite (SK) est parallèle aux droites (AB) et (DC).

On sait que (AB) est contenue dans le plan (SAB) donc (AB) // (SAB).

De plus (AB) // (DC) parce que ABCD est un carré. Or (DC) est contenue dans le plan (SDC) donc (AB) // (SDC). Ainsi la droite (AB) est parallèles aux plans (SAB) et (SDC) qui sont sécantes en (KS) donc d'après le théorème du toit, (AB) // (KS). On en déduit que (KS) est parallèle aux droites (AB) et (DC).

<u>Exercice</u> **31**

1- **Je donne, sans démonstration, les positions relatives de la droite (IJ) par rapport à** (AC), puis par rapport à (CD).

Les droites (IJ) et (AC) sont non coplanaires.
Les droites (IJ) et (CD) sont sécantes en J.

2- a) Les points I et J sont communs aux plans (ABJ) et (CDI).
b) On déduit de la question précédente que $(ABJ) \cap (CDI) = \{(IJ)\}$

3- **Je détermine l'intersection des plans (ABJ) et (ACD)**

Le point A appartient à la fois aux plans (ABJ) et (ACD)

Le point J appartient à la droite (CD) donc il appartient au plan (ACD) on en déduit que le point J appartient à la fois aux plans (ABJ) et (ACD).

Ainsi on a : $A \in (ABJ) \cap (ACD)$ et $J \in (ABJ) \cap (ACD)$ donc $(ABJ) \cap (ACD) = \{(AJ)\}$

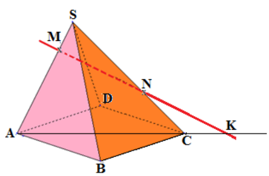
<u>Exercice</u> **32**

$M \in (SA)$ et $N \in (SC)$ donc la droite (MN) est incluse

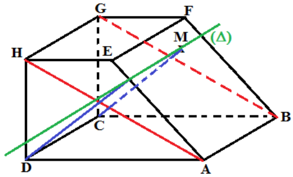
dans le plan (SAC) et de plus (AC) incluse dans (SAC)

donc $(MN) \cap (ABC) = \{K\}$ où K est le point d'intersection

des droites (AC) et (MN).



<u>Exercice</u> 33



a) voir figure

b) Construction de la droite (Δ)

Comme (DC) // (AB), d'après le théorème du toit d'intersection des plans (DCM) et (ABM) est une droite parallèle à (DC) et à (AB). On construit donc la parallèle à (AB) passant par le point M.

c) Construction de (Δ)

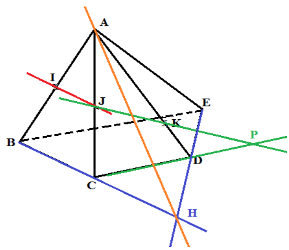
Sur les faces AEHD et CBFG, on connait deux points communs aux plans (DCM) et (HAB), l'intersection est donc la droite (Δ) passant par ces deux points.

d) Position de (Δ) par rapport aux droites (DC) et (AB)

(Δ) est l'intersection des plans (DCM) et (HAB) or (DC)// (AB) donc (Δ) est aussi parallèle à (DC) et (AB) d'après le théorème du toit.

<u>Exercice</u> 34

1-a) Position relative des droites (IJ) et (BC)



I est le milieu de [AB] et J est milieu de [AC] donc (IJ) est parallèle à (BC).

b) Position relative des droites (JK) et (CD).

J est le milieu de [AC] et le point K de [AD] est tel que $AK = \frac{3}{4}AD$ donc les droites (JK) et (CD) sont coplanaires et sécantes en un point P.

2-a) Je détermine l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD).

La droite (CD) est incluse dans le plan (ACD) et la droite (JK) est incluse dans le plan (ACD) donc les droites (CD) et (JK) sont coplanaires et sécantes en P, on en déduit que la droite (JK) est coupe le plan (BCD) au point P.

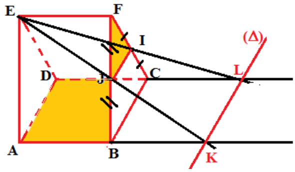
b) Je détermine l'intersection des plans (ABC) et (ADE).

A est un point commun aux plans (ABC) et (ADE) de plus les droites (BC) et (DE) sont coplanaires et sécantes aux point H, donc le point H est commun aux (ABC) et (ADE).

Ainsi la droite (AH) est l'intersection des plans (ABC) et (ADE).

Exercice 35

a) **Construction de (Δ)**



Comme J est le milieu de [BF], alors J est un point du plan (ABFE). Donc la droite (EJ) est incluse dans le plan (ABFE) .

- Notons K le point d'intersection de (AB) et (EJ).
  Le point K est donc commun aux plans (EIJ) et (ABCD).
  Donc K est un point de (Δ).
- De même, notons L le point d'intersection des droites coplanaires (EI) et (DC). Le point L est commun aux plans (EIJ) et (ABCD).
  Donc L est un point de (Δ).

On peut ainsi tracer (LK), c'est-à-dire (Δ).

b) **Je démontre que (D) est parallèle à (BC).**

Dans le triangle BCF, la droite (IJ) passe par les milieux des côtés [BF] et [FC], donc (IJ) est parallèle à (BC).

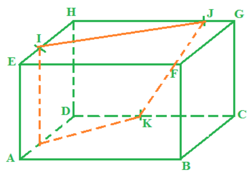
- La droite (BC) est parallèle à une droite du plan (EIJ), elle est donc parallèle au plan (EIJ)
- Mais (BC) est incluse dans le plan (ABCD), elle est parallèle à (ABCD).
- Comme (BC) est parallèle aux plans sécants (EIJ) et (ABCD), alors (BC) est parallèle à leur intersection.

Donc (BC) est parallèle à (Δ).

Exercice 36

Solution

Les points I et J appartiennent à la face (EFG), donc la droite (IJ) est située dans le plan (EFG). La trace de cette droite sur la face (EFGH) est le segment (IJ).

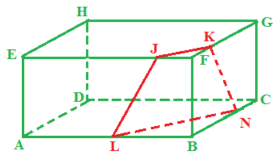


On peut de même tracer le segment [JK] sur la face (DCGH).

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles donc le plan (IJK) coupe ces deux plans suivants deux droites parallèles. La droite (□) est la parallèle à (IJ) passant par K.
Soit L, le point d'intersection de (□) et la droite (AD). On termine la section par le segment [IL], trace du plan (IJK) sur la face ADHE.

La section de ABCDEFGH par le plan (JKL) est le quadrilatère IJKL.

Exercice 37

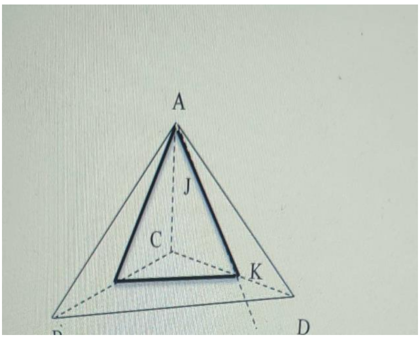


- Les plans (JKL) et (EFG) sont sécants suivant le droite (JK)
- Les plans (JKL) et (ABF) sont sécants suivants la droite (JL)
- Le plan (ABC) est parallèle à (EFG), donc (ABC) coupe (JKL) suivant une droite parallèle à (JK). De plus L est commun aux plans (ABC) et (JKL). Donc (ABC) et (JKL) ont pour intersection la parallèle à (JK) passant par L. Elle coupe [BC] en N.
- N et K sont communs aux plans (JKL) et (FBG) qui sont deux plans distincts : ils se coupent donc selon la droite (KN).
  La section de ABCDEFGH par le plan (JKL) est le quadrilatère LJKN.

38

1) . Figure
2. a) $M \in [BD]$, $N \in [DC]$, $M \in (MNP)$; $N \in (MNP)$; $(MNP) \cap (BCD) = (MN)$.
   b) $P \in (AC)$; $N \in [CD]$; $(MNP) \cap (ACD) = (NP)$.
3. a) Démonstration.
   b) $(MNP) \cap (ABC) = (RP)$
4. $M \in (ABD)$ et $M \in (MNP)$, $|S| = (NP) \cap (DA)$; $|S| = (ABD)\ et\ (MNP)$; $(MS) = (ABD) \cap (MNP)$.
5. La section plan est le polygone NMTD.

39



Situations complexes

Exercice 40

1- **Je démontre que les points A, D, I et J sont coplanaires.**

$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de } [EB] \\ J \text{ milieu de } [EC] \end{array}\right\}$ donc $(IJ)//\ (BC)$ et (BC) // (AD) donc (AD) // (IJ) ainsi les points A, D , I et J sont coplanaires.

2- **a) Je démontre que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.**

On sait que BC = AD et de plus $\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de } [EB] \\ J \text{ milieu de } [EC] \end{array}\right\}$ donc $(IJ)//\ (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$

d'où $IJ = \frac{1}{2}AD$, de plus (IJ)// (AD) donc le quadrilatère ADJI n'est pas un parallélogramme, ainsi les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

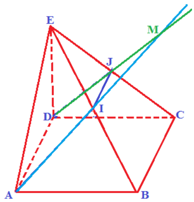
b)Construction du point M ; Voir figure

3- **a) Je démontre que le point M appartient aux plans (AEB) et (DEC)**

M∈(AI) et (AI)⊂(AEB) , M∈(DJ) et (DJ)⊂(DEC) donc M appartient aux plans (AEB) et (DEC).

b)J'en déduis que la droite (EM) l'intersection des plans (AEB) et (DEC)

E appartient aux plans (AEB) et (DEC) et M appartient aussi aux plans (AEB) et (DEC) donc la droite (EM) est l'intersection des plans (AEB) et (DEC).



c) Je démontre que la droite (EM) est parallèle au plan (ABC)

(EM) = (ABE) ∩(DCE) et de plus (AB) // (DC) donc d'après le théorème du toit on a (EM)//(AB) et en déduit que (EM) est parallèle au plan (ABC).

41

Les droites (IJ) et (AC) ne sont pas parallèles en $SI = \frac{3}{4}SC$ et $SJ = \frac{1}{2}BA$, donc (IJ) et (AC) sont sécantes en P.

$P \in (SIJ)$ et $S \in (ABC)$, donc (SIJ) et (ABC), ont un point en commun. De plus, $D \in (ABC)$ et D $\notin (SIJ)$ et (SIJ) et (ABC) ne sont pas confondus donc (SIJ) et (ABC) sont sécants

42

$D \in (DFM)$ et $D \in (ABC)$, $M \in (ABC)$ et $M \in (DFM)$, $(DFM) \cap (EFG) = (MD)$

6 FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle d'un tour cycliste***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont le coureur, le lecteur de ce texte et le narrateur***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule sur un circuit (Aller-retour).***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant le tour cycliste.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : être sélectionné à participer au tour cycliste.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Parcourir un circuit avec une vitesse moyenne (aller-retour) supérieure ou égale à 28 km/h. Fatigué, il te demande à quelle vitesse minimale il doit faire le trajet retour pour qu'il soit sélectionné.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- Que décident de faire les acteurs ? ***Tu décides d'effectuer avec tes camarades de classe des recherches sur la question.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

A la fin de cette partie, le professeur indique alors aux élèves qu'au terme de ce cours ils seront capables de calculer cette vitesse moyenne, la notion de fraction rationnelle et de dire à quelle type de fonction la vitesse moyenne représente.

II- Activités

Activité 1 Notion de polynôme

Objectif : ***Reconnaître un polynôme***

1. $A(x) = 2x^3 + 5x$
2. $B(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5$
3. $C(x) = 7x^4 + 5x + +5$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 1

1 a- V ; b – F ; c – V ; d – F

Activité 2 Propriété

Objectif : *Donner la forme réduite d'un polynôme suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x*

1. $P(x) = -6x + 2x^2 + 6x^3$
   $Q(x) = 4 + 4x - 20x^2 + 5x^3$
2. $P(x) = -6x + 2x^2 + 6x^3$
   $Q(x) = 4 + 4x - 20x^2 + 5x^3$
3. Les deux écritures de $P(x)$ sont les mêmes. Idem pour $Q(x)$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2

2 a) $x^3 - v2x^2 - x$; b) $2x^3 - x^2 - 14x + 5$; c) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

3 **1-** $f(x) + g(x) = 18 + 8x^4$ **;** $f(x) - g(x) = - 24\,x^2$

2- $A(x) = - 8 - 5x + 6x^2 + 7x^3$; $B(x) = 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x^3$; $C(x) = 9 - 9x + 2x^3$.

3- $Q(x) = - 10 + 7m + 2m^2 - m^3$; $R(n) = n - 2n^2 + n^3$.

Activité 3 Egalité de deux polynômes

Objectif : ***Justifier que deux polynômes sont égaux***

Solution

1. Les deux polynômes sont égaux si et seulement si $a = 0$; $b = 1$; $c = -2$ et $d = 7$.
   Et donc $S(x) = x^3 - 4x + 7$
2. De ce qui précède, on peut conjecturer que deux polynômes P et Q sont égaux s'ils ont le même degré et les monômes de même degré ont le même coefficient.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3

4 1 – $P(x) = Q(x)$ si et seulement si $a = 2$; $b = 5$ et $c = -3$

2- $a(x+1)(x+2) + b(x+1) + c = ax^2 + (3a + b)x + 2a + b + c$ Ainsi

$$3x2 - 5x + 1 = a(x+1)(x+2) + b(x+1) + c \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 3a + b = -5 \\ 2a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -14 \\ c = 9 \end{cases}$$

Activité 4 Somme et produit de polynômes

Objectif : *Calculer la somme et le produit de polynômes*

Solution

1. $A(x) = 22 + 10x^2 + 23$; $B(x) = 29 + x + 8x^2$; $C(x) = -12 + 8x^2 + 13x^3 + 10x^5 + 35x^6$.
2. a) $A(x); B(x); C(x)$ sont des polynômes car ils s'écrivent $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ où les a_i sont des nombres réels.
   b) On a : $d°C = d°P + d°R$.
3. Ce polynôme est nul. Il n'a donc pas de degré.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

5 1-$H(x) + G(x) = -2 + 3x - 2x^2 + x^3$

2- $H(x) \times G(x) = -2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 4x$

Activité 5 Egalités remarquables

Objectif : *Connaître les égalités remarquables*

Solution

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
4. $(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + b^3$.
5. $(a-b)(a^2 + ab + b^3) = a^3 - b^3$.
6. $(a+b)(a^2 - ab + b^3) = a^3 + b^3$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 5

6 $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 9x + 27$; $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$

Activité 6 Zéro d'un polynôme

Objectif : *Déterminer les zéros d'un polynôme*

Solution

1. On a $P(0) = -3$; $P(1) = P(-3) = 0$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
2. Les nombres réels sont : 0 ; 1 ; -3 et $-\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

7 P(1) = 0 donc 1 est un zéro de P.

Activité 7 Théorème fondamental de la factorisation

Objectif : *Connaître le théorème fondamental de la factorisation*

Solution

1. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

$p(x) - p(a) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 - 2a^3 - 5a^2 - 4a + 3$

$p(x) - p(a) = 2x^3 - 2a^3 + 5x^2 - 5a^2 - 4x - 4a - 3 + 3$

$p(x) - p(a) = 2(x^3 - a^3) + 5(x^2 - a^2) - 4(x + a)$

$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2)$

$x^2 - a^2 = (x-a)(x-a)$ donc

$p(x) - p(a) = (x-a)[2(x^2 + xa + a^2) + 5(x+a) - 4]$

$p(x) - p(a) = (x-a)[2x^2 + 2ax + 2a^2 + 5x + 5a - 4]$

$p(x) - p(a) = (x-a)\underbrace{[2x^2 + x(2a+5) + 2a^2 - 4]}_{Q(x)}$

2. $p(x) - p(a) = (x - a)Q(x)$

   Si $p(x)$ = 0, alors $p(x) = (x - a)Q(x)$.

   $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

   $a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - \ ab^2 - b^3$

3. $dop = 3$, donc $doQ = 3 - 1$, donc $doQ = 2$.

   $p(x) = (x - a)Q(x)$

   $p(a) = (a - a)Q(x)$

   $p(a) = 0 \times Q(x)$ donc a est un zéro de P.

4. a un zéro de p

   d un polynôme Q tel que : $p(x) = (x - a)Q(x)$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

8 P(-2) = 0 donc le polynôme P est factorisable par $x + 2$.

Activité 8 Méthode des coefficients indéterminés

Objectif : ***Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour factoriser un polynôme***

Solution

1. On a : $P(1) = 0$.
2. a) On a : $(x - 1)Q(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - 1$.
   b) On trouve : $a = 2$; $b = 7$ et $c = 3$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

9 1 : P(1) = 0 donc il existe un polynôme Q tel que P(x) =(x – 1)Q(x)

Puisque P est de degré 3 alors Q est de la forme Q(x) = $ax^2 + bx$ + c donc

(x – 1)Q(x) = (x – 1)($ax^2 + bx$ + c) = $ax^3 + (b - a)x^2$ + (c – b)x – c

$$P(x) = (x-1)Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 1 \\ c - b = -7 \\ -c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

2- P(-2) = 0 donc il existe un polynôme Q tel que P(x) =(x + 2)Q(x)

Puisque P est de degré 5 alors Q est de la forme Q(x) = $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ + e donc

On utilise de même la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer les valeurs des réels a, b, c, d et e.

Activité 9 Méthode de la division euclidienne

Objectif : ***Utiliser la méthode de la division euclidienne pour factoriser un polynôme***

Solution

1. On a : $Q(x) = 2x^2 + 7x + 3$; $R_1(x) = 7x^2 - 4x - 3$, $R_2(x) = 7x^2 - 7x$
2. Voir récapitulatif de l'activité 9.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9

10 **a)** $H(-2) = 0$ donc il existe un polynôme K tel que $H(x) = (x + 2)K(x)$
b) En utilisant la méthode de la division euclidienne on obtient : $K(x) = x^2 + x - 1$.

Activité 10 Signe du polynôme : $ax + b$, ($a \neq 0$)

Objectif : *Déterminer le signe d'un polynôme du type ax + b*

Solution

1- Si a est strictement positif, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$. Donc $S = \left]\frac{-b}{a}; +\infty\right[$
Si a est strictement négatif, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$. Donc $S = \left]-\infty; \frac{-b}{a}\right[$

2- Si a est strictement positif, alors $ax + b$ est strictement positif sur l'intervalle $\left]\frac{-b}{a}; +\infty\right[$ et est strictement négatif sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-b}{a}\right[$.
Si a est strictement négatif, alors $ax + b$ est strictement positif sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-b}{a}\right[$ et est strictement négatif sur l'intervalle $\left]\frac{-b}{a}; +\infty\right[$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

11 Si $x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$ alors $-3x + 4 \geq 0$ et si $x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$ alors $-3x + 4 \leq 0$

Activité 11 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Objectif : *Ecrire un polynôme sous sa forme canonique.*

Solution

On démontre que $P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\right]$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 11

12 $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$; $Q(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$

Activité 12 Factorisation d'un polynôme du second degré

Objectif : *Factoriser un polynôme du second degré*

1-a) $P(x)=3\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

b) $P(x)=3(x-3)(x-2)$

2-a) $T(x)=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$

Puisque $\forall x\in\mathbb{R},\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\succ 0$ donc T(x) n'est pas factorisable.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 12

13 $f(x)=2(3x-1)^2$; $g(x)=-4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{17}{16}$; $h(x)=2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Activité 13 Signe d'un polynôme du second degré

Objectif : Etudier le signe d'un polynôme du second degré

1- $-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x2+5x-2$ donc $P(x)=-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2 – Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		-		-	0	+	
$x-\frac{1}{2}$		-	0	+		+	
P(x)		-	0	+	0	-	

3- Etude du signe de P(x) suivant les valeurs de x.

Si $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty[$ alors $P(x)\leq 0$, Si $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ alors $P(x)\geq 0$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 13

14 $f(x)=2x^2+x-1=2\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)$

Si $x\in\left]-\infty;-\frac{7}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$ alors $f(x)\geq 0$, Si $x\in\left[-\frac{7}{4};\frac{5}{4}\right]$ alors $f(x)\leq 0$

$g(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

Si $\forall\, x\in\mathbb{R},(x+1)^2\geq 0$ donc $\forall\, x\in\mathbb{R},g(x)\succ 0$

$h(x)=x-x^2=x(1-x)$

Si $x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ alors $h(x)\le 0$, Si $x\in[0;1]$ alors $h(x)\ge 0$

Activité 14 Fractions rationnelles

Objectif ***Identifier une fraction rationnelle***

Solution

On trouve : $a=3$; $b=-1$; $c=9$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 14

15 1 – V ; 2 – F ; 3 – F ; 4 – F.

16 1 - $D_Q=\mathbb{R}\setminus\{-5;-3\}$;

2- $a=2$ et $b=-4$

17 1- $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$

2- $m=2$ et $n=3$.

18 $a=1$; $b=2$; $c=-4$.

III – DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	Comment factoriser un polynôme dont on connait un zéro 1- $h(x)=(x+2)(x+1)(2x-1)$ 2- $x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$
2	Comment étudier le signe d'un polynôme ? Si $x\in\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};2\right]$ alors $K(x)\ge 0$, Si $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$ alors $K(x)\le 0$
3	Comment transformer l'écriture d'une fraction rationnelle grâce à la méthode d'identification $a=5$ et $b=-3$

IV – MES SEANCES D'EXERCICES

Exercice de fixation

Polynôme

Exercice 1

1 – V ; 2 – F ; 3 – F ; 4 – F ; 5 – F

Egalités de deux polynômes

Exercice 2

a = 0 ; b = -3 ; c = 5 ; d = 0 ; e = -2 ; f = -1

Exercice 3

1. On vérifie que : $P(x) = x[x(6x-7)] + 1$.
2. $P\left(-\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $P\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{352}{9}$.

Exercice 4

Prenons $P(x) = (x+2)(x-5)(x-1)$ et $Q(x) = x^5(x+2)(x-5)$

Ces deux polynômes ne sont pas égaux (ils n'ont même pas le degré) et pourtant : $P(-2) = Q(-2)$ et $P(5) = Q(5) = 0$.

Produit et somme de deux polynômes

Exercice 5

1. $Q(x) - P(x) = -5x^4 - 8x^2 + 15x + 3$.
2. $P(x)Q(x) = -20x^6 + 15x^5 - 26x^4 + 60x^3 - 24x^2 + 9x + 10$.

Egalités remarquables

Exercice 6

1. $x^3 - 27$
2. $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

Exercice 7

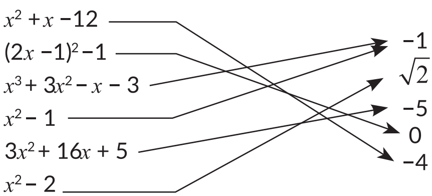
1. $(2x+1)^2 - 16 = (2x-3)(2x+5)$
2. $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$
3. $25x^2 - 20x + 4 = (5x-2)^2$.
4. $(x+4)^2 - (2x+5)^2$.
5. $27x^3 + 216 = 27(x+2)(x^2 - 2x + 4)$.
6. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$.
7. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3$

Exercice 8

1. $(\sqrt{2}x - 4)^3 = 2\sqrt{2}x^3 - 24x^2 + 48\sqrt{2}x - 64$.
2. $(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.
3. $(\frac{x}{2} - 6)^2 = \frac{x^2}{4} - 6x + 36$.
4. $(\frac{x}{7} + 7)^2 = \frac{x^2}{49} + 2x + 49$.

Zéro d'un polynôme

Exercice 9



Exercice 10

1. Vrai; 2. Faux ; 3. vrai; 4. Faux ; 5. Faux.

Exercice 11

1. Il s'agit du nombre : -2.
2. Il s'agit des nombres : $\frac{3}{2}$; -1 ; 5.

Exercice 12

1. a) Les zéros de P sont les nombres suivants : -1 et -5.
   b) Les zéros de Q sont : $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{4}$.
2. Les zéros de G sont – 2 ; - 5 et – 3.

Propriété fondamentale

Exercice 13

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux

Exercice 14

1. On écrit facilement : $H(x) = x[x(-3x-1)-4]+4$.
2. $H\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.
3. Le nombre $\frac{2}{3}$ il existe donc un polynôme du second degré G tel que :
   $H(x) = (-3x+2)G(x)$ avec $G(x) = x^2 + x + 2$.

Méthode des coefficients indéterminés

Exercice 15

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient après calculs : $a = 1$; $b = -6$.

Division euclidienne

Exercice 16

Après division euclidienne, on trouve : $a = -3$; $b = -5$; $c = 6$; $d = 8$.

Forme canonique

Exercice 17

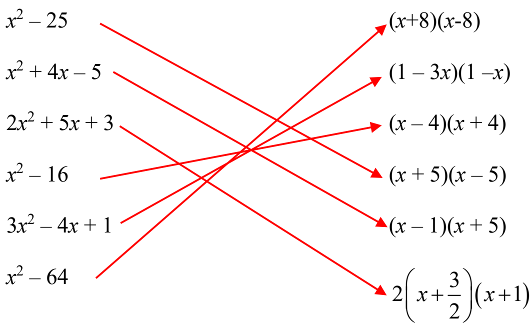
1. Vrai; 2. Faux ; 3. Vrai; 4. Vrai ; 5. Faux. 6. Vrai ; 7. Vrai.

Exercice 18

a) $x^2 - 1$. ; d). $(x-1)^2 - 4$; e) $3 - 4x^2$; f) $2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$

Factorisation d'un polynôme du second degré

Exercice 19



Exercice 20

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux

Exercice 21

1. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.
2. $x^2 - 4x - 7 = (x - \frac{4-2\sqrt{11}}{2})(x - \frac{4+2\sqrt{11}}{2})$
3. $-2x^2 - 5x + 3 = (-2x + 1)(x + 3)$.
4. $1 - 4(x + 5)^2 = -(2x + 9)(2x + 11)$.
5. $-x^2 + 9x + 10 = -(x - 10)(x + 1)$.

Signe d'un polynôme du second degré

Exercice 22

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux.

Exercice 23

1. Pour tout x de IR, $P(x) \leq 0$.
2. Pour tout x de IR, $Q(x) \geq 0$.
3. Pour tout x de IR, $R(x) > 0$.
4. Pour tout x de IR, $S(x) < 0$.
5. Pour tout x de $\left]-4; -\frac{1}{2}\right[$, $U(x) > 0$ et pour tout x de $]-\infty; -4[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $U(x) < 0$.

Fraction rationnelle

Exercice 24

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux.

Exercice 25

1. La division euclidienne de $3x^2 + 2x - 1$ par $3x - 1$ donne le résultat suivant :
   $3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$.
2. La fraction rationnelle $\frac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ existe si $x \in IR - \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.
   Pout tout x de $IR - \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$, $\frac{3x-1}{3x^2+2x-1} = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 26

1. On rend au même dénominateur, puis on identifie : $a = 4$ et $b = -3$.
2. On peut faire la même méthode qu'au 1 ou faire une division euclidienne.
   On trouve : $a = 2$; $b = -3$; $c = 4$.

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 27

1. On vérifie qu'effectivement : $P(5) = 0$.
2. On trouve : $Q(x) = -4x^2 - 27x + 7$.
3. On trouve : $P(x) = (1 - 4x)(x + 7)(x - 5)$.
4. Pour tout x de $]\leftarrow; -7] \cup \left[\frac{1}{4}; 5\right]$, $P(x) \geq 0$; pour tout x de $\left]-7; \frac{1}{4}\right[\cup]5; \rightarrow[$, $P(x) < 0$.
5. a) $P(-2019) > 0$.
   b) En effet le nombre -2019 appartient à l'intervalle $]\leftarrow; -7]$ sur lequel le polynôme P est positif.

Exercice 28

1- On vérifie que 1 est zéro de $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ et -1 est un zéro de $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$.
2- On vérifie que :$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = (x + 1)(x + 5)(x + 3)$.
   Donc E existe pour tout x de $IR - \{-5; -3; -1\}$.
3- Pour tout x de IR— 5 ; −3 ; −1, $E(x) = \frac{x-1}{x+1}$
4- En effet les calculs donnent ce résultat.

Exercice 29

a) Forme canonique : $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$.
   Zéros : 1 et -5.
b) Forme canonique : $x^2 + 10x + 120 = (x + 5)^2 + 95$.
   Zéros : il n'y a pas.
c) Forme canonique : $16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$.
   Zéro : $-\frac{1}{4}$
d) Forme canonique : $x^2 + 6x + 4 = (x + 3)^2 - 5$.
   Zéros : $-3 - \sqrt{5}$ et $-3 + \sqrt{5}$.

Exercice 30

a) Posons : $P(x) = (x - 3)^2 - 16$; $P(x) = (x - 7)(x + 1)$.
   Pour tout x de $]\leftarrow; -1] \cup [7; \rightarrow[$, $P(x) \geq 0$; pour tout x de $]-1; 7[$, $P(x) < 0$.

b) Pour tout x de IR, $-(2x-5)^2-81<0$.

c) Posons : $P(x)=1-(5x+3)^2$; $P(x)=-(2+5x)(5x+4)$.

Pour tout x de $\left]\leftarrow;-\frac{4}{5}\right]\cup\left[-\frac{2}{5};\rightarrow\right[$, $P(x)\leq 0$; pour tout x de $\left]-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right[$, $P(x)>0$.

d) Posons : $P(x)=4x^2+4x+7$; $P(x)=(2x+1)^2+6$.

Pour tout x de IR, $4x^2+4x+7>0$.

Exercice 31

a) $x^3-\ 8=(x+2)(x^2+2x+4)$.
b) $27x^3+1=(3x+1)(9x^2-3x+1)$.
c) $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$.
d) $8x^3+12x^2+6x+1=(2x+1)^3$.

Exercice 32

1. Faux car : $2^3-5\text{x}2^2-4\text{x}2+4\neq 0$.
2. Vrai d'après une propriété du cours.
3. Faux le polynôme suivant est de degré 2 et il est négatif : $P(x)=-x^2-1$.
4. Vrai car de la forme : $a(x-\alpha)^2+\beta$
5. Vrai car de la forme : ax^n avec $a=\frac{1}{15}$ et $n=5$.
6. Vrai car c'est une différence de deux carrés.
7. Vrai car de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)=1$ et $Q(x)=2x^2+2x-1$ sont des polynômes.
8. Vrai car de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)=4x^2-2x+1$ et $Q(x)=1$ sont des polynômes.
9. Faux car 1 n'est pas un zéro de : $4x^2-2x+1$.
10. Vrai car -1 est un zéro de : $2x^3+3x^2-8x+3$.

Exercice 33

1. $F(x)$ est divisible par $x-1$ et par $x+1$ parce que 1 et -1 est un zéro de F.
2. On écrit : $F(x)=(x^4)^n-1$. On sait que x^n-1 est divisible par $x-1$. Donc $F(x)$ est divisible par : x^4-1.

Exercice 34

$P(x)=-2x^3+3x^2+20x+75$.

1. a) $P(-10)=2175.$; b) $P(-8)=1131$; c) $P(5)=0$.
2. $P(x)=(x-5)(2x^2+7x+15)$.

Exercice 35

1. On démontre que : $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$.
2. On en déduit que : $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$. Les zéros sont : -7 et 1.
3. L'ensemble de définition de la fraction f est : $IR-\{-7;1\}$.
4. L'ensemble de définition de la fraction g est : IR.

7 ANGLES INSCRITS

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle de la préparation d'un exposé sur les angles***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves de seconde***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au lieu de préparation de l'exposé.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant la séance de préparation de l'exposé.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : les élèves veulent savoir s'il y a une relation entre les angles inscrits et les angles au centre.***
- **Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?** *Peu d'outils pour être énoncé et conséquences nombreuses.*

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- \- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident de justifier des égalités angulaires entre les angles inscrits et les angles au centre***

• **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Nous venons de voir qu'il existe une relation entre angles inscrits et angles au centre, ce qui nous amène à étudier la leçon angles inscrits. Pour ce faire nous allons voir :

Rappel : relation entre angle inscrit dans un cercle et angle au centre associé.

II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

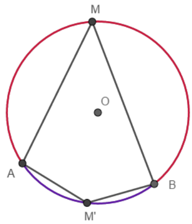
Activité 1 : Arc intercepté par un angle donné

Objectif : *Cette activité vise à identifier les arcs de cercle interceptés respectivement par un angle inscrit aigu et un angle inscrit obtus dans un cercle.*

Solution

Reproduction de la figure à faire indiquant en couleur les arcs interceptés par chaque angle.

Esquisse de la figure :



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 1

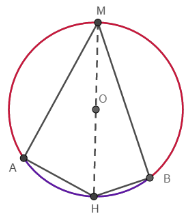
1 **1 – F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 - V ; 5 – V ; 6 - V**

2 $\widehat{ML}$ est intercepté par l'angle MKL

Activité 2 : Angle inscrit aigu et angle au centre associé

Objectif : *Cette activité vise à connaitre la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé.*

Solution



1) Soit $mes\widehat{AMB} = 35°$ et $mes\widehat{AOB} = 70°$

2) $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\, mes\widehat{AOB}$

3) soit H le point du cercle tel que [MH] soit un diamètre.

$mes\widehat{AMH} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOH}$ et $mes\widehat{HMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{HOB}$

$mes\widehat{AMH} + mes\widehat{HMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOH} + \frac{1}{2} mes\widehat{HOB}$. Or $\widehat{AMH}$ et $\widehat{HMB}$ sont deux angles adjacents de même que $\widehat{AOH}$ et $\widehat{HOB}$.

Donc $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2:

3 Dans un cercle, un angle inscrit aigu a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

4 1 – B ; 2 – A ; 3 – A ; 4 – B

Activité 3 : **Angle inscrit obtus et angle au centre associé**

Objectif : *Cette activité vise à connaitre la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé.*

Solution

1- $mes\widehat{AMB} = \alpha$ et $mes\widehat{AOB} = \beta$

2- $mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB} \Rightarrow \alpha = 180° - \frac{1}{2}\beta$

3- (OM) tracée et le point E placé.

a) Avec le rapporteur mesurer $\widehat{EOB}$ puis vérifier l'égalité :

$mes\widehat{AMB} = mes\widehat{AME} + mes\ \widehat{EMB} = \frac{1}{2}\left(mes\widehat{AOE} + mes\ \widehat{EOB}\right)$

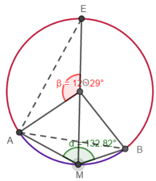
b) $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(mes\widehat{AOE} + mes\ \widehat{EOB}\right)$

or $360° = mes\widehat{AOE} + mes\widehat{EOB} + mes\widehat{AOB}$

Par suite : $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(360° - mes\ \widehat{AOB}\right)$

$mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$.

Illustration graphique :



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3 : exercice 6 page 135.

5 Dans un cercle, un angle inscrit obtus a pour mesure la différence de 180° et de la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

6 1 – F ; 2 – V ; 3 – F ; 4 - V

Activité 4 : Angle inscrit défini par une corde et une demi- tangente

Objectif : Cette activité vise à connaitre la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé.

Solution

1) mes$\widehat{ACO}$ en fonction de mes$\widehat{AOB}$

a) ACO est un triangle rectangle en A, d'où $mes\widehat{ACO} + mes\widehat{AOJ} = 90°$. $mes\widehat{ACO} = 90° - mes\widehat{AOJ}$ or (D) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$ d'où $mes\widehat{AOJ} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$ d'où $mes\widehat{AOJ} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$

Conclusion $mes\widehat{ACO} = 90° - (\frac{1}{2}mes\widehat{AOB})$

b) AJC triangle rectangle en J. $mes\ \widehat{CAJ} + mes\widehat{ACO} = 90°. or\ \ mes\widehat{ACO} = 90° - (\frac{1}{2}mes\ \widehat{AOB})$ donc $mes\ \widehat{CAJ} = 90° - (90° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB})$

$\Rightarrow\ mes\widehat{CAJ} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$

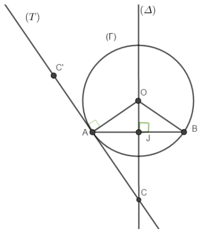
c) $B \in (AJ) d'ou\ mes\widehat{CAB} = mes\widehat{CAJ}$

2) a) $\widehat{C'AB}$ est un angle obtus et $\widehat{CAB}$ est un angle aigu.

b) $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{CAB}$ sont des angles donc $mes\widehat{C'AB} + mes\widehat{CAB} = 180°$; d'où $mes\ \widehat{C'AB} = 180° - mes\ \widehat{CAB}$

Or $mes\ \widehat{CAB} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$ d'où $mes\ \widehat{C'AB} = 180° - mes\widehat{AOB}$.

Illustration graphique :



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4.

7 a- F ; b – V ; c – F ; d – V ; e - F ; f – F

8 1- $mes BUV = \frac{1}{2} mes UJV = 37,5°$

2- $mes AUV = 180° - \frac{1}{2} mes UJV = 142,5°$

Activité 5 : Angles inscrits interceptant le même arc

Objectif : *Cette activité vise à connaitre : la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc ou de deux arcs de même longueur.*

Solution

A- 1. L'arc $\widehat{AB}$

2. $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$ et $mes\widehat{ANB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$

3. $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$ et $mes\widehat{ANB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$ donc $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ANB}$

B- Les angles TAB est un angle inscrit interceptant l'arc AB

L'angle au centre AOB est associé à l'angle inscrit TAB donc

$mes \text{TAB} = \frac{1}{2} mes\, AOB$

de même l'angle inscrit ANB et l'angle au centre AOB sont associés donc

$mes \text{ANB} = \frac{1}{2} mes \text{AOB}$.

Ainsi $mes \text{TAB} = \frac{1}{2} mes\, AOB$ et $mes \text{ANB} = \frac{1}{2} mes \text{AOB}$ donc

$mes \text{ANB} = mes \text{ATB}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 5.

9 1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F ; 5 – F .

Activité 6 : Angles inscrits interceptant des arcs de même longueur

Objectif : *Cette activité vise à connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de même longueur.*

Solution

1) Mesurer les deux angles sur la figure.
2) $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{EDN}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

10 Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

11 Longueur de l'arc AB =Longueur de l'arc BC donc $mes\,ACB = mes\,BAC$ (1)

Longueur de l'arc AC =Longueur de l'arc BC donc $mes\,ABC = mes\,BAC$ (2)

Des égalités (1) et (2) on déduit que $mes\,ABC = mes\,BAC = mes\,ACB$

Activité 7 : Angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités

Objectif : *Cette activité vise à connaitre la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités.*

Solution

1- a) $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$ b) $mes\widehat{ANB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$

2- a) $mes\widehat{AMB} + mes\widehat{ANB} = 180°$

b) Les deux angles sont supplémentaires

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

12 1 – F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F.

13 1-Les angles KTN et KSN interceptent des arcs de mêmes extrémités K et N donc ils sont supplémentaires.

2-Les angles MPN et MKN interceptent des arcs de mêmes extrémités K et N donc ils sont supplémentaires et on a : $mes\,MPN + MKN = 180°$ or $MKN = 65°$ donc $MPN = 115°$

Activité 8 : Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté par cet angle

Objectif : *L'intérêt de cette activité est de connaitre la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte.*

Solution

1) L'angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle (C).(MI) est la bissectrice de $\widehat{AMB}$. Donc $mes\widehat{AMI} = mes\widehat{IMB}$. Les angles $\widehat{AMI}$ et $\widehat{IMB}$ sont inscrits dans (C) et interceptent respectivement les arcs AI et IB. Les angles $\widehat{AMI}$ et $\widehat{IMB}$ ayant la même mesure vont intercepter deux arcs différents de même longueur. Donc les arcs $\widehat{AI}$ et $\widehat{IB}$ ont la même longueur.
2) Propriété : la bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc qu'il intercepte en deux arcs de même longueur.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

14 La droite (TP) est la bissectrice de l'angle AMB donc les arcs AI et IB ont la même longueur

Activité 9 : Arcs capables de mesure donnée

Objectif : *Cette activité consiste à identifier deux arcs capables d'un angle donné puis à construire un arc capable de mesure donnée.*

Solution

1) Soit (D) la médiatrice de [AB] et (D') la perpendiculaire à la droite (AT) et qui passe par A

Si un tel cercle existe, son centre O appartient à la fois à (D) et à (D'). Ainsi le cercle (C) de centre O et de rayon OA vérifie la condition.
Réciproquement, si un cercle passe par A et B, son cercle centre I appartient à la médiatrice de [AB], de plus s'il est tangent à la droite (AT) en A, alors I appartient à la perpendiculaire à (AT) passant par A. I s'obtient donc comme l'intersection des droites (D) et (D') et donc I = O
Il existe donc un unique cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT)

2) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABM, on a mes $\widehat{AOB}$ = 2α, car mes $\widehat{AMB}$= α

Le triangle OAB étant isocèle de sommet principal O, on a : mes $\widehat{OAB}$ = 90 – α.
Or mes $\widehat{TAB}$ = α, donc mes $\widehat{OAT}$ = 90. A étant un point du cercle (C), la droite (AT) est tangente à (C) en A

D'après la question 1, le cercle (C) est fixe et unique, donc M apparient au cercle passant par A et B et qui a pour tangente la droite (AT).

Conclusion: Si mes $\widehat{AMB}$ = α, alors M appartient au cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT) tel que mes $\widehat{TAB}$ = α

3. Réciproquement , si M appartient à (P) et (C), alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{TAB}$ intercepte le meme arc et donc mes $\widehat{AMB}$ = α.

On démontre de même si M appartient à (P') et à (C') où (C') est le symétrique de © par rapport à la droite (AB), alors mes $\widehat{AMB}$ = α

3) a **Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9**

15 1-F ; 2 - F ; 3 – V ; 4 – F.

Activité 10 : Aire d'un triangle

Objectif : *Cette activité vise à connaître la propriété relative à l'aire d'un triangle et par suite à calculer des aires.*

Solution

1) $\mathcal{A} = \frac{AB \times CH}{2}$
2) ACH est un triangle rectangle en H. $sin\hat{A} = \frac{CH}{AC}$ donc $CH = AC \times sin\hat{A}$.
3) $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.
4) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}CH \times AB = \frac{1}{2}AC \times sin\hat{A} \times AB = \frac{1}{2}AC \times ABsin\hat{A} = \frac{1}{2}bcsin\hat{A}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

16 Les numéros des formules qui permettent de calculer l'aire A du triangle sont : 2 ; 4 ; 5.

17 Soit A l'aire de ABC on a :A $= \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin BAC = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

Activité 11 : Théorèmes des sinus

Objectif : *Cette activité vise à connaitre :*

- *la propriété relative à l'aire d'un triangle ;*
- *le théorème des sinus ;*
- *calculer des aires, des longueurs et des mesures d'angle*

Solution

1) $A_1 = \frac{1}{2}bcsin\hat{A}$; $A_2 = \frac{1}{2}acsin\hat{B}$; $A_3 = \frac{1}{2}absin\hat{C}$
2) $A_1 \times \frac{2}{abc} = \frac{1}{2}bcsin\hat{A} \times \frac{2}{abc} = \frac{sin\hat{A}}{a}$ // $A_2 \times \frac{2}{abc} = \frac{1}{2}acsin\hat{B} \times \frac{2}{abc} = \frac{sin\hat{B}}{b}$ //
$A_3 \times \frac{2}{abc} = \frac{1}{2}absin\hat{C} \times \frac{2}{abc} = \frac{sin\hat{C}}{c}$ $A_1 = A_2 = A_3 \Leftrightarrow \frac{sin\hat{A}}{a} = \frac{sin\hat{B}}{b} = \frac{sin\hat{C}}{c}$
$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{A_2} = \frac{1}{A_3} \Leftrightarrow \frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$. $A_1 \times \frac{2}{abc} = \frac{sin\hat{A}}{a} \Leftrightarrow \frac{abc}{2A_1} = \frac{a}{sin\hat{A}}$

Donc : $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = \frac{abc}{2A}$

3) Considérons le triangle BOH rectangle en H.
$sin\widehat{BOH} = \frac{BH}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = 2Rsin\widehat{BOH}$
$mes\hat{A} = \frac{1}{2}mes\widehat{BOC}$ et $mes\widehat{BOC} = 2mes\widehat{BOH}$ d'où $mes\hat{A} = \frac{1}{2} \times 2mes\widehat{BOH} =$ $mes\widehat{BOH}$ car BOC est isocèle en O et (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. On sait que $mes\hat{A} = mes\widehat{BOH}$ d'où $\sin\hat{A} = sin\widehat{BOH}$
$\Rightarrow a = 2Rsin\widehat{BOH} \Leftrightarrow a = 2Rsin\hat{A} \Leftrightarrow \frac{a}{sin\hat{A}} = 2R$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 11

18

1	Comment justifier que deux angles inscrits dans un cercle ont la même mesure ? -les arcs interceptés par les angles inscrits MQN et QNP ont la même longueur donc les angles MQN et QNP ont la même mesure. -les angles inscrits MQN et MON interceptent le même arc donc ils ont la même mesure. On en déduit que les angles MQN , MON et QNP ont la même mesure.

19

$$\frac{\sin 61°}{b}=\frac{\sin 76°}{c}=\frac{\sin 43°}{a}$$

$$\frac{4}{\sin 30°}=2R \Leftrightarrow R=\frac{2}{\sin 30°}=4$$

20 Soit A l'aire du triangle PQR : $\frac{abc}{2A}=2R \Leftrightarrow A=\frac{abc}{4R}=\frac{5\times10\times8}{4\times4}=25\ cm^2$

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

2	Comment déterminer l'aire d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle formé par ces deux côtés ? Soit A l'aire du triangle IJK. On a : $\frac{abc}{2A}=\frac{a}{\sin(67{,}5°)} \Leftrightarrow A=\frac{3^2}{2}\times\sin(67{,}5°)$

3	Comment déterminer le rayon du cercle circonscrit à triangle connaissant les longueurs des côtés de ce triangle et l'aire de ce triangle. $\frac{abc}{2A}=2R \Leftrightarrow R=\frac{abc}{4A}=\frac{4\times3\times5}{4\times6} \Leftrightarrow R=2{,}5\ cm$

III – LE CORRIGE DES EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Angle inscrit et angle au centre associé

Exercice 1

a) Fig1 : Oui ; Fig2 : Non ; Fig3 : Oui ; Fig4 : Oui
b) Fig1 : Oui ; Fig2 : Non ; Fig3 : Oui ; Fig4 : Oui.

Exercice 2

1- F ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – V ; 5 – V ; 6 – V.

Exercice 3

a) Ceux qui interceptent le petit arc d'extrémités K et L : KNL, KOL, KPL.

b) Ceux qui interceptent le grand arc d'extrémités K et L : KML , KOL

Exercice 4

Angles inscrits	angle au centre
$\widehat{ACB}$	$\widehat{BOC}$
$\widehat{BOC}$	$\widehat{AOB}$
$\widehat{CBD}$	$\widehat{COD}$
$\widehat{ABD}$	$\widehat{AOD}$

Exercice 5

1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F ; 5 – V.

Angles défini par une corde et une demi-tangente

Exercice 6

1-b) ; 2-a)

Exercice 7

1- F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F.

Exercice 8

a) 30° ; b) 20° ; c) 150°

Angles inscrits interceptant le même arc.

Exercice 9

Les angles KML et KNL interceptent le même arc donc ces deux angles ont la même mesure. C'est-à-dire $mes KNL = 60°$

Exercice 10

1 – 15° ; 2 – 165°.

Angles inscrits interceptant des arcs de même longueur.

Exercice 11

Les arcs RS et QR ont la même longueur donc les angles $mes QPR = mes RPS$ de plus les angles QPR et RPS ont la droite (PR) comme côté commun, donc la droite (PR) est la bissectrice de l'angle QPS .

Exercice 12

Les angles NPM et QPR sont des angles inscrits dans le cercle (C) interceptant deux arcs de même longueur donc $mes NPM = QPR$.

Exercice 13

1- a) ; 2 - b) ; 3 - b) ; 4- b)

Exercice 14

$\widehat{GAD}$ et $\widehat{ECH}$ ont la même mesure car ils interceptent des arcs de même longueur.

Angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités.

Exercice 15

Les angles ADC et ABC interceptent deux arcs de mêmes extrémités donc ils sont supplémentaires.

Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté

Exercice 16

1- V ; 2- F ; 3- F ; 4- F.

Arc capable d'un angle donné

Exercice 17

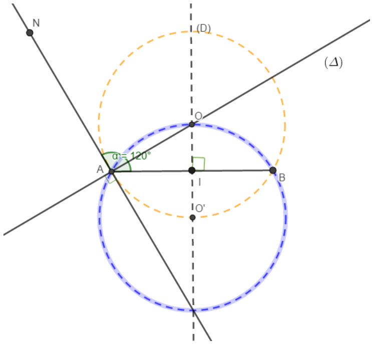
On a : 4 → 2 → 5 → 3 → 1

Ou bien :

- Trace un segment [AB]
- Place un point P tel que $\widehat{PAB} = \theta°$.
- Construis le point O, intersection de la perpendiculaire à la droite (AP) en A et de la droite (D) médiatrice du segment [AB].
- Construis l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas P.
- Construis le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).

Exercice 18

a) $mes\widehat{AMB} = 120°$

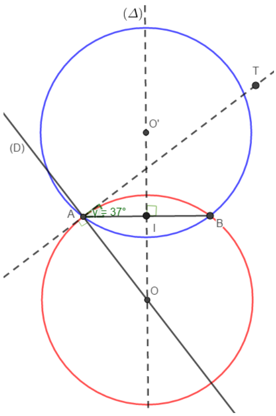


Programme de construction :

- On trace un segment [AB] de longueur 6 cm.
- On place un point N tel que $mes\ \widehat{BAN} = 120°$
- On trace la médiatrice (D) du segment [AB]
- On trace la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (AN) passant par A. Elle coupe (D) en O.
- On construit le symétrique $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon OA.
- On construit le symétrique $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par rapport à (AB).

L'ensemble des points M du plan tels que $mes\widehat{AMB} = 120°$ est l'arc de cercle de centre O, de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point N et son symétrique par rapport à (AB).

b) $mes\widehat{AMB} = 37°$

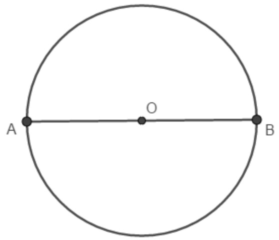


Programme de construction :

- On trace un segment [AB] de longueur 6 cm.
- On place un point N tel que $mes\ \widehat{BAT} = 37°$
- On trace la droite (D) $\perp$ (AT) au point A.
- On trace la droite (Δ) médiatrice de [AB]. Elle coupe (D) en O.
- On construit le symétrique ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA.
- On construit le symétrique ($\mathcal{C}'$) du cercle ($\mathcal{C}$) par rapport à (AB).

L'ensemble des points M du plan tels que $mes\ \widehat{AMB} = 37°$ est l'arc de cercle de centre O, de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point N et son symétrique par rapport à (AB).

c) Mes $\widehat{AMB} = 90°$



Programme de construction :

- On trace (△) la médiatrice de [AB]. Elle coupe (AB) en O.
- On trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA.

L'ensemble des points M du plan tels que $mes\ \widehat{AMB} = 90°$ est le cercle de centre O et de rayon OA.

Exercice 19

Voir figure.

Arc capable d'un angle donné

Exercice 20

1- c) ; 2 - a) ; 3 - a)

Exercice 21

a. 20

Exercice 22

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times KM \times KL \times sin\widehat{K} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times sin\ 60° = 12\sqrt{3}\ cm^2$.

Théorème du sinus

Exercice 23

1- V ; 2 - F ; 3 - F ; 4 - V ; 5 - V.

Exercice 24

On a : $\frac{AD}{sin\widehat{AED}} = \frac{AE}{sin\widehat{ADE}} \Leftrightarrow sin\hat{E} = \frac{ADsin\widehat{ADE}}{AE}$. Soit $sin\hat{E} = \frac{10sin51°}{11} \approx 0{,}706$.

D'où $mes\ \hat{E} \approx 44{,}99 \approx 45°$

Exercice 25

On a : $\frac{EG}{sin\widehat{EFG}} = \frac{EF}{sin\widehat{EGF}} \Leftrightarrow EF = \frac{EGsin\widehat{EGF}}{sin\widehat{EFG}}$. Soit $EF = \frac{5\,sin67°}{\sin 33°} \approx 2{,}506$

D'où EF $\approx 2{,}5$.

EXRCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 26

1er cas $\Rightarrow x = \frac{124°}{2} = 62°$; 2^{e} cas $\Rightarrow x = 24°$; 3^{e} cas $\Rightarrow x = 2\times 22° = 44°$;
4^{e} cas $\Rightarrow x = 180° - \frac{120°}{2} = 120°$; 5^{e} cas $\Rightarrow x = 2 \times 40° = 80°$;
6^{e} cas $\Rightarrow x = 180° - \frac{1}{2} \times 120° = 120°$

Exercice 27

Amine n'a pas raison car tous les angles $\widehat{AMB}$ formés sont des angles aigus inscrits dans le même cercle et qui interceptent le même arc $\widehat{AB}$, alors ils ont tous la même mesure.

Exercice 28

$\widehat{SPR}$ et $\widehat{SQR}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{SR}$, alors mes $\widehat{SPR} =$ mes $\widehat{SQR}$. Donc mes $\widehat{SPR} = 54°$.

Dans le triangle SPR, on a : mes $\widehat{SPR} +$ mes $\widehat{PRS} +$ mes $\widehat{RSP} = 180°$. Alors mes $\widehat{RSP} =$ $180° -$ mes $\widehat{SPR} -$ mes $\widehat{PRS}$. Soit mes $\widehat{RSP} = 180° - 54° - 63°$. D'où : mes $\widehat{RSP} = 63°$.

mes $\widehat{RSP} =$ mes $\widehat{PRS}$ d'où le triangle PSR est isocèle.

Kadio a donc raison.

Exercice 29

1) $mes\widehat{PAB} = 180° - mes\widehat{SAB} = 180° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB} = 180° - \frac{1}{2} \times 2mes\widehat{AMB} =$
$180° - mes\widehat{AMB} = 180° - 40°$
$mes\widehat{PAB} = 140°$
2) Voir figure : prendre le petit arc $\widehat{AB}$.

Exercice 30

$mes\ \widehat{UWV} = mes\widehat{UXV} = 21°$. UWV est un triangle rectangle inscrit dans (C) et de diamètre [UW] l'un des côtés du triangle.

$mes\ \widehat{UVW} = 90°$. $mes\widehat{WUV} = 180° - (90° + 21°) = 69°$.

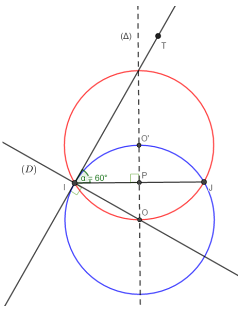
Exercice 31

$\widehat{RIQ}\ et\ \widehat{QIS}$ sont deux angles inscrits interceptant deux arcs de même longueur et un cote adjacent commun.

(IQ) est le côté commun de deux angles de même mesure. (IQ) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{RIJ}$.

Exercice

Voir construction.



1- L'arc en vert de mesure 60° correspond au grand arc $\breve{IJ}$ au-dessus du segment [IJ]
2- L'arc en bleu de mesure 120° correspond au petit arc $\widehat{IJ}$ en dessous du segment [IJ]

Programme de construction :

- On trace un segment [IJ] de longueur 4 cm.
- On place un point N tel que $mes\ \widehat{TIJ} = 60°$
- On trace la droite (D) passant par I et perpendiculaire à la droite (IT).
- On trace la droite (Δ) médiatrice de [IJ]. Elle coupe (D) en O.
- On construit le symétrique $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon OI.
- On construit le symétrique $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par rapport à (IJ)

L'ensemble des points M du plan tels que $mes\ \widehat{AMB} = 60°$ est l'arc de cercle de centre O, de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (IJ) ne contenant pas le point N et son symétrique par rapport à (IJ).

Exercice 32

1) $mes\widehat{LSI} + mes\widehat{LUI} = 180° \Rightarrow mes\widehat{LSI} = 180° - mes\widehat{LUI} = 180° - 88° = 92°$
2) Même démonstration $mes\widehat{ULS} = 180° - 107° = 73°$

Exercice 33

1) b = AC. Dans le triangle ABC on peut écrire :

A= $\frac{1}{2}bcsin\hat{A} = \frac{1}{2} \times 32 \times b \times sin\hat{C} = \frac{1}{2} \times 32 \times csin37°$

$\Rightarrow b = 32 \times \frac{sin37°}{sin\hat{A}}$ or $mes\hat{A} = 180° - (37° + 28°) = 115°$

$\Rightarrow b = 32 \times \frac{sin37°}{sin115°} \approx 21{,}24\ cm$. AC ≈ 21,2 cm.

2) Même raisonnement avec c = AB.

$A = \frac{1}{2}bcsin\hat{A} = \frac{1}{2} \times 32 \times b \times sin\hat{C}$. $\Rightarrow AB = 32 \times \frac{sin\hat{C}}{sin\hat{A}} = 32 \times \frac{sin28°}{sin115°} = 16{,}576.$

AB ≈ 16,6 cm.

Exercice 34

1) $A = \frac{1}{2} \times 7{,}2 \times c \times sin\hat{\alpha} = \frac{1}{2} \times 2{,}3 \times c \times sin\hat{B} \quad \Rightarrow \quad sin\ \hat{\alpha} = \frac{2{,}3}{7{,}2}sin92°$

$$\Rightarrow mes\ \hat{\alpha} \approx 18{,}62°$$

2) De même $A = \frac{1}{2} \times 7{,}2 \times c \times sin\hat{\alpha} = \frac{1}{2} \times 2{,}3 \times 7{,}2 \times sin\hat{C} \quad \Rightarrow \quad c = 2{,}3 \times \frac{sin\hat{C}}{sin\hat{\alpha}}$

or $mes\hat{C} = 180° - (92° + 18{,}32°) = 69{,}38°$ donc $c \approx 6{,}74\ cm.$

Exercice 35

ABC est un triangle inscrit dans le cercle de rayon 1 cm. $mes\hat{A} = 45°\ et\ \ mes\hat{B} = 60°$.

On sait que $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = 2R$. $a = BC = 2Rsin\hat{A} \Rightarrow BC = \sqrt{2}\ cm.$

$b = AC = 2Rsin\hat{B} \Rightarrow AC = \sqrt{3}\ cm.$

$c = AB = 2Rsin\hat{C}$.

$mes\hat{C} = 180° - (60° + 45°) = 75°$. Donc $AB \approx 1{,}93\ cm$

Exercice 36

1- a- la somme des mesures des angles au centre d'un polygone régulier est égale à 360°.

b- soit *n* le nombre de côtés du polygone régulier. $\alpha°$ est la mesure d'un angle au centre. On a n$\alpha° = 360°$ et $\alpha° = \frac{360°}{n}$

2- Programme de construction

- tracer un cercle de centre K.
- tracer deux diamètres dont les supports sont perpendiculaires.
- Construire les bissectrices de tous les angles au centre de ce cercle. ces droites seront sécantes au cercle en 8 points.
- Relier ces 8 points les uns aux autres, ainsi on a les 8 côtés de l'octogone.

Exercice 37

1- La somme des mesures de ses angles au centre est égale à 360°. La mesure d'un angle au centre est égale à $\frac{360°}{9}$ *c'est* à *dire* 40° .

2- $mes\widehat{IOH} = \frac{360°}{9} = 40°$;

$mes\widehat{DAE} = \frac{1}{2}mes\widehat{DOE} = \frac{1}{2} \times 40° = 20°$

$mes\widehat{EGF} = \frac{1}{2}mes\widehat{GOE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 40° = 40°$;

$mes\widehat{AED} = mes\ \widehat{AEB} + mes\widehat{BEC} + mes\widehat{CED} = 3 \times 20° = 60°$.

$mes\widehat{HOI} = \frac{180°-40°}{2} = 70°$.

3- La mesure des angles de l'ennéagone est égale à 140°×9 :soit 1260° car $mes\widehat{IHG} = 2 \times 70° = 140°$

Exercice 38

a) $\widehat{RIT}$ est l'angle au centre associé à l'angle aigu inscrit $\widehat{ROT}$.
Alors mes $\widehat{RIT} = 2$ mes $\widehat{ROT}$

b) De même : mes $\widehat{SJQ} = 2$ mes $\widehat{SOQ}$

c) $\widehat{ROT}$ et $\widehat{SOQ}$ sont deux angles opposés par le sommet alors :
mes $\widehat{ROT} =$ mes $\widehat{SOQ}$. D'où :mes $\widehat{RIT} =$ mes $\widehat{SJQ}$.

Exercice 39

1) On sait que ML= a. dans le triangle KLM on a : $\frac{KM}{sin\hat{L}} = 2R = a$. mes$\hat{L} = 45°$

$$KM = asin\hat{L} = asin45° = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Dans le triangle KML, $A = \frac{1}{2}KM \times ML \times sin\widehat{M} = \frac{1}{4}a^2$

Exercice 40

1) Calcul de EF
On a que $\frac{EG}{sin\hat{F}} = \frac{EF}{sin\hat{G}} = \frac{FG}{sin\hat{E}} \Rightarrow EF = FG\frac{sin\hat{G}}{sin\hat{E}} = 21 \times \frac{sin50°}{sin80°}$
Soit $EG = 16{,}335\ cm$

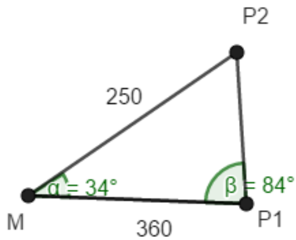
2) Périmètre P

$$P = EF + EG + FG = 2EF + FG = 2 \times 16{,}335 + 21 = 53{,}67\ cm$$

3) $aire\ \mathcal{A}$
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}EF \times FGsin\hat{F} = \frac{1}{2} \times 16{,}335 \times 21 \times sin50° = 131{,}39\ cm^2$.

Exercice 41

1) Figure :



2) Aire du triangle MP_1P_2 :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times MP_1 \times MP_2 sin\widehat{P_1MP_2} = \frac{1}{2} \times 360 \times 250 \times sin34° \approx 25163{,}68\ m^2$$

3) Arrondi à l'unité près de P_1P_2

$\frac{MP_2}{sin\widehat{M}} = \frac{MP_2}{sin\widehat{P_1}}$ alors $P_1P_2 = \frac{MP_2 \times sin\widehat{M}}{sin\widehat{P_1}} = \frac{250 \times sin34°}{sin84°} \approx 140{,}56\ m$

$soit\ P_1P_2 = 141\ m.$

Exercice 42

1- On sait que :
$\frac{MP}{sin\widehat{N}} = \frac{MN}{sin\widehat{P}}$ alors $sin\widehat{N} = \frac{MP \times sin\widehat{M}}{MN} = \frac{15 \times sin27°}{7} \approx 0{,}9728$
$soit\ mes\ \widehat{N} = 76{,}6059°$ ou $mes\ \widehat{N} = 180° - 76{,}6059° = 103{,}39°$. Puisque que $\widehat{N}$ est obtus, alors $mes\ \widehat{N} = 103°$.

2- Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle MNP :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times MP \times MN sin\widehat{M} = \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 15 \times 7 sin50° \approx 40{,}22\ cm^2.$$

3- On sait que : $\frac{MP}{sin\widehat{N}} = 2R$, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP.
Alors : $R = \frac{MN}{2sin\widehat{P}} = \frac{7}{2sin27°} \approx 7{,}71$cm

4- $\widehat{MIN}$ est un angle au centre associé à l'angle aigu inscrit $\widehat{MPN}$.
Alors : mes $\widehat{MIN} = 2$ mes $\widehat{MPN} = 54°$.

Exercice 43

- Dans le triangle RLM rectangle en M, on a : $tan\hat{\beta} = \frac{h}{RM}$ (1)
- Dans le triangle NLM rectangle en M, on a : $tan\hat{\alpha} = \frac{h}{RM+d}$ (2).

De (1) et (2) on a : $RM\ tan\hat{\beta} = (d + RM)tan\hat{\alpha} = h$

Soit : $RM = \frac{dtan\hat{\alpha}}{tan\hat{\beta} - tan\hat{\alpha}}$. Alors : $h = \frac{dtan\hat{\beta} \times tan\hat{\alpha}}{tan\hat{\beta} - tan\hat{\alpha}} = \frac{5tan45° \times tan40°}{tan45° - tan40°} \approx 26{,}1$ m

Exercice 44

1- Dans le triangle SOI, on a : $\frac{SO}{sin\hat{I}} = \frac{SI}{sin\hat{O}} = \frac{OI}{sin\hat{S}}$

Alors $SO = SI\frac{sin\hat{I}}{sin\hat{O}}$ or $SU = 2SO$. Par suite :$SU = 2SI\frac{sin\hat{I}}{sin\hat{O}} = \frac{2 \times 40 \times \sin(80°)}{\sin(70°)} \approx 83{,}8$ cm.

2- De même : $LI = 2OI$ et $LI = 2SI\frac{sin\hat{S}}{sin\hat{O}} = \frac{2 \times 40 \times \sin(30°)}{\sin(70°)} \approx 42{,}6$ cm

3- On a : $\frac{SI}{sin\hat{O}} = 2R$ alors $R = \frac{SI}{2sin\hat{O}}$. Soit $R = \frac{40}{2 \times \sin(70°)} \approx 21{,}3$ cm

Exercice 45

1- On a : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\hat{\beta}$.

Soit: $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac.cos\hat{\beta}} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos(50°)} \approx 6{,}1$cm.

2- a) On a : $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$ or $\alpha =$ mes $\hat{A}$ et $\beta =$ mes $\hat{\beta}$. Alors $sin\alpha = \frac{asin\beta}{b} = \frac{5sin50°}{6{,}1}$

On a : $sin\alpha \approx 0{,}63$

b) On a : $sin\alpha \approx 0{,}63$ alors : $\alpha \approx 38{,}9°$ comme : α est un angle aigu.
On déduit : : $\theta = 180° - (50° + \alpha) \approx 91{,}1°$

Exercice 46

1.a) On sait que : $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$ alors $b = \frac{asin\hat{B}}{sin\hat{A}}$ et $c = \frac{asin\hat{C}}{sin\hat{A}}$ or $P = a + b + c$

Par suite : $P = a + \frac{asin\hat{\beta}}{sin\hat{A}} + \frac{asin\hat{C}}{sin\hat{A}} = a\left(1 + \frac{sin\hat{B}+sin\hat{C}}{sin\hat{A}}\right)$

2-a)AN: $P = 3(1 + \frac{sin65°+sin85°}{sin30°}) \approx 14{,}4$ cm

2.b) on a: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}absin\hat{C} = \frac{1}{2}\frac{a^2sin\hat{B}\times sin\hat{C}}{sin\hat{A}}$. AN: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\frac{3^2sin65°\times sin85°}{2sin30°} \approx 8{,}1\ cm^2$

2.c) On a: $\frac{a}{sin\hat{A}} = 2R$ alors $R = \frac{a}{2sin\hat{A}}$. Soit $R = \frac{3}{2\times \sin(30°)} = 3$ cm

Exercice 47

1- L'angle $\widehat{BEC}$ est un angle obtus inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et qui est associé à l'angle au centre $\widehat{BOC}$, alors mes $\widehat{BEC} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC}$ or mes $\widehat{BOC} = 90°$.
On déduit que mes $\widehat{BEC} = 135°$.

2- On a : $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont deux angles supplémentaires à $\widehat{BEC}$.

Exercice 48

1- Tout point E de l'arc $\widehat{AC}$ forme un angle obtus inscrit $\widehat{AEC}$ associé à l'angle au centre $\widehat{AQC}$. On a : mes $\widehat{AEC} = 180° - \frac{1}{2}$ mes$\widehat{AQC}$. On déduit que mes $\widehat{AEC} = 135°$.

Alors le quart de cercle de corde [AC] est l'arc capable de mesure 135° d'extrémité A et C.

2- Soit R et R' les rayons respectifs des cercles de centre O et de diamètre de longueur [AC] et de centre I et passant par les points U et V.

On a : $OI = R - R'$ et le cercle de centre I passant par les points U et V est situé à l'extérieur du cercle de centre O et de diamètre [AC]. On déduit que ces deux cercles sont tangents.

Exercice 49

Dans le triangle ABC, on a : $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = 2r$ avec r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

On a : $a = 2rsin\hat{A}$; $b = 2rsin\hat{B}$; $c = 2rsin\hat{C}$. Or $P = a + b + c$, P étant le périmètre du triangle ABC avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On déduit que : $P = 2rsin\hat{A} + 2rsin\hat{B} + 2rsin\hat{C} = 2r(sin\hat{A} + sin\hat{B} + sin\hat{C})$.

Exercice 50

1- On a :

- $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\widehat{BC}$, alors :

mes $\widehat{BMC}$ = mes $\widehat{BAC}$ or mes mes $\widehat{BAC} = 60°$ donc mes $\widehat{BMC} = 60°$.

- $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre associé à l'angle aigu inscrit $\widehat{BAC}$, alors Mes $\widehat{BOC}$ =2 mes $\widehat{BAC}$. Donc mes $\widehat{BOC} = 120°$.
- $\widehat{BNC}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles supplémentaires, alors :
  mes $\widehat{BNC} = 180° - mes\ \widehat{BAC} = 120°$.
- $\widehat{CBE}$ est un angle inscrit interceptant le même arc $\widehat{BC}$ que l'angle inscrit aigu $\widehat{BAC}$ alors mes $\widehat{CBE} = 60°$.
- $\widehat{CBF}$ et $\widehat{CBE}$ sont deux angles supplémentaires, alors :
- mes $\widehat{CBF} = 180° - mes\ \widehat{CBE} = 120°$.

a) On a :$\frac{AB}{sin\hat{C}} = 2R$ alors $AB = 2Rsin\hat{C}$. AN : $AB = 2 \times 2 \times sin60° = 2\sqrt{3}\ cm$.

b) On sait que: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC \times CA \times sin\hat{C}$.

AN : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times sin60° = 3\sqrt{3}\ cm^2$.

Exercice 51

1- Le triangle JIB est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et [IJ] est un diamètre de $(\mathcal{C})$. Alors JIB est un triangle rectangle en B. D'où (BI) est une hauteur de JIB par conséquent médiatrice de [JK]. Or B ∈[JK] alors B est le milieu de [JK].

2- On a : OB = OJ et mes $\widehat{OJB} = 60°$. Alors OJB est un triangle équilatéral.

IA = OA, et OB = JB et mes $\widehat{IJB}$ = mes $\widehat{AOB}$. Alors les triangles AOB et IJB sont semblables. Or (JB) ⊥ (IB) alors (OB) ⊥ (AB). Donc (AB) est tangent à $(\mathcal{C})$ en B.

3- On a :

$\xrightarrow{S_{(IJ)}}$	
I	I
J	J
B	C

Alors mes $\widehat{JIB}$ = mes $\widehat{JIC}$. Or (BI) est bissectrice de mes $\widehat{JIK}$. Alors mes $\widehat{BIC} = 60°$.

Ou bien : Par ailleurs, $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit interceptant le même arc $\widehat{BC}$ avec $\widehat{BIC}$, alors mes $\widehat{BIC} = 60°$.

4- $\widehat{JBC}$ et $\widehat{JIB}$ sont deux angles inscrits interceptant deux arcs de même longueur, alors mes $\widehat{JBC} = 30°$.

Exercice 52

1- Soit P le périmètre du triangle équilatéral OPQ. On a : $P = OP + OQ + PQ = 3OP$.
On sait que $\frac{OP}{sin\hat{Q}} = 2R$. Alors $OP = 2Rsin\hat{Q}$. AN : $OP = 2 \times 3 \times sin60° = 3\sqrt{3}$.

Par suite : $P = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\ cm$

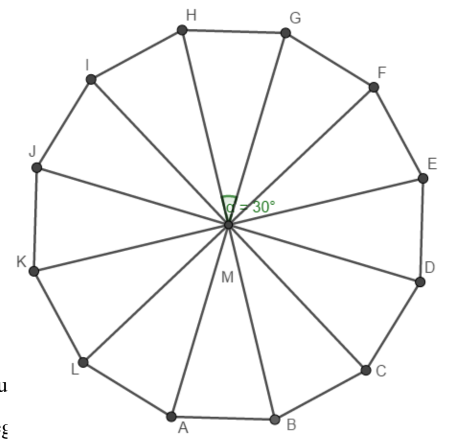
2- On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OP^2 \times sin\hat{Q} = \frac{1}{2} \times \left(3\sqrt{3}\right)^2 \times sin60° = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm².

Exercice 53

1- Soit α la mesure des angles au centre d'un dodécagone régulier.

On a : $\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$.

2- Construction :

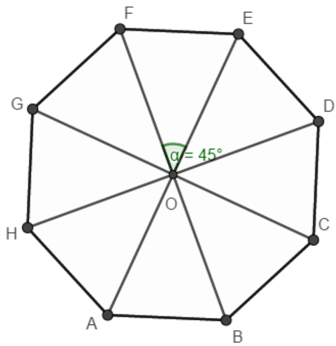


Programme de constru

- On trace un seg
- On trace une droite (Δ_1) tel que l'angle formé par (Δ_1) et (AB) mesure 75°, (Δ_1) passant par A.
- On trace (Δ_2) tel que l'angle formé par (Δ_2) et (AB) mesure 75°, (Δ_2) passant par B. Elle coupe (Δ_1) au point O.
- On trace le cercle de centre M et de rayon AM.
- On trace les droites (Δ_3), (Δ_4), (Δ_5) et (Δ_6) tels que les angles formés par (Δ_2) et (Δ_3), (Δ_4) et (Δ_3), (Δ_5) et (Δ_4), (Δ_6) et (Δ_5) mesure 30°. Ces droites coupent le cercle $(\mathcal{C})$ chacun en deux points.
On obtient ainsi le dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL.

Exercice 54

1- Figure :



2- Dans le triangle OIB rectangle en I, on a : $cos\ \widehat{BOI} = \frac{OI}{OB}$ alors OI = OB $cos\ \widehat{BOI}$.

AN : OI = $\sqrt{2}\ cos$ 45° alors OI = 1.

3- On a : IA + OI = OA alors AI = OA – OI. AN : AI = $\sqrt{2} - 1$.

4- On a : $sin\ \widehat{IOB} = \frac{IB}{OB}$ alors IB = OB sin $\widehat{IOB}$. AN : IB = $\sqrt{2}\ sin$ 45° alors IB = 1.

5- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de l'octogone régulier ABCDEFGH. On a :

$$\mathcal{A} = 8 \times \frac{IB \times OA}{2} = 4 \times IB \times OA\ = 4 \times 1 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ cm^2.$$

Car l'octogone est subdivisé en 8 triangles semblables d'aire égale.

Exercice 55

Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CMB}$ sont deux angles inscrits interceptant des cordes de même longueur, alors mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{CMB}$. Or $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CMB}$ sont deux angles adjacents, alors (MB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

IV- SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 56

1- On sait que : $\frac{AS}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{S}}$. Alors : $AS = \frac{AB \times sin\hat{B}}{sin\hat{S}}$. AN : $AS = \frac{4 \times sin115°}{sin40°} \approx 5{,}6\ Km.$

2- On sait que : $\frac{AB}{\sin \hat{S}} = \frac{BS}{sin\hat{A}}$. Alors : $BS = \frac{AB \times sin\hat{A}}{sin\hat{S}}$. AN : $BS = \frac{4 \times sin25°}{sin40°} \approx 2{,}6\ Km$

3- On sait que : $\mathcal{A} = \frac{AB \times h}{2} = \frac{1}{2} \times AB \times AS \times sin\hat{A}$ avec $h = AS \times sin\hat{A}$.
D'où :$h = 5{,}6 \times sin25° \approx 2{,}4\ Km.$

Exercice 57

$mes CAB = 180° - (40° + 72°) = 68°$

$\dfrac{AB}{\sin 72°} = \dfrac{AC}{\sin 40°} = \dfrac{BC}{\sin 68°}$ d'où $AB = BC \times \dfrac{\sin 72°}{\sin 68°}$

Et $AC = BC \times \dfrac{\sin 40°}{\sin 68°}$ avec BC=1250 m donc AB = 1282,18 m et AC = 866,59 m

Le père ne disposant pas assez de carburant, il va choisir la plus petite distance. Il va donc aller vers la pinasse C.

Exercice 58

On a $\dfrac{BH}{\sin 77°} = \dfrac{AH}{\sin 13°}$ d'où $BH = AH \times \dfrac{\sin 77°}{\sin 13°}$ $(\text{triangle } ABH)$

$\dfrac{CH}{\sin 79°} = \dfrac{AH}{\sin 13°}$ d'où $CH = AH \times \dfrac{\sin 79°}{\sin 13°}$ $(\text{triangle } AHC)$

Or BC = BH + HC d'où $BC = AH \times \dfrac{\sin 77°}{\sin 13°} + AH \times \dfrac{\sin 79°}{\sin 13°} = \dfrac{AH}{\sin 13°}(\sin 77° + \sin 79°)$

$BC = \dfrac{300}{\sin 13°}(\sin 77° + \sin 79°)$

8 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle du prélude de la fête d'anniversaire : participation à la décoration***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont deux frères***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au lieu de l'anniversaire.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant les préparatifs de la fête d'anniversaire.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est :*** Le frère ainé affirme que le sinus de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{DE})}$ est nul.
- **A quelle occasion les élèves découvrent-ils les informations sur les angles** : *Lors des préparatifs de la fête d'anniversaire.*
- **Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?** *Peu d'outils pour être justifier le problème posé* **.**

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- \- Que décident de faire les acteurs ? l'élève ***décide*** de vérifier ses propos en faisant des recherches sur les angles orientés et la trigonométrie.

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire avec ses élèves la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II - LES ACTIVITES

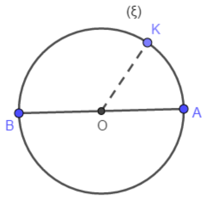
Activité 1 Radian – Mesure en radian et mesure en degré

Objectif :

Cette activité vise à connaitre la relation liant le degré au radian de cet angle. Ceci dit, certains prérequis concernant le périmètre ou les cordes du cercle sont nécessaires.

Solution

1. a) Figure :
   b) Figure :



2. On a : Périmètre du cercle $\mathcal{P} = 2 \times R \times \pi$ et $\widehat{AB} = \frac{1}{2}\mathcal{P} = R \times \pi$.
   Le quart de cercle a pour longueur : $\frac{1}{4}\mathcal{P} = \frac{R\times\pi}{2}$.
3. a) On a : $180° \longrightarrow \pi$
   $b° \longrightarrow c\,rad$ alors: $c = \frac{\pi}{180°} \times b°$
   b) Complétons le tableau :

Mesure en degré	0°	15°	30°	45°	75°	90°	120°	150°	180°
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Solution de l'exercices de fixation de l'activité 1: Exercice 1, exercice 2 page 153.

1

1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 - F

2

Mesure en degré	**30°**	**45°**	**127°**	**225°**	**135°**	**165°**	**150°**	**105°**
Mesure en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{127\pi}{180}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{12}$

Activité 2 Orientation du plan

Objectif :

Cette activité vise à connaitre la notion de sens permettant d'orienter un angle.

Solution:

1- Il y a deux (02) sens de parcours sur l'arc $\widehat{AB}$: celui de A vers B puis celui de B vers A.
2- Il y a deux (02) sens de parcours sur le cercle : celui de dans le sens des aiguilles d'une montre et le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Solution des exercices de fixation de l'activité 2

3 Dans (C_1) : (A,B,C) et (E,F,G) sont de sens contraires

Dans (C_2) : (A,B,C) et (E,F,G) sont de même sens.

4 (O,P,L) et (L,O,K) sont de sens contraires.

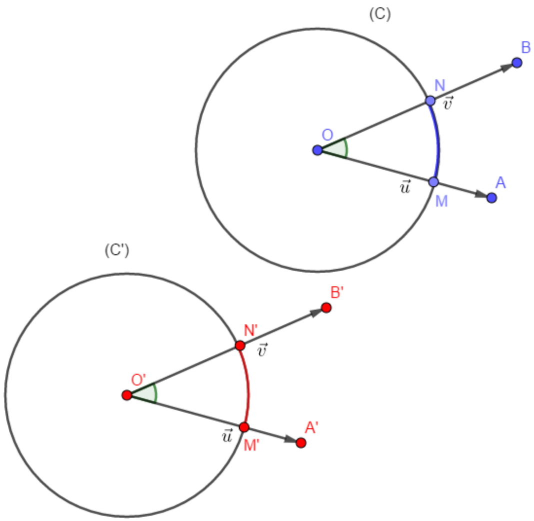
Activité 3 Angle orienté de deux vecteurs

Objectif

Cette activité vise à connaitre qu'un angle orienté de vecteur définit un ensemble de couple de vecteur pour lesquels l'arc et le sens se conserve quel que soit la position de leurs représentants.

Solution

1. a) ; b) ; c) Voir figure
2. a) ; b) ; c) voir figure



3.a) On a :D'une part $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ =$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ = $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}})$ duquel découle l'arc $\widehat{MN}$. D'autre part $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ =$(\widehat{\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{O'B'}})$ = $(\widehat{\overrightarrow{O'M'};\overrightarrow{O'N'}})$ duquel découle l'arc $\widehat{M'N'}$.

Puisque $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}})$ = $(\widehat{\overrightarrow{O'M'};\overrightarrow{O'N'}})$ alors les arcs $\widehat{MN}$ et $\widehat{M'N'}$ ont la même longueur.

3.b) Le sens de parcours est identique de M vers N que de M' vers N'.

Solution des exercices de fixation de l'activité 3

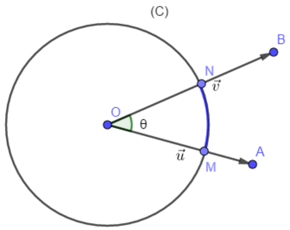
5 $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est positive ; $mes\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ est négative ; $mes\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)$ est négative

Activité 4 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Objectif : *Cette activité vise à savoir déterminer d'un point de vue géométrique la mesure principale d'un angle orienté.*

Solution :

1. a) ; b) ; c) Voir figure



2. Proposition de définition :

La mesure principale d'un angle orienté de couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est la valeur θ tel que $0° \leq \theta \leq 180°$ ou $-180° \leq \theta \leq 0°$ .Soit $-180° \leq \theta \leq 180°$. En radian, alors $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Il s'agit du lieu géométrique de tout point M parcourant 1 tour du cercle trigonométrique.

Solution des exercices de fixation de l'activité 4.

6 Construction à faire

7 $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}$; $mes\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{3}$; $mes\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

Activité 5 Angle orienté égaux, angles orientés opposés

Objectif *Cette activité vise à connaitre les propriétés relatives aux angles orientés égaux et aux angles orientés opposés.*

Solution

1. Mesure en radian : Mes $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$; Mes $(\vec{v}\,;\vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$;
Mes $(\vec{u}\,;-\vec{v}) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$; Mes $(-\vec{u}\,;-\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$; Mes $(-\vec{u}\,;\vec{u}) = -\pi$; Mes $(\vec{u}\,;-\vec{u}) = \pi$; Mes $(\vec{u}\,;\vec{u}) = 0$.

2. a) Relations : $(-\vec{u}\,;-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v})$

b) $(-\vec{u}\,;\vec{u}) = -(\vec{u}\,;-\vec{u})$

c) $(\vec{v}\,;\vec{u}) = -(\vec{u}\,;\vec{v})$

d) $(\vec{u}\,;-\vec{v}) = -(\vec{v}\,;-\vec{u})$

3. Justifions : On a : $(\widehat{\vec{u};-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})+\pi$ et $(\widehat{-\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})+\pi$ Donc $(\widehat{\vec{u};-\vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u};\vec{v}})$

Solution des exercices de fixation de l'activité 5

8

a) Trois angles orientés égaux à $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ sont $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OG}\right),\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right),\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OE}\right)$

b) Trois angles orientés opposés à $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OF}\right)$ sont $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OF}\right),\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}\right),\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)$

9

1- L'angle orienté opposé à l'angle $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}\right)$ est l'angle $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AD}\right)$

2- Les angles orientés opposés à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ sont $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$, $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$

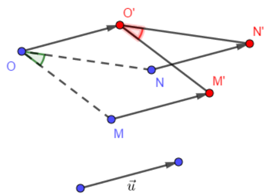
Activité 6 Angles orientés et transformations du plan

Objectif : *Cette activité vise à connaitre la propriété relative à la conservation et à la non conservation de l'image d'un angle orienté par rapport aux transformations usuelles du plan à savoir : la translation, la symétrie centrale et la symétrie orthogonale.*

Solution :

Rectifier : 1. un vecteur quelconque non nul $\vec{u}$ donné et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

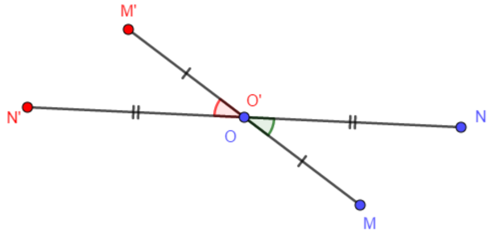
1.a) Figure :



1.b) On a : Mes $(\overrightarrow{O'M'};\overrightarrow{O'N'})$ = Mes $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})$

1.c) La translation conserve les mesures des angles orientés.

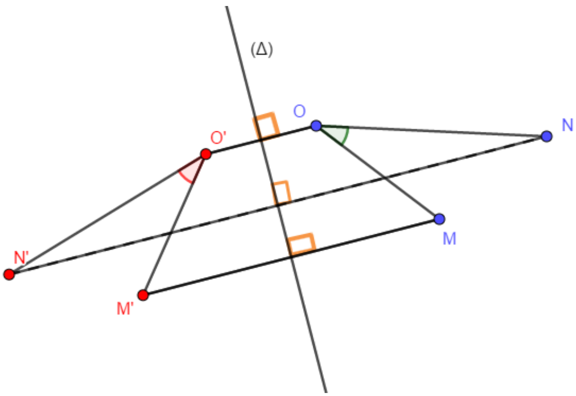
2.a) figure :



2.b) Mes $(\overrightarrow{O'M'};\overrightarrow{O'N'})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{ON'}})$ = Mes $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$

2.c) La symétrie centrale conserve les mesures des angles orientés.

Rectifier : 1. Soit f la symétrie orthogonale d'axe (Δ) donnée dont O, M et N n'appartiennent pas à (Δ)



3.a) Figure :

3.b) Mes $(\overrightarrow{O'M'};\overrightarrow{O'N'})$ = – Mes $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$

3.c) La symétrie orthogonale transforme les mesures de deux angles orientés en leurs opposés.

Solution des exercices de fixation de l'activité 6.

10 1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F .

11 1 – Soit S_O la symétrie de centre O. $S_O\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right)$ et comme la symétrie centrale conserve l'angle orienté, $mes\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right)=mes\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}\right)=\frac{\pi}{3}$

S_O	
C	A
D	B
O	O

2- De même $S_O\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ donc $mes\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{3\pi}{7}$

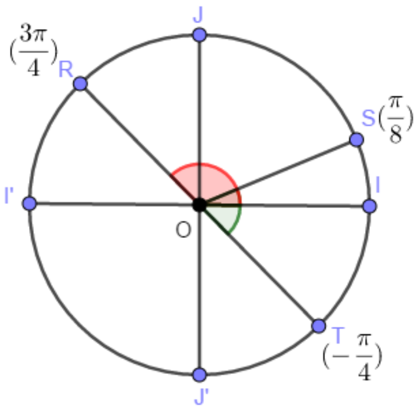
Activité 7 Cercle trigonométrique et point-image

Objectif *Cette activité vise à connaitre le cercle trigonométrique, à savoir placer des points M du plan sur ce cercle étant donné une mesure d'angle orienté* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$. *Ce point M de mesure d'angle donné est appelé point-image du cercle trigonométrique.*

Solution:

1. Voir figure : selon l'emplacement de l'apprenant.
2. a) Mesure à l'aide du rapporteur.
   b) Convertir en appliquant la relation $c\ (rad) = \frac{\pi}{180°} \times b°$
   c) ces mesure appartiennent bel et bien à $]-\pi;\pi]$

3. a) Le point S est déjà placé. On a :



3.b) Les points R, S et T sont uniques.

Solution des exercices de fixation de l'activité 7

12 Le cercle ***trigonométrique*** est le cercle de ***centre O*** et de ***rayon*** **1.**

13 **Figure à faire**

Activité 8 Cosinus, sinus, tangente d'un angle orienté

Objectif *Cette activité vise à travers l'utilisation du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle orienté.*

Solution

Placer le point O, centre du cercle sur la figure. Dans la suite, remplacer le H par P et le K par Q.

1.c à supprimer et devenir 1.d en 1.C

1. a) On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = OA \times OM \times$ Cos$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$ = Cos$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$ car OA = OM =1.
   b) On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overline{OA} \times \overline{OP} = \overline{OP} = -OP$ avec M le projeté orthogonal de M sur (AA') et $\overline{OA}$ = 1 et $\overline{OP} = -OP$.
   c) On a : Cos$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$ = $-OP = x_M$
2. a) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ OQ \times OA = \frac{1}{2}\ OQ$ car Q étant le projeté orthogonal de M sur (BB') ; On a OQA un triangle rectangle en O et l'aire vaut la moitié du produit de la base OA =OA = 1 par la hauteur OQ
   b) On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ OA \times OM \times$ Sin$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}}) = \frac{1}{2}$ sin$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$
   b) On a : Sin$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$ = OQ=$\overline{OQ}$= y_M
   c) ces mesure appartiennent bel et bien à $]-\pi;\pi]$
3. a) Exprime tan$(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$ en fonction de $\overline{OP}$ et $\overline{OP}$

On a : tan$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})$ = $\frac{\text{Sin}(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})}{\text{Cos}(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}})} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{y_M}{x_M}$

3. b) Triangle MOP

On a : Puisque (MP)//(AT) alors d'après la conséquence de la propriété de THALES dans le triangle MOP on a : $\frac{OM}{OT} = \frac{OP}{OA} = \frac{MP}{AT}$ or MP = OQ et OA = 1 ; Soit : $\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{AT}$

On déduit que : $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \overline{AT}$ or tan$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}}) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ donc tan$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}}) = \overline{AT}$

Solution des exercices de fixation de l'activité 8

14 1 – a) ; 2 – b) ; 3 – a) ; 4 – c) ; 5 – b) ; 6 – d)

15 1 – valeur exacte de cos□ sachant que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

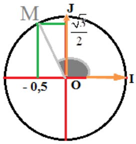
Sin²□ + cos²□ = 1 donc $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

2- $\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha =$

16 $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-(0,3)^2} = -\sqrt{0,91}$

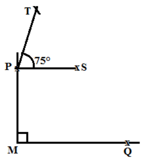
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,3}{-\sqrt{0,91}}$

17 1-



2- $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \dfrac{2\pi}{3}$

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	**Comment convertir la mesure d'un angle exprimé en degré, en radian et inversement** Pour $x = 75°$ on a $x = \dfrac{5\pi}{12}$; Pour $x = \dfrac{7\pi}{12}$ on a $x = 105°$
2	**Comment construire un angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ de mesure *a*° ou *b* rad ?** 

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

LES EXERCICES DE FIXATION

Radian – Longueur d'un arc

Exercice 1

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux.

Exercice 2

1- Mesure en radians de chacun des angles ci-dessous :
   a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{4\pi}{9}$; d) $-\frac{3\pi}{4}$; e) $-\frac{2\pi}{3}$.
2- Mesure en degrés des angles ci-dessous :
   a) $90°$; b) $240°$; c) $-150°$; d) $270°$; e) $-90°$

Angle orienté de deux vecteurs

Exercice 3

1- Vrai ; 2- Vrai ; 3- Vrai ; 4- Vrai.

Exercice 4

Mes$(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{ID}}) = -\frac{\pi}{2}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{ID}}) = \pi$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{2}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{4}$;
Mes$(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5

Déterminons les mesures suivantes :

Mes$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{4}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{4}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6

a) L'angle $(\widehat{\overrightarrow{HE};\overrightarrow{HJ}}) = 30°$
b) L'angle $(\widehat{\overrightarrow{HG};\overrightarrow{HK}}) = -40°$
c) L'angle $(\widehat{\overrightarrow{HK};\overrightarrow{HE}}) = 150°$

Mesure principale

Exercice 7

1- Faux ; 2- Faux ; 3- Vrai ; 4- Faux.

Exercice 8

π rad ; 35° ; 0 ; - π ; 175° ; $-1{,}5$ rad ; 90° ; 2,3 rad.

Exercice 9

1- Mesure principale en radian

Mes$(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$; Mes$(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{AD}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

2- Justifions que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BO}}) = \frac{2\pi}{3}$

On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BO}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BO}}) = \text{Mes}(\widehat{-\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}) = \pi + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Angles orientés égaux – angles orientés opposés

Exercice 10

1) b ; 2) c.

Exercice 11

Déterminons :

a) Deux angles orientés égaux : $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$
b) Deux angles orientés opposés : $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}})$
c) Deux angles orientés plats : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}})$
d) Deux angles orientés nuls : $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{CO}})$

Exercice 12

1- Des angles orientés égaux à l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$: $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BA}})$.
2- Des angles orientés opposés à l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}})$: $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AB}})$

Angles orientés et transformations du plan.

Exercice 13

1- Faux ; 2- Vrai ; 3 Vrai.

Exercice 14

a) Justifions que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{UL};\overrightarrow{US}}) = \frac{\pi}{3}$

Soit S_O la symétrie centrale de centre O.

On a : $\begin{cases} S_O(S) = U \\ S_O(I) = L \\ S_O(U) = S \end{cases}$ alors $S_O\left((\widehat{\overrightarrow{SI};\overrightarrow{SU}})\right) = (\widehat{\overrightarrow{UL};\overrightarrow{US}})$ Or $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{SI};\overrightarrow{SU}}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{UL};\overrightarrow{US}}) = \frac{\pi}{3}$

b) Justifions que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OL}}) = \frac{7\pi}{18}$

Soit S_O la symétrie centrale de centre O.

On a : $\begin{cases} S_O(I) = L \\ S_O(U) = S \end{cases}$ alors $S_O\left((\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OS}})\right) = (\widehat{\overrightarrow{OL};\overrightarrow{OU}})$ Or Mes$(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OS}}) = -\frac{7\pi}{18}$.

Donc Mes$(\widehat{\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OL}}) = \frac{7\pi}{18}$

Cercle trigonométrique - points -images

Exercice 15

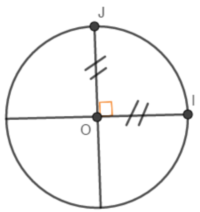
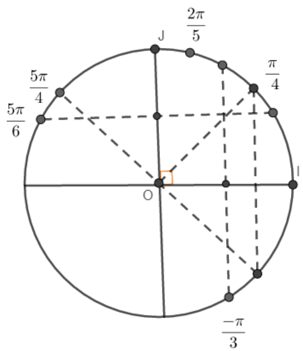


Figure 2.

Exercice 16

Plaçons :



Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Exercice 17

1- Faux ; 2- Faux ; 3- Faux ; 4- Faux ; 5- Vrai ; 6- Vrai.

Exercice 18

1- c ; 2- d ; 3- a ; 4- b ; 5- c ; 6-d ; 7-b.

Exercice 19

On a : $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$ et nous sommes situé dans le 1er quadrant donc : : $\cos(\frac{3\pi}{4}) > \cos(\frac{\pi}{4})$

Exercice 20

1- Vrai ; 2- Faux ; 3- Vrai ; 4- ; 5- Faux.

Exercice 21 :

a) Puisque $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$, alors $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

b) Pour $\frac{\pi}{2} \le a \le \pi$, alors $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

II. EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 22

Complétons le tableau :

Degrés	60	75	135	45	15	360
Radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	π

Exercice 23

1- Justifions que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CI}}) = \frac{3\pi}{4}$

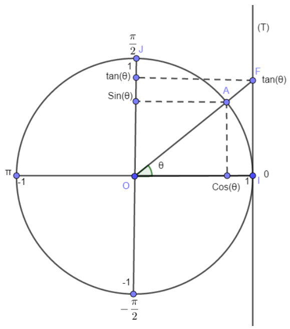
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CI}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{CI}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}}) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

2- Déterminons la mesure de chacun des angles :

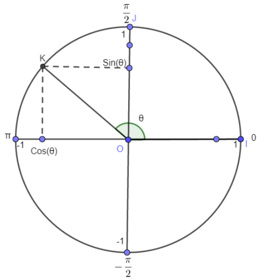
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{CI}}) = \frac{3\pi}{2}$; $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BI}}) = -\frac{\pi}{4}$; $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB}}) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 24

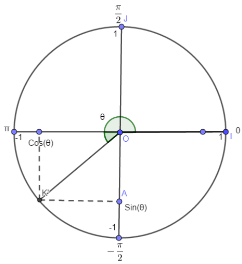
Cas 1 : $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ alors $\begin{cases} Sin\ \theta > 0 \\ Cos\ \theta > 0 \\ \tan\theta > 0 \end{cases}$



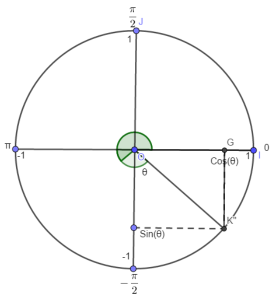
Cas 2 : $\theta \in]\frac{\pi}{2};\pi[$ alors $\begin{cases} Sin\ \theta > 0 \\ Cos\ \theta < 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases}$



Cas 3 : $\theta \in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$ alors $\begin{cases} Sin\ \theta < 0 \\ Cos\ \theta < 0 \\ \tan \theta > 0 \end{cases}$



Cas 4 : $\theta \in]-\frac{\pi}{2};0[$ alors $\begin{cases} Sin\ \theta < 0 \\ Cos\ \theta > 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases}$



Exercice 25

$\text{Cos}(-x) = \text{Cos}(x)$

$\text{Cos}(\pi - x) = -\text{Cos}(x)$

$\text{Cos}(\pi + x) = -\text{Cos}(x)$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Sin}(x)$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{2} + x) = -\text{Sin}(x)$

$\text{Sin}(-x) = -\text{Sin}(x)$

$\text{Sin}(\pi - x) = \text{Sin}(x)$

$\text{Sin}(\pi + x) = -\text{Sin}(x)$

$\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Cos}(x)$

$\text{Sin}(\frac{\pi}{2} + x) = \text{Cos}(x)$

Exercice 26

1- Justifions que :$(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2$ est un entier naturel.

On a : $(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2 = sin^2x - 2sinxcosx + cos^2x + sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x$ Or $sin^2x + cos^2x = 1$. D'où $(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2 = 2$
Et $2 \in \mathbb{N}$.
Donc $(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2$ est un entier naturel.

2- Justifions que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{cos^2x}$.

On a : $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{sin^2x+cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$. Donc $1 + \tan^2 x = \frac{1}{cos^2x}$

Exercice 27

1- Déterminons la valeur exacte de Sin a

On a : $\text{Sin}^2 a + \text{Cos}^2 a = 1$ alors: $\text{Sin}^2 a = 1 - \text{Cos}^2 a = 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

D'où : $\text{Sin}a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Comme $\text{Sin}a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ alors $a = \frac{3\pi}{8}$

Exercice 28

1- a) Déterminons la mesure principale des angles orientés :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OG}}) = -\frac{3\pi}{4}$

b) Justifions que Mes $(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}}) = \frac{\pi}{8}$

OBC est un triangle isocèle en O de sens direct et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4}$
D'où Mes $(\widehat{\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB}}) = \frac{1}{2} \times \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Or le triangle GBC est rectangle en B de sens direct.
Par conséquent : Mes $(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}}) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$

2- Déterminons la mesure principale des angles orientés :

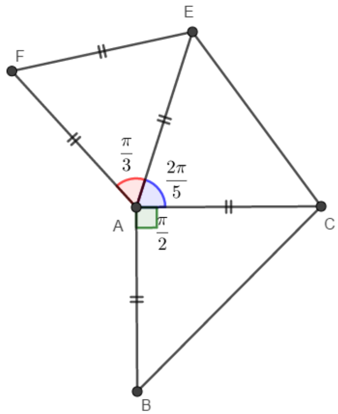
Mes $(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{2}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}}) = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 29

1- Construction

2- On a : Mes $(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}}) = \frac{23\pi}{30}$;

Mes $(\widehat{\overrightarrow{EC};\overrightarrow{BC}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}}) = \frac{11\pi}{20}$



Exercice 30

1.a) Déterminons la mesure principale de chacun de chacun des angles orientés :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{3}$

1.b) Mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI}})$

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$

Ou bien : Mes $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI}})$ = 2 Mes $(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BI}})$ or Mes $(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BI}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI}})$

D'où : Mes $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI}}) = 2\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{10\pi}{12} = -\frac{5\pi}{6}$

1.c) Le triangle AIJ est isocèle en A et de sens direct :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JI}}) = \frac{1}{2}(\pi -$Mes $(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ}})) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}$. Donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JA}}) = -\frac{\pi}{12}$

2.a) Déterminons la mesure principale de chacun des angles orientés :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB}}) = -\frac{\pi}{3}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BA}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BA}}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{4}$

2.b) Déduisons-en Mes $(\widehat{\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}})$:

Mes $(\widehat{\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

3.a) Déterminons la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC}})$

Mes $(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = 0$

3.b) Justifions que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

Comme Mes $(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC}}) = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. D'où : (BC) // (IJ)

Exercice 31

1- Mes $(\widehat{\overrightarrow{WU};\overrightarrow{WV}}) = \frac{7\pi}{60}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{UW};\overrightarrow{UV}}) = -\frac{23\pi}{60}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{VU};\overrightarrow{VW}}) = -\frac{\pi}{2}$

2- Mes $(\widehat{\overrightarrow{WU};\overrightarrow{WV}})$ +Mes $(\widehat{\overrightarrow{UV};\overrightarrow{UW}})$ +Mes $(\widehat{\overrightarrow{VU};\overrightarrow{VW}}) = \frac{7\pi}{60} + \frac{23\pi}{60} - \frac{\pi}{2} = 0.$

Exercice 32

1) Mes $(\widehat{\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF}}) = 0.$

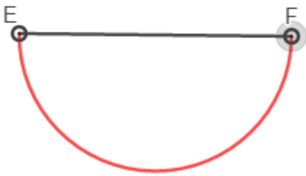
L'ensemble des points M est la droite (EF) privée du segment [EF]

2) Mes $(\widehat{\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF}}) = \pi.$

L'ensemble des points M est le segment [EF] privé des point E et F.

3) Mes $(\widehat{\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF}}) = -\frac{\pi}{2}.$

L'ensemble des points M est l'arc de cercle ouvert d'extrémité E et F du demi-cercle de diamètre [EF].



Exercice 33

1.a) Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$; b) Mes $(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}}) = -\frac{\pi}{2}$; c) Mes $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EA}}) = \frac{\pi}{2}$;

d) Mes $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}) = -\frac{7\pi}{12}$;

e) Mes $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}) = \frac{5\pi}{6}$;

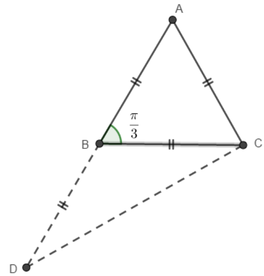
f) Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}}) = \frac{7\pi}{12}.$

2.a) Trois angles orientés égaux à $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}})$: $(\widehat{\overrightarrow{EA};\overrightarrow{DA}})$

b) Trois angles orientés opposés à $(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA}})$: $(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}})$

Exercice 34

Illustration graphique :



1- Mesures principales :

- Mes $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}) = \pi =$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$

D'où Mes $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}}) = \pi -$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

- CBD est isocèle en B donc on a :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}}) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2- Démontrons que le triangle ACD est rectangle.

On a : Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Donc triangle ACD est rectangle en C.

Exercice 35

1- Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = 2$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 2 \times \frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$

2- Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AP}}) = \pi -$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AB}}) = \pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$. Donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{7\pi}{9}$

Exercice 36

1.a) Les points A et I ; b) Le point I ; c) Le point E ; d) Les points C, R, G et K.
e) Les points D,F, L et N ; f) Les points D, F, N et L ; g) Les points C et K.

2.a) $]-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{4}[$: le grand arc ouvert $\widehat{SK}$.

b) $[-\frac{5\pi}{6};-\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$: le petit arc $\widehat{JL}$ ou $\widehat{CG}$

c) $[\frac{3\pi}{2};3\pi[$: le grand arc $\widehat{PI}$ semi-ouvert en I.

d) $[-\frac{7\pi}{6};-\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}]$: le grand arc $\widehat{SC}$.

Exercice 37

1- Le triangle ADE est isocèle en A. Le triangle EBF est isocèle en B.

2- Démontrons que Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) = \frac{5\pi}{12}$

$2\times$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}}) = \pi$. D'où : Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) = \frac{1}{2}[\pi -$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}})]$

Par suite : Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) = \frac{1}{2}\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

3.a) Mes $(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BF}}) = $ Mes $(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}}) + $ Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$

3.b) Le triangle EBF est isocèle de sens direct en B.

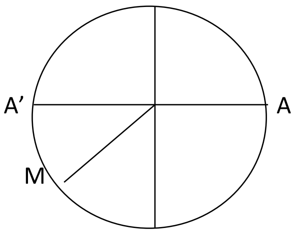
Mes $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}}) = \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$.

4.a) Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}}) = $ Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) + $ Mes $(\widehat{\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB}}) + $ Mes $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}})] = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi$.

4.b) Comme Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}}) = \pi$ alors les points D, E et F sont alignés.

Exercice 38

1) Plaçons le point M



2) a. Calculons $\sin x$:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{16}$

$\sin^2 x = \frac{7}{16}$

$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}}$ car $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x < 0$.

$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b. Déduisons-en $\sin(-x)$:

$\sin(-x) = \frac{\sqrt{7}}{4}$

3) Calculons $\tan x$, puis $\tan(-x)$:

$\tan x = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}$

$\tan x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\tan(-x) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Exercice 39

1) Déterminons la valeur exacte de $\sin x$:

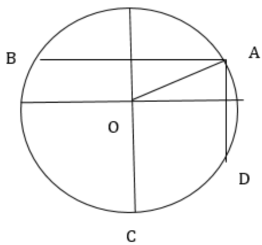
$$\mathrm{Sin}^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$\sin^2 x = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$
$$\sin x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$ car $x \in [-\pi; 0]$ et $\cos x > 0$.

2) Déterminons x :

$x = -\frac{\pi}{5}$ car $-\frac{\pi}{5} \in [-\pi; 0]$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) > 0$.

Exercice 40

1) Construction :



2) a. Rappels :

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. Déduisons-en :

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

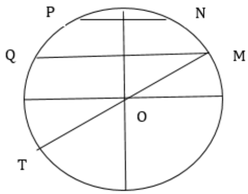
$\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{9\pi}{6}\right)$ n'existe pas.

$\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan\left(\frac{4\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 41

1) Plaçons les différents points :



2) Calculons $\cos x$:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ car } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

3) Déterminons les valeurs exactes de :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{5}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\cos(\pi - x) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ et $\sin(\pi - x) = \frac{2}{5}$.

$\sin(\pi + x) = -\frac{2}{5}$

4) Calculons :

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\tan(\pi - x) = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

Exercice 42

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2sinxcosx + \cos^2 x$

$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x$

$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 1$

$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$

$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

c) On a : $\frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^4 x - \cos^4 x)$

$\frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x) = \frac{1}{2}[\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \cos^2 x(1 - \cos^2 x)]$

$\frac{1}{2}(1-\sin^4x-\cos^4x)=\frac{1}{2}(\sin^2x\cos^2x+\cos^2x\sin^2x)$

$\frac{1}{2}(1-\sin^4x-\cos^4x)=\frac{1}{2}(2\sin^2x\cos^2x)$

$\frac{1}{2}(1-\sin^4x-\cos^4x)=\sin^2x\cos^2x$

$\frac{1}{2}(1-\sin^4x-\cos^4x)=(\sin x\cos x)^2$.

d) $\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x-\cos x+\sin x-\sin x$

$\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

IV. LES SITUATIONS D'EVALUATION

Exercice 43

Note : Modifier sur le schéma : changer le point I en F

1) Le triangle AHG est équilatéral donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AG}})=-\frac{\pi}{3}$.

2) Démontrons que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}})=-\frac{\pi}{6}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}})=\frac{\pi}{2}$

- On a : Puisque ABFG est un parallélogramme alors :
  Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}})=-\pi$.

par suite : Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}})=-\pi-$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}})=-\pi-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

- Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AG}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{GF}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{GF};\overrightarrow{FE}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{FE};\overrightarrow{DE}})$
  Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}})=-$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GF}})+\pi+$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}})+\pi+$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{DE}})+\pi$
  Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}})=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{2}+\pi+\pi=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

3) a) Calculons Mes $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{DE}})$

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{DE}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AG}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=0$

b) Comme Mes $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{DE}})=0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires. Par conséquent les droites (AH) et (DE) sont parallèles. Notre ami a raison.

Exercice 44 : Radar

1) Justifions que D = 10 Km.

On a : $\widehat{OI} = R \times \alpha$ avec $\begin{cases} R = \text{rayon du cercle} \\ \alpha = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OQ}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OQ}}) = 1 \text{ rad} \end{cases}$

$R = \frac{\widehat{OI}}{\alpha} = \frac{5}{1} = 5\ Km$. D'où : $D = 2R = 2 \times 5 = 10\ Km$.

2) Longueur AP et distance de la première menace.

On a : $\widehat{AP} = OA \times \alpha$ avec OA = $\frac{R}{2}$. Soit $\widehat{AP} = 2{,}5 \times 1 = 2{,}5\ Km$

Par ailleurs la distance OP = $\frac{R}{2} = 2{,}5\ Km$. La première menace est située à 2,5 Km.

9 STATISTIQUE

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***Notes de mathématiques au premier semestre du premier en mathématiques de 2^nde^ C_1 et celui de 2^nde^ C_2 d'un lycée***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves de ces deux classes***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au lycée.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule à la fin du premier trimestre.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est :*** Les élèves veulent savoir qui des deux élèves est le « plus fort ».
- **Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?** *Peu d'outils pour être justifier le problème posé.*

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- - Que décident de faire les acteurs ? les élèves ***décident*** de comparer la répartition de chacune des séries de notes autour de cette moyenne.

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire avec ses élèves la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II- DECOUVERTES DES ACTIVITES

Activité 1 Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Objectif :

- *Dresser un tableau des effectifs ou (fréquences) cumulés (croissants ou décroissants).*
- *Savoir déterminer une ECC ou ECD ou FCC ou FCD relative à une modalité.*

Il s'agira pour l'apprenant de faire le lien entre une ECD (ou ECC) et une FCD (ou FCC) d'une modalité.

Solution

On a le tableau suivant :

Taille en cm	17	18	20	22	23	24	25	Total
Effectif	2	1	3	4	5	6	7	28
ECC	2	3	6	10	15	21	28	-
ECD	28	26	25	22	18	13	7	-
FCC	0,070	0,107	0,214	0,357	0,535	0,750	1	-
FCD	1	0,928	0,893	0,785	0,643	0,464	0,250	-

1.a) Le nombre de poissons ayant 22 ou au moins 22 cm est : 2 + 1+ 3+4 = 10 poissons. Cette valeur correspond à l'ECC de la modalité 22.

1.b) Le nombre de poissons ayant 18 ou plus de 18 cm : 1 + 3 + 4+ 5+ 6+ 7 = 26 poissons. Cette valeur correspond à l'ECD de la modalité 18.

2.a) Tableau des fréquences :

Taille en cm	17	18	20	22	23	24	25	Total
Effectifs	2	1	3	4	5	6	7	28
Fréquences	0,07	0,04	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	1

2.b) La fréquence correspondant à une taille inférieure ou égale à 22 cm :

0,07 + 0,04 + 0,11 + 0,14 = 0,36. Cette valeur correspond à la FCD de la modalité 22.

2.c) La fréquence correspondant à une taille supérieure ou égale à 18 cm :

0,04 + 0,11+ 0,14+ 0,18+ 0,21+0,25 = 0,93. Cette valeur correspond à la FCC de la modalité 18.

3.a) La somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_4 est :

N = $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

3.b) La somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_4 est :

N = $n_4 + n_5 + \cdots + n_p$.

3.c) La somme des fréquences inférieures ou égales à la modalité x_4 est :

F = $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$

Soit : F =$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} + \frac{n_4}{N} = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{N}$

3.d) Le quotient de la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total : $\frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{N}$

3.e) La somme des fréquences supérieures ou égales à la modalité x_4 est :

F = $f_4 + f_5 + \cdots + f_p$

Soit : F =$\frac{n_4}{N} + \frac{n_5}{N} + \cdots + \frac{n_p}{N} = \frac{n_4+n_5+\cdots+n_p}{N}$

3.f) Le quotient de la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total : $\frac{n_4+n_5+\cdots+n_p}{N}$

Solution des exercices de fixation de l'activité 1

1 **Tableau des effectifs cumulés croissants**

Poids (en kg)	48	49	50	52	58
Nombre de pensionnaires	13	7	15	10	5
Effectifs cumulés croissants	13	20	35	45	50

Tableau des effectifs cumulés décroissants

Poids (en kg)	48	49	50	52	58
Nombre de pensionnaires	13	7	15	10	5
Effectifs cumulés décroissants	50	37	30	15	5

2 Tableau des fréquences cumulées décroissants

Nombre de repas	1	2	3	4
Fréquences en %	40	37	10	13
Fréquences cumulées décroissants en %	100	60	23	13

Tableau des fréquences cumulées croissants

Nombre de repas	1	2	3	4
Fréquences en %	40	37	10	13
Fréquences cumulées croissants en %	40	77	87	100

Activité 2 Regroupement des données par classes de même amplitude – classe modale

Objectif :

- *Regrouper en classe de même amplitude des données statistiques*
- *Savoir déterminer l'amplitude, les centres de classes et la classe modale d'une série statistique regroupée en classe*

Solution

On a le tableau suivant :

1.a) Regroupons en classe d'amplitude 3 cm et donnons les effectifs :

On a le tableau suivant :

Classe de Longueurs en cm	[17 ;20[	[20 ;23[	[23 ;26[	TOTAUX
Effectif	4	11	15	30

1.b) Regroupement en classe d'amplitude 5 cm et effectif

Classes de Longueurs en cm	[17 ;22[	[22 ;27[	TOTAUX
Effectif	7	23	30

2. Calcul de la différence :

- Pour [17 ;19[on a : $19 - 17 = 2$
- Pour [19 ;21[on a : $21 - 19 = 2$
- Pour [21 ;23[on a : $23 - 21 = 2$
- Pour [23 ;25[on a : $25 - 23 = 2$

Conclusion : toutes les classes ont la même amplitude.

3.a) Complétons le tableau :

Taille en cm	[17 ;19[	[19 ;21[	[21 ;23[	[23 ;25[	Total
Effectifs	4	3	8	12	27

3.b) La classe ayant le plus grand effectif est : [23 ;25[

3.c) Une série statistique peut avoir plusieurs modes ou plusieurs classes modales à condition que leurs effectifs les plus grands aient la même valeur et que les classes soient d'amplitude égales.

Solution des exercices de fixation de l'activité 2 :

3 1 – F ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – F .

4 **1 – Regroupement par classe**

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ; 12[	[12;16[	[16;20[
Effectifs	1	13	20	16	10

2- La classe modale de cette série statistique est [8 ;12[

Activité 3 Diagrammes cumulatifs (cas d'une variable quantitative discrète)

Objectif *Construire un diagramme cumulatif pour le cas d'une variable quantitative discrète*

Il s'agira pour l'apprenant de représenter graphiquement les données d'une série suivant un diagramme cumulatif à partir des ECC ou ECD afin de mieux apprécier la répartition globale. Ce diagramme cumulatif dans ce cas est appelé courbe en escalier.

Solution

1.a) Dressons le tableau des ECC : On a le tableau suivant :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	TOTAUX
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5	200
ECC	48	110	145	171	186	195	200	-

1.b) Représentation dans un repère orthogonal :voir le graphique

1.c) Nature du graphique : f est une fonction affine par intervalle, sa représentation graphique est dans ce cas un diagramme en escalier.

2.a) Dressons le tableau des ECD

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	TOTAUX
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5	200
ECD	200	152	90	55	29	14	5	-

2.b) Représentation dans un repère orthogonal : Voir le graphique

2.c) Nature du graphique : g est une fonction affine par intervalle, sa représentation graphique est dans ce cas un diagramme en escalier.

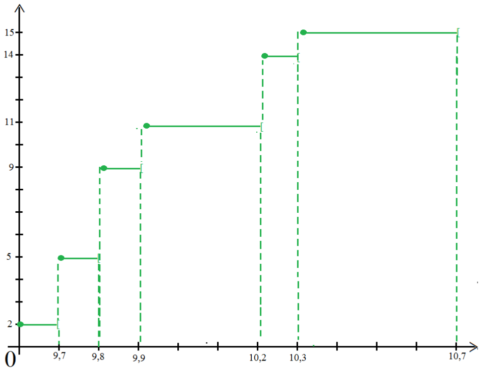
Solution des exercices de l'activité 3 :

5 **1-Diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants**

Temps mis en seconde	9,7	9,8	9,9	10,2	10,3	10,7
Nombre d'athlètes	2	3	4	2	3	1
Effectifs cumulés croissants	2	5	9	11	14	15

$f(x) = 2$ si $x \in [0 ;9,7[$; $f(x) = 5$ si $x \in [9,7 ;9,8[$; $f(x) = 9$ si $x \in [9,8 ;9,9[$

$f(x) = 11$ si $x \in [9,9 ;10,2[$; $f(x) = 14$ si $x \in [10,2 ; 10,3[$; $f(x) = 15$ si $x \in [10,3 ;10,7[$

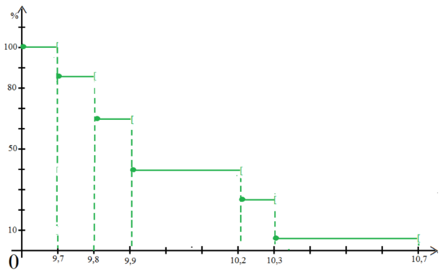


1-Diagramme cumulatif des fréquences cumulées décroissantes

Temps mis en seconde	9,7	9,8	9,9	10,2	10,3	10,7
Fréquences en %	13,33	20	26,67	13,33	20	6,67
Fréquences cumulés décroissants	100	86,67	66,67	40	26,67	6,67

$f(x) = 100$ si $x \in [0\ ;9{,}7[$; $f(x) = 86{,}67$ si $x \in [9{,}7\ ;9{,}8[$; $f(x) = 66{,}67$ si $x \in [9{,}8\ ;9{,}9[$

$f(x) = 40$ si $x \in [9{,}9\ ;10{,}2[$; $f(x) = 26{,}67$ si $x \in [10{,}2\ ;\ 10{,}3[$; $f(x) = 6{,}67$ si $x \in [10{,}3\ ;10{,}7[$



Activité 4 Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (Variable quantitative continue)

Objectif *Construire un polygone des ECD ou ECC respectivement des FCD ou FCC pour le cas d'une variable quantitative continue*

Il s'agira pour l'apprenant de représenter graphiquement les données d'une série suivant un polygone ou ligne brisée à partir des ECC ou ECD afin de mieux apprécier la répartition globale. Cela lui permettra de déterminer graphiquement certains paramètres de positions que sont la médiane, les quartiles ou les déciles.

Solution

1.a) Complétons les tableaux :

Tableau 1 :

Âges	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	TOTAL
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3	120
ECC	6	24	54	93	108	114	117	120	-
ECD	120	114	96	66	27	12	6	3	-

Tableau 2 :

Âges	20	25	30	35	40	45	50	55	60	TOTAL
ECC	0	6	24	54	93	108	114	117	120	-
ECD	120	114	96	66	27	12	6	3	0	-

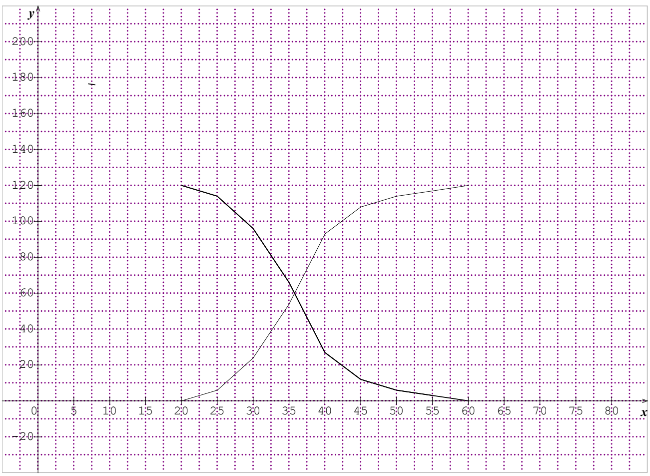
2.a) Représentation graphique :

2.b) Plaçons les points :

2.c) Détermination graphique du nombre d'instituteurs ayant moins de 45 ans : N = 108. Il faut projeter verticalement de l'abscisse 45 sur le polygone des ECC puis projeter horizontalement sur l'axe des ordonnées et lire le résultat

3.a) Voir figure ci-dessous.

3.b) Détermination graphique du nombre d'instituteurs ayant plus de 45 ans : N = 27. Il faut projeter verticalement de l'abscisse 40 sur le polygone des ECD puis projeter horizontalement sur l'axe des ordonnées et lire le résultat



4.a) Dressons le tableau des FCC et des FCD :

Tableau 1 :

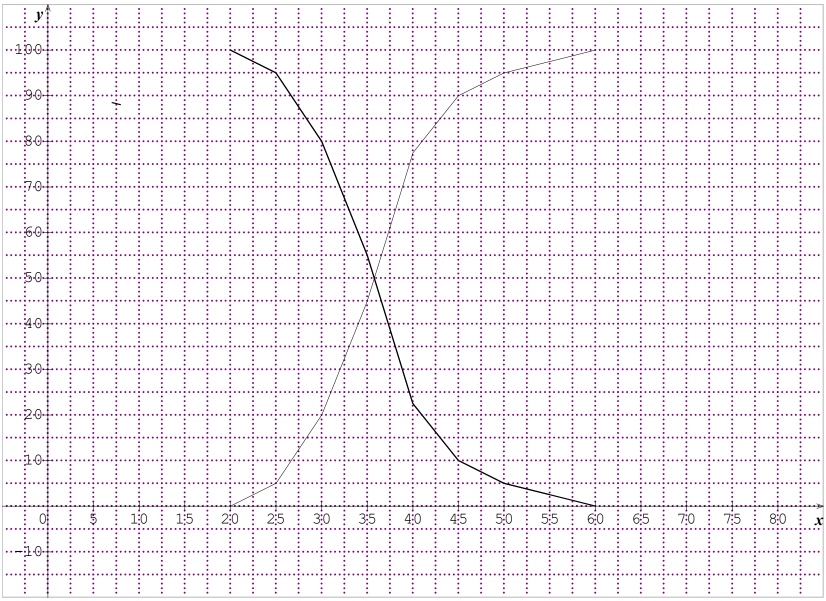
Âges	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	TOTAL
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3	120
ECC	6	24	54	93	108	114	117	120	-
FCC	0,05	0,2	0,45	0,775	0,9	0,95	0,975	1	-
ECD	120	114	96	66	27	12	6	3	-
FCD	1	0,95	0,8	0,55	0,225	0,1	0,05	0,025	-

Tableau 2 :

Âges	20	25	30	35	40	45	50	55	60	TOTAL
FCC	0	0,05	0,2	0,45	0,775	0,9	0,95	0,975	1	-
FCD	1	0,95	0,8	0,55	0,225	0,1	0,05	0,025	0	-

4.b) tracé du polygone des FCC : voir figure ci-dessous

4.c) Tracé du polygone de FCD : voir figure ci-dessous

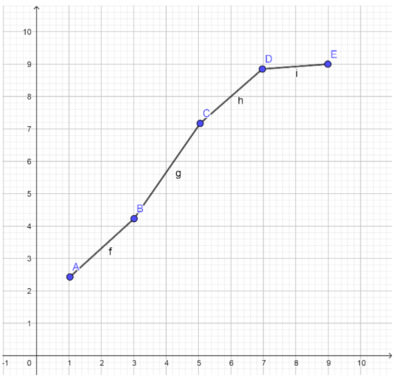


Solution des exercices de fixation de l'activité 4:

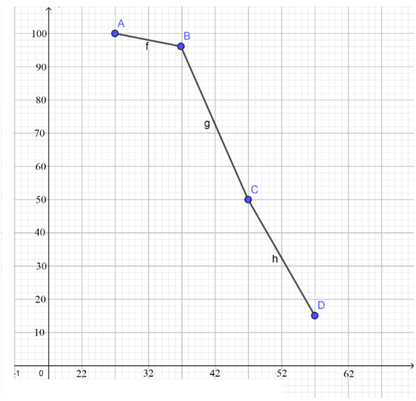
6

Polygone des effectifs cumulés croissants

Nombre d'enfants	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[
Nombre d'employés	12	9	15	8	1
ECC	12	21	36	44	45



7 **Polygone des fréquences cumulées décroissantes**



Activité 5 Médiane

Objectif : *Déterminer les paramètres des positions que sont la médiane et les quartiles*

Il s'agira pour l'apprenant de déterminer et de comprendre les paramètres des positions que sont la médiane et les quartiles afin de mieux apprécier la répartition globale. Bien entendu, la moyenne étant déjà connue depuis les classes précédentes.

Solution :

A- Cas d'une série à variable discrète :

1. Trouvons la médiane de chacune des séries :

- Série A : Mé = 8 car l'effectif total N = 9 (impair) et le rang est :$\frac{9+1}{2} = 5$ $ème$ position ou modalité pour une série à valeurs rangées dans l'ordre croissant
- Série B : Mé = 9 car l'effectif total N = 8 (pair) et les rangs sont :$\frac{8}{2} = 4$ $ème$ et :$\frac{8}{2} + 1 = 5ème$ position ou modalité. La médiane recherchée est située entre ces deux modalité ou bien c'est la moyenne des deux modalités. On a 9 entre 9 et 9 ou bien $\frac{9+9}{2} = 9$ d'où le résultat.
- Série C : Mé = 11 car l'effectif total N = 9 et le rang est :$\frac{9+1}{2} = 5$ $ème$ position ou modalité pour une série à valeurs rangées dans l'ordre croissant.
- Série D : Mé = 7 car l'effectif total N = 8 et les rangs sont :$\frac{8}{2} = 4$ $ème$ et :$\frac{8}{2} + 1 = 5ème$ position ou modalité. La médiane recherchée est située entre ces deux modalités ou bien c'est la moyenne des deux modalités. On a 7 entre 6 et 8 ou bien $\frac{6+8}{2} = 7$ d'où le résultat.

2.a) Détermination du quartile Q_1 des séries A et B.

- Série A : $Q_1 = 5$ car la médiane (ou Q_2) étant à la $5^{ème}$ position, on a : $\frac{5+1}{2} = 3$ $ème$ position ou modalité pour une série à valeurs rangées dans l'ordre croissant. En fait Q_1 est situé au milieu de la première modalité et la médiane.
- Série B : $Q_1 = 6$ car on a : $\frac{N}{4} = \frac{8}{4} = 2ème$ position qui est une position exacte.

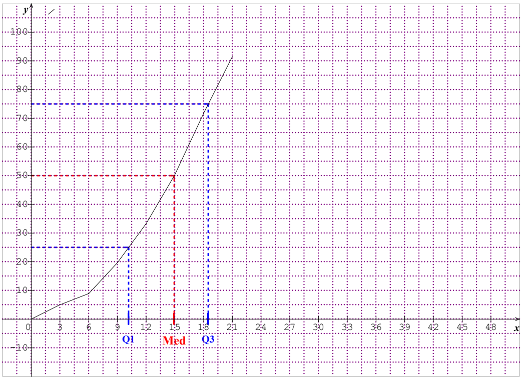
2.b) Détermination du quartile Q_3 des séries A et B.

- Série A : $Q_3 = 17$ car la médiane (ou Q_2) étant à la $5^{ème}$ position, on a : $\frac{5+9}{2} = 7$ $ème$ position ou modalité pour une série à valeurs rangées dans l'ordre croissant. En fait Q_3 est situé au milieu de la dernière modalité et la médiane. Ou bien 3×3 $ème$ position $= 9^{ème}$ position
- Série B : $Q_3 = 10$ car $3 \times 2ème$ position = $6^{ème}$ position de la série rangée par ordre croissant.

B. Cas d'une série à variable continue

1.Courbe des FCC : On a le tableau des FCC suivant :

Tranche horaire (en heure)	[0 ;3[	[3;6[	[6;9[	[9;12[	[12;15[	[15;18[	[18;21[	[21;24[	TOTAL
Fréquence (en %)	5	3,9	10,8	13,6	17,1	21,4	19,8	8,4	100
FCC	5	8,9	19,7	33,3	50,4	71,8	91,6	100	-



2.a) L'abscisse du point du graphique d'ordonnée 50 % est 14,9298.

2.b) L'abscisse du point du graphique d'ordonnée 25 % est 10,16

2.c) L'abscisse du point du graphique d'ordonnée 75 % est 18,48.

3.a) Intervalle contenant la médiane : [12;15[

3.b) Détermination de la médiane par calcul :

Modalité	12	Mé	15
FCC	33,3	50	50,4

Par interpolation linéaire on a :

Et : $\frac{Mé-12}{50-33,3} = \frac{15-Mé}{50,4-50}$. (la méthode de THALES ou de la pente)

$$0,4(Mé - 12) = 16,7(15 - Mé)$$

$38,4Mé = 574,8$ Soit $Mé = 14,968$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 5 .

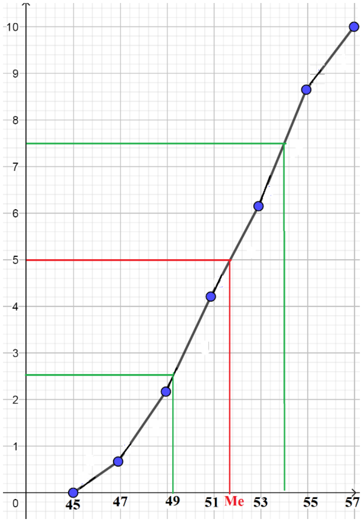
8

1er cas : Me = 6 car effectif total est N =10 et les rangs sont :$\frac{10}{2} = 5\,ème$ et :$\frac{10}{2} + 1 = 6ème$ position ou modalité. La médiane recherchée est située entre ces deux modalités ou bien c'est la moyenne des deux modalités. On a 6 entre 6 et 6 ou bien $\frac{6+6}{2} = 6$ d'où le résultat.

2ème cas : Me = 12 car effectif total est N = 9 et le rang est :$\frac{9+1}{2} = 5\,ème$ position ou modalité pour une série à valeurs rangées dans l'ordre croissant.

9

Taille (en cm)	**[45 ;47[**	**[47 ;49[**	**[49 ;51[**	**[51 ;53[**	**[53 ;55[**	**[55 ;57[**
Fréquences en %	8	15	19	19	27	12
FCC	8	23	42	61	88	100



Graphiquement Me = 51,8

Activité 6 Etendue – Ecart-moyen

Objectif *Calculer l'étendue et l'écart moyen d'une série statistique*

Il s'agira pour l'apprenant de connaitre les éléments de base des premiers paramètres de dispersion.

Solution

1.a) Calcule de la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la série A :

$E_A = x_{max} - x_{min} = 14 - 9 = 5$

1.b) Calcule de la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la série B :

$E_B = x_{max} - x_{min} = 20 - 3 = 17$

2. Recopions et complétons le tableau:

Notes	9	10	11	12	13	14	TOTAUX
Effectifs	3	3	4	2	2	1	15
Ecarts à la moyenne	|9-11|= 2	1	0	1	2	3	-

3.a) Vérifions que la moyenne de la série des écarts à la moyenne de la série A est égale à 1,2 :

On a : $\frac{(3\times2)+(3\times1)+(4\times0)+(2\times1)+(2\times2)+(1\times3)}{15} = \frac{18}{15} = 1,2$

3.b) Moyenne des écarts absolus à la moyenne de la série B :

On a :

Notes	3	6	8	9	10	14	16	17	20	TOTAUX
Effectifs	1	3	1	2	2	2	1	2	1	15
Ecarts à la moyenne	|3-11|= 8	5	3	2	1	3	5	6	9	-

On a : $\frac{(1\times8)+(3\times5)+(1\times3)+(2\times2)+(2\times1)+(2\times3)+(1\times5)+(2\times6)+(1\times9)}{15} = \frac{64}{15} = 4{,}26667$

3.c) La série la plus dispersée est la série B car $4{,}26667 > 1{,}2$

Solution des exercices de fixation de l'activité 6

10 1- Etendue de cette série statistique e = 35 – 18 = 17

2- a)

$$\bar{x} = \frac{2\times18+5\times20+8\times21+16\times23+11\times27}{80}$$
$$+\frac{10\times28+27\times30+1\times35}{80} = 26{,}175$$

Age	18	20	21	23	27	28	30	35
Nombre de membres	2	5	8	16	11	10	27	1
Ecarts à la moyenne	8,175	6,175	5,175	3,175	0,825	1,825	3,825	8,825

$$e = \frac{2\times8{,}175+5\times6{,}175+8\times5{,}175+16\times3{,}175+11\times0{,}825}{80}$$
$$+\frac{10\times1{,}825+27\times3{,}825+1\times8{,}825}{80} = 3{,}49$$

b) $e = 3{,}49$ et $\bar{x} = 26{,}175$, d'où $e < \bar{x}$ donc la répartition de l'âge est moins dispersée pour cette série statistique.

Activité 7 Variance – Ecart - type

Objectif *Calculer la variance et l'écart-type d'une série statistique*

Il s'agira pour l'apprenant de connaitre les éléments avancés des paramètres de dispersion les plus couramment utilisés pour comparer des séries dans la vie courante, notamment dans les domaines des banques et des assurances pour la mesure du risque.

Solution

1.a) Recopions et complétons le tableau :

Notes	9	10	11	12	13	14	TOTAUX
Effectifs	3	3	4	2	2	1	15
Ecarts à la moyenne	|2	1	0	1	2	3	-
Carré des écarts à la moyenne	4	1	0	1	4	9	-

1.b) Calculons la moyenne de la série des carrés des écarts à la moyenne noté V_A

On a : $V_A = \frac{(3\times4)+(3\times1)+(4\times0)+(2\times1)+(2\times4)+(1\times9)}{15} = \frac{34}{15} = 2{,}26667$

1.c) Calculons la racine carrée de V_A

On a : $\sqrt{V_A} = \sqrt{2{,}26} = 1{,}5055$

2.a) Recopions et complétons le tableau :

Notes x_i	9	10	11	12	13	14	TOTAUX
Effectifs n_i	3	3	4	2	2	1	15
${x_i}^2$	81	100	121	144	169	196	-
$n_i \times x_i$	27	30	44	24	26	14	165
$n_i \times {x_i}^2$	243	300	484	288	338	196	1849

On a : $\frac{1849}{15} - 11^2 = 2{,}26667$

3.c) Comparaison des résultats : les résultats des questions 1.b et 2.b sont les mêmes.

Solution des exercices de fixation de l'activité 7 :

11 $V = \frac{5\times0^2+13\times1^2+7\times2^2+3\times3^2+1\times4^2+1\times5^2}{5+13+7+3+1+1} - 1{,}5^2 \simeq 1{,}38$

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1{,}38} \simeq 1{,}17$

12 1 -Moyenne $\bar{x} = \frac{358}{38} = 9{,}42$

2 - Variance $V = \frac{3621}{38} - 9{,}42^2 = 16{,}31$, Ecart-type $\sigma = \sqrt{16{,}31} = 4{,}03$

13 Score moyen $\dfrac{298+407+336+425+512+321+543+396}{8}=404,75$

Ecart-type moyen de ces scores $\sigma=\sqrt{V}$

$$V=\frac{298^2+407^2+336^2+425^2+512^2+321^2+543^2+396^2}{8}-404,75^2$$

$V=6780,4375$

Donc $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{6780,4375}=82,34$.

III - DES QUESTIONS D'EVALUATION

1

Comment déterminer la médiane d'une série statistique à partir du polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées ?

On place sur l'axe des ordonnées le point d'ordonnées 50.

On détermine l'antécédent de ce point. La médiane de cette série statique est 20

2

Comment calculer la variance d'une série statistique ?

$$\bar{x}=\frac{10\times 60+12\times 70+60\times 73+15\times 75+35\times 80}{132}=73,83$$

$$V=\frac{10\times 60^2+12\times 70^2+60\times 73^2+15\times 75^2+35\times 80^2}{132}-(73,83)^2\simeq 25,76$$

3

Comment calculer l'écart absolu d'une série statistique ?

$$\bar{x}=\frac{225\times 0+105\times 10000+10\times 20000+4\times 50000+6\times 100000}{350}=5857,14$$

Gain	**0**	**10 000**	**20 000**	**50 000**	**100 000**
Nombre de billets	**225**	**105**	**10**	**4**	**6**
$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	**5857,14**	**4142,86**	**14142,86**	**44142,86**	**94142,86**
$n_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	**1317856,5**	**435000,3**	**141428,6**	**176571,44**	**564857,16**

$$e=\frac{1317856,5+435000,3+141428,6+176571,44+564857,16}{350}$$

$e=7530,61$

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

I. LES EXERCICES DE FIXATION

Effectif cumulé – Fréquence cumulée

Exercice 1

1- Vrai
2- Vrai
3- Vrai
4- Vrai

Exercice 2

Nombres de pièces	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Nombres d'appartements	48	75	96	64	39	4	3	350
ECC	48	123	219	283	322	347	350	-
ECD	350	302	227	131	67	28	3	-
FCC	0,137	0,351	0,625	0,808	0,92	0,99	1	-
FCD	1	0,862	0,648	0,374	0,191	0,08	0,008	-

1- Faux ; 2- Faux ; 3- Vrai ; 4- Faux ; 5- Faux ; 6- Vrai ; 7- Faux ; 8- Vrai

Exercice 3

Nombres d'enfants	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Nombres de famille	4	11	7	14	8	6	50
ECC	4	15	22	36	44	50	

Exercice 4

Masse œuf	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[	[80 ;90[	TOTAL
Nombres d'œuf	3	51	74	112	92	62	6	400
ECD	400	397	346	272	160	68	6	

Exercice 5

Nombre d'agriculteurs	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Anacarde en tonne	10	55	80	15	38	40	12	250
ECD	250	240	185	105	90	52	12	
FCD	1	0 ,96	0,74	0,42	0,36	0,208	0,048	

Exercice 6

CA	[0 ;0,25[	[0,25 ;0,5[	[0,5 ;0,75[	[0,75 ;1[	[1 ;1,25[	[1,25 ;1,5[	TOTAL
NE	37	16	12	54	6	3	128
ECC	37	53	65	119	125	128	
FCC	0,289	0,414	0,507	0,929	0,976	1	

Diagrammes cumulatifs ; cas d'une variable quantitative discrète

Exercice 7

Diagramme cumulatif. VOIR GRAPHIQUE

Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (variable quantitative continue)

Exercice 8

VOIR GRAPHIQUE

Mode – Classe modale

Exercice 9

a- Classe d'amplitude 15

Classes	[30 ;45[	[45 ;60[	[60 ;75[	[75 ;90[	[90 ;105[	[105 ;120[
Effectif	2	2	7	11	13	5

b- Classe modale [90 ;105[

Mode – Classe moyenne

Exercice 10

1- Vrai
2- Faux

Exercice 11

1- a
2- c

Médiane

Exercice 12

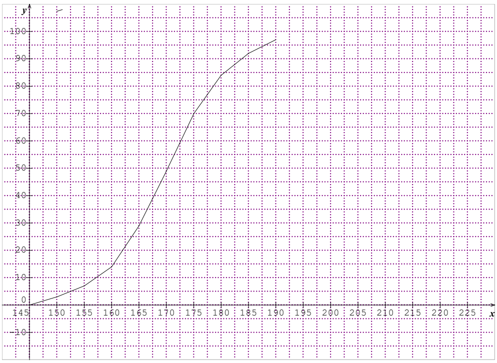
1- Faux
2- Vrai
3- Faux
4- Faux

Exercice 13

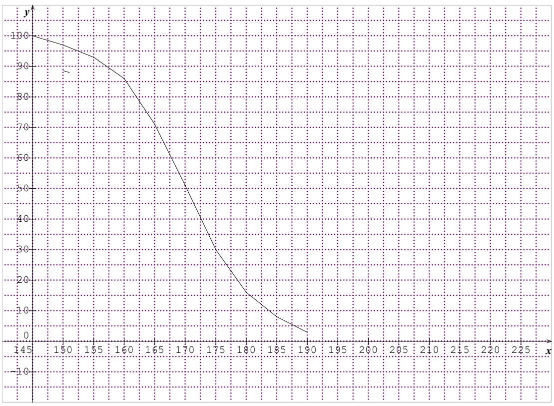
1 – a) ; 2 – c)

Construction de polygone.

1- Polygone des ECC



2- Polygone des ECD



Exercice 14

La médiane vaut approximativement 8,7

Exercice 15

$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ appartient à l'ECD de la modalité [10 ; 15[.

Me ∈ [10 ;15[. Par projection on obtient : Me = 12,5

Exercice 16

Calculons la médiane

$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ appartient à l'ECD de la modalité [10 ;15[.

Modalité	10	Mé	15
ECD	31	30	11

Mé ∈ [10 ;15[.

D'après la méthode de Thalès on obtient :

$\frac{Mé-10}{30-31} = \frac{15-Mé}{11-30}$ donc Mé = 10,25.

Exercice 17

1- Effectif total N = 10+24+12+4 = 40.
2- La médiane correspond à la modalité située à la 21^{e} et la 22^{e} positon, d'où Mé = 1.
3- Oui il a raison car la médiane correspond à la modalité telle que au moins 50% des valeurs observées sont inférieures à la modalité et 50% des valeurs observées sont supérieures à Mé.

Exercice 18

1- Effectif total N = 10+15+15+35+25 =100.
2- La médiane est la modalité située à la 51^{e} position et la 52^{e} position, d'où la série ordonnée donc Mé = 3.
3- Oui.

Etendue – Ecart moyen

Exercice 19

Etendue = e = 4 – 0 = 4

Exercice 20

1- c ; 2- c ; 3- c.

Exercice 21

Calculons l'écart moyen.

On a :

x_i	1,55	1,57	1,62	1,64	1,66	1,70	1,72	TOTAL
n_i	1	1	1	3	2	2	2	12

$\overline{e} = \frac{1|1,55-1,6517| + 1|1,57-1,6517| + 2|1,70-1,6517| + 3|1,64-1,6517| + 2|1,66-1,6517| + 2|1,70-1,6517| + 2|1,72-1,6517|}{12}$

$\overline{e}$ = 0,04305

Interprétation du résultat

$\overline{e}$ = 0,04305 et $\overline{x}$ = 1,6517.

La dispersion des tailles observées par rapport à la taille moyenne est faible.

Exercice 22

Salaire	[0 ;100[	[100 ;200[	[200 ;300[	[300 ;400[	[400 ;500[	[500 ;600[	TOTAL
Centre	50	150	250	350	450	550	
Effectif	22	5	15	35	20	3	100

$\overline{x} = \frac{22\ X\ 50+5\ X\ 150+15\ X\ 250+35\ X\ 350+20\ X\ 450+3\ X\ 550}{100} = \frac{28500}{100}$ = 285 milliers de francs CFA

e_m = 127,4

Variance – Ecart - type

Exercice 23

1- a ; 2- c ; 3- a

Exercice 24

Moyenne = $\frac{4\ X\ 35+8\ X\ 36+10\ X\ 37+14\ X\ 38+8\ X\ 39+6\ X\ 40}{50}$ = 37,64

V(X) = 2,0704.

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ = 1,4388.

Exercice 25

Revenus	[700 ; 900[	[900 ; 1100[	[1100 ; 1300[	[1300 ; 1400[	[1400 ; 1500[	[1500 ; 1600[	TOTAL
Centre	800	1000	1200	1350	1450	1550	
Effectif	13	219	20	46	50	82	430

$\overline{x}$ = 1197,9069

1) Variance
V(X) = 58239,989232

2) Ecart type
$\sigma_X = \sqrt{58239{,}989232} = 76{,}41982$

II- LES EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

Exercice 26

1- A
2- B

Exercice 27

1- Faux
2- Faux
3- Vrai
4- Faux
5- Faux
6- Faux
7- Vrai

Exercice 28

Données manquantes en abscisse

Exercice 29

1- Graphiquement la médiane est :
$\frac{N}{2} = \frac{170}{2} = 85 \Longrightarrow$ Mé = 27
2- Détermination algébrique de la médiane
$\frac{N}{2} = 85 \in [50\,;\,100[$

On a : $\frac{Mé-25}{85-100} = \frac{30-25}{50-100}$

$\frac{Mé-25}{-15} = \frac{5}{-50}$

-50(Mé-25) = 5 x (-15)

Mé – 25 = $\frac{5 X 15}{50}$

Mé = 25 + 1,5

Mé = 26,5

Exercice 30

$\overline{x}_1 = \frac{1 X 2 + 2 X 2 + 3 X 8 + 4 X 7 + 5 X 7 + 6 X 1}{(2+2+8+7+7+1)} = \frac{99}{27} = 3{,}66$

$\overline{x}_2 = \frac{3 X 1 + 7 X 2 + 3 X 3 + 2 X 4 + 6 X 5 + 5 X 6}{3+7+3+3+6+5} = \frac{98}{27} = 3{,}629$

<u>Ecart type</u>

$\sigma_1 = 1{,}24722$ $\sigma_2 = 1{,}72$

On a : $\sigma_1 < \sigma_2$ donc la série 2 est plus dispersée que la série 1.

Exercice 31

$V(X) = 2406{,}94$ $\overline{x} = 88{,}4$

$\sigma_X = 49{,}0606$ effectif total = 100

Exercice 32

1- Variance $V(X) = 1{,}92246$ $\overline{x} = 2{,}60076$
2- Ecart type $\sigma_X = 1{,}38653$

Exercice 33

Cas 1 : salaire augmenté de 3000 FCFA

Si chaque salaire est augmenté de 3000F, le salaire moyen sera augmenté de 3000F.

Ainsi $\overline{x} = 83000$ FCFA.

L'écart type : $\sigma_X = 10.000$ FCFA reste inchangé.

Cas 2 : salaire augmenté de 4%

Si chaque salaire est augmenté de 4%, le salaire moyen sera augmenté de 4 %.

Ainsi $\overline{x} = 83200$ FCFA.

L'écart type : $\sigma_X = 10.400$ FCFA sera augmenté de 4 %.

Exercice 34

a) Non car toutes les modalités seraient égales à la moyenne, ce qui ne correspond pas à une série statistique.
b) Oui, car l'écart type est toujours inférieur ou égale à la moyenne
c) Non car l'écart type est toujours inférieur ou égale à la moyenne

Exercice 35

1- Tableau des ECC et des ECD

Modalités	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Effectifs	2	17	29	33	16	3	100
ECC	2	19	48	81	97	100	-
ECD	100	98	81	52	19	3	-

2- La médiane de cette série statistique est Me = 16,5

3- $$\overline{x} = \frac{2\times0+17\times1+29\times2+33\times3+16\times4+3\times5}{100} = 2{,}53$$

$$V = \frac{2\times(0-2{,}53)^2+17\times(1-2{,}53)^2+29\times(2-2{,}53)^2}{100} +$$

$$+\frac{33\times(3-2{,}53)^2+16\times(4-2{,}53)^2+3\times(5-2{,}53)^2}{100} = 1{,}2091$$

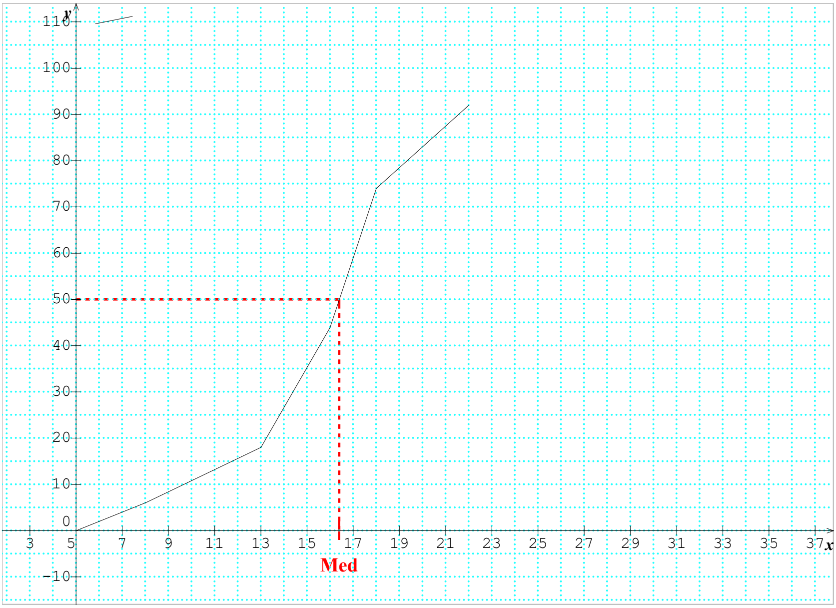
Exercice 36

1- a- Tableau des Fréquences cumulées croissantes :

Âge	[5 ;8[	[8 ;13[	[13 ;16[	[16 ;18[	[18 ;22[	[22 ;30[	TOTAL
Fréquence (%)	6	12	26	30	18	8	100
FCC	6	18	44	74	92	100	–

b- Le pourcentage des auditeurs qui ont moins de 18 ans est de 74 %

2- a- Polygone des fréquences cumulées croissantes :



2-b Par lecture graphique la médiane vaut 16,4.
Interprétation : La moitié (50 %) des auditeurs de cette radio a moins de 16,4 ans et la moitié (50 %) des auditeurs de cette radio ont plus de 16,4 ans.

Exercice 37

Remarques : le graphique de la série B ne comporte pas la modalité 6 : est-ce une erreur ? Si on inclut la modalité 6 pour un effectif de 1 on obtient comme médiane 12.

1- Le mode de chaque série statistique :

Série A : Mode = 12 ; Série B : Mode = 4 ; 20 ; Série C : Mode = 4 ; 6 ; 8 ;10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20.

Série D : Mode = 12.

- La moyenne de chaque série est :

Série A : $\bar{x}_A = 12{,}4706$; Série B : $\bar{x}_B = 12{,}4667$; Série C : $\bar{x}_C = 12$; Série D : $\bar{x}_D$ =12

- La médiane de chaque série :

Série A : Me = 12 ; Série B : Me = 13; Série C : Me = 12; Série D : Me = 12.

2- Les écarts types :
- Le plus petit écart-type est celui de la série A car la distribution comporte des modalités à effectifs assez grand autour de la moyenne (ou médiane) et des effectifs faibles pour les modalités éloignés (inférieures ou supérieures) à la moyenne (ou de la médiane).
- Le plus grand écart –type est celui de la série B car la distribution comporte des modalités à effectifs assez faible autour de la moyenne (ou médiane) et des effectifs assez grands pour les modalités éloignés (inférieures ou supérieures) à la moyenne (ou de la médiane).

3- Ecart-type des séries A et D : Série A : $\sigma_A = 3{,}29202$; Série D : : $\sigma_D = 4{,}338$

(Pour les autres séries : Série B : $\sigma_B = 6{,}50504$; Série C : : $\sigma_C = 5{,}16398$)

Exercice 38

1- Vérifions si les moyennes peuvent départager les deux tireurs :

On a : $\bar{x}_{Amine} = \frac{520}{20} = 26\, points$ et $\bar{x}_{Massé} = \frac{520}{20} = 26\, points$. Comme : $\bar{x}_{Amine} = \bar{x}_{Massé}$ alors la moyenne ne peut pas départager les deux concurrents.

2- En prenant en compte les 10 meilleurs tirs de chaque concurrent on a :

Points	50	30	Total
Tirs Amine	4	6	10

Et $\bar{x}_{Amine} = \frac{380}{10} = 38\, points$

Points	50	30	20	Total
Tirs Massé	6	3	1	10

Et $\bar{x}_{Massé} = \frac{410}{10} = 41\, points$

Dans ce cas, c'est Massé qui est le plus performant.

3- Calculons les écart-types de chacune des séries :

On a : $\sigma_{Amine} = 14{,}6287$ et : $\sigma_{Massé} = 18$

4- Le tireur le plus régulier parmi les deux concurrents est Amine car il a l'écart-type le plus faible.

Exercice 39

1- Caractéristiques de la série statistique :
- Population étudiée : les annonces parues dans un journal
- Variable ou caractère étudiée : le nombre de ligne que fait une annonce
- Nature du caractère étudié : Caractère quantitatif
- Mode de la série : la modalité 4 lignes car cette modalité dispose du plus grand effectif qui est 39 annonces répertoriées.

2- Moyenne de la série : : $\bar{x} = 3{,}9\ lignes$. Autrement dit il y a en moyenne 3,9 (environ 4) lignes par annonce paru dans le journal.
3- Ecart-type : $\sigma = 1{,}1378$.
4- On a :

Nombre de lignes	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre d'annonce	3	8	21	39	22	7	100
Ecart à la moyenne	-2,9	-1,9	-0,9	0,1	1,1	2,1	

Il y a un total de 39+22+7=68 journaux qui présentent un écart avec la moyenne plus grande que l'écart type σ_x=1,1378.
Le pourcentage est de $\frac{68}{100}$=68%.

Exercice 40

1- Classe modale [12 ; 15[

2-a) Tableau de ECC et ECD

Superficie	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	Total
nombre de paysans	15	25	18	27	54	36	175
EEC	15	40	58	85	139	175	
ECD	175	160	135	117	90	36	
FCC	0,085	0,228	0,331	0,485	0,794	1	
FCD	1	0,914	0,771	0,668	0,514	0,205	

3-a) Polynôme des ECC et ECD

b) Détermination graphique de la médiane

c) Détermination algébrique de la médiane

On a : $\frac{N}{2}=\frac{175}{2}$=87,5 contenu dans les 139

Me ∈ [12 ; 15[

On a : $\frac{87{,}5-85}{Mé-12}=\frac{139-85}{15-12} \Rightarrow \frac{2{,}5}{Mé-12}=\frac{54}{3}$

Me =$\frac{3\ X\ 2{,}5}{54}$ + 12=12,138

Interprétation:

50% des paysans ont moins de 12,138 ha de superficie exploitée.

4) Le pourcentage est égal à 66,80%

Exercice 41

1-a) Tableau de f_i et FCC

Taux	[1,6 ; 1,8[	[1,8 ; 2,0[	[2,0 ; 2,2[	[2,2 ; 2,4[	[2,4 ; 2,6[	Total
Effectif	68	59	45	30	18	220
f_i	0,31	0,27	0,20	0,14	0,08	1
FCC	0,31	0,58	0,78	0,98	1	

b) Trace le polygone des FCC (pc)

2- Médiane et quartile (pc)

3-Graphe

4-Sythèse

Exercice 42

1- a) $\bar{x}$=5 $\Leftrightarrow \frac{2+3+3+4+4+4+5+5+6+6+7+9+x}{13}$=5

$\frac{58+x}{13}$ =5 $\Leftrightarrow x$ =5×13 – 58= 7

b- Etendue e = 9 – 2 = 7

Médiane = 5

Quartiles Q_1=4 ; Q_3=6 ; Q_2=Mé=5

2- L'étendue est égale à 7 alors x<9 car 9-2=7 et Mé =5 $\Longrightarrow$ x≥5 d'où 5≤ x < 9.
On a : x= {5 ; 6 ; 7 ; 8}.

3- Supposons que Q_1=3 et e≤ 8
$e_{minimale}$ est 7 si x≤ 9. Si x≥ 9 alors e_{min}=x-2,
x-2≥ 7 d'où x=9 ou x=10 or Q_1=3
Q_2=Mé situé à la 7^e positon d'où Q_1 situé à la 4^e position (entre la 3^e et la 4^e position) modalité, or Q_1=3 d'où x=3.

Exercice 43

1-a) Salaire plus bas 1.000.000 FCFA

Salaire pus haut 2.600.000 FCFA

b) étendu : 2600000-1000000=1.600.000 FCFA

2) Médiane = 1450 million de FCFA

1^{er} Quartile = 1300

Q_3 = 1700

3) Interprétation

- 50% des salaires sont inférieurs à 1450 milliers de FCFA et 50% des salaires sont supérieurs à 1450 milliers de FCFA.
- Le quartile des salariés ont un salaire inférieur à 1300 et $3/_4$ des salarier ont un salaire inférieur à 1700 ou $1/_4$ des salariés ont un salaire supérieur à 1700 FCFA.

Exercice 44

1-a) $\overline{x}_G = \frac{8\ X\ 12,5 + 14\ X\ 17,5 + 9\ X\ 22,5 + 6\ X\ 27,5 + 3\ X\ 32,5}{40} = 20,25$

b) $\overline{x}_F = \frac{7\ X\ 12,5 + 8\ X\ 17,5 + 12\ X\ 22,5 + 11\ X\ 27,5 + 12\ X\ 32,5}{50} = 23,8$

2) Histogramme (pc) S_1 et S_2.

3-a) $f_{iG}=\frac{14}{40}$ x 100 = 35%

$f_{iF}=\frac{8}{50}$ x 100 = 16%

4) Celui qui a les résultats homogènes

Calculons les écarts type :

σ_G= 5,9108 σ_F = 6,76831

C'est le groupe des garçons.

IV. LES SITUATIONS D'EVALUATIONS

Exercice 45

1- Moyenne des deux séries des moyennes en SVT et en PC :

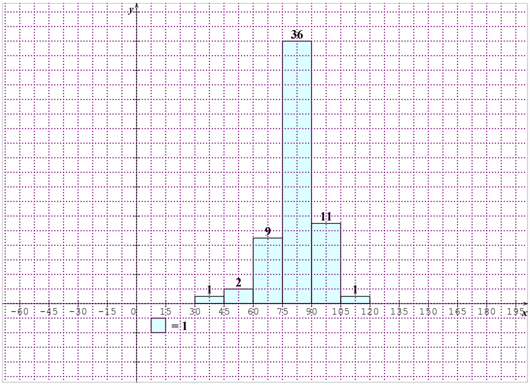
On a : $\bar{x}_{SVT} = \frac{335}{33} = 10,15$ et : $\bar{x}_{PC} = \frac{335}{33} = 10,15$.

Remarque : Rectifier la note 18 en 8 de la série PC afin d'obtenir une moyenne identique. Sinon on a : : $\bar{x}_{SVT} = \frac{335}{33} = 10,15$ et : $\bar{x}_{PC} = \frac{345}{33} = 10,45$.

2- Ecart-type des deux séries : σ_{SVT} =1,5593 et σ_{PC} =2,9656
3- Les deux professeurs ont raison au vue des caractéristiques de la classe par rapport à leur matière respective.

Exercice 46

1- Histogramme de la série



2- Moyenne et écart-type : $\bar{x} = \frac{1\times37{,}5+2\times52{,}5+9\times67{,}5+36\times67{,}5+11\times97{,}5+1\times112{,}5}{60} = 81{,}75\ \%$

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{1}{60}\times(1\times37{,}5^2+2\times52{,}5^2+9\times67{,}5^2+36\times67{,}5^2+11\times97{,}5^2+1\times112{,}5^2)-81{,}75^2\right)}$$

σ_x =12,376 % $\simeq$ 12,38 %

3- Pourcentage de fibre synthétique :

On a : $[\sigma_x - 2\bar{x}; \sigma_x + 2\bar{x}] = [56{,}99; 106{,}51]$, l'effectif total de cette tranche vaut 59. Et le pourcentage vaut : $\frac{59}{60} = 98{,}33$ %.

4- Justification de la décision du laboratoire de contrôle qualité :

Les trois conditions qualité sont vérifiées :

- $80\ \% < \bar{x} < 95\ \%$
- $\sigma_x < 15$
- Le pourcentage vaut : 98,33 % est supérieur à 95 %.

Donc le laboratoire peut étiqueter la nouvelle fibre synthétique.

Exercice 47

1- Moyenne et écart-type de la série : $\bar{x} = 44{,}24$ % et $\sigma_x = 1{,}026$ %
2- Confirmation de l'affirmation de l'élève : Nous avons trois critères de validation tels que :

- $44 < \bar{x} < 46$
- $\sigma_x < 1{,}5$
- On a : $[\sigma_x - 2\bar{x}; \sigma_x + 2\bar{x}] = [42{,}18; 46{,}29]$, l'effectif total de cette tranche vaut 98. Et le pourcentage vaut : $\frac{98}{100} = 98$ % qui est supérieur à 95 %.
  Les trois conditions qualité sont vérifiées. Donc l'élève a tort.

10 PRODUIT SCALAIRE

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle de la toiture de la salle de classe des élèves de la seconde C d'un collège arrachée suites aux pluies diluviennes du 13 Octobre 2021***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves de seconde C, le Directeur du collège, le charpentier, Aman, Konan et un élève de première C***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule à Yopougon Ananeraie à Abidjan.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule suites aux pluies diluviennes du 13 Octobre 2021.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : Tirer les poutre du point A au point B.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***La méthode utiliser pour faire parvenir la poutre jusqu'au point B : Départager les deux amis.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident d'étudier les propriétés du produit scalaire***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II - DECOUVERTE DES ACTIVITES

Activité 1 : Produit scalaire de deux vecteurs

Objectif : *Cette activité donne la définition du produit scalaire de deux vecteurs*

Solution

$\|\vec{U}\|$	$\|\vec{V}\|$	$mes\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)$	$\|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)$
2	3	60^0	3
3	$\sqrt{2}$	45^0	3
1	2	0°	2
11	5	90°	0

Solution des exercices de fixation de l'activité 1

1

$\|\vec{U}\|$	$\|\vec{V}\|$	$mes\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)$	$\vec{U}.\vec{V}$
2	1	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
4	3	$\frac{2\pi}{3}$	-6

2 1 – le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel.

2 – Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

3 - $\vec{u}.\vec{v} = 0$ lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

4 - $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

3 1 - $\vec{u}.\vec{v} = 3\sqrt{3}$; 2 - $\vec{u}.\vec{v} = -5$; 3 - $\vec{u}.\vec{v} = 28$; 4 - $\vec{u}.\vec{v} = -216$

Activité 2 Carré scalaire d'un vecteur

Objectif *Cette activité vise à donner la définition du carré scalaire d'un vecteur*

Solution

On a $\vec{U}.\vec{U} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{U}\| \times cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{U}}\right)$

$\vec{U}.\vec{U} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{U}\|$ avec $cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{U}}\right) = 1$

$\vec{U}.\vec{U} = \|\vec{U}\|^2$

Solution des exercices de fixation de l'activité 2

4 $\|\vec{V}\|^2 = 5$

5 $\vec{u}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; $\vec{v}^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

Activité 3 Propriétés du produit scalaire

Objectif *Cette activité permet d'établir les propriétés du produit scalaire*

Solution

1. On a : $-1 \leq cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right) \leq 1$

   $0 \leq \left|cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)\right| \leq 1$

   $\|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \left|cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)\right| \leq \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$

   Donc $|\vec{U}.\vec{V}| \leq \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$
2. On a $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)$ et $cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right) = cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{U}}\right)$

   $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times\ cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{U}}\right)$

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{V}\| \times \|\vec{U}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{U}}\right)$$

Donc $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

3. Si $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont colinéaires et de même sens alors $mes\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right) = 0$.
   On sait que $\cos 0 = 1$
   On obtient $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$
4. Si $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $mes\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right) = \pi$
   On sait que $\cos\pi = -1$
   On obtient $\vec{U}.\vec{V} = -\|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$
5. Si $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont orthogonaux alors $mes\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
   On a $\cos\frac{\pi}{2} = \cos -\frac{\pi}{2} = 0$
   On obtient $\vec{U}.\vec{V} = 0.$

Solution des exercices de fixation de l'activité 3

6 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 25$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = -25$

7 $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$ car $(BA)\perp(BC)$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0$ car $(BH)\perp(AC)$

Activité 4 Interprétation géométrique du produit scalaire

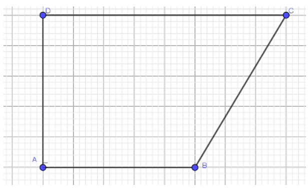
Objectif *Cette activité vise à établir l'interprétation géométrique du produit scalaire du produit scalaire*

Solution

- On a $\vec{U}.\vec{V} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}$ (egalité de chasles)
  $\vec{U}.\vec{V} = \overrightarrow{OB}\,(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA})$
  $\vec{U}.\vec{V} = \overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{KA}$; K est le projeté orthogonal du point A sur (OB) donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{KA}$ sont orthogonaux ($\overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{KA}$ =0).
  $\vec{U}.\vec{V} = \overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OK} = \|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OK}\| \times \cos(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OK})$ avec $\cos(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OK}) = \pm 1\ car\ K\epsilon(OB)$
  Ainsi donc $\vec{U}.\vec{V} = \overline{OB} \times \overline{OK}$
- De même, on démontre que $\vec{U}.\vec{V} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ avec H est le projeté orthogonal du point B sur (OA)
- On en déduit que les nombres $\overline{OA}$x$\overline{OH}$ et $\overline{OB}$x$\overline{OK}$ sont égaux.

Solution des exercices de fixation de l'activité 4

8 ABCD est un trapèze rectangle en A.
AB=5 ; CD=8 . Donc
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = 40$
$\overrightarrow{DC}\,.\overrightarrow{BC} = 24$
$\overrightarrow{BC}\,.\overrightarrow{DA} = -25$



Activité 5 Règles de calculs des produits scalaires

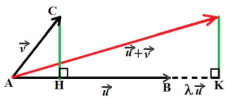
Objectif *Cette activité vise à établir les règles de calculs des produits scalaires*

Solution

Dans toute la suite, on admet les propriétés suivantes :
pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}$ *et* $\vec{v'}$ et tout nombre réel k, on a

(1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v'}$

Soit (A,B) un représentant de $\vec{u}$
Soit (A,C) un représentant de $\vec{v}$
Soit (C,D) un représentant de $\vec{v}'$



$$\vec{u}\left(\vec{v}+\vec{v}'\right) = \overline{AB}\left(\overline{AH}+\overline{HK}\right)$$
$$= \overline{AB}\times\overline{AH}+\overline{AB}\times\overline{HK}$$
$$= \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}'$$

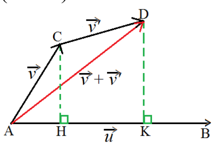
(2) $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

$$\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v} = \left(\lambda.\overline{AB}\right)\times\overline{AH} = \overline{AB}\times\left(\lambda.\overline{AH}\right) = \vec{u}.\left(\lambda\vec{v}\right)$$

$$\vec{u}\left(\lambda.\vec{v}\right) = \overline{AB}\times\left(\lambda.\overline{AH}\right) = \left(\lambda.\overline{AB}\right)\times\overline{AH} = \left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v}$$

$$\vec{u}\left(\lambda.\vec{v}\right) = \overline{AB}\times\left(\lambda.\overline{AH}\right) = \lambda.\left(\overline{AB}\times\overline{AH}\right) = \lambda.\left(\vec{u}.\vec{v}\right) \text{ d'où } \left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda.\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$$

(3) $(\vec{u} + \vec{u'}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u'}.\vec{v}$



$$\vec{u}\left(\vec{v}+\vec{v}'\right) = \overline{AB}\left(\overline{AH}+\overline{HK}\right)$$
$$= \overline{AB}.\overline{AH}+\overline{AB}.\overline{HK}$$
$$= \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}'$$

(4) $(\vec{u} + \vec{u'}).(\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v'} + \vec{u'}.\vec{v} + \vec{u'}.\vec{v'}$

(5) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

(6) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

(7) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Solution des exercices de fixation de l'activité 5

9

1- $\left(3\vec{u}-\vec{v}\right).\left(-\vec{u}+2\vec{v}\right) = -3\vec{u}^2 + 7\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{v}^2 = -52$

2- $\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + 9\vec{v}^2 = 107$

Activité 6 : Relations métriques caractérisant un triangle

Objectif : Cette activité vise à établir les relations métriques caractérisant un triangle rectangle

Solution

1. Le triangle ABC est rectangle A

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BH} \times \overline{BC}$; aussi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ $(\overrightarrow{BA}\, et\, \overrightarrow{AC}\ sont\ orthogonaux \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 0)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2$

Donc $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

2. On a $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

$\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ $(\overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{BC}\ sont\ colineaires)$

$\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BH}^2 + 2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ $(2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HA} = 0. \overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{HA}\ sont\ orthogonaux)$

$\overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BH}^2$

$\overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BH})$

$\overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BH})$

$\overrightarrow{HA}^2 = \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB})$

$HA^2 = \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})$

$HA^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$

Donc $AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$

$$\boxed{AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}}$$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

10

BH = 2,5

HC = 7,5 et AH = $\frac{25\sqrt{3}}{10}$

Activité 7 : Produit scalaire dans un triangle

Objectif : *Cette activité a pour objectif d'établir le théorème d'AL-KASHI.*

Solution

Soit ABC un triangle quelconque. En utilisant l'égalité de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$;

- Démontre que $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

11

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$
$$= \frac{7^2 + 4^2 - 5^2}{2}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 22$$

Activité 8 : **Théorème d'AL-KASHI**

Objectif : *Cette activité vise à établir une relation entre la mesure des côtés d'un triangle et un angle de ce triangle*.

Solution

1- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.\cos\left(A\right)$ d'où

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(\mathrm{A}\right) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$

2- ABC rectangle en A donc $\cos\hat{A} = 0$ donc $a^2 = b^2 + c^2$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

12 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathrm{BC}^2 = 6^2 + 2^2 - 6 \times 2 \times \cos\hat{\mathrm{A}} = 38{,}8 \Rightarrow \mathrm{BC} = 6{,}22$ cm

Activité 9 : **Théorème de la médiane**

Objectif *Cette activité est d'établir le théorème de la médiane.*

Solution

1. On a : $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$

$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)^2$

$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'B}^2\right) + \left(\overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'C}^2\right)$

$AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}\right) + \overrightarrow{A'B}^2 + \overrightarrow{A'C}^2$. $\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0\right)$

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2$ / $(A'B = A'C = \frac{1}{2}BC)$

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$

2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}\right).\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{AA'}\left(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B}\right) + \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$ / $\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

b) Si ABC est rectangle en A alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

On obtient : $AA'^2 - \frac{1}{4}BC^2 = 0$

$$AA'^2 = \frac{1}{4}BC^2$$

$$AA' = \frac{1}{2}BC.$$

Donc ABC est rectangle en A si et seulement si le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

3- a) $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)$ or A' est le milieu du segment [BC] donc $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AA'}$

b) La médiane issue de A est une hauteur donc elle est perpendiculaire à (BC) ainsi donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AA'}=0$ d'où AB = AC ce qui équivaut à ABC est isocèle en A.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9

13 **1-** $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

$AB^2 + AC^2 = 26$

2-$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$

$AB^2 - AC^2 =$

3-$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$

Activité 10 Forme analytique du produit scalaire

Objectif *Cette activité vise à établir l'expression analytique du produit scalaire.*

Solution

1- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ or $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2$, $\vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$ et $\vec{v}^2 = \left\|\vec{v}\right\|^2$ donc

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

2- $\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = xx'\vec{i}^2 + \left(xy'+x'y\right)\vec{i}.\vec{j} + yy'\vec{j}^2$ or $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ est une base orthonormée alors on a : $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ donc $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$ *Cette écriture du produit scalaire est appelée* ***forme analytique*** *du produit scalaire.*

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

14 $\vec{u}.\vec{v} = \left(-3\vec{i}+5\vec{j}\right)\left(\vec{i}-2\vec{j}\right) = -3-10 = -13$

Activité 11 Equation cartésienne d'un cercle

Objectif *Cette activité a pour but d'établir une Équation cartésienne d'un cercle (C) dont on connait un diamètre.*

Solution

$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$M \in (C) \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

L'équation $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ est une équation du cercle (C).

Solution des exercices de fixation de l'activité 11

15 $(x - x_E)(x - x_F) + (y - y_E)(y - y_F) = 0$ est une équation du cercle (C).
$(x - 1)(x - 3) + (y + 2)(y - 4) = 0$ est une équation du cercle (C)

16 Une équation du cercle de diamètre [AB] est ;
$(x + 2)(x - 2) \;+\; (y + 3)(y - 1) = 0.$

III – DES QUESTIONS D'EVALUATION

1

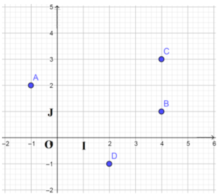
Comment calculer un produit scalaire ?

ABC triangle isocèle en B et I est milieu [AC] donc $AB^2 = AI^2 + BI^2 \Rightarrow AB = \sqrt{34}$

$\cos \text{A} = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos \text{A} = \sqrt{34} \times 6 \times \dfrac{3}{\sqrt{34}} = 18$.

2

Comment calculer la mesure de l'angle AOB de deux vecteurs non nuls ?



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ donc AB=$\sqrt{(4+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(4-2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \Rightarrow$

$-6 = \sqrt{26} \times 2\sqrt{5} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{26} \times \sqrt{5}} \Rightarrow \text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 105,25°$

3

Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?
On considère le repère orthonormal (B,C,A). on a donc A(0 ;1) , D(1 ;1) , I(0 ;1/2) et J(1/2 ;0)

$\overrightarrow{AJ}\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ et $\overrightarrow{DI}\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2} \times (-1) + (-1) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices d'application

Définition et propriété premières

Définitions et premières propriétés

Exercice 1

$1 \to a$; $2 \to c$; $3 \to b$; $4 \to a$; $5 \to c$

Exercice 2

1- V ; 2-F ; 3 -V ; 4 -V ; 5 – V

Exercice 3

1-F ; 2-V ; 3 -F

Propriétés du produit scalaire

Exercice 4

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\| \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = 0$ car $\overrightarrow{AB}$ $et\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AD}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\sqrt{68}$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{DB}\|\|\overrightarrow{CA}\| \cos(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{CA}) = 17\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OA}\| \cos(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}) = -\frac{17}{2}$$

Exercice 5

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$= $\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| \cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ =3x5x0,5=7,5.

Exercice 6

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(-\frac{2\pi}{3})$ =-3
2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\frac{\pi}{6})$ =$40\sqrt{3}$
3) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\frac{3\pi}{4})$=4,5
4) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(120°)$=-196.

Exercice 7

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2} = 2{,}5$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = \vec{AB}.\vec{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 22{,}5$

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2{,}5$

Exercice 8

$\vec{u}.\vec{v} = (-3) \times 1 + 5 \times (-2) = -13$

Exercice 9

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = -3; \|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 5$

$(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{u}\vec{v}+4\vec{v}^2$= 16-12+100 =104 ; $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = 47$

Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{47}$; $(3\vec{u} + 5\vec{v}).(-\vec{u} + 2\vec{v}) = -3\vec{u}^2 + \vec{u}\vec{v}+10\vec{v}^2$=199.

Exercice 10

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 10 et 3.

$\vec{u}.(2\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u}^2 + 3\vec{u}\vec{v}$=200 ; $(\vec{u} - 2\vec{v}).\vec{v}=\vec{u}\vec{v}-2\vec{v}^2$= -18 ;

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$=109.

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2$=109 ; $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})= \vec{u}^2 - \vec{v}^2$=91 ;$(2\vec{u} - \vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 - 4\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2$=409

Exercice 11

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0$
3) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = 0$
4) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = -8$
5) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = 16$

Exercice 12

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\ cos\widehat{BAC}$

$BC^2 = 5-3\sqrt{2}$, soit BC = $\sqrt{5-3\sqrt{2}}$

Exercice 13

On a : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}$. Donc la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 60°.

Exercice 14

1) D'après les données, le triangle ABC est équilatéral. Donc $BC = 16$.
2) Tous les angles de ce triangle ont la même mesure : 60°. (*Pas besoin d'utiliser le théorème Al Kashi ici)*

Exercice 15

$(x-1)(x+5)+(y-3)(y+1)=0$ est une équation du cercle (C)

Exercice 16

$(x-2)(x-4)-(y-3)(y+3)=0$

Théorème de la médiane

Exercice 17

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$.

$2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$, donc AA' = $\sqrt{\frac{71}{2}}$.

Exercice de Renforcement /Approfondissement

Exercice 18

Lire dans l'énoncé QR au lieu de QC

1- Cos $\widehat{QPR} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et mes $\widehat{QPR} = \frac{\pi}{4}$
2- QR = $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ = 2,1

Exercice 19

D'après Al-Kashi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. Comme $AB^2 > 0$, $BC^2 > AC^2$ et donc BC> AC

$Comme\ AC^2 > 0$, $BC^2 > AB^2$ et donc BC > AB

Exercice 20

1- AH x BC = BA x CA d'où le résultat
2- $AH^2 = \frac{AB^2 X AC^2}{BC^2}$. En remplaçant en BC^2 par $AB^2 + AC^2$ et en passant au inverse on obtient le résultat.

Exercice 21

Résulte de la formule de l'aire d'un triangle, calculée de deux manières.

Exercice 22

Méthode analytique

1) Les points A, B et D sont non alignés ; les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, enfin $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = 1$. D'où le résultat.
2) Dans la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$.
3) Dans cette base, on a : $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{FC} = 0$. D'où le résultat.

Méthode géométrique

Dans la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a : $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$

Ensuite on a : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF} = \frac{16}{25}$; $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \frac{1}{25}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}$. La somme donne zéro. D'où le résultat.

Exercice 23

A, B, C et D quatre points du plan

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\vec{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$$

$$=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC})$$

Don**c**, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$.

Exercice 24

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{-6}{-2}$; $\overrightarrow{AC}\binom{6}{8}$; $\overrightarrow{CD}\binom{-4}{12}$; $\overrightarrow{BD}\binom{8}{6}$.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Ces deux relations prouvent que A est l'orthocentre du triangle BCD puisque $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, de même elles prouvent que le point C est l'orthocentre du triangle ABD, que B est l'orthocentre du triangle ACD et D est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 25

On démontre que $\cos\widehat{AIC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Ce nombre est indépendant de a, donc la mesure de l'angle $\widehat{AIC}$ est indépendante de a.

Exercice 26

(vérifier les calculs)

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

Soit K le milieu de $[AB]$, K a pour coordonnées $(1 ; 2)$.

Le cercle de diamètre $[KC]$ a pour équation : $x^2 + y^2 - 7y + 9 = 0$.

Les tangentes issues du point C au cercle de diamètre $[AB]$ passent par les points d'intersection de ces deux cercles. On trouve les points $A_1(\frac{1-\sqrt{65}}{6} ; \frac{17-\sqrt{65}}{6})$ et $A_2(\frac{1+\sqrt{65}}{6} ; \frac{17+\sqrt{65}}{6})$. On vérifiera que les triangles A_1CK et A_2CK sont bien rectangles en A_1 et A_2.

Les équations des deux tangentes sont donc : $(A_1C) : y = -\left(\frac{9+\sqrt{65}}{4}\right)x + \frac{1-\sqrt{65}}{2}$

et $(A_2C) : y = \left(\frac{-9+\sqrt{65}}{4}\right)x + \frac{1+\sqrt{65}}{2}$

Exercice 27

1) Une équation de cette médiatrice est : $2x + y - 5 = 0$.
2) Une équation de ce cercle est : $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$.
3) Une équation de cette tangente est : $y = -2x$

Exercice 28

1) On a :$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 0$. On démontre de même que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$. D'où le résultat.
2) On démontre que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. D'où le résultat.

Exercice 29

1) On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Or $\left|cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right| \leq 1$. D'où le résultat.
2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\left|cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right| = 1$. D'où le résultat.

Exercice 30

1) On sait que pour tous vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a : $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.
   D'où : $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
2) On démontre comme dans la question 1, que $\|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|$. Ces deux inégalités donnent la relation demandée

Exercice 31

On a : $AI = 2\sqrt{2}$.

Exercice 32

1) On a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC} = BC^2$
2) On a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = ca\cos\hat{B}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = ba\cos\hat{C}$ et $BC^2 = a^2$. D'où le résultat.

Exercice 33

1) Soit I le milieu de $[AB]$. On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$. Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - r^2$.
2) On démontre de même que : $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MP} = OM^2 - r^2$.

Exercice 34

En partant de $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, on obtient $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$; on obtient des relations analogues avec BG^2 et CG^2. Leur somme donne la relation demandée

Exercice 35

1) On a : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.
   Donc la somme $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.
   Cette somme donne donc zéro.
2) Le point H est sur la hauteur issue de B du triangle ABC. Donc $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA}$; donc $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$.
   De même $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
3) La relation de 1), est valable pour tout point. Donc en particulier : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
   Donc finalement $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$. Il en résulte $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire que H est sur la hauteur issue de A.
   En conclusion, les trois hauteurs sont concourantes en H.

Exercice 36

1. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos\theta$.

3. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos\theta = AI^2\cos\theta$.

   Or $AI^2 = AJ^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}AB^2$, donc $AI \times AJ = \frac{5}{4}AB^2\cos\theta$.

D'autre part, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{}AD.\overrightarrow{AB}$

$= 0 + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 0$

$= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AB^2 = AB^2$.   Par suite, $\frac{5}{4}AB^2 cos\theta = AB^2 \quad cos\theta = \frac{5}{4} = 0{,}8$.

Donc $\theta \simeq 36{,}87°$.

Exercice 37

1. Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{MI}$, car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ..

2. Pour démontrer que (AH) ⊥ (EF), montrons que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{EF}$, c'est-à-dire

$\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{EF} = 0$.

D'après la question 1,, on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

D'où $\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EA}}_{0} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(AC \times AF \times cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}\right) - AB \times AE \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(AC \times AF \times cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - AF \times AC \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 0$ (avec $\alpha = mes\ \widehat{BAC}$).

<u>Conclusion</u> : les droites (AH) et (EF) sont perpendiculaires.

11 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS ℝ

I - LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle du nombre d'or***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont Fatimah et les élèves de seconde C.***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au Lycée Moderne de Korhogo.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant l'année scolaire.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : s'informer sur le nombre d'or.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Résolution d'équations et d'inéquations dans IR afin de déterminer ce nombre d'or.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident de s'organiser pour s'informer…***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Le professeur fera lire la situation par un élève ou deux (fille et garçon) puis la lira lui-même. Il la fera lire silencieusement par l'ensemble des élèves. Il s'assurera ensuite que les élèves ont bien compris le texte : il leur demandera les mots qui leur semblent difficiles et il pourra expliquer par exemple les mots « encyclopédie », « tournesol », …

II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

Activité 1 Equation dans IR

Objectif *Cette activité vise à écrire une équation en utilisant des fonctions comme membres. Elle permet également de définir les notions d'inconnue et de référentiel.*

Solution

1. L'inconnue est : x
2. $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}$ et $-x+1$ sont les deux membres de l'équation.
3. $x\in\mathbb{R}, f(x)=g(x)$

Solution des exercices de fixation de l'activité 1

1

	Vrai	Faux
$x\in\mathbb{R},\ x^2-2x+7=0$ est une équation dans $\mathbb{R}$.	X	
$xy-x+1=0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.		X

Activité 2 Solution, ensemble de validité d'une équation dans IR

Objectif : *Cette activité permet d'expliciter la notion de solution d'une équation et d'ensemble sur lequel rechercher ces solutions (ensemble de validité).*

Solution

1. a) $f(0)=\frac{1}{2}\quad et\ g(0)=-\frac{5}{2}\ alors\ f(0)\neq g(0)$
   b) $f\left(\frac{3}{2}\right)=-1\ \ et\ g\left(\frac{3}{2}\right)=-1\ \ alors\ f\left(\frac{3}{2}\right)=g(\frac{3}{2})$
2. a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}\ \ et\ \ D_g=\mathbb{R}$
   b) (E) a un sens si et seulement $x\in D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2

2

1- a) V ; b) F ; c) F ; d) V .

2- La solution de (E) est : $-\frac{2}{3}$

Activité 3 Equations équivalentes

Objectif : *La notion d'équations équivalentes sera exploitée dans cette activité. Il convient de la faire résoudre patiemment par les élèves afin d'en tirer la notion désirée.*

Solution

1. a) $S_{\mathbb{R}}(E_1)=\{-2;2\}\ et\quad S_{\mathbb{R}}(E_2)=\{-2;0;\ 2\}$
   b) $S_{\mathbb{R}}(E_3)=\{-1;1\}\ et\quad S_{\mathbb{R}}(E_4)=\{-1;1\}$
2. (E_1) et (E_2) n'ont pas les mêmes ensembles de solutions.
   (E_3) et (E_4) ont le même ensemble de solutions.

Solution des exercices de fixation de l'activité 3

3 (E2) : $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1}$

Soit V l'ensemble de validité de (E2)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \; et \; x + 1 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)(x+1) = (x-2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 3(2x - 1) = 0$$

Alors (E2) et (E3) sont équivalentes sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$

Activité 4 Résolution d'une équation

Objectif *La résolution d'une équation peut conduire à celle d'une équation qui lui est équivalente. C'est pour cela qu'il faut traiter cette activité après l'activité 3.*

Solution

1. a) (E_1) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, 3x + 2 = 0.$

   b) $S_{\mathbb{R}}(E_1) = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$
2. $S_{\mathbb{R}}(E_2) = \emptyset$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

4 a) $-4x + 1 = 0 \Leftrightarrow -4x = -1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

b) $3x + \frac{x+1}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{6x+x+1}{2} = 4$

$$\Leftrightarrow 7x + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow 7x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{1\}$$

c) $2x + 3 = -x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x + x = \frac{2}{3} - 3$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{9}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7}{9}\right\}$$

d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{x+2}{5} = 5 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{5(3x+1)-4(x+2)}{20} = \frac{15+x}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{15x+5-4x-8}{20} = \frac{15+x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x-3}{20} = \frac{15+x}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3(11x-3) = 20(15+x)$$
$$\Leftrightarrow 33x - 9 = 300 + 20x$$
$$\Leftrightarrow 13x = 309$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{309}{13}$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{309}{13}\right\}$

Activités 5 Equations dans IR de la forme *f*(*x*) = g(*x*), où *f* et g sont des polynômes

Objectifs *Cette activité consiste à résoudre des équations dont les membres sont des polynômes.*

Solution

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}}(E) = \{0; -10\}$
2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}}(E) = \left\{-6; -\frac{2}{3}\right\}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 5

5

1.

a) $(x+3)(2x-6) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \; ou \; 2x-6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -3 \; ou \; x = 3$$
$$S_{\mathbb{R}} = \{-3; 3\}$$

b) $x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-9)(x+9) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 9 = 0 \; ou \; x + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 9 \; ou \; x = -9$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-9; 9\}$$

c) $-4x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^2 - (2x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3-2x)(3+2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 - 2x = 0 \; ou \; 3 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \; ou \; x = -\frac{3}{2}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

d) $16x^2 = 49 \Leftrightarrow (4x)^2 - 7^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (4x-7)(4x+7) = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x - 7 = 0 \; ou \; 4x + 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \; ou \; x = -\frac{7}{4}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right\}$$

e) $(x+5)^2 - (3x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = (3x+2)^2$

$\Leftrightarrow x + 5 = 3x + 2 \; ou \; x + 5 = -3x - 2$

$\Leftrightarrow -2x = -3 \; ou \; 4x = -7$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} ou \; x = -\frac{7}{4}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7}{4}; \frac{3}{2}\right\}$$

f) $(2x-3)^2 = (2-3x)^2 \quad \Leftrightarrow 2x - 3 = 2 - 3x \; ou \;\; 2x - 3 = -2 + 3x$

$\Leftrightarrow 5x = 5 \; ou \; x = -1$

$\Leftrightarrow x = 1 ou \; x = -1$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1; 1\}$$

2.

a) $5x = 4x^2 \quad \Leftrightarrow 5x - 4x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(5 - 4x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; 5 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{5}{4}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{0; \frac{5}{4}\right\}$$

b) $x + 2 = 5x^2 + 10 \Leftrightarrow 5x^2 - x + 10 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - x + 8 = 0$

Déterminons la forme canonique

$$5x^2 - x + 8 = 5\left[\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{159}{100}\right]$$

$5x^2 - x + 8$ n'est pas factorisable, alors l'équation n'admet pas de solution.

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

c) $2x^2 - x + 6x - 3 = 0 \;\; \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

Déterminons la forme canonique

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - (\frac{7}{4})^2\right]$$

$5x^2 - x + 8$ est factorisable,

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \; ou \; x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ *ou* $x = -3$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$$

d) $5(x-3) = x^2 - 9 \quad \Leftrightarrow 5(x-3) = (x-3)(x+3)$

$\Leftrightarrow 5(x-3) - (x-3)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)[5-(x+3)] = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ *ou* $-x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ *ou* $x = 2$

$$S_{\mathbb{R}} = \{2; 3\}$$

e) $2x^2 - 6x + 10 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 6x + 10 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

$$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$$

f) $(x-1)^2 + (x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ *ou* $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$

$$S_{\mathbb{R}} = \{0; 1\}$$

g) $2x^3 - 2x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x(x^2-1) = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 2x(x^2-1) - (x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ *ou* $x + 1 = 0$ *ou* $2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$ *ou* $x = \frac{1}{2}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-1; \frac{1}{2}; 1\right\}$$

h) $4 - x^2 = 2x^2 + 14x + 20 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) = (2x+10)(x+2)$

$\Leftrightarrow (2-x)(2+x) - (2x+10)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)[(2-x)-(2x+10)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(-3x-8) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ *ou* $-3x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ *ou* $x = -\frac{8}{3}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{8}{3}; -2\right\}$$

Activité 6 Equations dans IR de la forme *f*(*x*) = g(*x*) où *f* et g sont des fractions rationnelles

Objectifs *Cette activité consiste à résoudre des équations dont les membres sont des fractions rationnelles.*

Solution

1. L'ensemble de validité de l'équation est $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x + 1 = 2x + 5$. D'où $S_{\mathbb{R}}(E) = \{-4\}$
2. L'ensemble de validité de l'équation est $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{3}{5}\right\}$
   $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{3}{5}\right\}, 3x^2 - 20x = 0$. D'où $S_{\mathbb{R}}(E) = \left\{0; \frac{20}{3}\right\}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

6 **1 -**

a) $2 = \frac{x+3}{x}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x \neq 0$$
$$V = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$2 = \frac{x+3}{x} \Leftrightarrow 2x = x + 3$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

$3 \in V$, alors

$$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$$

b) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 et\ x + 1 \neq 0$$
$$V = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = x - 2\ ou\ x + 1 = -x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \in V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+1}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 2x - 1 \neq 0 et\ 2x + 1 \neq 0$$
$$V = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{x+3}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+1} \Leftrightarrow (x+3)(2x+1) = (x-2)(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 6x + 3 = 2x^2 - x - 4x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 - 5x + 2$$
$$\Leftrightarrow 12x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \text{ or } -\frac{1}{12} \in V, \text{alors } S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$$

d)

$$\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x}$$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x^2 + x \neq 0 et\ x \neq 0$$

$$V = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$$

$$\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow x(2x^2+4x+3) = (x^2+x)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 3x = 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 4x^2 + 3x = 2x^3 + 3x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = -2$$

$-2 \in V\ et\ 0 \notin V$, alors

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$$

e) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{x^2+x-2}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 et\ x + 2 \neq 0\ et x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{x^2+x-2} \Leftrightarrow \frac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{x^2+x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{5}{x^2+x-2}$$

Or $3 \neq 5$, alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

2-

a) $\frac{3x-1}{x-1} = \frac{6x-9}{2x-5}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 1 \neq 0\ et\ 2x - 5 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R}\backslash\left\{1; \frac{5}{2}\right\}$$

$$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{6x-9}{2x-5} \Leftrightarrow (2x-5)(3x-1) = (x-1)(6x-9)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 2x - 15x + 5 = 6x^2 - 9x - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 17x + 5 = 6x^2 - 15x + 9$$

$$\Leftrightarrow -2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$-2 \in V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

b) $\frac{2x+5}{x-3} = \frac{2x-3}{x+5}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 3 \neq 0 \; et \; x + 5 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R} \backslash \{-5; 3\}$$

$$\frac{2x+5}{x-3} = \frac{2x-3}{x+5} \Leftrightarrow (2x+5)(x+5) = (2x-3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 5x + 25 = 2x^2 - 6x - 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 15x + 25 = 2x^2 - 9x + 9$$

$$\Leftrightarrow 24x = -16$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$-\frac{2}{3} \in V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

c) $\frac{5}{x+2} = \frac{1}{-2x+3}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x + 2 \neq 0 \; et - 2x + 3 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R} \backslash \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{5}{x+2} = \frac{1}{-2x+3} \Leftrightarrow 5(-2x+3) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow -11x = -13$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{11}$$

$\frac{13}{11} \in V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{13}{11}\right\}$

d) $\frac{-2}{2x+7} = \frac{-2}{-x+4}$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 2x + 7 \neq 0 \; et - x + 4 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{7}{2}; 4\right\}$$

$$\frac{-2}{2x+7} = \frac{-2}{-x+4} \Leftrightarrow 2x + 7 = -x + 4$$

$$\Leftrightarrow 3x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$-1 \in V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

Activité 7 Equations dans IR avec valeur absolue

Objectif *Cette activité consiste à résoudre des équations dont les membres contiennent des valeurs absolues*

Solution

- $|x+3| = 1 \Leftrightarrow x+3 = 1\ ou - (x+3) = 1 \Leftrightarrow x \in \{-4; -2\}$. D'où $S_{\mathbb{R}} = \{-4;\ -2\}$.
- $|2x-4| = |x+1| \Leftrightarrow 2x-4 = x+1\ ou - (2x-4) = x+1 \Leftrightarrow x = 5\ ou\ x = 1$. D'où $S_{\mathbb{R}} = \{1;\ 5\}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

7

a) $|x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2\ ou\ x+1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -3$

$S_{\mathbb{R}} = \{-3; 1\}$

b) $|-3x-1| = -2$

$-2 < 0$, alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

c) $|2x-1| = |3x+1| \Leftrightarrow 2x-1 = 3x+1\ ou\ 2x-1 = -3x-1$

$\Leftrightarrow -x = 2\ ou\ 5x = 0$

$\Leftrightarrow x = -2\ ou\ x = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2; 0\}$

d) $|4x+2| = 3 \Leftrightarrow 4x+2 = 3\ ou\ 4x+2 = -3$

$\Leftrightarrow 4x = 1\ ou\ 4x = -5$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ ou\ x = -\frac{5}{4}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right\}$

e) $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [0; +\infty[$

f) $|2x-3| = 5x+4$

Déterminons l'ensemble de validité

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 5x+4 \geq 0$$

$$V = \left[-\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

$|2x-3| = 5x+4 \quad \Leftrightarrow 2x-3 = 5x+4\ ou\ 2x-3 = -5x-4$

$\Leftrightarrow -3x = 7\ ou\ 7x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \quad ou\ x = -\frac{1}{7}$

$-\frac{1}{7} \in V\ et - \frac{7}{3} \notin V$, alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{7}\right\}$

Activité 8: **Inéquations dans** $\mathbb{R}$.

Objectif *Cette activité vise à écrire une inéquation en utilisant des fonctions comme membres. Elle permet également de définir les notions d'inconnue et de référentiel.*

Solution

1. L'inconnue est : x
2. $3x - \frac{1}{2}$ et $2x + 4$ sont les deux membres de l'équation.
3. $x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

8 a) V ; b) F

Activité 9 Solution d'une inéquation, ensemble de validité d'une inéquation

Objectif *Cette activité permet d'expliciter la notion de solution d'une inéquation et d'ensemble sur lequel rechercher ces solutions (ensemble de validité).*

Solution

1. a) $f(1) = 7$ et $g(1) = -2$ $alors$ $f(1) > g(1)$

b) $f(-2) = -2$ et $g(-2) = \frac{1}{7}$ $alors$ $f(-2) < g(-2)$

2. a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) (I) a un sens si et seulement $x \in D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9

9 1 – V ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – F

10 Les nombres qui sont solutions de (I) sont : $-20;\ -9;\ -8; 0\ ; 2$

Activité 10: **Inéquations équivalentes**.

Objectif : *La notion d'inéquations équivalentes sera exploitée dans cette activité. Il convient de la faire résoudre patiemment par les élèves afin d'en tirer la notion désirée.*

Solution

1. a) $S_{\mathbb{R}}(I_1) =]-1; 1[$ et $S_{\mathbb{R}}(I_2) =]-1; 1[$

b) $S_{\mathbb{R}}(I_3) =]0; 9[$ et $S_{\mathbb{R}}(I_4) =]-\infty; 9[$

2. (I_1) et (I_2) ont le même ensemble de solutions.

(I_3) et (I_4) n'ont pas les mêmes ensembles de solutions.

Solution des exercices de fixation de l'activité 10

11 Relie chacune des inéquations de la colonne A à l'inéquation de la colonne B qui lui est équivalente.

A	B
$\frac{2x+3}{x+1} < x$	$(x-1)(x-3) > 0$
$x - 3 < x^2 - 3x$	$\frac{x^2}{x-1} < 0$
$\frac{x^2+x-1}{x-1} < 1$	$\frac{2-x^2}{x+1} < -1$

Activité 11: **Résolution d'une inéquation**

Objectif *La résolution d'une inéquation peut conduire à celle d'une inéquation qui lui est équivalente. C'est pour cela qu'il faut traiter cette activité après l'activité 10.*

Solution

1. a) $(I_1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, -3x + 1 < 0$.

   b) $S_{\mathbb{R}}(I_1) = \left]\frac{1}{3};\ +\infty\right[$

2. $S_{\mathbb{R}}(I_2) = \emptyset$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 11

12 a) $-2x + 7 \geq 1 \Leftrightarrow -2x \geq 1 - 7$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -6$$
$$\Leftrightarrow 2x \leq 6$$
$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 3]$$

a) $3x - \frac{x-2}{5} > \frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow \frac{15x-x+2}{5} > \frac{1-4x}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{14x+2}{5} - \frac{1-4x}{2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{28x+4-5+20x}{10} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{48x-1}{10} > 0$$
$$\Leftrightarrow 48x - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{48}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{1}{48}; +\infty\right[$$

b) $x+5 \leq \frac{x+5}{7} - x + 3 \Leftrightarrow x + 5 + x - 3 - \frac{x+5}{7} \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2 - \frac{x+5}{7} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{14x+14-x-5}{7} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{13x+9}{7} \leq 0$

$\Leftrightarrow 13x + 9 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{9}{13}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{9}{13}\right]$$

c) $\frac{x+7}{2} - \frac{3x-2}{7} < \frac{x+4}{18} - 1 \Leftrightarrow \frac{7x+49-6x+4}{14} < \frac{x+4-18}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{x+53}{14} - \frac{x-14}{18} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{9x+477-7x+98}{126} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+575}{126} < 0$

$\Leftrightarrow 2x + 575 < 0$

$\Leftrightarrow x < -\frac{575}{2}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{575}{2}\right[$$

Activité 12: Inéquations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des polynômes

Objectif *Cette activité consiste à résoudre des inéquations ayant des polynômes pour membres.*

Solution

1. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$
2. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]-4; 1[$
3. $f(x) \leq g(x)$) $\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]-2\sqrt{2}; -1[$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 12

13 **a)** $x^2 + 2 \geq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$on\ a: x^2 + 2 \geq 2 \geq 0$$

$$alors, S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

b) $(-2x+1)^2+4<0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-2x+1)^2 \geq 0$$
$$on\ a: (-2x+1)^2+4 \geq 4 > 0$$

$$alors, S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

c) $(3x+5)^2 \leq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (3x+5)^2 \geq 0$$

On a : $(3x+5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3x+5=0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$$alors, S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

d) $x^2-4<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0$
Déterminons les zéros
$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0\ ou\ x+2=0$
$\Leftrightarrow x=2\ ou\ x=-2$
Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\boldsymbol{x+2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\boldsymbol{x-2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S_{\mathbb{R}} =]-2; 2[$$

e) $25-4x^2>0 \Leftrightarrow 5^2-(2x)^2>0$
$\Leftrightarrow (5-2x)(5+2x)>0$
Déterminons les zéros
$(5-2x)(5+2x)=0 \Leftrightarrow 5-2x=0\ ou\ 5+2x=0$
$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\ ou\ x=-\frac{5}{2}$
Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$\boldsymbol{x-\frac{5}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{x+\frac{5}{2}}$		$-$	0	$+$		$+$	
$25-4x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right[$$

f) $(3x+1)^2 \leq (x-3)^2 \Leftrightarrow (3x+1)^2 - (x-3)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow [(3x+1)-(x-3)][(3x+1)+(x-3)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+4)(4x-2) \leq 0$$

Déterminons les zéros

$(2x+4)(4x-2) = 0 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \; ou \; 4x-2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -2 \; ou \; x = \frac{1}{2}$$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\mathbf{2}$		$\mathbf{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$\mathbf{2x+4}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{4x-2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(4x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

g) $5 - x^2 > 9 \Leftrightarrow 5 - x^2 - 9 > 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$on\ a: x^2 + 4 \geq 4 \geq 0 \quad alors, S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

h) $(x+3) \geq (x^2-9)(4x+1) \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) - (x^2-9)(4x+1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) - (x-3)(x+3)(4x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)[(x-3)-(4x+1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(-3x-4) \geq 0$$

Déterminons les zéros

$(x-3)(x+3)(-3x-4) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \; ou \; x+3 = 0 \; ou - 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \; ou \; x = -3 \; ou \; x = -\frac{4}{3}$$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\mathbf{3}$		$-\mathbf{\frac{4}{3}}$		$\mathbf{3}$		$+\infty$
$\mathbf{x-3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{x+3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x-4$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(x+3)(-3x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -3] \cup \left[-\frac{4}{3}; 3\right]$

<u>Activité 13</u>: Inéquations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles.

Objectif *Cette activité consiste à résoudre des inéquations ayant des fractions rationnelles pour membres.*

Solution

1. L'ensemble de validité de l'équation est $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$

   $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}, \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)(x+2)} < 0.$

   D'où $S_{\mathbb{R}} = \left]-2; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-1; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right[$

2. L'ensemble de validité de l'équation est $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$

   $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}, \frac{-26x^2+12x}{(2x+3)(x-3)} \geq 0.$

   D'où $S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{3}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{6}{13}; 3\right[$

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 13

14 a) $\frac{5}{x-2} - \frac{4}{x+2} < \frac{3}{x^2-4}$

Déterminons l'ensemble de validité V

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \; et \; x + 2 \neq 0 \; et \; x^2 - 4 \neq 0$$
$$V = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$\frac{5}{x-2} - \frac{4}{x+2} < \frac{3}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{5x+10-4x+8}{(x-2)(x+2)} < \frac{3}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+18}{(x-2)(x+2)} < \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+18-3}{(x-2)(x+2)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+15}{(x-2)(x+2)} < 0$$

Déterminons les zéros

$x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -15$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		-15		-2		2		$+\infty$
$\boldsymbol{x+15}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\boldsymbol{x+2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+15}{(x-2)(x+2)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -15] \cup]-2; 2[$

b) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+3}>0$

Déterminons l'ensemble de validité V

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \; et \; x-2 \neq 0 \; et \; x+3 \neq 0$$
$$V = \mathbb{R}\backslash\{-3;-1;2\}$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+3}>0 \Leftrightarrow \frac{x-2+2x+2}{(x+1)(x-2)}-\frac{3}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{(x+1)(x-2)}-\frac{3}{x+3}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x(x+3)-3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+9x-3x^2+3x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{12x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)}>0$$

Déterminons les zéros

$12x+6=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		-3		-1		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$12x+6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{12x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-3[\cup \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$

c) $\frac{x-2}{x}-\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-x}\leq 0$

Déterminons l'ensemble de validité V

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x \neq 0 \; et \; x-1 \neq 0 \; et \; x^2-x \neq 0$$
$$V = \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$$

$$\frac{x-2}{x}-\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-x}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)-x^2}{x(x-1)}+\frac{2}{x(x-1)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2x+2-x^2}{x(x-1)}+\frac{2}{x(x-1)}\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3x+2}{x(x-1)}+\frac{2}{x(x-1)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+4}{x(x-1)} \leq 0$$

Déterminons les zéros

$-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{\frac{4}{3}}$		$+\infty$
$\mathbf{-3x+4}$		+		+		+	0	−	
$\boldsymbol{x}$		−	0	+		+		+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
$\frac{-3x+4}{x(x-1)}$		+	‖	−	‖	+	0	−	

$S_{\mathbb{R}} =]0;1[\cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

d) $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1} \geq \frac{4x^2+6}{4x^2-1}$

Déterminons l'ensemble de validité V.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \; et \; 2x+1 \neq 0 \; et \; 4x^2-1 \neq 0$$

$$V = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1} \geq \frac{4x^2+6}{4x^2-1} \Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{4x^2+6}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+4x+1+4x^2-4x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{4x^2+6}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^2+2}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{4x^2+6}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^2+2-4x^2-6}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-4}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-2)(2x+2)}{(2x-1)(2x+1)} \geq 0$$

Déterminons les zéros

$(2x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \; ou \; 2x+2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = -1$$

Dressons le tableau de signe

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{2x+2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(2x-2)(2x+2)}{(2x-1)(2x+1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-1] \cup \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\cup [1;+\infty[$$

Activité 14 Inéquations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue.

Objectif *Cette activité consiste à résoudre des inéquations dont les membres ont des valeurs absolues.*

Solution

- $|x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow x \in]1;5[$. D'où $S_{\mathbb{R}} =]1;5[$
- $|2x-4| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2x-4 \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right]$. D'où $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right]$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 14

15 **a)** $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2$

$$\Leftrightarrow -2+4 < x < 2+4$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 6$$

$$S_{\mathbb{R}} =]2;6[$$

b) $|2x+3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x+3 \leq 1$

$\Leftrightarrow -1-3 \leq 2x \leq 1-3$

$\Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq -2$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$ donc $S_{\mathbb{R}} = [-2;-1]$

c) $|-2x+3| + |x-6| \leq 0$

$on\ sait\ que\ \forall x \in \mathbb{R}, |-2x+3| \geq 0\ et\ |x-6| \geq 0$

$Alors\ \ |-2x+3| + |x-6| > 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

d) $|x+4| \leq x+4 \Leftrightarrow x+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -4$ donc $S_{\mathbb{R}} = [-4;+\infty[$

e) $|x+2| < x+5 \Leftrightarrow x+5 \geq 0\ et\ (x+2)^2 < (x+5)^2$

$\Leftrightarrow x \geq -5 \; et \; x^2 + 4x + 4 < x^2 + 10x + 25$

$\Leftrightarrow x \geq -5 \; et \; x^2 + 4x + 4 < x^2 + 10x + 25$

$\Leftrightarrow x \geq -5 \; et \; x > -\frac{21}{6}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{21}{6}; +\infty\right[$

III - DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	**Comment vérifier qu'un nombre réel est solution d'une équation ?** La solution de (E) est -4
2	**Comment vérifier qu'un nombre réel est solution d'une inéquation ?** Les solutions de l'inéquation : (I) sont : $-1; 0\,; \frac{1}{2}\; et\; 1$.

3	**Comment résoudre une équation dont les membres sont des polynômes ?** (E_1) : $2x + 3 = (x + 4)(2x + 3)$. $2x + 3 = (x + 4)(2x + 3) \Leftrightarrow (2x+3)[x+4-1] = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -\frac{3}{2}$ Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-3; -\frac{3}{2}\right\}$ (E_2) : $(3x + 1)^2 = (x + 3)^2$ $(3x + 1)^2 = (x + 3)^2$ $\Leftrightarrow (3x+1)^2 - (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (4x+4)(2x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ Donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 1\}$

4	**Comment résoudre une inéquation dont les membres sont des polynômes ?** (I) : $2x^3 + 2x^2 > x^3 - 5x^2$. $2x^3 + 2x^2 > x^3 - 5x^2 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - x^3 + 5x^2 > 0$. $\Leftrightarrow x^3 + 7x^2 > 0$ $\Leftrightarrow x^2(x + 7) > 0$ $S_{\mathbb{R}} =]-7; 0[\cup]0; +\infty[$
5	**Comment résoudre une équation dont les membres sont des fractions rationnelles?** L'ensemble de validité V_E de l'équation est $\mathbb{R}\backslash\{-2; -1\}$ $\frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = (x+1)^2$ $\Leftrightarrow -2x - 5 = 0$ $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

6	**Comment résoudre une inéquation dont les membres sont des fractions rationnelles?** Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I): $2 - \frac{3}{x} > \frac{2}{x+1}$ L'ensemble de validité V_I de l'inéquation est $\mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$ $2 - \frac{3}{x} > \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x} - \frac{2}{x+1} > 0$. $\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-3}{x(x+1)} > 0$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -1[\cup \left]\frac{3-\sqrt{33}}{4}; 0\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{33}}{4}; +\infty\right[$

7	**Comment résoudre une équation dont les membres comportent une valeur absolue?** (E_1): $\left\lvert\frac{x-2}{x+1}\right\rvert = \left\lvert\frac{x+1}{x+2}\right\rvert$ L'ensemble de validité V_E de l'équation est $\mathbb{R}\backslash\{-2;-1\}$ $\left\lvert\frac{x-2}{x+1}\right\rvert = \left\lvert\frac{x+1}{x+2}\right\rvert \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}\ ou\ \frac{x-2}{x+1} = -\frac{x+1}{x+2}$ $\Leftrightarrow -2x-5=0\ ou\ 2x^2+2x-3=0$ $\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}\ ou\ x=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\ ou\ x=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{2};\frac{-1-\sqrt{7}}{2};\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}$ (E_2): $\lvert -3x-4\rvert = 1$ L'ensemble de validité V_E de l'équation est $\mathbb{R}$ $\lvert -3x-4\rvert = 1 \Leftrightarrow -3x-4=1\ ou -3x-4=-1$ $\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}\ ou\ x=-1$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{3};\ -1\right\}$

8	**Comment résoudre une inéquation dont les membres comportent une valeur absolue?** **Exercice 1** (I) : $\lvert x-4\rvert \le 3x$ L'ensemble de validité V_I de l'inéquation est $[0;+\infty[$ $\lvert x-4\rvert \le 3x \Leftrightarrow (x-4)^2 \le (3x)^2$ $\Leftrightarrow -8x^2-8x+16 \le 0$ $S_{\mathbb{R}} = [1;+\infty[$ **Exercice 2** a) $\lvert x\rvert \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ donc $S_{\mathbb{R}}$ = [-1 ; 1] b) $\lvert x-3\rvert \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ donc $S_{\mathbb{R}}$ = [1 ; 5] c) $\lvert x+3\rvert \le 9 \Leftrightarrow -12 \le x \le 6$ donc $S_{\mathbb{R}}$ = [-12 ; 6] d) $\lvert 2x\rvert \le -1$ donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$ **Exercice 3** a) $\lvert 3x-5\rvert \le \lvert x-7\rvert \Leftrightarrow (3x-5)^2 \le (x-7)^2$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \le 0$ donc $S_{\mathbb{R}}$ = [-1 ; 3] b) $\lvert x^2-5x+13\rvert \succ \lvert 6x-15\rvert \Leftrightarrow x^2-5x+13 \succ \lvert 6x-15\rvert$ car pour tout réel x, $x^2-5x+13>0$ Pour $x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ on a $x^2-5x+3 \succ -6x+15 \Leftrightarrow x^2+x-12 \succ 0$ donc S_1 =]-∞ ;1[Pour $x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ on a $x^2-5x+3 \succ 6x-15 \Leftrightarrow x^2-11x+18 \succ 0$ donc S_2 =]4 ;+∞[$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

Exercice 1

Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
$x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + 5x - 3 = 0$ est une équation dans $\mathbb{R}$.	X	
$xy - 3x - 1 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.		X
$t \in \mathbb{R}, t^4 + t = -3t^2 - 4$ est une équation dans $\mathbb{R}$	X	
L'équation $x \in \mathbb{N}, 5x^2 + 6x - 4 = 0$ a pour référentiel $\mathbb{R}$		X

Exercice 2

Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
l'inéquation $x \in \mathbb{R},\ -2x^2 - x + 3 \leq 0$ a pour référentiel $\mathbb{R}$.	X	
$x^2 - 3xy + 1 < 0$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$.		X
$t \in \mathbb{R}, t^2 - t \geq -t^2 + 1$ est une inéquation dans $\mathbb{R}$	X	
$x \in \mathbb{R}, 5x^2 - x + 2 > 0$ est une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$	X	

Solutions d'une équation et d'une inéquation, ensemble de validité

Exercice 3 :

Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
0 est une solution de l'équation $x \in \mathbb{R}, x(3x + 2) = 0$.	X	
-1 est solution de l'inéquation $x \in \mathbb{R}, \frac{x+1}{x} \leq 2x$.		X
L'équation $x \in \mathbb{R}, \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+1} = 0$ admet pour solutions -3 et 1.	X	
L'ensemble des solutions de l'équation $(x - 2)(2x + 1) = 0$ est $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$		X
L'inéquation $x \in \mathbb{R}, x^2 + \sqrt{2} > 0$ admet deux solutions distinctes		X

Exercice 4 :

Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
0 est un élément de l'ensemble de validité de l'équation $x \in \mathbb{R}, \frac{x^2+3}{x} = x - 3$		X
0 est un élément de l'ensemble de validité de l'équation $x \in \mathbb{R}, \frac{x^2(x-1)}{x+1} \geq 2x$	X	
L'ensemble de validité de l'équation $x \in \mathbb{R},\ -3x^2 + 4 = 9$ est $\mathbb{R}$	X	
L'ensemble de validité de l'inéquation $x \in \mathbb{R},\ \frac{x-2}{x^2+2} = 2x$ est $\mathbb{R}$	X	

Exercice 5

On considère l'équation suivante (E): $x \in \mathbb{R}, \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-1}{x}$

La solution est : $-\frac{1}{2}$

Exercice 6

On considère l'inéquation suivante (I): $x \in \mathbb{R}, 3x - 4 \leq x - 1$

Les solutions sont : $-1; 0; 1; \frac{3}{2}$

Equations et inéquations équivalentes

Exercice 7

(E_2) *et* (E_4) sont équivalentes sur $\mathbb{R}\backslash\{-3; 1\}$

(E_1) *et* (E_3) sont équivalentes sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Exercice 8

Relie chacune des inéquations de la colonne A à l'inéquation de la colonne B qui lui est équivalente

A	B
$\frac{x+3}{x-1} < \frac{3x-1}{x}$	$(x-2)(x+1) > 0$
$x^2 - 4 > x - 2$	$\frac{2x^2}{x-2} < 0$
$\frac{2x^2 - x + 2}{x-2} < -1$	$\frac{2x^2 - 7x + 1}{x(x-1)} > 0$

Equations et inéquations dont les membres sont des polynômes

Exercice 9

a) $2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$

b) $\frac{x+3}{2} + \frac{2x-1}{3} = 2 - x \Leftrightarrow \frac{7x+7}{6} = 2 - x$

$\Leftrightarrow 13x - 5 = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5}{13}\right\}$

c) $(3x-1)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2x + 3 \text{ ou } 3x - 1 = -2x - 3$

$\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou } x = -\frac{2}{5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{5}; 4\right\}$

d) $(x-5)^2 = (x-5)(3x+4) \Leftrightarrow (x-5)(-2x-9) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -\frac{9}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{9}{2}; 5\right\}$

e) $5x - \frac{8x-3}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 3 = -1$

$\Leftrightarrow x = -2$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

f) $81x^2 - 6 = 10 \Leftrightarrow 81x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (9x-4)(9x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{9}\ ou\ x = -\frac{4}{9}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right\}$

Exercice 10

a) $5x + 4 > 7x + 2 \Leftrightarrow -2x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x < 1$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 1[$

$b)$ $2x - \frac{x-1}{2} \geq \frac{1}{3} - 3x \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2} - \frac{1-9x}{3} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{27x+1}{6} \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{27}$

$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{-1}{27}; +\infty\right[$

c) $x + 2 - \frac{x-1}{3} \leq x - 3 \Leftrightarrow \frac{-x+16}{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 16$

$S_{\mathbb{R}} = [16; +\infty[$

d) $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

e) $(3x+2)^2 < (x-1)^2 \Leftrightarrow (2x+3)(4x+1) < 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right[$

f) $(x-2)^2(x+2) \leq (x^2-4)(2x-3) \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(-x+1) \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [-2; 1] \cup [2; +\infty[$

Equations et inéquations dont les membres sont des fractions rationnelles

Exercice 11

a) $\frac{-x+5}{x-1} = 3$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\frac{-x+5}{x-1} = 3 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$
$$S_{\mathbb{R}} = \{2\}$$

b) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

c) $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{x-2}{x+3}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$

$$\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow 12x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12}$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x^2-x-6}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x^2-x-6} \Leftrightarrow x - 11 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 11$$
$$S_{\mathbb{R}} = \{11\}$$

e) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2} = \frac{x+1}{x}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\frac{3x^2+2x-1}{x^2} = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$$

f) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+3}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-3;-1\}$

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow x^2+x+8=0$$

$$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$$

Exercice 12

a) $\frac{3}{x-4}>\frac{2}{x+4}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-4;4\}$

$$\frac{3}{x-4}>\frac{2}{x+4} \Leftrightarrow \frac{x+20}{(x-4)(x+4)}>0$$

$$S_{\mathbb{R}}=]-20;-4[\cup]4;+\infty[$$

b) $x+4 \geq \frac{x}{x+1}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$x+4 \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x+1}>0$

$$S_{\mathbb{R}}=]-1;+\infty[$$

c) $\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1} \leq \frac{1}{x^2-1}$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$

$\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1} \leq \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x-8}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty;-1[\cup]1;8]$

d) $\frac{2-x}{x-1}+\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{x(x-1)}<0$

L'ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$$\frac{2-x}{x-1}+\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{x(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x}<0$$

$$S_{\mathbb{R}}=]-1;0[$$

e) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{3x+1}{3x-1}>\frac{9x^2+11}{9x^2-1}$

L’ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$

$$\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{3x+1}{3x-1}>\frac{9x^2+11}{9x^2-1}\Leftrightarrow\frac{9(x-1)(x+1)}{(3x-1)(3x+1)}>0$$

$$S_{\mathbb{R}}=]-\infty;-1[\cup\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$$

f) $\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}\leq-4$

L’ensemble de validité est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}\leq-4\Leftrightarrow\frac{\left(2x+8+\sqrt{60}\right)(2x+8-\sqrt{60})}{8x}\leq 0$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\frac{-8-\sqrt{60}}{2}\right]\cup\left[\frac{-8+\sqrt{60}}{2};0\right[$$

Equations et inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues

Exercice 13

a) $|x-2|=3\Leftrightarrow x-2=3\ ou\ x-2=-3$
$\Leftrightarrow x=-1\ \ ou\ x=5$

$$S_{\mathbb{R}}=\{-1;5\}$$

b) $|-x+3|=-1$

$$-1<0\,,alors\ S_{\mathbb{R}}=\emptyset$$

c) $|-3x+2|=5\Leftrightarrow-3x+2=5\ ou-3x+2=-5$

$\Leftrightarrow x=-1\ \ \ ou\ x=\frac{7}{3}$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-1;\frac{7}{3}\right\}$$

d) $|3x+1|=|-2x+6|\Leftrightarrow 3x+1=-2x+6\ \ ou\ 3x+1=2x-6$

$\Leftrightarrow x=1\ \ ou\ x=-7$

$$S_{\mathbb{R}}=\{-7;1\}$$

$e)$ $|x+1|=x+1$

l’ensemble de validité est $[-1;+\infty[$

$$S_{\mathbb{R}}=[-1;+\infty[$$

f) $|3-2x| = 4x+1$

l'ensemble de validité est $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$|3-2x| = 4x+1 \Leftrightarrow 3-2x = 4x+1 \;\; ou \; 3-2x = -4x-1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \;\; ou \; x = -2$$

$-2 \notin \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[, \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 14

a) $|x+3| < 3 \Leftrightarrow -6 < x < 0$

$$S_{\mathbb{R}} =]-6; 0[$$

b)$|2x-1| \leq 7 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$

$$S_{\mathbb{R}} = [-3; 4]$$

c) $|-5x-14| < -9$

$$-9 < 0 \,, alors \; S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

d)$|x-1| < x-1$

l'ensemble de validité est $]1; +\infty[$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

e) $|x+3| \leq x+6$

l'ensemble de validité est $[-6; +\infty[$

$|x+3| \leq x+6 \Leftrightarrow -(2x+9) \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{9}{2}; +\infty\right[$

f) $|3x-4| < x-3$

l'ensemble de validité est $[3; +\infty[$

$$|3x-4| < x-3 \Leftrightarrow (2x-1)(4x-7) < 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

Exercice 15

Soient $n, n+1 \; et \; n+2$ les trois nombres entiers naturels consécutifs.

On a : $n+(n+1)+(n+2)=69 \Leftrightarrow 3n+3=69$

$$\Leftrightarrow n=22$$

Les trois nombres entiers naturels sont : 22, 23 et 24.

Exercice 16

Soit y l'âge du père et x l'âge de Samira

On obtient : $2x+6=x+27 \Leftrightarrow x=21$

Comme $x=21 \; alors \; y=48$

L'âge de Samira est 21 ans et celui de son père est 48ans

Exercice 17

Soit x la part de l'aîné, y la part du deuxième et z la part du troisième.

On a : $z+15+z+5+z=80 \Leftrightarrow 3z+20=80$

$$\Leftrightarrow z=20$$

Donc $z=20, y=25 \; et \; x=35$

L'aîné a 35 moutons, le deuxième 25 moutons et le troisième 20 moutons.

Exercice 18

a) $(2x+1)^2-(x+2)^2=x(x+1) \Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow x-\frac{3}{2}=0 \; ou \; x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \; ou \; x=-1$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-1;\ \frac{3}{2}\right\}$$

b) $(x+3)^2=(2x+6)(5-3x) \Leftrightarrow (x+3)(7x-7)=0$

$$\Leftrightarrow x+3=0 \; ou \; 7x-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \; ou \; x=1$$

$$S_{\mathbb{R}}=\{-3;\ 1\}$$

c) $16(x+1)^2=36(2x-1)^2 \Leftrightarrow (-8x+10)(16x-2)=0$

$$\Leftrightarrow -8x+10=0 \; ou \; 16x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \; ou \; x=\frac{1}{8}$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{8};\ \frac{5}{4}\right\}$$

d) $(5x^2-x-2)^2-(4x^2+x-2)^2=0 \Leftrightarrow x(x-2)(3x-2)(3x+2)=0$

$$\Leftrightarrow x=0 \; ou \; x-2=0 \; ou \; 3x-2=0 \; ou \; 3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \; ou \; x=2 \; ou \; x=\frac{2}{3} \; ou \; x=-\frac{2}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}; 0;\ \frac{2}{3}; 2\right\}$$

e) $(x+1)(x+2)(x+3) = (x+2)(x+3)(x+4 \Leftrightarrow -3(x+2)(x+3) = 0$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \; ou \; x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \; ou \; x = -3$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-3;\ -2\}$$

Exercice 19

a) $-2x(x-1) \leq x^2 \Leftrightarrow x(-3x+2) \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;\ 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$

b) $16x^2 - 9 > (x+1)(3-4x) \Leftrightarrow (4x-3)(5x+4) > 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{4}{5}\right[\cup \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$

c) $x^2 - 4x + 4 < (x+1)(6-3x) - (2-x)^2 \Leftrightarrow (2-x)(-5x+1) < 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{1}{5}; 2\right[$$

d) $2x^3 + 4 \geq x^2 + 16 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+3x+6) > 0$

$$S_{\mathbb{R}} =]2; +\infty[$$

Exercice 20

Soit V l'ensemble de validité.

a) $\frac{3x+1}{2x-2} = 2$

$V = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\frac{3x+1}{2x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x+1 = 4x+4$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$
$$S_{\mathbb{R}} = \{5\}$$

b) $3 - \frac{x+2}{3x+1} = \frac{1}{x+1}$

$V = \mathbb{R}\backslash\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$

$$3 - \frac{x+2}{3x+1} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x(8x+6) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \; x = -\tfrac{3}{4}$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\tfrac{3}{4}; 0\right\}$$

c) $\frac{7}{4x^2-3x} = \frac{x}{4x-3} + \frac{1}{x}$

$V = \mathbb{R}\backslash\left\{0; \frac{3}{4}\right\}$

$$\frac{7}{4x^2-3x} = \frac{x}{4x-3} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + 2 + \sqrt{14}\right)\left(x + 2 - \sqrt{14}\right) = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-2 - \sqrt{14}; -2 + \sqrt{14}\right\}$$

d) $\frac{2x^2+x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+3}$

$V = \mathbb{R}\backslash\{-3; -1\}$

$$\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{x - 1}{x + 3} \Leftrightarrow (x + 1)\left(x + 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right) = 0$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right\}$$

Exercice 21

Soit V l'ensemble de validité:

a) $\frac{3x-2}{x-1} < 0$,
$V = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{2}{3}; 1\right[$

b) $\frac{x}{x-1} \leq 0$
$V = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$S_{\mathbb{R}} = [0; 1[$

c) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+1}$
$V = \mathbb{R}\backslash\{-2; -1; 3\}$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x + 14}{(x-3)(x+2)(x+1)} > 0$$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -7[\cup]-2; -1[\cup]3; +\infty[$

d) $\frac{1-2x}{x-3} \geq \frac{x+3}{2x+1}$

$V = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$

$$\frac{1-2x}{x-3} \geq \frac{x+3}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{5(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x-3)(2x+1)} \geq 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left[-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\sqrt{2}; 3\right[$$

Exercice 22

a) $x^2 + 3|x| - 2 = 0$

Ecrivons $x^2 + 3|x| - 2 = 0$ sans le symbole valeur absolue.

- $\forall x \in]-\infty; 0[, |x| = -x \; alors \; x^2 + 3|x| - 2 = x^2 - 3x - 2$

Ainsi on a : $x^2 + 3|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \; ou \; x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$\frac{3-\sqrt{17}}{2} \in]-\infty; 0[\; et \; \frac{3+\sqrt{17}}{2} \notin]-\infty; 0[, alors \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ $est \; la \; solution \; sur \;]-\infty; 0[$

- $\forall x \in [0; +\infty[, |x| = x \; alors \; x^2 + 3|x| - 2 = x^2 + 3x - 2$

Ainsi on a : $x^2 + 3|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \; ou \; x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

$\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \in [0; +\infty[\; et \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \notin [0; +\infty[, \; , alors \; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $est \; la \; solution \; sur \; [0; +\infty[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

b) $|x^2 + x - 3| = 2x + 1$

Déterminons l'ensemble de validité V

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$V = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$|x^2 + x - 3| = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 2x + 1 \; ou \; x^2 + x - 3 = -2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \; ou \; x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

c) $|x - 2| + |x - 3| - |x - 4| = 0$

Ecrivons $|x - 2| + |x - 3| - |x - 4|$ sans le symbole valeur absolue.

- $\forall x \in]-\infty; 2[$,

on a : $|x-2| + |x-3| - |x-4| = 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$1 \in]-\infty; 2[\, , alors\ 1\ est\ la\ solution\ sur\ ]-\infty; 1[$

- $\forall x \in [2; 3[$,

on a :: $|x-2| + |x-3| - |x-4| = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

$3 \notin [2; 3[\, , alors\ \ il\ n'ya\ pas\ de\ solutions\ sur\ [2; 3[$

- $\forall x \in [3; 4[$,

on a :$|x-2| + |x-3| - |x-4| = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

$3 \in [3; 4[\, , alors\ 3\ est\ la\ solution\ sur\ [3; 4[$

- $\forall x \in [4; +\infty[$

on a ::$|x-2| + |x-3| - |x-4| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$1 \notin [4; +\infty[\, , alors\ il\ nya\ pas\ de\ solutions\ sur [4; +\infty[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{1; 3\}$

d) $|x^2 + 6x| - x - 6 = 0 \Leftrightarrow |x^2 + 6x| = x + 6$

l'ensemble de validité $V = [-6; +\infty[$

$|x^2 + 6x| = x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 6x = x + 6\ ou\ x^2 + 6x = -x - 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0\ ou\ x^2 + 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+6) = 0\ ou\ (x+1)(x+6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -6\ \ ou\ x = -1\ ou\ x = -6$

$S_{\mathbb{R}} = \{-6; -1; 1\}$

Exercice 23

a) Ecrivons $|x+4|+|2x-1|$ sans les symboles valeur absolue.

- $\forall x \in]-\infty;-4[, |x+4| = -x-4; |2x-1| = -2x+1$

Ainsi on a : $|x+4|+|2x-1| = -x-4-2x+1 = -3x-3$

- $\forall x \in \left[-4;\frac{1}{2}\right[, |x+4| = x+4; |2x-1| = -2x+1$

Ainsi on a : $|x+4|+|2x-1| = x+4-2x+1 = -x+5$

- $\forall x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[, |x+4| = x+4; |2x-1| = 2x-1$

Ainsi on a : $|x+4|+|2x-1| = x+4+2x-1 = 3x+3$

b) Démontrons que $S_{\mathbb{R}}(\mathrm{I}) = \left]-5;\frac{13}{2}\right[$

- $\forall x \in]-\infty;-4[, |x+4|+|2x-1| \leq 12 \Leftrightarrow -3x-3 \leq 12$
$$\Leftrightarrow -3x \leq 15$$
$$\Leftrightarrow x \geq -5$$

La solution sur $]-\infty;-4[$ est $[-5;-4[$

- $\forall x \in \left[-4;\frac{1}{2}\right[\ |x+4|+|2x-1| \leq 12 \Leftrightarrow -x+5 \leq 12$
$$\Leftrightarrow -x \leq 7$$
$$\Leftrightarrow x \geq -7$$

La solution sur$\left[-4;\frac{1}{2}\right[$ est $\left[-4;\frac{1}{2}\right[$

- $\forall x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[, |x+4|+|2x-1| \leq 12 \Leftrightarrow 3x+3 \leq 12$
$$\Leftrightarrow 3x \leq 9$$
$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

La solution sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ est $\left[\frac{1}{2};3\right]$

Donc $S_{\mathbb{R}}(\mathrm{I}_3)$= $[-5;-4[\cup \left[-4;\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2};3\right]$

$$S_{\mathbb{R}}(I3) = [-5;3]$$

Exercice 24

a) $|x|+\frac{1}{3} < x+3 \Leftrightarrow$

$\forall x \in [0;+\infty[, |x| = x$

$|x| + \frac{1}{3} < x + 3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{3} < x + 3$

La solution sur $[0; +\infty[$ est $[0; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; 0[|x| = -x$

$|x| + \frac{1}{3} < x + 3 \Leftrightarrow -x + \frac{1}{3} < x + 3$

$\Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$

La solution dans $]-\infty; 0[$ est $\left]-\frac{4}{3}; 0\right[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{4}{3}; 0\right[\cup [0; +\infty[= \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$

b) $5x + 2|x - 1| \geq 4$

- $\forall x \in]-\infty; 1[, |x - 1| = 1 - x$

$$\begin{aligned} 5x + 2|x - 1| \geq 4 &\Leftrightarrow 5x + 2(1 - x) \geq 4 \\ &\Leftrightarrow 5x + 2 - 2x \geq 4 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La solution sur $]-\infty; 1[$ est $\left[\frac{2}{3}; 1\right[$

- $\forall x \in [1; +\infty[, |x - 1| = x - 1$

$$\begin{aligned} 5x + 2|x - 1| \geq 4 &\Leftrightarrow 5x + 2(x - 1) \geq 4 \\ &\Leftrightarrow 5x + 2x - 2 \geq 4 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{6}{7} \end{aligned}$$

La solution sur $[1; +\infty[$ est $[1; +\infty[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{2}{3}; 1\right[\cup [1; +\infty[= \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$

c) $x + 7 \leq |x^2 - x|$

- $\forall x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[, |x^2 - x| = x^2 - x$

$$\begin{aligned} x + 7 \leq |x^2 - x| &\Leftrightarrow x + 7 \leq x^2 - x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1 + 2\sqrt{2})(x - 1 - 2\sqrt{2}) \geq 0 \end{aligned}$$

La solution sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ est $\left]-\infty; \mathbf{1} - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[1 + 2\sqrt{2}; +\infty\right[$

- $\forall x \in]0; 1[, |x^2 - x| = x - x^2$

$$\begin{aligned} x + 7 \leq |x^2 - x| &\Leftrightarrow x + 7 \leq x - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 7 \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible alors il n y a pas de solutions sur $]0; 1[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty;\ \mathbf{1} - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[1 + 2\sqrt{2}; +\infty\right[$

d) $x^2 + 4x < |2x - 7|$

- $\forall x \in \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[, |2x - 7| = 7 - 2x$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x < |2x - 7| &\Leftrightarrow x^2 + 4x < 7 - 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 7)(x - 1) < 0 \end{aligned}$$

La solution sur $\left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$ est $]-7; 1[$

- $\forall x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[, |2x - 7| = 2x - 7$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x < |2x - 7| &\Leftrightarrow x^2 + 4x < 2x - 7 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 7 < 0 \end{aligned}$$

$x^2 + 2x + 7$ n'est pas factorisable, alors $x^2 + 2x + 7 > 0$. Ainsi il n'y a pas de solutions sur $\left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-7; 1[$

e) $$\begin{aligned} |2x^2 + x - 3| > |x + 4| &\Leftrightarrow (2x^2 + x - 3)^2 > (x + 4)^2 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + x - 3)^2 - (x + 4)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + x - 3 - x - 4)(2x^2 + x - 3 + x + 4) > 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 - 7)(2x^2 + 2x + 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2}x - \sqrt{7})(\sqrt{2}x + \sqrt{7})(2x^2 + 2x + 1) > 0 \end{aligned}$$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{2}}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{2}}; +\infty\right[$

Exercice 25

a) $\frac{5}{|x+1|-2} = |x + 1| + 2$

l'ensemble de validité est $V = \mathbb{R}\backslash\{-3; 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{5}{|x + 1| - 2} = |x + 1| + 2 &\Leftrightarrow \frac{5}{|x + 1| - 2} - |x + 1| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5-(|x+1|+2)(|x+1|-2)}{|x+1|-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5-[(|x+1|)^2-2^2]}{|x+1|-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 2$$

$-4 \in V \; et \; 2 \in V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{-4; 2\}$

b) $\frac{2+|x+1|}{3-|x|} = 2$

l'ensemble de validité est $V = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$

$$\frac{2+|x+1|}{3-|x|} = 2 \Leftrightarrow \frac{2+|x+1|}{3-|x|} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+|x+1|-2(3-|x|)}{3-|x|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|+2|x|-4}{3-|x|} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x+1| + 2|x| - 4 = 0$$

- $\forall x \in]-\infty; -1[, |x+1| = -x - 1 \; et \; |x| = -x$
$$|x+1| + 2|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow -x - 1 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3x - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$
- $\forall x \in [-1; 0\,[, |x+1| = x + 1 \; et \; |x| = -x$
$$|x+1| + 2|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 1 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow -x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -3$$

- $\forall x \in [0; +\infty\,[, |x+1| = x + 1 \; et \; |x| = x$
$$|x+1| + 2|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 1 + 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{3}; 1\right\}$$

c) $\frac{x^2}{|x|} - 2 \leq \frac{|x|-1}{3x}$

L'ensemble de validité est $V = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\frac{x^2}{|x|} - 2 \leq \frac{|x|-1}{3x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2|x|}{|x|} \leq \frac{|x|-1}{3x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - 6x|x| - x^2 + |x|}{3x|x|} \leq 0$$

- $\forall x \in]-\infty; 0[,\ |x| = -x$

$$\frac{3x^3-6x|x|-x^2+|x|}{3x|x|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3+6x^2-x^2-x}{-3x^2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^3+5x^2-x}{-3x^2} \leq 0$$

La solution sur$]-\infty; 0[$ est $\left[\frac{-5-\sqrt{37}}{6}; 0\right[$

- $\forall x \in]0; +\infty[,\ |x| = x$

$$\frac{3x^3-6x|x|-x^2+|x|}{3x|x|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3-6x^2-x^2+x}{3x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-7x+1}{3x} \leq 0$$

La solution sur$]0; +\infty[$ est $\left]0; \frac{7+\sqrt{37}}{6}\right]$

$$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{-5-\sqrt{37}}{6}; 0\right[\cup \left]0; \frac{7+\sqrt{37}}{6}\right]$$

d) $\frac{x^2+|x|+3}{x^2-|x|-2} \geq 0$

l'ensemble de validité est $V = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$

$$\frac{x^2+|x|+3}{x^2-|x|-2} \geq 0$$

- $\forall x \in]-\infty; 0[,\ |x| = -x$

$$\frac{x^2+|x|+3}{x^2-|x|-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+3}{x^2+x-2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x+3}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

,

La solution sur$]-\infty; 0[$ est $]-\infty; -2[$

- $\forall x \in [0; +\infty[, |x| = x$

$$\frac{x^2+|x|+3}{x^2-|x|-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+3}{x^2-x-2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

La solution sur$[0; +\infty[$ est $]2; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Exercice 26

Soit $M(x;y)$

$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow -9-3x=2x-8\ et\ 6-3y=2y-6$

$\Leftrightarrow 5x=-1\ et\ 5y=12$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}\ et\ y=\frac{12}{5}$

Les coordonnées du point M sont : $x=-\frac{1}{5}\ et\ y=\frac{12}{5}$

$M\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{12}{5}\end{pmatrix}$

Exercice 27

Soient $n, n+2\ et\ n+4$ trois nombres entiers naturels impairs consécutifs.

$n+(n+2)+(n+4)=141 \Leftrightarrow 3n+6=141$

$\Leftrightarrow 3n=135$

$\Leftrightarrow n=45$

Comme $n=45, alors\ n+2=47; n+4=49$

Les trois nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est 141 sont :45 ; 47 et 49

Exercice 28

a) $2x^4+x^2+3=0$

Posons $X=x^2$

$2x^4+x^2+3=0 \Leftrightarrow 2X^2+X+3=0$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

b) $4x^4-17x^2+1=0$

Posons $X=x^2$

$4x^4-17x^2+1=0 \Leftrightarrow 4X^2-17X+1=0$

Résolvons $4X^2-17X+1=0$

$$4X^2-17X+1=0 \Leftrightarrow X=\frac{17-\sqrt{273}}{8}\ ou\ X=\frac{17+\sqrt{273}}{8}$$

$X=\frac{17-\sqrt{273}}{8} \Leftrightarrow x^2=\frac{17-\sqrt{273}}{8}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{17-\sqrt{273}}{8}}\ ou\ x=-\sqrt{\frac{17-\sqrt{273}}{8}}$

$X=\dfrac{17+\sqrt{273}}{8} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{17+\sqrt{273}}{8}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{17+\sqrt{273}}{8}}\ ou\ x=-\sqrt{\frac{17+\sqrt{273}}{8}}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{\frac{17+\sqrt{273}}{8}}\,; -\sqrt{\frac{17-\sqrt{273}}{8}}\,; \sqrt{\frac{17-\sqrt{273}}{8}}\,; \sqrt{\frac{17+\sqrt{273}}{8}}\right\}$$

c) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

Posons $X = x^2$

$x^4 - x^2 - 6 = 0$ devient $X^2 - X - 6 = 0$

Résolvons $X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X+2)(X-3) = 0$

$\Leftrightarrow X = -2 \; ou \; X = 3$

$-2 < 0$

Alors on a : $X = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \; ou \; x = -\sqrt{3}$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$$

Exercice 29

1) Justifions que 1 est solution de (E)

$3 \times (1)^3 + 10 \times (1)^2 - (1) - 12 = 3 + 10 - 13$

$= 0$

Alors 1 est solution de (E)

2) Résolvons (E)

Comme 1 est solution de (E), alors le polynôme $3x^3 + 10x^2 - x - 12$ est factorisable par $(x-1)$

$$3x^3 + 10x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(\,3x+4)(\,x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -\tfrac{4}{3} \; ou \; x = -3$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-3; -\dfrac{4}{3}\,; 1\right\}$

Exercice 30

1) Justifions que 4 est solution de (E)

$(4)^4 - 13 \times (4)^2 - 48 = 256 - 13 \times 16 - 48$

$= 256 - 256$

$= 0$

Alors 4 est solution de (E)

2) Justifions que si x est solution de (E) alors $-x$ est solution de (E).

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

On a :
$(-x)^4 - 13(-x)^2 - 48 = x^4 - 13x^2 - 48$
Donc si x est solution de (E) alors $-x$ est solution de (E)

3) Résolvons (E)

Comme 4 est solution de (E), alors -4 est aussi solution de (E). Ainsi le polynôme $x^4 - 13x^2 - 48$ est factorisable par $(x-4)(x+4)$

$$x^4 - 13x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4)(x^2+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \ ou \ x = -4$$

$S_{\mathbb{R}} = \{-4; 4\}$

Exercice 31

1) Déterminons l'ensemble de validité V de (I).

$$V = \mathbb{R}\backslash\left\{-3; -\frac{3}{2}\right\}$$

2) Justifions que (I) $\Leftrightarrow x \in V, \frac{4x(3x+2)}{(2x+3)(x+3)} \geq 0$.

$$\frac{6x^2+x-2}{2x+3} \geq \frac{3x^2-x-2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{6x^2+x-2}{2x+3} - \frac{3x^2-x-2}{x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x^2+8x}{(2x+3)(x+3)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x(3x+2)}{(2x+3)(x+3)} \geq 0$$

3) Résolvons (I).

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -3[\cup \left]-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right] \cup [0; +\infty[$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 32

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser les équations.

- Je fais la mise en équation du problème
- Je résous l'équation obtenue
- Le nombre d'or est solution de l'équation résolue.

Mise en équation

On sait que le nombre d'or $\frac{a}{b}$ est tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

On a : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b}$$

Résolution

Posons que : $x=\frac{a}{b}$

$$1+\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x}=x$$

$$\Leftrightarrow x+1=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \ ou \ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comme $\frac{a}{b}>0$, Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique zéro positif de x^2-x-1. Donc le nombre d'or est : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Complément :

Le nombre d'or est noté φ.

Justifions que $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$ et que $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$

- Justifions que $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$

On sait que $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$ et $\varphi=\frac{a}{b}$

Alors : $\varphi=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}$

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$$

- Justifions que $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$

On sait que $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}+1$ et $\varphi=\frac{a}{b}$

ainsi : $\varphi^2=\varphi+1$

Comme φ est positif, alors on a :

$$\varphi=\sqrt{1+\varphi}$$

On en déduit que φ peut être écrit de façon indéfinie :

$$\varphi=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} \text{ou} \varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Exercice 33

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser les équations.

- Je fais la mise en équation du problème
- Je résous l'équation obtenue
- Le nombre total de points du devoir est la solution de l'équation
- Je compare la note d'un élève à la moitié du total des points du devoir

  .

Soit x le nombre total de points du devoir.

On a : $\frac{15}{100}x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}x + 6 = x \Leftrightarrow \frac{15}{100}x + \frac{40}{100}x + \frac{25}{100}x + 6 = x$

$$\Leftrightarrow \frac{80}{100}x + 6 = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{80x+600}{100} = x$$

$$\Leftrightarrow 80x + 600 = 100x$$

$$\Leftrightarrow 80x + 600 - 100x = 0$$

$$\Leftrightarrow 20x = 600$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{600}{20}$$

$$\Leftrightarrow x = 30$$

Le nombre total de points au devoir est 30.

$\frac{30}{2} = 15$ et on a $11 < 15; 12 < 15 \; et \; 16 > 15$, alors l'élève qui dit que seul celui qui a obtenu 16 a la moyenne a raison.

12 HOMOTHÉTIES

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte? ***Le texte parle d'une projection ce film.***
- Quels sont les acteurs de cet évènement? ***Les acteurs sont camarades de classe et le club mathématique du Lycée.***
- Où se déroule l'évènement? ***L'évènement se déroule au Lycée.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement? ***Le problème posé est le phénomène d'agrandissement.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement? ***Comprendre le phénomène d'agrandissement.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs? ***Les élèves décident de comprendre ce phénomène d'agrandissement…***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

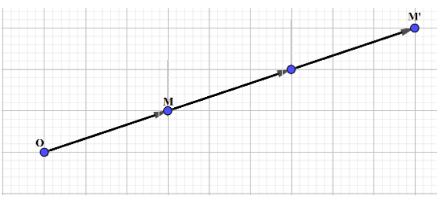
Le professeur fera lire la situation par un élève ou deux (fille et garçon) puis la lira lui-même. Il la fera lire silencieusement par l'ensemble des élèves. Il s'assurera ensuite que les élèves ont bien compris le texte : il leur demandera les mots qui leur semblent difficiles et il pourra expliquer par exemple les mots « projection », « agrandissement », …

II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

Activité 1 Définition

Objectif *Elle vise à faire découvrir la définition d'une homothétie.*

Solution



- Pour un point M donné, le vecteur $3\overrightarrow{OM}$ est fixe, Il existe donc un seul représentant d'origine O de ce vecteur d'où l'unicité du point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.
  On en déduit donc que la correspondance qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ est une application.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 1

1   1 – b) ; 2 – a).

2   a) $\overrightarrow{EU} = -2\overrightarrow{ET}$ on a une homothétie de centre E et de rapport – 2

b) $\overrightarrow{PR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM}$ on a une homothétie de centre P et de rapport $\frac{4}{3}$

c) $\overrightarrow{\Omega B} = \sqrt{5}\overrightarrow{\Omega A}$ on a une homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{5}$

Activité 2 Alignement du centre, d'un point et son image

Objectif *Cette activité vise à faire découvrir la propriété de l'alignement du centre, d'un point et de son image.*

Solution

h(M) = M' donc $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$; ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires. Donc les points O, M et M' sont alignés.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2

3   Les étiquettes 1) et 3).

4   1 - $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ d'où $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC}$ donc h(C) = G.

2- h est l'homothétie de centre A et h(C) = G donc les points A, C et G sont alignés.

Activité 3 Point invariant par une homothétie

Objectif *Cette activité vise à faire découvrir la propriété relative aux points invariants par une homothétie.*

Solution

h(M) = M donc $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

- $k = 1$ alors $0 \times \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ donc tout point M du plan est invariant
- $k \neq 1$ alors $0 \times \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{OM} = \vec{O}$ donc M = O est l'unique point invariant.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3

5 1 – F ; 2 - V ; 3 – V ; 4 – V ; 5 – F .

Activité 4 Propriété fondamentale de l'homothétie

Objectif *Cette activité vise à établir une relation vectorielle entre un segment et son image par une homothétie.*

Solution

h(A) = A' donc $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$

h(B) = B' donc $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\,(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k\overrightarrow{AB}$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 4

6 Si P et Q sont deux points distincts d'images respectives R et S par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{RS} = k\overrightarrow{PQ}$.

7 Rectifier : ABC et AEG sont des triangles et non des parallélogrammes

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 4. On a A, B et E alignés donc

AE = 4AB et B ∈ [AE], donc h(B) = E ;

AG = 4AC et C ∈ [AG], donc h(C) = G.

D'où d'après la propriété fondamentale $\overrightarrow{EG} = 4\overrightarrow{BC}$.

8 Soit R limage du point B par cette homothétie

D'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'R} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Le point R s'obtient donc comme l'intersection de la droite (OB) et de la parallèle à la droite (AB) passant par le point A'

Activité 5 Image d'une droite par une homothétie

Objectif *Il s'agit de faire démontrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.*

Solution

1- a) Soit M un point du segment (AB), et M' son image par l'homothétie h. Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow k\overrightarrow{AM} = kt\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$. Par suite, M' appartient à la droite (A'B') .

b) Pour tout point M de (AB), son image M' par l'homothétie h appartient à la droite (A'B') donc l'image de la droite (AB) par l'homothétie h est incluse dans la droite (A'B').

2- On suppose que N' est un point de la droite (A'B').

a) Pour N' fixé, il existe un point N et seul tel que $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{k}\overrightarrow{ON'}$ (*il existe un seul représentant d'origine O du vecteur* $\frac{1}{k}\overrightarrow{ON'}$) .

Ce point N est tel que :

$\overrightarrow{ON'} = \text{k}\ \overrightarrow{ON}$. On conclue donc l'existence d'un point N tel que h(N) = N'

b) Justifions maintenant que le point N ainsi définie est un point de la droite (AB)

N' est un point de la droite (A'B'), donc il existe un nombre réel $\propto$ tel que $\overrightarrow{A'N'} = \propto \overrightarrow{A'B'}$. Or h (A) = A', h(N) = N' et h(B) = B', donc $\overrightarrow{A'N'} = \propto \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \text{k}\ \overrightarrow{AN} = \text{k}\propto \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \propto \overrightarrow{AB}$, par suite N appartient à la droite (AB).

c) Tout point de la droite (A'B') est l'image d'un point de la droite (AB) et donc (A'B') ⊂ h(AB).

3. (A'B') ⊂ h(AB) et h(AB) ⊂(A'B'), donc h(AB) = (A'B').

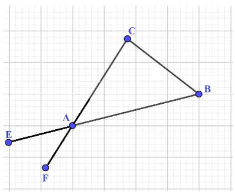
4- On sait que A'=h(A) et B'=h(B) donc d'après la propriété fondamentale,

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow (AB)//(A'B')$.

5- L'image d'une droite par une homothétie de rapport non nul est une droite et ces deux droites sont parallèles.

Solution de l'exercice fixation de l'activité 5

9



h(B) = E et h(C) = F donc (EF) = h(BC) d'où (EF) et (BC) sont parallèles.

Activité 6 Image d'une demi-droite par une homothétie

Objectif *Cette activité vise à faire découvrir la propriété relative à l'image d'une demi droite.*

Solution

En remarquant que si M un point du segment [AB], alors il existe un réel t (t > 0) tel que :

$\overrightarrow{AM} = \text{t}\ \overrightarrow{AB}$, on reprend le raisonnement précédent.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

10 h(B) = E et h(C) = G donc l'image de [BC] par h est [EG).

L'image de [CB] par h est [GE).

Activité 7 Image d'un segment par une homothétie

Objectif *Cette activité vise à déterminer l'image d'un segment par une homothétie.*

Solution (rectifier la numérotation la question c) est la question b)

1. On peut utiliser la méthode précédente en remarquant que si M un point de [AB], alors il existe un réel t ($0 \leq t \leq 1$) tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

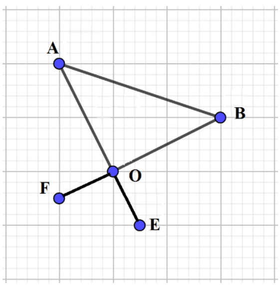
2.

h est une homothétie de rapport k. A' = h(A) et B' = h(B). donc d'après la propriété fondamentale on a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|k\overrightarrow{AB}\| \Rightarrow A'B' = |k|AB$

3. L'image d'un segment par une homothétie est un segment de longueur $|k|$ fois celle de ce segment

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

11 a)



b) E = h(A) et F = h(B) donc [EF] est l'image de [AB] par h.
c) Puisque [EF] est l'image de [AB] par h, alors on a : EF = 0,5AB donc EF = 0,5×5 = 2,5. D'où la longueur du segment [EF] est EF = 2,5 cm.

Activité 8 Image d'un cercle

Objectif *Cette activité vise à déterminer l'image d'un cercle par une homothétie.*

Solution

1- M∊(C) $\Rightarrow OM = r$ or M' = h(M) et O'= h(O) donc O'M' =$|k|$OM.
$OM = r \Rightarrow |k|OM = |k|r \Rightarrow O'M' = |k|r$ donc l'image M' de M par l'homothétie h appartient à (C').

a) (*Existence*)

Soit N' est un point de (C') et N le point défini par $\overrightarrow{\Omega N} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega N'}$. Ce point est tel que : $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$.

(Appartenance)

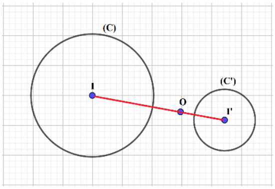
Montrons que N appartient au cercle de centre O et de rayon r

On a : O'N' =$|k|r$, or O'N' = $|k|$ON. On a donc $k|$ON = $k|r$, soit ON = r. donc N appartient au cercle de centre O et de rayon r

b) Conclusion : L'image du cercle du cercle de centre O et de rayon r par une homothétie de centre Ω et de rapport k le cercle de centre O' et de rayon $|k|$r où O' = h(O).

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

12 **1-**



2-b) Méthode de construction du cercle (C'):

- construire l'image I' du point I par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.
- construire le cercle (C') de centre I' et de rayon 2.

Activité 9 Conservation du milieu d'un segment

Objectif *Cette activité est de faire découvrir la propriété relative à la conservation du milieu d'un segment*

Solution.

1- I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k\overrightarrow{AI}=k\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}$ or A'=h(A), B'= h(B), I'= h(I) donc $k\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{A'I'}$ et $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ d'où $k\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'I'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$. On en déduit que I' est le milieu de [A'B'].

2- L'homothétie conserve le milieu.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9 (effacer le second parallélogramme AEGH)

13

L'image du point D est le point H, de même l'image du point B est le point E. donc l'image du milieu de [DB] est le milieu de [EH], d'où le résultat/

OU

AEGH est un parallélogramme de centre K donc

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}\right)=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\left(2\overrightarrow{AI}\right)$ d'où $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AI}$. On en déduit que le point K est l'image de I par h.

Activité 10 Conservation de la mesure des angles

Objectif *Cette activité vise à découvrir la propriété relative à la conservation des angles orientés.*

Solution

1- $Mes\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=Mes\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}\right)$

2- L'homothétie semble conserver les angles orientés.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

14 1-

Points	R	A	M	I	P
Image par *h*	L	E	B	O	T

2- $Mes\left(\overrightarrow{LE},\overrightarrow{LO}\right)=83°$; $Mes\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OL}\right)=52°$

Activité 11 Conservation du parallélisme

Objectif *Cette activité est faire découvrir propriété relative à la conservation du parallélisme des droites.*

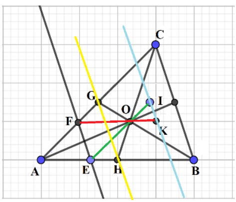
Solution

On sait que (D') = h(D) donc (D)//(D') et (Δ') = h(Δ) donc (Δ')//(Δ).
Or (D)//(Δ) donc (D')//(Δ) et on en déduit que (D') // (Δ').
L'homothétie conserve le parallélisme.

Solution des exercices de fixation de l'activité 11

15

1-



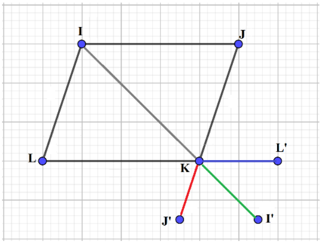
2-

Points	B	C	E	F
Image par *h*	G	H	I	K

(GH) = h(BC) et (IK) = h(EF) or (BC) // (EF) donc (GH) // (IK).

16

1 et 2 –



3-

Points	I	J	L
Images par h	I’	J’	L’

D’après le tableau ci-dessus I’=*h*(I) et J’ = *h*(J) donc (I’J’) // (IJ). Or on sait par hypothèse que (IJ)//(LK) donc (I’J’) // (LK).

Activité 12 Conservation de l’orthogonalité

Objectif : *Cette activité est vise à faire découvrir la propriété relative à la conservation de l’orthogonalité*

Solution

1- $(D')=h(D)\Rightarrow(D')//(D)$ et $(\Delta')=h(\Delta)\Rightarrow(\Delta')//(\Delta)$

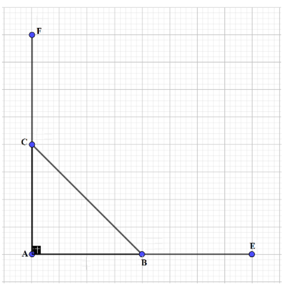
$(D')//(D)$ et $(D)\perp(\Delta)$ donc $(D')\perp(\Delta)$

$(D')\perp(\Delta)$ et $(\Delta')//(\Delta)$ donc $(\Delta')\perp(D')$

2- Si deux droites sont perpendiculaires, leurs images respectives par une homothétie de rapport non nul sont aussi perpendiculaires.

Solution de l’exercice de fixation de l’activité 12

17 1-



2-

Points	B	C
Images par h	E	F

$Mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(AB)\perp(AC)$. Puisque $E=h(B)$ et $F=h(C)$

alors $(AE) \perp (AF)$ donc $Mes\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{\pi}{2}$

Activité 13 Homothétie définie par son centre, un point et son image.

Objectif *Cette activité vise à faire découvrir propriété relative à la caractérisation d'une homothétie par son centre, un point et son image.*

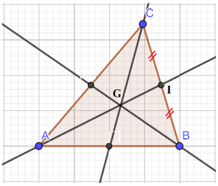
Solution

1- Si les points O, B et C ne sont pas alignés, il n'existe aucune homothétie de centre O qui applique B sur C, car un point, son image et le centre de l'homothétie sont toujours alignés.

2- Si les points O, B et C sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ étant non nul, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$. k est non nul sinon C serait égal à O. C est donc l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport k tel que $k = \frac{OC}{OB}$.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 13

18 1-



2- Les points A, G et I sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires. Donc il existe une homothétie de centre G qui applique A sur I.

3- G étant le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment [BC], on a : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ donc le rapport de cette homothétie est – 2 et son centre est G.

Activité 14 Homothétie définie par son rapport, un point et son image.

Objectif *Cette activité vise à faire découvrir la propriété relative à la caractérisation d'une homothétie par son rapport, un point et son image.*

Solution

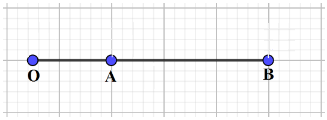
$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (1-k)\overrightarrow{AO}$ d'où $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$ $(k \neq 1)$.

Pour A, A' et k donnés, ($k \neq 0$ et $k \neq 1$), il existe un seul point O tel que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$.

Ainsi il n'y a qu'une seule homothétie de rapport k qui transforme A en A'.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 14

19 1 -



2 - Soit O un point tel que $\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc il existe une unique homothétie de rapport 3 qui applique A sur B. Cette homothétie a pour centre le point O tel que $\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

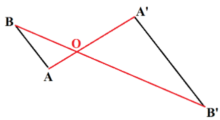
Activité 15 Homothétie définie par deux points distincts et leurs images

Objectif *Cette activité a pour but de faire découvrir propriété relative à la caractérisation d'une homothétie par deux distincts et leurs images.*

Solution

1- Si une telle homothétie existe, d'après la propriété fondamentale, son rapport ne peut être que le nombre réel k tel que $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq 0$ et $k\neq 1)\Rightarrow(AB)//(A'B')$.
Puisque k est différent de 1, AB ≠ A'B'

2- a) Puisque l'homothétie h telle que h(A) = A' et h(B) = B', lorsque les points A, A', B et B' ne sont pas alignés, le centre de cette homothétie est le point d'intersection des droites (AA') et (BB'). Donc ces droites (AA') et (BB') sont sécantes.

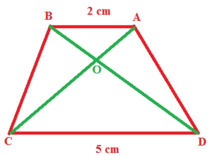


b) L'homothétie qui applique A sur A' et B sur B' a pour centre le point d'intersection des droites (AA') et (BB') et applique A sur A'

3- Lorsque les points A, B, A' et B' sont alignés, on oriente les deux droites (AB) et (A'B') par le même vecteur unitaire et on a ; $k=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Donc l'unique homothétie de rapport $k=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A' est celle qui satisfait aux conditions du problème.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 15

20 1 – Figure



2- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et AB ≠ CD, donc il existe une homothétie h qui applique A sur C et B sur D. Le point O, intersection des droites (AC) et (BD) est le centre de l'homothétie h.

Activité 16 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par son centre, un point et son image.

Objectif *Cette activité a pour but de faire découvrir la méthode de construction de l'image d'un point par une homothétie définie par son centre un point et de son image.*

Solution

1- M'=*h*(M) donc les points M, M et I sont alignés, donc M' appartient à la droite (IM).

2- *h*(J) = K et *h*(M) = M' donc les droites (MJ) et (KM') sont parallèles. Ainsi M' appartient à la parallèle à (MJ) passant K.

3- D'après la question 1) M' appartient à la droite (IM) et d'après la question 2) M' appartient à la parallèle à (JM) passant par K donc M' est le point d'intersection des droites (IM) et la parallèle à (MJ) passant K.

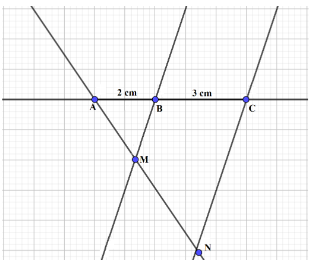
4- Programme de construction du point M' :

- Place sur une droite trois points distincts I, J et K.
- Place un point M n'appartenant pas à (IJ).
- Construis la droite (D), parallèle à (IM) passant par K.
- Trace les droites (IM) et (D)
- Place le point M', intersection de (IM) et (D).

5- Par la méthode précédente, on construit l'image N'd'un point N tel que N n'appartient pas à la droite (IJ) et on en déduit la construction du point M'

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 16

21 **1 -** Figure



2 - voir construction

Activité 17 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par deux points distincts et leurs images.

Objectif : cette *activité a pour but de faire découvrir la méthode de construction de l'image d'un point par une homothétie définie par deux points et leurs images respectives.*

Solution

1- h(A) = A' et h(M) = M' donc M' appartient à la parallèle à (AM) passant par A'. Soit (D) cette droite.

2- a) De même h(B) = B' et h(M) = M' donc M' appartient à la parallèle à (BM) passant par B'. Soit (D_1) cette droite

b) D'après les questions précédentes, le point M' appartient à la fois aux droites distinctes (D) et (D_1), donc les droites (D) et (D_1) sont sécantes.

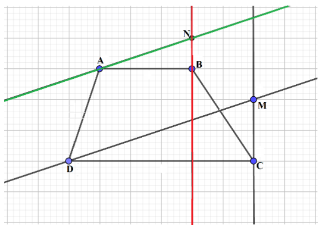
3- Programme de construction de M'

- Construis la droite (D), parallèle à (AM) passant par A'
- Construis la droite (D_1), parallèle à (BM) passant par B'
- place le point M', intersection des droites (D) et (D_1).

4- Si M appartient à (AA') ou à (BB'), on construit l'image d'un point n'appartenant pas ni à (AA') , ni à (BB')

Solution des exercices de fixation de l'activité 17

22 **1- Figure**



Points	D	C	M
Images par *h*	A	B	N

- N appartient à (D_1), la parallèle à (DM) passant par A
- N appartient à (D_2), la parallèle à (CM) passant par B

Donc N est le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2).

23

Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles et AB ≠ A'B', donc il existe une homothétie h qui applique A sur A' et B sur B'. Le centre de cette homothétie est l'intersection des droites (AA') et (BB') c'est à dire le point C.

On montre que cette homothétie transforme A en A' et D en D' et donc, transforme le parallélogramme ABCD en le parallélogramme CB'A'D'

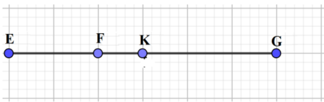
Points	C	A	B	D
Images par *h*	C	A’	B’	D’

$k = -\frac{CD\prime}{CD} = \frac{-1}{3}$

III- DES QUESTIONS D’EVALUATION

1

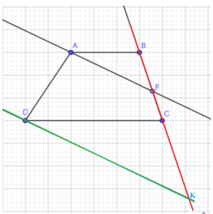
Comment construire l’image M’ d’un point M par une homothétie déterminée par son centre I, un point J et son image K ?



Voir solution commentée

2

Comment construire l’image M’ d’un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts A et B et leurs images respectives A’ et B’?



Points	F	A	B
Images par *h*	K	D	C

(D_1) est la parallèle à FB) passant par C.
(D_2) est la parallèle à (FA) passant par D.
Le point K, image de F par l’homothétie, est le point d’intersection des droites (D_1) et (D_2).

3

Comment utiliser une homothétie pour démontrer ?

D’après la figure on a :

(GF)//(DC) et DC$\neq$ GF, donc il existe une homothétie h qui applique D sur C et G sur F. Le centre I de l’homothétie h est l’intersection des droites (CF) et (DG).

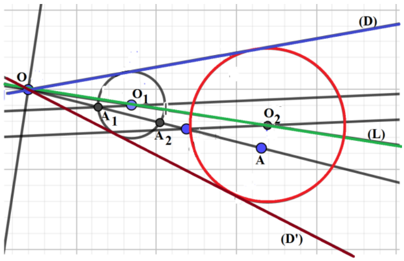
Déterminons h(B)

h(B) appartient à la parallèle à (GB) passant par F et à la droite (IB), donc h(B) = E. Il s’ensuit que le point I appartient aussi à la droite (BE). Or la droite (BE) est égale à la droite (AB), donc I appartient à la droite (AB).

I appartient à la fois aux droites (CF), (DG) et (AB) d’où le résultat.

.

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>
Comment utiliser une homothétie pour construire une figure sous des contraintes ?
.Construis la bissectrice (L) de l'angle de sommet O déterminé par les droites (D), (D') et contenant le point A.
-Choisi un point O_1 sur (L)
-Trace le cercle (C_1) de centre O1 et tangent à (D)
-Trace la droite (OA). Cette droite coupe (C_1) en deux points A_1 et A_2
-On considère l'homothétie h de centre O qui applique A_1 ou A_2 sur A
-$h(O_1) = O_2$ et soit (C) le cercle de centre O_2 passant par A.
-$h(C_1) = (C)$.

Justification
(C) passe par A et est tangent à h((D)) et h((D')) or h((D)) = (D) et h((D')) = (D')


</td>
</tr>
</table>

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

Exercice de fixation

le rapport est $\frac{-1}{2}$

Exercice de fixation

Le centre O est déterminé par : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}:\overrightarrow{AB}$

Activité 4.3

Exercice de fixation

(AB)//(CD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$

Activité 5.1

2) Contre-exemple

ABCD est un parallélogramme.

Une condition nécessaire et suffisante est AB=CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

Exercice de fixation

On a : AC=BD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ il existe une rotation qui applique A sur C et D sur B.
Le centre O de cette rotation est le point commun aux médiatrices des segments [AC] et [BD].

Activité 5.1

L'objectif de

Exercice de fixation

Utiliser la méthode construction.

Activité 5.2

L'objectif de cette activité est faire découvrir la méthode de construction de l'image d'un point par une homothétie définie par deux points distincts et leurs images.

Exercice de fixation

Utiliser la méthode construction.

Exercices de fixation

Définition et premières propriétés

Exercice 1

1-F ; 2- F ; 3- F ; 4- V.

Exercice 2

1- B) **;** 2 - B) ; 3 - A) ; 4 - A).

Exercice 3

1- A) ; 2- A) ; 3- B)

Exercice 4 (rectifier dans la ligne 2, écrire -2 au lieu de -12)

1- A) ; 2- A) ; 3- A)

Exercice 5

1- B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 4.

2- M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 1/3

3- C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport – 1.

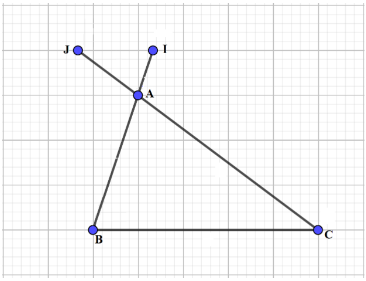
Exercice 6

Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés. Donc le centre est le point commun aux droites (AD) et (BC).

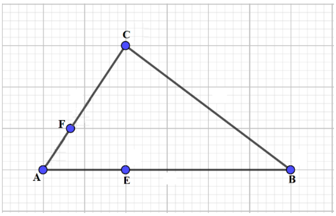
Propriété fondamentale

Exercice 7

L'homothétie qui applique I sur B et J sur C a pour centre A et pour rapport est -3



Exercice 8



La propriété fondamentale on a : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $h(B) = E$ et $h(C) = F$

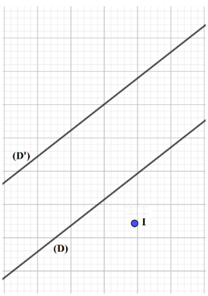
Images de figures simples

Exercice 9

1- A ; 2 – B ; 3 – C.

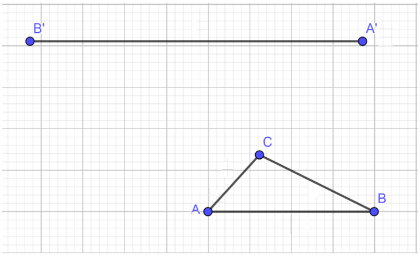
Exercice 10

On construit les images de deux points A et B de la droite (D) et on obtient la droite (D').

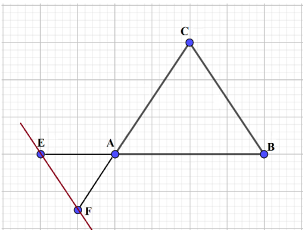


Exercice11

On construit les images des extrémités du segment.



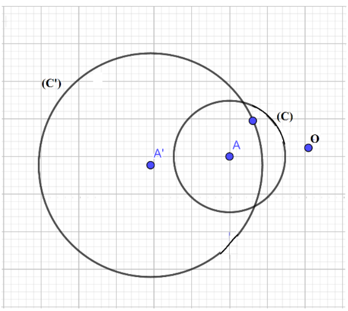
Exercice 12



h(B) = E et h(C) = F donc (BC) // (EF) car l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui est parallèle.

Exercice 13

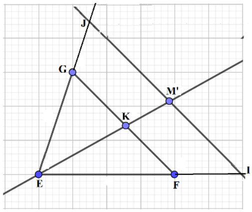
On construit l'image centre du centre du puis on construit un cercle de rayon $|k|$r



Propriété de conservation

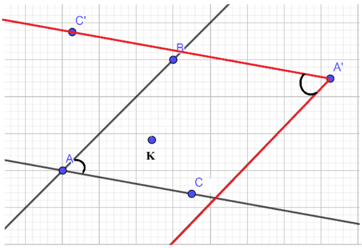
Exercice 14

Les points F, K, et G sont alignés. Donc leurs images sont alignées. On M’ appartient à (IJ). M’appartient aussi à (EK). Donc M’ est l’intersection des droites (IJ) et (EK).



Exercice 15

Conservation de la mesure des angles orientés.



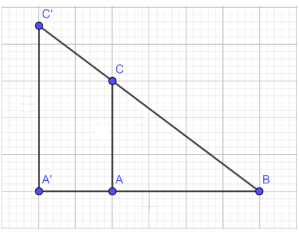
Exercice 16

Une ’homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale.

h

M	P
N	Q
Q	N
O	O
[MN]	[PQ]
[QM]	[NP]

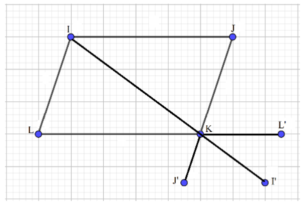
Exercice 17



h(A) = A’ ; h(C) = C’ et h(B) = B de plus (AC) et (AB) sont perpendiculaires donc par conservation de l’orthogonalité, (A’C’) et (A’B) sont perpendiculaires.

Exercice 18

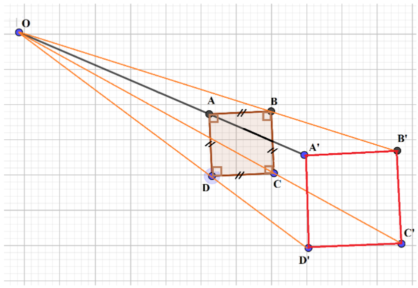
h(I) = I' , h(J) = J' , h(L) = L' et h(K) = K or (IJ) // (KL) donc par conservation du parallélisme de l'homothétie h, on a (KL') // (I'J').



Exercice 19

h est l'homothétie de centre O et de rapport 1,5 qui applique A sur A' signifie que

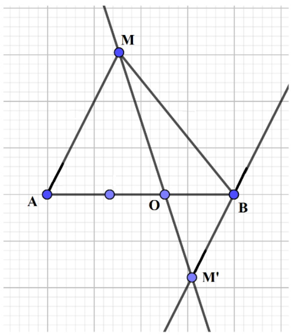
$\overrightarrow{OA'} = 1,5\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = -2\overrightarrow{AA'}$



Caractérisation de l'homothétie

Exercice 20

Soit O le centre de l'homothétie h. Alors h(A) = B donc $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



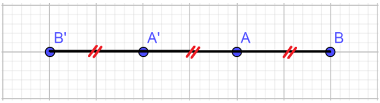
Exercice 21

a)k= 4/3

b) k= 7/9

c)k=-2/5

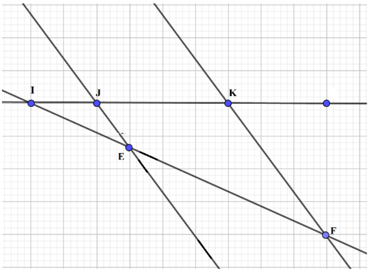
Exercice 22



h(B) = B' où h est une homothétie de rapport -2 et de centre A donc $\overrightarrow{AB'} = -2\overrightarrow{AB}$

h'(A) = A' où h est une homothétie de rapport 2 et de centre B donc $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$.

Exercice 23



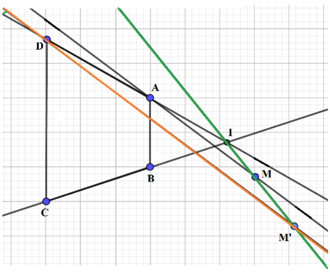
h(J) = k et h(E) = F donc les points I, E et F sont alignés et les droites (JE) et (KF) sont parallèles. Ainsi le point F appartient à la fois aux droites (IE) et la parallèle à (JE) passant par K

Méthode de construction

Construis la droite (JE)

- Trace la droite (D), parallèle à (JE) passant par le point K
- Trace la droite (IK)
- Le point F est l'intersection des droites (D) et (IE)

Exercice 24



h(A) = D et h(B) = C donc le centre I de l'homothétie h est le point I, intersection des droites (BC) et (AD).

Méthode de construction

- Trace la droite (IM)
- Trace la droite (L), parallèle à (AM) passant par le point D
- Le point M’, intersection de la droite (L) et (IM) est l’image du point M par l’homothétie h

Exercice 25

On a : $\overrightarrow{AB}$=: $\overrightarrow{A'B'}$. Donc il n’existe pas d’homothétie qui applique A sur A’ et B sur B’.

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 26

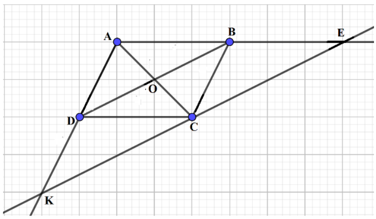
L est l’image de E par l’homothétie de centre F et de rapport – 1 *(il s’agit d’une symétrie centrale de centre F)* donc F est le milieu du segment [EL]. Puisque EFG est un triangle isocèle en F alors on a EF = FL = FG ainsi le triangle EGL est inscriptible dans le cercle de diamètre [EL] et par conséquent ELG est un triangle rectangle en G.

Exercice 27

h homothétie de centre o et de rapport -1.

h(E) = G ; h(K)= L, h(F) = P or K est le milieu de [EF] donc L est aussi milieu de [GP] car l’homothétie conserve le milieu.

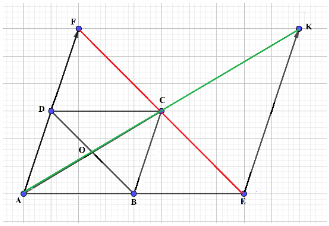
Exercice 28



1-
2- h(A) = C ; h(B) = D
3- h((AB)) = (CD) ; h(C) = A donc h((AC)) = (AC)
4- Par hypothèse on a h'(B) = E et de plus (DB)//(KE) et le point A est le point d’intersection des droites (KA) et (EA) donc h'(D) = K
5- h' est l’homothétie de centre A. O milieu de [AC] donc h'(O) = C en déduit que h' est l’homothétie de centre A et de rapport 2. On a donc :
h'(B) = E et h'(D) = K donc h'(ADB) = AEK donc Aire (AEK) = 2^2Aire (ABD)

Exercice 29

1-



Soit *h* l'homothétie de centre A et de rapport 2.

2-

3- *h*(B) = E ; *h*(O) = C et *h*(D) = F or D, O et B sont alignés, donc leurs images respectives F, C et E par *h* sont aussi alignés.

Exercice 30

1- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB}$ donc il existe une homothétie *h* de rapport 3 qui transforme A en B et B en C.

2- *h*(A) = B et *h*(B) = C . Le centre de l'homothétie O est l'unique point du plan qui est tel que $\overrightarrow{CO} = \frac{9}{8}\overrightarrow{CA}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 31

Le centre est Ω le rapport est 3 ou -3.

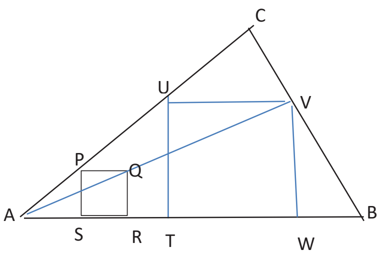
- Si le rapport est 3, alors le centre Ω est tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'O}$.
- Si le rapport est – 3 alors le centre Ω est tel que $\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{O'O}$

Exercice 32

1- Le périmètre de (P') est le double de celui de (P) si |k| = 2

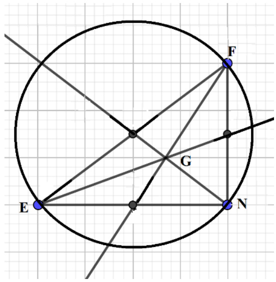
2- L'aire de (P') est le double de celui de (P) lorsque $k = \sqrt{2}$ ou $k = -\sqrt{2}$

Exercice 33



On construit un petit carré PQRS tel que Sϵ(AB), R$\epsilon(AB)$, et P ϵ(AC).
On construit l'image de PQRS à l'aide d'une homothétie de centre A.

Exercice 34



Le triangle EFN est inscrit dans le cercle de diamètre [EF].
Désignons par I le milieu de [EF] qui est aussi le centre du cercle.

On considère $h(\mathrm{I}\,;\frac{1}{3})$. on a h(N)=G.

Lorsque N varie, il décrit le cercle de diamètre [EF] ; G décrit l'image du cercle circonscrit au triangle.

Exercice 35

1- $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OA}$. Donc O est le centre de l'homothétie de centre de rapport 4 qui applique A sur B.

L'image de la droite (AQ) par h est la droite (T) parallèle à (AQ) qui passe par le point B.

M est le point commun à (T) et à (OQ) donc h(Q) = M. h est donc l'homothétie de centre O et de rapport 4.

2- Lorsque M décrit le cercle (C) , Q décrit l'image du cercle par h.

Exercice 36

On a : $\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QP}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{QA}=-3\overrightarrow{QA}-3\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AQ}$

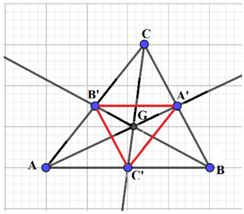
A est le centre de l'homothétie h de rapport $\frac{3}{4}$ qui applique P sur Q.
P est un point de la droite (D), donc h(P) est un point de la droite h((D)). Or h(P) = Q et Q appartient à la droite (D'), donc Q s'obtient comme le point d'intersection des droites (D') et h((D)). De Q, on obtient P grâce à la relation h(P) = Q

Exercice 37

1- Pour $k=\frac{1}{2}$ on a : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ soit G le centre de gravité du triangle ABC. On a : $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{MG}\right)$ car $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ h est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$

2- L'image du triangle ABC par cette homothétie est le triangle A'B'C' où A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

3- Pour $k = -1$, on a :



$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ donc f est la translation de vecteur $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 38

1- Le point I est le milieu de [DC] et (AC) est une diagonale du parallélogramme ABCD donc (AC) est une médiane issue du sommet C donc le point J appartient à deux médianes du triangle BCD, J est par conséquent le centre de gravité du triangle BCD.

2- De même le point K est aussi le centre de gravité du triangle ADC car il appartient deux de ces médianes (AI) et (DB).

On a ainsi

- dans le triangle BCD $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IJ}$
- dans le triangle ACD $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IK}$

De ces deux relations vectorielles, on définit une homothétie h de centre I et de rapport 3 tel que h(K) = A et h(J) = B.

3-On sait que h(K) = A et h(J) = B donc les droites (AB) et (KJ) sont parallèles.

4-Puisque h(K) = A et h(J) = B où h est une homothétie de centre I et de rapport 3, alors Aire(IAB) = 3^2Aire(IJK) or Aire(ABCD) = 3×Aire(IAB) donc Aire(ABCD) = 3^3Aire(IJK).

Exercice 39

1-Les points A, O et C sont alignés. Donc il existe une homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$ applique A sur C.

2-h(A) = C

3- h(B) = B' donc les points B, O et B' sont alignés. De plus B' appartient à la parallèle à (AB) passant par C or les droites (AB) et (CD) sont parallèles par construction, donc B' appartient à (CD).

4-h(B) = B' donc les points B, O et B' sont alignés de plus h(A) = C donc B' appartient à la droite (L), parallèle à (AB) et passant par le point C.

Le point B' appartient donc à la fois à la droite (L) et à (OB). Or (L) = (BC) donc nécessairement B' = D.

5- On sait que h(A) = C et h(B) = D de plus I et J milieux respectifs de [AB] et [CD] donc on en déduit par conservation des milieux que h(I) = J et que par conséquent O, I, J sont alignés.

6- (DC)//(AB) et (AD) et (BC) sont sécantes en O', il existe donc une homothétie h' de centre O' qui applique A sur D et B sur C. I et J étant les milieux respectifs de [AB] et [CD] alors h'(I) = J donc O', I et J sont alignés.

Exercice 40

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.

- On construit le point A' image du point A par h. La droite (D) parallèle à (AC) qui passe par A' est l'image de la droite (AC) par h.
- On construit le point B' image du point B par h. La droite (K) parallèle à (BC) qui passe par B' est l'image de la droite (BC) par h.
- L'image du point C par h est le point commun à (D) et à (K).

Exercice 41

1-[AC] est un diamètre de (C') et le point C' appartient au cercle (C') donc le triangle ACC' est rectangle en C'
De même [AB] est un diamètre du cercle (C) et le point B' appartient au cercle (C) donc le triangle ABB' est rectangle en B'.
Les deux droites (CC') et (BB') sont perpendiculaires à un même droite qui est la droite (AC). Donc (BB') et (CC') sont parallèles.
2-a) h(B) = C or A, B, C sont alignés et C appartient à [AB] donc le rapport de h est égal à $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$.
b) h(B) = C , (BB') // (CC') et A, C et C' sont alignés donc le point C' appartient à [AB'] et on a : h(B') = C'
3- a) L'image de B' par h' est C.
 b) Le rapport est $k = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = -\frac{2}{3}$
4- On a h'(B) = C' . Or $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'B} \Rightarrow \overrightarrow{IC'} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'B}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{C'I}$

5- On a : $\overrightarrow{BC'} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{C'I} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = -\frac{5}{2}\left(\overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BI}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$ donc B est le centre d'une homothétie de rapport $\frac{3}{5}$ qui applique C' sur I.

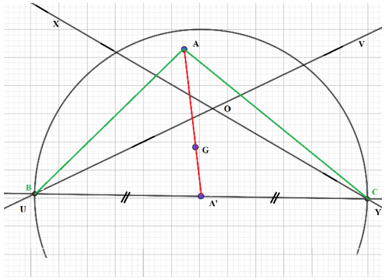
Lorsque la droite (Δ) varie, le point C' décrit le cercle (C'), le point I décrit l'image de (C') par l'homothétie de centre B est de rapport $\frac{3}{5}$.

Exercice 42

A est un sommet du triangle dont G est le centre de gravité, on peut donc définir une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique A sur A'. A' est dans ces conditions le milieu du segment [BC].

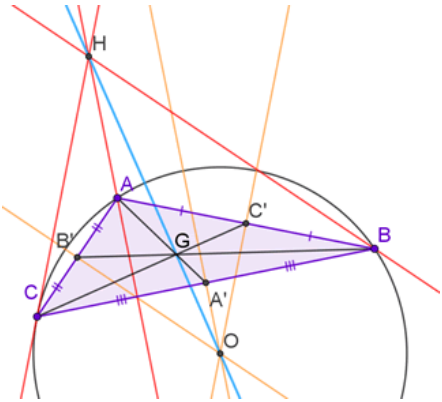
On place ensuite les points B et C respectivement sur (UV) et (XY) tel que A' soit le milieu du segment [BC].

On obtient ainsi le triangle ABC tel que G soit son centre de gravité.



Situations complexes

43



Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G son centre de gravité et H, l'orthocentre de ce triangle.

Recherchons un point M s'il existe tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

On a : $\overrightarrow{OM}$ - $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, soit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Soit A' le milieu de [BC],

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, = 2\overrightarrow{OA'}$, soit $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OA'}$. Il vient que $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de la droite (OA'). Or la droite (OA') est perpendiculaire à le droite (BC), donc la droite

(AM) est aussi perpendiculaire à la droite (BC). M est donc un point de la hauteur du triangle ABC issue du point A.

Un raisonnement analogue permet de justifier que la droite (BM) est perpendiculaire à la droite (AC) et que le point M appartient aussi à la hauteur du triangle ABC issue du point B en considérant l'égalité $\overrightarrow{OM}$ - $\overrightarrow{OB}$ = $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OC}$ et le milieu B' de [AC].

On justifie de même que point M appartient aussi à la hauteur du triangle ABC issue du point C en considérant l'égalité $\overrightarrow{OM}$ - $\overrightarrow{OC}$ = $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OB}$ et le milieu C' de [AB]

Le fait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un unique point H, permet d'affirmer que M = H et que le point H vérifie la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

G étant le centre de gravité du triangle ABC, on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

Soit : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Or $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ c'est-à-dire que G est l'image de H par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

Conclusion : les point O, G et H sont alignés.

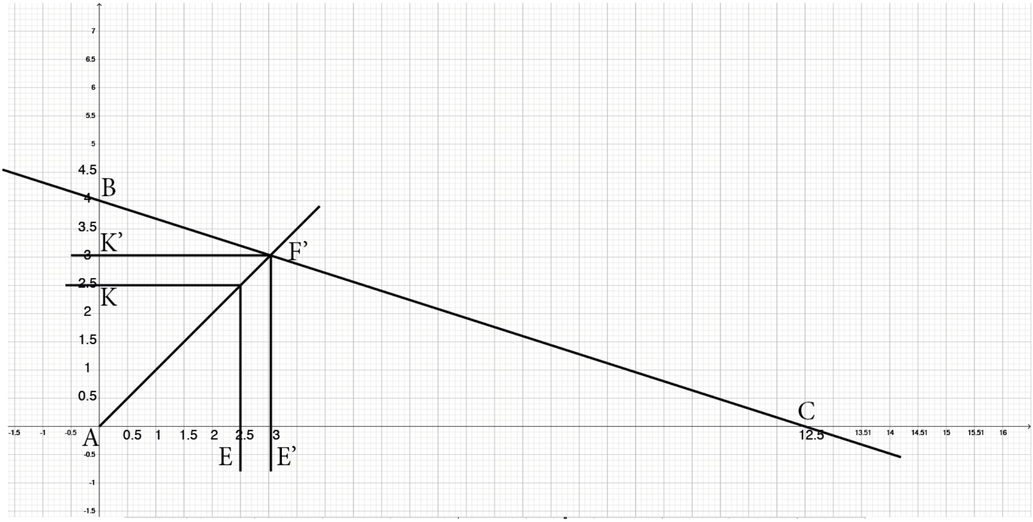
Remarque : la droite (OG) est appelée la droite d'Euler du triangle ABC.

44

1) Construction du carré AEFK
Construis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
Construis le point K tel que $AK = AE$ et $K \in [AB)$
Construis le point F point d'intersection des perpendiculaires respectives à (AC) et (AB) passant par E et K.

Construction du carré AE'F'K'

On obtient le carré AE'F'K' en utilisant l'homothétie de centre A qui applique F sur F'



3) Pour déterminer celui qui a le champ ayant la plus grande superficie, calculons le rapport k de l'homothétie h. On a : $k = \frac{AF'}{AF}$

En choisissant le cm comme unité, à l'échelle 1/2000, on a : AC = 12,5 et AB = 4.
On peut chercher analytiquement une solution au problème en munissant le plan d'un repère orthonormé (A, I, J) tel que : AI = AJ = 1. Dans ce repère On a : B (0 ; 4) et C (12,5 ; 0). $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ donc E (2,5 ; 0). Le point F est sur la première bissectrice donc F (2,5 ; 2,5).
$AF^2 = AE^2 + EF^2$ donc $AF = 2,5\sqrt{2}$.
Déterminons les coordonnées du point F'. Le point F' est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite d'équation $y = x$. Une équation de la droite (BC) après calcul donne : $y = -0,32x + 4$.
Après calcul, on a : F' $(\frac{100}{33} ; \frac{100}{33})$; donc AF'= $\frac{100}{33}\sqrt{2}$. On a donc : $k = \frac{40}{33}$

D'où l'aire du carré AE'F'K' est : $(\frac{40}{33})^2 \times 2500$ soit environ 3673. Ainsi l'aire de la parcelle attribué à Kouamé est égal à environ : 10000 – 3673 soit environ 6327. Kouamé a donc le terrain le plus grand

13 ÉTUDE DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

1. De quoi s'agit-il dans ce texte ?
2. Dis quelles sont les données de l'énoncé.
3. Quel est le travail à faire ?

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	Où se déroule la scène ?	Dans la commune de Yopougon
	De quoi s'agit-il ?	Une location de voiture
Circonstances	**Quelles sont** les données ?	-Les tarifs, - la distance à parcourir - le montant de l'argent prévu pour la location
Tâche	Quel est le travail à faire ?	Voir la possibilité de la location de voiture.

II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

Activité 1 Fonction affine par intervalles

Objectif Cette activité vise à faire découvrir la définition d'une fonction affine par intervalle.

Solution

1- $f_1(x) = -2x + 3 = f(x)$ sur $]-\infty ;-1[$
2- $f_2(x) = -x = f(x)$ sur $[-1 ; 3[$.
3- $f_3(x) = x + 3 = f(x)$ sur $[3 ;+\infty[$.

Solution de l'exercice fixation de l'activité 1

1 a) et d)

Activité La fonction partie entière

Objectif Cette activité vise à faire découvrir la définition de la partie entière d'un nombre réel.

Solution

Nombre réel x	**Entier relatif z correspondant**
2,578	**2**
3,14	**3**
0,002	**0**
-1,67	**- 2**
-5,89	**-6**
$\sqrt{2}$	**1**
$-\sqrt{3}$	**-2**

a) Puisque pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif z tel que $z \leq x < z + 1$

Alors la correspondance f qui à tout nombre réel x associe l'entier relatif z vérifiant la condition ci-dessus est par définition une application.

b) $f(-1{,}02) = -2$; $f(7{,}9) = 7$; $f\left(-\sqrt{3}\right) = -2$

Solution de l'exercice fixation de l'activité 2

2 1) b ; 2) b ; 3) b ; 4) a ; 5) a

Activité 3 Etude de la fonction valeur absolue

Objectif Cette activité vise à étudier la fonction $x \to |x|$

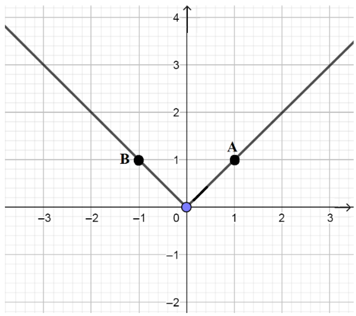
Solution

1- **D_f = IR**

2- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et on a $f(x) = x$
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et on a $f(x) = -x$

3- Soit x_1 et x_2 dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$ tel que $x_1 < x_2 < 0$ donc $|x_1| > |x_2|$ d'où $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
On démontre de même que si x_1 et x_2 sont dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ tel que $0 \leq x_1 < x_2$ alors $|x_1| < |x_2|$ d'où $f(x_1) < f(x_2)$ donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

4- a) f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$ et on a $f(0) = 0$.
b) Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et on a $f(x) = x$ donc la représentation graphique de f est la première bissectrice (D) d'origine O passant par le point A(1 ; 1)
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et on a $f(x) = -x$ donc la représentation graphique de f est la deuxième bissectrice (D') d'origine O passant par B(-1 ;1).
On déduit que la représentation graphique de f est la réunion de ces deux demi-droites (D) et (D') d'origine O.



Solution de l'exercice fixation de l'activité 3

3
- 1-F ; 2 - F ; 3 - F ; 4 – V ; 5 – F ; 6 – V
- 1-a) ; 2 – a) ; 3 – a)

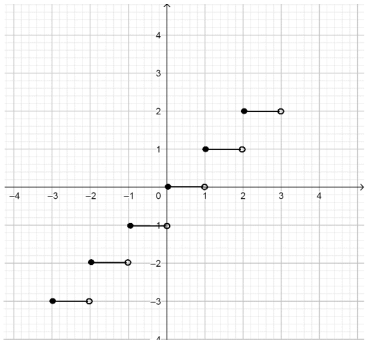
Activité 4 Etude de la fonction partie entière

Objectif *Cette activité vise à définir la fonction partie entière et à la représenter sur un intervalle borné de IR*

1-

- Si $x \in [-3 ; -2[$, $E(x) = -3$
- Si $x \in [-2 ; -1[$, $E(x) = -2$
- Si $x \in [-1 ; -0[$, $E(x) = -1$
- Si $x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0$
- Si $x \in [1 ; 2[$, $E(x) = 1$
- Si $x \in [2 ; 3[$, $E(x) = 2$

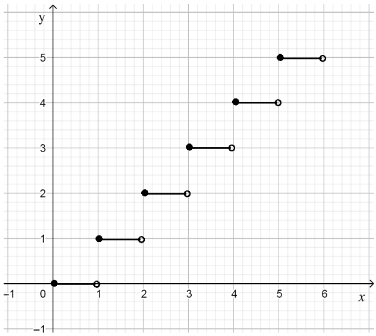
2- représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle [-3 ;3[



Exercice de fixation

4

Représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle [0 ;6[.



Activité 5 Etude de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^2$$

Objectif *Cette activité vise à étudier la fonction* $\boldsymbol{x \rightarrow x^2}$

Solution

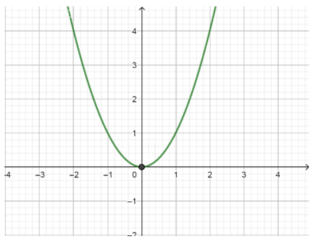
1- $D_f = IR$
2- u *et* $v \in [0 ;+\infty[$ tel que $u < v$ alors $u^2 < v^2$ donc $f(u) < f(v)$
3- u *et* $v \in]-\infty ; 0]$ tel que $u < v$ alors $u^2 > v^2$ donc $f(u) > f(v)$.
4- u *et* $v \in [0 ;+\infty[$ tel que $u < v$ implique que $f(u) < f(v)$ alors f est strictement croissante sur $[0 ;+\infty[$
u *et* $v \in]-\infty ; 0]$ tel que $u < v$ implique que $f(u) > f(v)$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$
5- Tableau de variation de f sur IR.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

6- a) Sur l'intervalle [0 ; 3] f est croissante donc pour tout $x \in [0 ; 3]$ on a : $f(x) \geq f(0)$.
Or $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$
de même sur l'intervalle [-3 ;0], f est décroissante donc pour tout $x \in[-3 ;0]$, on a :
$f(x) \geq f(0)$. Or $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$
ainsi pour tout $x \in[-3 ;3]$, $f(x) \geq 0$ donc 0 est le minimum de f sur [-3 ;3].
b) Sur l'intervalle [0 ; 3] f est croissante donc pour tout $x \in [0 ; 3]$ on a : $f(x) \leq f(3)$.
Or $f(3) = 9$. Donc $f(x) \leq 9$
de même sur l'intervalle [-3 ;0], f est décroissante donc pour tout $x \in[-3 ;0]$, on a :
$f(x) \leq f(-3)$. Or $f(-3) = 9$. Donc $f(x) \leq 9$
Ainsi pour tout $x \in[-3 ;3]$, $f(x) \leq 9$ donc 9 est le maximum de f sur [-3 ;3].
c)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

7- Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$



Solution de l'exercice fixation de l'activité 5

5

- 1 – F ; 2 – F ; 3 – F ; 4 – V ; 5 – F ; 6 – V .
- 1 – b ; 2 – a ; 3 – a .

Activité 6 Etude de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Objectif : *Cette activité vise à étudier la fonction* $x \rightarrow \sqrt{x}$

Solution

1- $D_f = IR^+$

2- Pour tout nombres réels u et v de l'intervalle [0 ;+∞[, si $u < v$ alors $\sqrt{u} < \sqrt{v} \Rightarrow f(u) < f(v)$

3- Pour tout nombres réels u et v de l'intervalle [0 ;+∞[, si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$ donc f est croissante sur [0 ;+∞[.

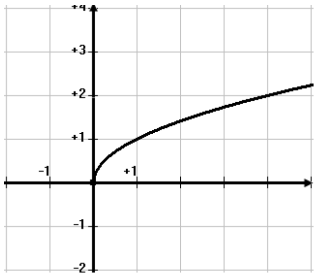
4- Tableau de variation de f

x	0		+∞
$f(x)$		↗	

5- a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,1

b) Représentation graphique



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 6

6 1 – a ; 2 – c .

Activité 7 Etude de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Objectif *Elle vise à étudier la fonction* $x \to \dfrac{1}{x}$

Solution

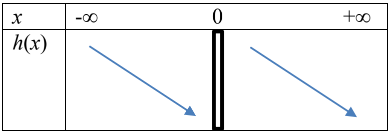
1- D_f = IR\{0}

2- Pour tous nombres réels u et v de l'intervalle]0 ;+∞[, si $u < v$ alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v} \Rightarrow h(u) > h(v)$

3- Pour tous nombres réels u et v de l'intervalle]-∞ ; 0[, si $u < v$ alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v} \Rightarrow h(u) > h(v)$

4- Puisque pour tous nombres réels u et v de l'intervalle]-∞ ; 0[et]0 ;+∞[,
si $u < v$ alors $h(u) > h(v)$, donc h est décroissante sur]-∞ ; 0[et sur]0 ;+∞[.

5- Tableau de variation de h.



6- a) M(x,y) appartient à (C_h) alors on a : $y = \dfrac{1}{x}$ pour tout réel x non nul.

Ainsi pour $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $y > 0$

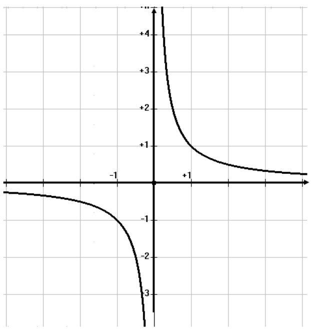
Et pour $x < 0$ on a : $\dfrac{1}{x} < 0$ donc $y < 0$

7- b) Puisque si un point M(x,y) appartient à (C_h) alors $x > 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y < 0$ donc la représentation graphique de h est la réunion de deux parties disjointes du plan

c) Tableau complété

x	-4	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	4
$h(x)$	-0,25	-0,4	-0,5	-0,6	-1	-2		2	1	0,6	0,5	0,4	0,25

d) Représentation graphique



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 7

7 1 – b ; 2 - a

Activité 8 Etude de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

Objectif : *Cette activité vise à étudier la fonction* $x \to x^3$

Solution

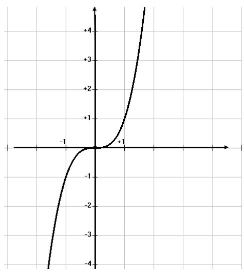
1- Dg = IR
2- a et b deux nombres positifs tel que $a < b$ alors on a $a^2 < b^2$ on en déduit que $a \times a^2 < b \times b^2$ d'où $a^3 < b^3$
3- a et b deux nombres négatifs tel que $a < b$ alors $-a > -b$ donc d'après la question précédente on a $(-a)^3 > (-b)^3 \Rightarrow -a^3 > -b^3$ et par conséquent $a^3 < b^3$
4- Soit a et b deux nombres réels tel que $a < 0 < b$ on a $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$
5- g est croissante sur IR
6- Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
g(x)	$\nearrow$	

7- a)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
g(x)	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

b) Représentation graphique



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 8

8 1 – b ; 2 – b

Activité 9 Etude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où a est un nombre réel non nul

$$x \mapsto |ax + b|$$

Objectif : Cette activité vise à étudier la fonction $x \to |ax + b|$

Solution

- **Premier cas: On suppose que a est un nombre réel strictement positif**

1- D_f = IR

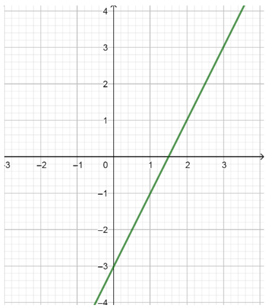
2- Si $x \geq \frac{-b}{a}$ alors $f(x) = ax + b$ de même si $x \leq \frac{-b}{a}$ alors $f(x) = -ax - b$ donc f est une fonction affine par intervalles.

3- Sur $\left[-\frac{b}{a};+\infty\right[$, $f(x) = ax + \mathrm{b}$ or $a > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{a};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right]$.

4- Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

5- Construction de la courbe de *f* pour *a* = 2 et *b* = -3



- **Deuxième cas : On suppose que *a* est un nombre réel strictement négatif.**

1- $D_f = \mathrm{IR}$

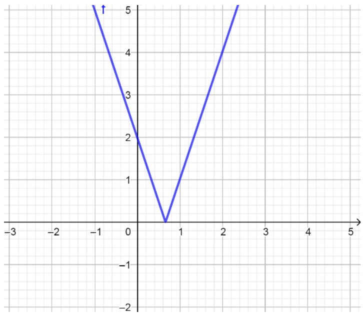
2- Si $x \geq \frac{-b}{a}$ alors $f(x) = -ax - b$ de même si $x \leq \frac{-b}{a}$ alors $f(x) = ax + b$ donc f est une fonction affine par intervalles.

3- Sur $\left[-\frac{b}{a};+\infty\right[$, $f(x) = -ax - \mathrm{b}$ or $a < 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$.

4- **Tableau de variation de *f* pour *a* = -3 et *b* = 2**

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

Représentation graphique de *f*



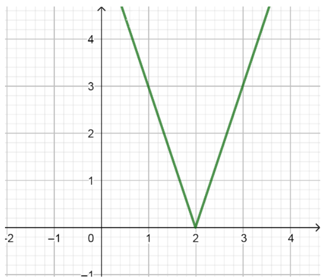
Solution de l'exercice de fixation de l'activité 9

9
- Si $x \epsilon]-\infty; 2]$, $f(x)$ =-3x+6 ;

  Si $x \epsilon [2, +\infty[$, $f(x)$ = 3x-6

f ainsi défini est une fonction affine par intervalle.

- Représentation graphique



Activité 10 Etude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax^2$$

Objectif : *Cette activité vise à étudier la fonction* $x \to ax^2$

Solution

Premier cas : on suppose que *a* est un nombre réel strictement positif.

1- **D_f = IR**

2- **Je justifie que *f* est strictement croissante sur [0 ;+∞[et strictement décroissante sur]-∞ ;0] .**

- Soit x_1 et x_2 deux nombres réels strictement positifs tel que $x_1 < x_2$.

Alors on a $x_1^2 < x_2^2$, a étant un réel positif alors on obtient $ax_1^2 < ax_2^2$ d'où $f(x_1) < f(x_2)$ on en déduit que f est strictement croissante sur $[0 ;+\infty[$.

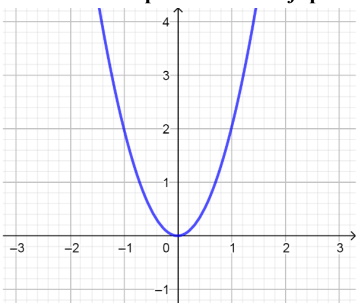
- Soit x_1 et x_2 deux nombres réels strictement négatifs tel que $x_1 < x_2$.

Alors on a $x_1^2 > x_2^2$, a étant un réel positif alors on obtient $ax_1^2 > ax_2^2$ d'où $f(x_1) > f(x_2)$ on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty ;0]$.

3- **Tableau de variation de *f***

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4- **Construction de la courbe représentative de *f* pour *a* = 2**



Deuxième cas : On suppose que *a* est un nombre réel strictement négatif

1- **D_f = IR**

2- **Je justifie que *f* est strictement décroissante sur $[0 ;+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty ;0]$.**

- Soit x_1 et x_2 deux nombres réels strictement positifs tel que $x_1 < x_2$.

Alors on a $x_1^2 < x_2^2$, a étant un réel négatif alors on obtient $ax_1^2 > ax_2^2$ d'où $f(x_1) > f(x_2)$ on en déduit que f est strictement décroissante sur $[0 ;+\infty[$.

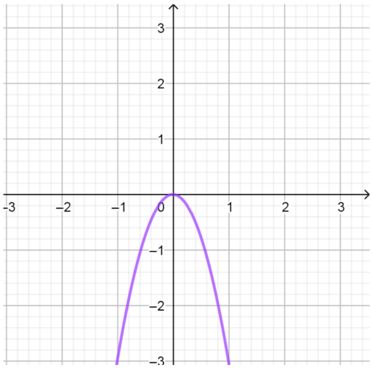
- Soit x_1 et x_2 deux nombres réels strictement négatifs tel que $x_1 < x_2$.

Alors on a $x_1^2 > x_2^2$, a étant un réel négatif alors on obtient $ax_1^2 < ax_2^2$ d'où $f(x_1) < f(x_2)$ on en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty ;0]$.

3- **Tableau de variation de *f*.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

4- Construction de la courbe représentative de *f* pour *a* = -3



Solution de l'exercice de fixation de l'activité 10

10	1- F ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – F ; 5 – F

Activité 11 Etude de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **où *a* est un nombre réel non nul**

$$x \mapsto \frac{a}{x}$$

Objectif : *Cette activité vise à étudier la fonction* $x \to \dfrac{a}{x}$

Solution

- **Premier cas : On suppose que *a* est un nombre réel strictement positif.**

1- $\mathbf{D}_h = \mathbf{IR^*}$

2- Soit u et v deux nombres réels de $]0\,;+\infty[$ tel que $u < v$, alors on a $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$, a étant un nombre réel positif alors on a : $\frac{a}{u} > \frac{a}{v}$ d'où $h(u) > h(v)$.

3- Soit u et v deux nombres réels de $]-\infty\,;0[$ tel que $u < v$, alors on a $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$, a étant un nombre réel négatif alors on a : $\frac{a}{u} > \frac{a}{v}$ d'où $h(u) > h(v)$.

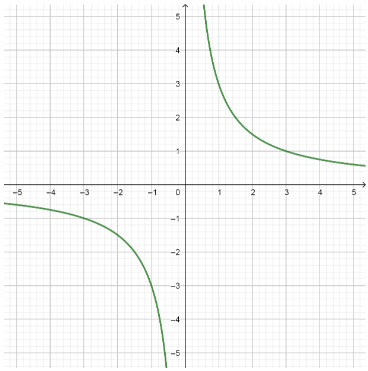
4- Des questions 2- et 3- on déduit que h est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.

5- Tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

6- Soit M(x,y) un point de (C_h).
Si $x > 0$, a étant positif, alors $y > 0$.
De même si $x < 0$, a étant positif, alors $y < 0$.
Ainsi pour tout point M(x,y) appartenant à (C_h) on a $x > 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y < 0$.

7- Représentation graphique de (C_h) au cas où $a = 3$.



- **Deuxième cas : On suppose que *a* est un nombre réel strictement négatif.**

1- D_h = IR*

2- Soit u et v deux nombres réels de]0 ;+∞[tel que $u < v$, alors on a $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$, a étant un nombre réel négatif alors on a : $\frac{a}{u} < \frac{a}{v}$ d'où $h(u) < h(v)$.

3- Soit u et v deux nombres réels de]-∞ ; 0[tel que $u < v$, alors on a $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$, a étant un nombre réel négatif alors on a : $\frac{a}{u} < \frac{a}{v}$ d'où $h(u) < h(v)$.

4- Des questions 2- et 3- on déduit que h est strictement croissante sur]0 ;+∞[et sur]-∞ ; 0[.

5- Tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

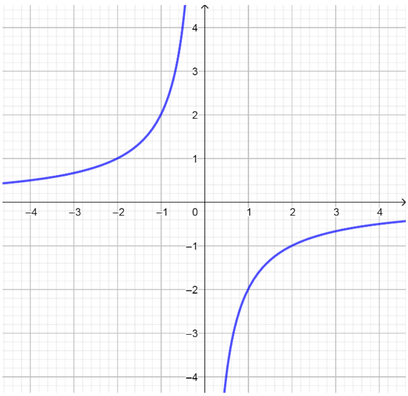
6- Soit M(x,y) un point de (C_h).

Si $x > 0$, a étant négatif, alors $y < 0$.

De même si $x < 0$, a étant négatif, alors $y > 0$.

Ainsi pour tout point M(x,y) appartenant à (C_h) on a $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$.

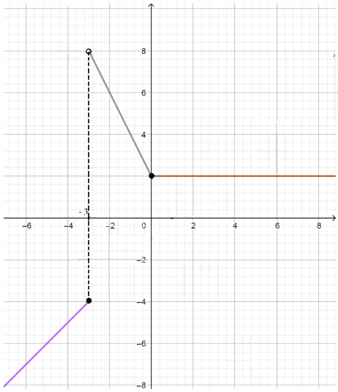
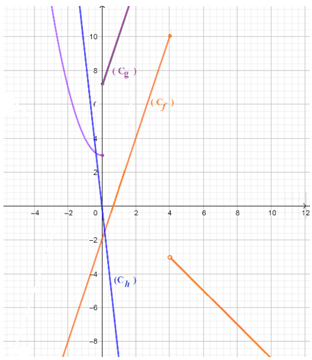
7- Représentation graphique de (C_h) au cas où $a = -2$.



Solution de l’exercice de fixation de l’activité 11

11	1 – F ; 2 – V ; 3 – V

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	**Comment représenter une fonction affine par intervalles ?** **1-**  **2-** 
2	**Comment écrire la fonction $x \mapsto \lvert ax+b \rvert$ avec $a \neq 0$ sous la forme d'une fonction affine par intervalle.** **1-**Si $x \in [2\ ;+\infty[$ alors $f(x) = 3x - 6$ Si $x \in]-\infty\ ;2]$ alors $f(x) = -3x + 6$ f ainsi définie est une fonction affine par intervalles. 2-Si $x \in \left[\frac{3}{5};+\infty\right[$ alors $f(x) = 5x - 3$ Si $x \in \left]-\infty;\frac{3}{5}\right]$ alors $f(x) = -5x + 3$ f ainsi définie est une fonction affine par intervalles.

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

Exerces de fixation

Fonctions affines par intervalles

Exercice 1

a) Faux ; b) Vrai ; c) Vrai ; d) Faux.

Exercice 2

$f(-5 = -7$; $f(3) = -3$; $f(7) = 2$.

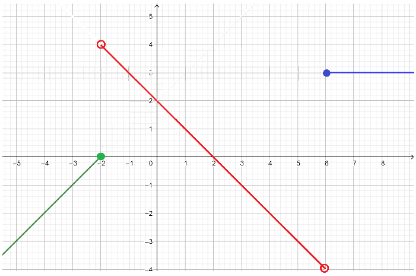
Exercice 3

$f(-2) = -5$; $f(2{,}5) = -0{,}5$; $f(8) = 19$.

Exercice 4

1- $D_f = \mathbb{R}$

2-Représentation graphique de f



La Fonction parie entière

Exercice 5

1- F ; 2 – V ; 3 – F

Exercice 6

1 – F ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – F ; 5 – V.

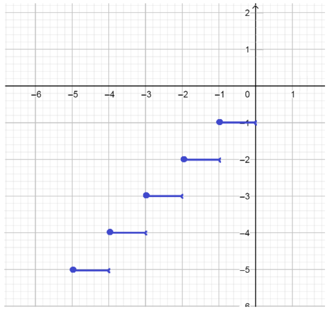
Exercice 7

1-

- Si $x \in [-5 ; -4[$, $E(x) = -5$

- Si $x \in [-4 ; -3[$, $E(x) = -4$
- Si $x \in [-3 ; -2[$, $E(x) = -3$
- Si $x \in [-2 ; -1[$, $E(x) = -2$
- Si $x \in [-1 ; 0[$, $E(x) = -1$

2- Représentation graphique



La fonction $x \mapsto |x|$

Exercice 8

1- V ; 2 – F ; 3 – F ; 4 – V ; 5 – V

Exercice 9

1 – A ; 2 – B ; 3 – A ; 4 – A .

- Si $x \in [-5 ; -4[$, $x\,E(x) = -5x$
- Si $x \in [-4 ; -3[$, $xE(x) = -4x$
- Si $x \in [-3 ; -2[$, $xE(x) = -3x$
- Si $x \in [-2 ; -1[$, x E(x) = -2xx
- Si $x \in [-1 ; 0[$, xE(x) =-1x

Exercice 10

1 – C ; 2 – A .

La fonction $x \mapsto ax^2 \quad (a \neq 0)$

Exercice 11

1 – C ; 2 – C .

Exercice 12

1 – V ; 2 – F ; 3 – F ; 4 – V ; 5 – V.

La fonction : $x \mapsto \dfrac{a}{x} \quad (a \neq 0)$

Exercice 13

1 – A ; 2 - A

Exercice 14

1 – V ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – F ; 5 – F .

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice 15

1 – A ; 2 – C

Exercice 16

1- $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
2- Justification : la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

La fonction $x \mapsto x^3$

Exercice 17

1 – A ; 2 – A.

Exercice 18

1- $a^3 < b^3$
2- **Justification :** la fonction $x \rightarrow x^3$ est strictement croissante sur IR.

La fonction : $x \mapsto |ax+b|$ **avec** $a \neq 0$

Exercice 19

1 – V ; 2 - F ; 3 – F .

Exercice 20

1 – V ; 2 – V ; 3 – V ; 4 – V .

Exercice 21

Si $x \in]-\infty ; 2]$; $f(x) = -3x+6$,

Si $x \in]2 ; +\infty[$, $f(x) = 3x - 6$

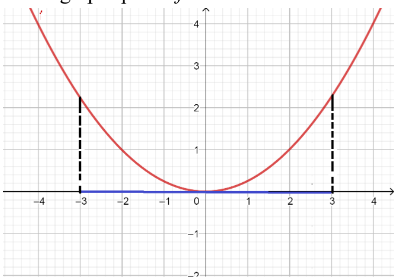
EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 22

1- *f* est strictement croissante sur]0 ; + ∞[et strictement décroissante sur]-∞ ; 0[
2- Tableau de variation de *f*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

3- Représentation graphique de *f*

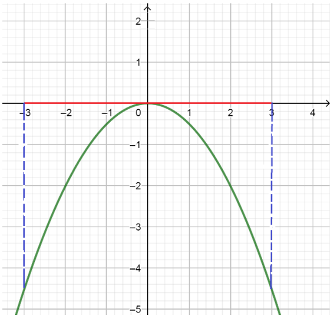


Exercice 23

1- *f* est strictement croissante sur]-∞ ; 0[et strictement décroissante sur]0 ; + ∞[
2- Tableau de variation de *f*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

3- Représentation graphique de f sur [-3 ;3]

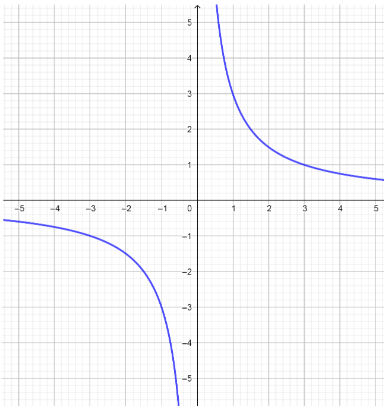


Exercice 24

1- *f* est strictement décroissante sur]0 ; + ∞[et sur]-∞ ; 0[
2- Tableau de variation de *f*.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

3- Représentation graphique de g

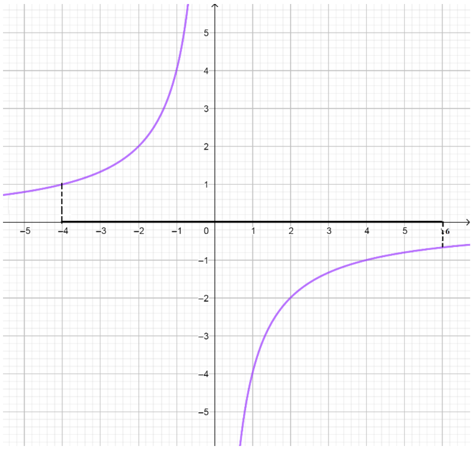


Exercice 25

1- g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[et sur]-∞ ; 0[
2- Tableau de variation de g.

x	-∞		0		+∞
$g(x)$		↗	‖	↗	

3- Représentation graphique de g

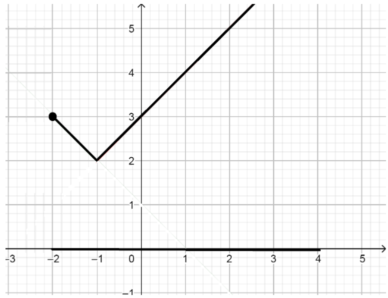


Exercice 26

1- L'ensemble de définition est [-2 ;4].
2- Variations de g :
g est strictement décroissante sur [-2 ;-1[et strictement croissante sur [-1 ;4].
Tableau de variation de g

x	-2		-1		4
$g(x)$		↘	2	↗	

3- Représentation graphique de g

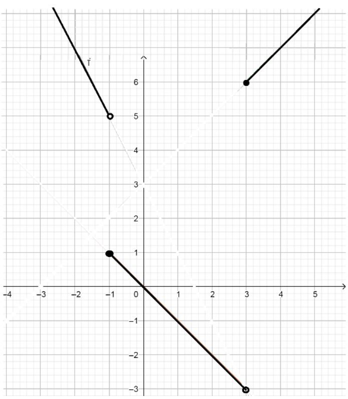


Exercice 27

1- L'ensemble de définition est IR.
2- Sens de variation de *f*
- *f* est strictement décroissante sur]-∞ ;-1[et sur]-1 ; 3[.
- *f* est strictement croissante sur [3 ;+∞[.

3- Tableau de variation de *f*

x	-∞		-1		3		+∞
$f(x)$		↘	||	↘	|	↗	



Exercice 28

1- Si $x \in]-\infty\,;6]$ alors $f(x)=-x+6$,

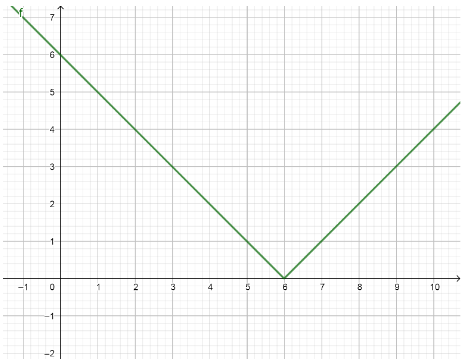
Si $x \in]6;+\infty[$ alors $f(x)= x-6$

f ainsi définie est une fonction affine par intervalles

2- f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;6]$ et strictement croissante sur $]6;+\infty[$
Tableau de variations de f

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

3- Représentation graphique de *f*



Exercice 29

1- **Dg = IR**

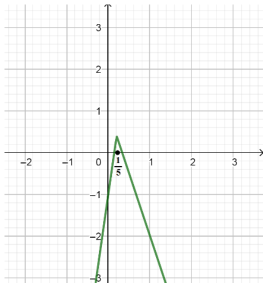
2-

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
1-5*x*	+		-
|1-5*x*|	**1 – 5*x***		**-1 + 5*x***

Si $x \in \left]-\infty;\frac{1}{5}\right]$; $g(x) = 7x - 1$. si $x \in \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$; $g(x) = -3x + 1$.

Donc g est une fonction affine par intervalle

3- Représentation graphique



Exercice 30

1- A(1 ;1) B(2 ;4)

Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\frac{y_B - Y_A}{x_B - x_A} = 3$

2- M et N étant des points de (C_f) le coefficient directeur de la droite (MN) est $\frac{u^2 - v^2}{u - v} = u + v = 3$

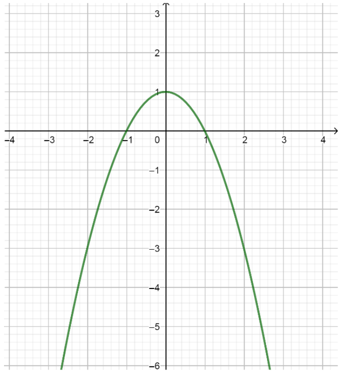
Les droites (AB) et (MN) ont le même coefficient directeur donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Exercice 31

1- D_f = IR
2- Soit u et v deux nombres réels de]-∞, 0[tel que $u < v$ alors on a $1 - u^2 < 1 - v^2$ donc $f(u) < f(v)$ on en déduit que f est strictement croissante sur]-∞, 0[
On démontre de même que f est strictement décroissantes sur]0 ;+∞[.
3- Tableau de variation de f

x	-∞ ↗	0	↘ +∞
$f(x)$	↗		↘

4- D'après le tableau de variation, le maximum est atteint pour $x = 0$. Or $f(0) = 1$ donc le maximum de f sur IR est 1.
5- Représentation graphique de f sur [-4 ;4]



Exercice 32

Ensemble des nombres réels tel que E(3*x*) = 4

E(3*x*) = 4 donc $4 \leq 3x < 5$. Donc $\frac{4}{3} \leq x \prec \frac{5}{3}$ d'où $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right[$

Exercice 33

g(2) = 0 g(2,1) = 0,1, g(-2) = 0 ; g(-1.9) = 0.1 ;g(-1,8) = 0.2, g(-3) = 0

Exercice 33

1- E(*x*)$\leq x < E(x) + 1$.
   Donc 1+E(*x*)≤1+ *x*< [E(*x*)+1]+1
   Donc E(*x*+1) = E(*x*)+1

1) On a : E(x)$\leq x < E(x) + 1$.
   Donc *k* +E(*x*)≤ *k*+ *x*< [E(*x*) + *k*]+1
   Donc E(*x* + *k*) = E(*x*) + *k*

Exercice 34

On a : E(*x*)$\leq x < E(x) + 1$ et E(y)$\leq y < E(y) + 1$

1- On obtient E(*x*) + E(y)≤ *x* + y< [E(*x*)+E(y)+1] + 1.

Les nombres entiers E(*x*) + E(y) ; E(*x*)+E(y)+1 et [E(x)+E(y)+1]+1 sont trois entiers consécutifs et E(*x*)+E(y)≤ *x*+y< [E(x)+E(y)+1]+1.

Donc E(*x* + y) = E(*x*) + E(y) ou E(*x*) + E(y) +1

Donc E(*x*) + E(y)≤E(*x* + y)

2) E(*x*)+E(*x*+1)≤E(*x*)+E(*x*)+1 car E(*x*)+1≤E(*x*+1) donc 2E(*x*) + 1 ≤ E(*x*) + E(*x* + 1).

Exercice 35

1).Df =]-∞ ;0[∪ [1 ;+∞[

2). L'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

3)si n≠ 0 f(n)=1

Exercice 38

Si xϵ] $-\infty$;$\frac{1}{2}$] ; f(x)=1-x et g(x)=x ,

si xϵ] $\frac{1}{2}$; $+\infty$[, f(x)=x et g(x)=1-x

Exercice35

On considère le triangle APQ.

1)On utilise la conséquence de la propriété de Thales. On obtient $\frac{BM}{AQ}=\frac{BP}{AP}$

Donc AQ=3x

2.) Qϵ[AD] or AD = 3 donc 0≤ AQ ≤0 d'où 0≤3x≤ 3 on en déduit que $0 \leq x \leq 1$

3)On considère le triangle MCN. On applique la conséquence de la propriété de Thales.

On obtient $\frac{\text{BM}}{\text{MC}}=\frac{\text{BP}}{\text{NC}}$ donc NC=$\frac{6-2x}{x}$

4) N milieu de [CD] donc $\frac{6-2x}{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{12}{7}$

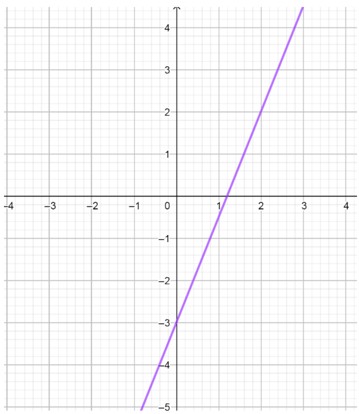
5) On considère le triangle NCM.

On applique la conséquence de Thalès et on obtient $\frac{DQ}{MC}=\frac{DN}{CN}$ donc $DQ=\frac{5x-6}{2}$.

6) a) Sens de variation de f

$f(x)=\frac{5x-6}{2}$. f étant une fonction affine de coefficient directeur positif, alors est strictement croissante sur IR.

b) Représentation graphique de *f*.



7- Si les deux droites sont parallèles, on applique la propriété de Thalès au triangle DCB.

et on obtient $\frac{NC}{DC} = \frac{CM}{BC}$. On a l'égalité NC=CM .

x = 2

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 36

Soit x le nombre de livres à louer.

Formule 1 : $f(x) = 2000 + 150x$

Formule 2 : $g(x) = 1000 + 200x$

Formule 3 : $h(x) = 300x$

Pour $x < 10$ La formule 3 est la plus avantageuse.

Pour $x > 10$ La formule 2 est la plus avantageuse

Exercice 37

Soit x le nombre de minutes de dépassement.

Formule 1 : $f(x) = 300 + 25x$,

Formule 2 : $g(x) = 150 + 75x$

Pour $x = 30$ on a :

$f(30) = 300 + 25\times30 = 1050$

$g(x) = 150 + 75\times30 = 2400$

Donc la formule 1 est la plus avantageuse.

NB : On pourra aussi utiliser la méthode graphique.

14 ROTATIONS

I- SITUATION D'APPRENTISSAGE

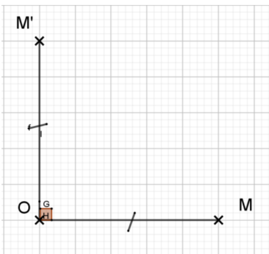
Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où se déroule la scène ?	Dans une classe de seconde, dans un lycée.
	De quoi s'agit-il ?	Un cours de géographie
Circonstances	Quelles sont les données ?	Le soleil et les différentes phases de la lune autour du soleil
Tâche	Quel est le travail à faire ?	Analyser une figure indiquant les phases de la lune autour du soleil
	Face à cette difficulté, qu'est ce que les élèves ont -ils décidé de faire ?	Les élèves ont décidé d'expliquer géométriquement le passage d'une phase de la lune à l'autre

II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

Activité 1 : Définition.

Objectif Cette activité vise à mettre en place la définition d'une rotation

Solution



1 et 2) voir figure

3. a)) voir figure

b) On ne peut construire qu'un seul point.

4) Lorsque M = O , on a M' = O

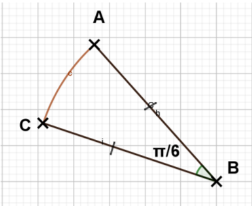
5. A tout point M du plan on associe un unique point M' tel que OM = OM' et $es\ (\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}}) = \frac{\pi}{2}$, il existe donc une application du plan dans le plan qui laisse le pont O invariant et qui applique le point M sur M'.

Solution de l'exercice fixation de l'activité 1

1 : 1 – V ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F ; 5 -F

2 1 – G ; 2 – G (écrire plutôt $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$

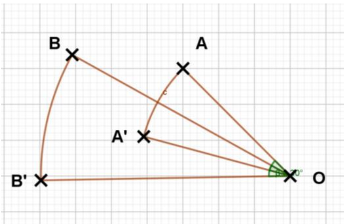
3



Activité 2 : Propriété fondamentale de la rotation

Objectif : *Cette activité vise à établir la propriété fondamentale de la rotation*

Solution



r est une rotation d'angle $\frac{\hat{\pi}}{6}$.

$Si \begin{cases} r(A) = A' \\ r(B) = B' \end{cases}, alors\ \ AB = A'B'\ et\ \ mes\ (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}})$

Solution des exercices fixation de l'activité 2

4 : 1 – K ; 2 – L ; 3 – L ; 4 – K

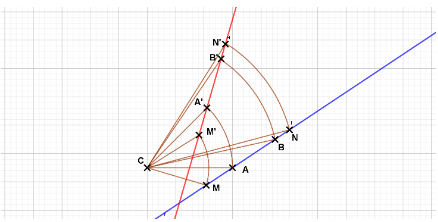
5 On a : $\begin{cases} r(E) = E' \\ r(F) = F' \end{cases}$ $donc\ \ E'F' = \ EF = 5\,cm\ et\ \ mes\ (\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{E'F'}}) = -\frac{\pi}{12}$

Activité 3 Images de figures simples

Objectif : *Cette activité a pour objectif de déterminer les images des figures simples*

Solution

1. **Image d'une droite par une rotation**



Conjecture : L'image d'une droite par une rotation semble être une droite

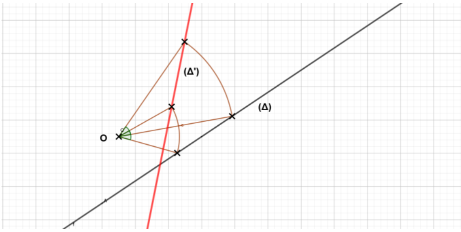
Solution de l'exercice fixation de l'activité 3

6 **Ligne 3. Colonne de F :** L'image de la droite (AB) par la rotation r_2 est la droite (AD)

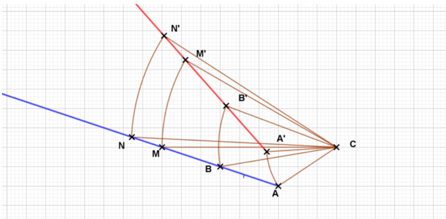
Ligne 4. Colonne de G : L'image de la droite (DC) par la rotation r_2 est la droite (BC)

1 - F ; 2 – G ; 3 – F ; 4 – G

7



2- Image d'une demi-droite

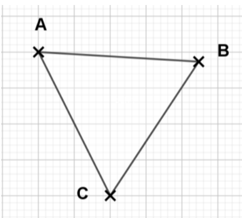


Conjecture : L'image d'une demi-droite par une rotation semble être une demi-droite.

Solution des exercices de fixation de l'activité 3

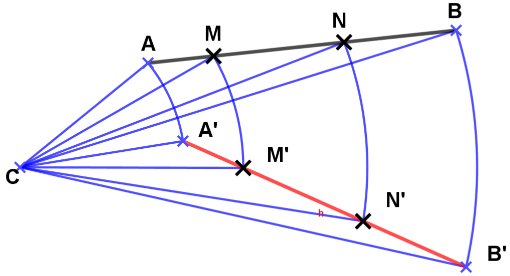
8 **1. [BF) ; 2. [FB)**

9 **1-**



2. $r([AB)) = [AC)$

3 – Image d'un segment

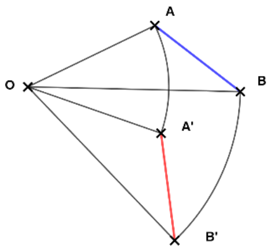


Conclusion : L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur

Solution des exercices de fixation de l'activité 3

10 L'image d'un segment par une rotation est un segment

11



12 On a : $\begin{cases} r(E) = F \\ r(F) = G \end{cases}$ $donc\ r([EF]) = [FG]$; $\begin{cases} r(G) = H \\ r(F) = G \end{cases}$ $donc\ r([GF]) = [HG]$

4 – Image d'un cercle

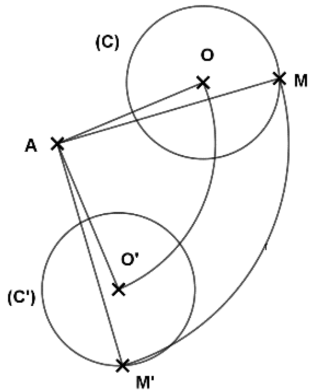
a) (C') = r((C)) . On a $M \in (\,C\,)$ et $\begin{cases} r(O) = O' \\ r(M) = M' \end{cases}$ $donc\ O'M' = OM = 3\ cm$ d'où $M' \in (\,C'\,)$

b) (C') = r((C)) , $N' \in (\,C'\,)$ et $r(N) = N'$ donc $N \in (\,C\,)$

c) **Conclusion** : L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon.

13 **(C) est le cercle de centre A et de rayon 2,5.**
Son image par r est le cercle de centre B et de rayon 2,5

14



Méthode de construction

- On construis le cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm
- On place le point A distinct de O et un point M sur (C)
- On construit les points O' et M' les images respectives des points O et M par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
- On construit le cercle (C') de centre O' et de rayon O'M'

Activité 4 : Propriétés de conservation

1- Conservation de l'alignement

Objectif : *Cette activité a pour but de démontrer que l'image des points alignés sont aussi alignés*

Solution

A,B et C sont trois points alignés d'images respectives A', B' et C' par une rotation
Supposons que B∈ [AC], on a donc AB+BC=AC or A'B' = AB ; B'C' = BC et A'C' = AC donc A'B'+B'C'=A'C' soit B' ∈[A'C'] ainsi les points A', B' et C' sont alignés.

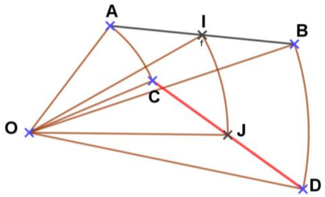
Solution des exercices de fixation de l'activité 4

15 On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On obtient $r(E) = G$; $r(H) = J$ et $r(B) = D$ or les points E , H et B sont alignés donc leurs images G , J et D sont aussi alignés.

16 Par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $r(A) = A$; $r(O) = E$ et $r(C) = F$ or les points A, O et C sont alignés donc leurs images A , E et F sont aussi alignés.

2- Conservation du milieu d'un segment

a)



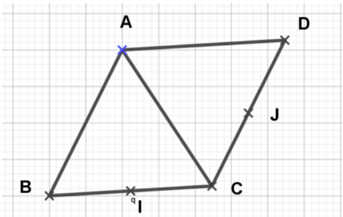
b) I est le milieu de [AB] signifie que : $\begin{cases} I \in [AB] \\ IA = IB \end{cases}$

Par la rotation r on a : $r(A) = C\,; r(I) = J \text{ et } r(B) = D$ soit AI = CJ ; IB = JD et AB = CD

On sait que AI+IB=AB et IA = IB donc on obtient CJ + JD= CD soit $J \in [CD]$ et $= JD$, il vient que J est le milieu de [CD].

17 $r(K) = L$

18



Par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a
$r(B) = C$ et $r(C) = D$ donc $r([BC]) = [CD]$ or I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [CD] donc $r(I) = J$

3 - Conservation de la mesure d'un angle orienté

b) On sait que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EF}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{GH}}) = \frac{\pi}{3}$ donc

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{GH}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{AB}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{GH}}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Ainsi $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{GH}}) = \frac{\pi}{3}$

c) **Conjecture** : Les rotations conservent les angles orientés.

19 $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{GH}}) = -\frac{\pi}{7}$

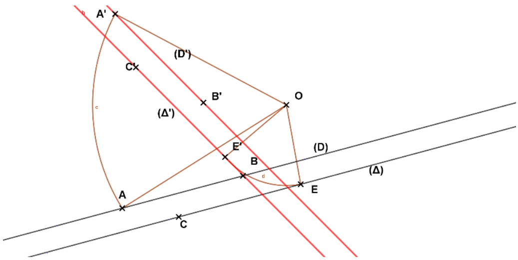
20 On a : $r(C) = C'$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC'}}) = \frac{\pi}{3}$.

On sait que (AC) est la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}})$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{6}$

Comme mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right)$ + mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}}\right)$ = mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC'}}\right)$ on a donc :

mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

4 - Conservation du parallélisme



d) Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'E'}}\right)$= Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE}}\right)$= 0 et A'B'= C'E' Donc $\overrightarrow{A'B'}$=$\overrightarrow{C'E'}$

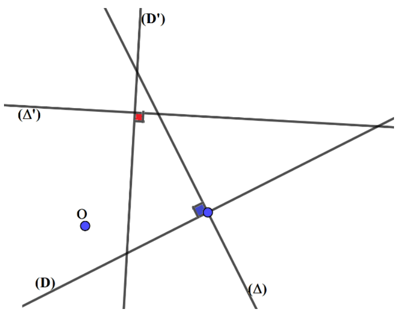
e) On a : $\overrightarrow{A'B'}$=$\overrightarrow{C'E'}$ donc (A'B') // (C'E') d'où (D') // (Δ')

f) **Conclusion** : Les rotations transforment deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

21 Dans le losange ABCD, on a : (AB) est parallèle à (DC)
Les droites (AB') et (BC') sont les images respectives des droites (AB) et (DC) par la rotation r donc elles sont aussi parallèles.

5- Conservation de l'orthogonalité

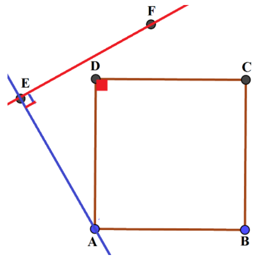


$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (Δ) tels que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\pi}{2}$. On a : Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'E'}}\right)$=$\frac{\pi}{2}$ où A' , B' , C' et E' sont les images respectives des points A, B , C et E' par r, donc (D') et (Δ') sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice de fixation de l'activité 4

22 **Je justifie que (EF) et (AE) sont perpendiculaires**.

A est le centre de r donc r(A) = A, r(D) = E et r(C) = F de plus les droites (CD) et (AD) sont perpendiculaires donc leurs images respectives par r, les droites (EF) et (AE) sont aussi perpendiculaires.



Activité 5 Caractérisation d'une rotation

Objectif : *Cette activité vise à caractériser une rotation de diverses façons*

1- **Rotation déterminée par son centre, un point et son image**

Les points O, A et B sont trois points distincts du plan tels que OA = OB, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ existe et est non nul donc il existe une rotation de centre O et d'angle l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ qui applique A sur B.

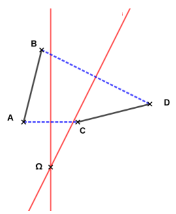
Solution de l'exercice de fixation

23 L'angle de la rotation de centre A qui applique B sur D est $\frac{2\pi}{3}$

2- **Rotation déterminée par deux points distincts et leurs images**

1) La condition nécessaire pour qu'il existe une rotation r qui applique A sur C et B sur D est que AB = CD
2) La condition n'est pas suffisante si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3) La condition nécessaire et suffisante est que AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$
4) Méthode de construction du centre Ω de la rotation r(A) = C et r(B) = D tel que AB = DC

   Méthode de construction :
   - Construis la médiatrice du segment [AC]
   - Construis la médiatrice du segment [BD]

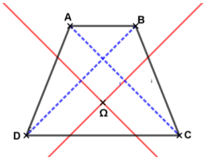


Le centre Ω est l'intersection s'il existe des médiatrices de [AC] et [BD]

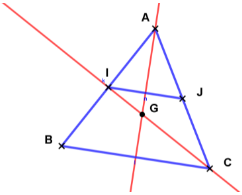
Solution des exercices de fixation

24

1) On a AD = BC et $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ donc il existe une rotation qui applique A sur C et qui applique D sur B.
2) Construction du centre de la rotation

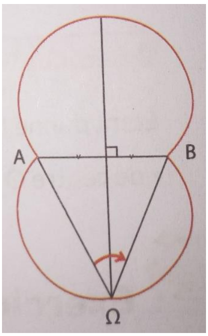


25



Le centre de la rotation est le centre de gravité G du triangle ABC et l'angle est $\frac{2\pi}{3}$

3 - Rotation déterminée par son angle, un point et son image.



Solution de l'exercice de fixation

26 Le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui applique A sur B est l'un des points communs à la médiatrice du segment [AB] et à l'un des arcs capables de mesure $\frac{\pi}{4}$ d'extrémités les points A et B.

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1	**Comment déterminer le centre et l'angle d'une rotation déterminée par deux points distincts et leurs images ?** On a : AC=BD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ il existe une rotation qui applique A sur C et D sur B. Le centre O de cette rotation est le point commun aux médiatrices des segments [AC] et [BD]

2	**Comment déterminer le centre d'une rotation déterminée par son angle, un point et son image?** Le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui applique A sur B est l'un des points communs à la médiatrice du segment [AB] et à l'un des arcs capables de mesure $\frac{\pi}{3}$ d'extrémités les points A et B.

IV - MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCES DE FIXATION

Définition et premières propriétés

Exercice 1

1 – a ; 2 – a ; 3 – a ; 4 – b

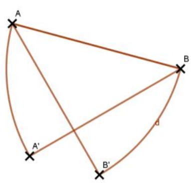
Exercice 2

1 – C ; 2 – A

Exercice 3

L'angle de la rotation est - $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4



Exercice 5

La rotation de centre le point O , le centre du carré et l'angle $\frac{\pi}{2}$ ou$-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6

1 – C ; 2 – A

Exercice 7

On a r(B) = E et r(C) = F

D'après la propriété fondamentale Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EF}})=\frac{\pi}{2}$

Exercice 8

1 – B ; 2 – A ; 3 – B

Exercice 9

On désigne par r la rotation de centre A d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

1) On a r(D) = B et r(C) = E donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BE}}\right)=\frac{\pi}{3}$. .
2) r(D) = B et r(C) = E donc DC = BE

Exercice 10

On considère la rotation r de centre A d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$

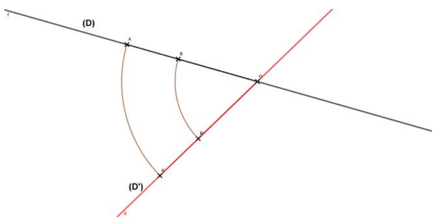
On a r(B)=D, r(E),=G donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{DG}}\right)=\frac{\pi}{2}$ ainsi (BE) et (DG) sont perpendiculaires

Images de figures simples

Exercice 11

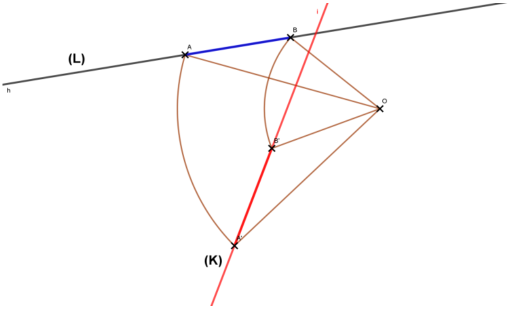
1. r((AB) = (BC)
2. r((DC) = (CB)

Exercice12



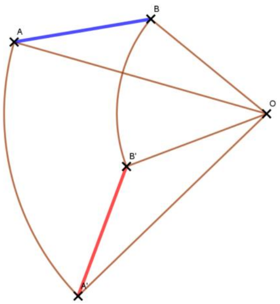
On construit les images de deux points de la droite par la rotation

Exercice 13



On construit les images respectives de deux points distincts de (L) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Exercice 14



On construit les images des points A et B par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 15

r(E) = F, r(F) = G donc r([FE])=[GF],

Propriétés de la conservation

Exercice 16

On a : r(A)=A, r(O)=E et r(C)=F. Les points A, O et C sont alignés. Donc leurs images A , E et F sont alignées

Exercice 17

r(B) = C, r(M) = N et I est le milieu de [BM] et L est le milieu de [CN]

On a : r([BM] = [CN] donc r(I) = L.

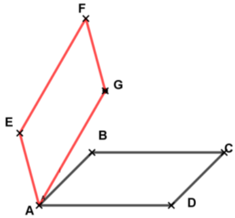
L'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu de l'image de ce segment.

Exercice 18

1. Le centre est A
2. Construction
3. r(B)=D, r(C)=C' On a :Mes Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}})=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$ soit A, B et C' sont alignés et de plus AB = AC' donc A est le milieu de [BC'].

Exercice 19

1) Construction



2) ABCD étant un parallélogramme son image AEFG par la rotation est un parallélogramme

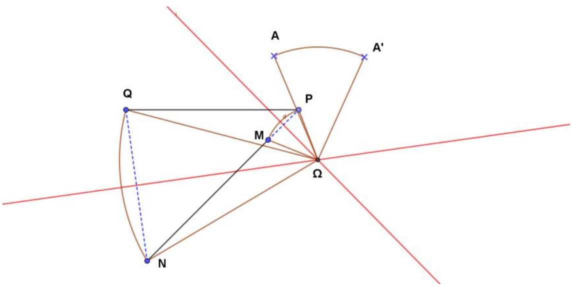
Caractérisation d'une rotation

Exercice 20

Puisque AB = AC = 4 et $Mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{4}$, il existe une rotation de centre est A et d'angle est $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 21

1) MP≠NQ .Donc il n'existe pas de rotation qui applique M sur N et P sur Q
2) On a : MN=PQ et $\overrightarrow{MN}\neq\overrightarrow{PQ}$ donc la rotation existe.
3) et 4) Construction du point Ω et A'



Exercice 22

Le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ qui applique A sur B est l'un des points commun à la médiatrice du segment [AB] et à l'un des arcs capables de mesure $\frac{\pi}{6}$ d'extrémités les points A et B.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 23

1 - V ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F .

Exercice 24

1 – F ; 2 – F ; 3 – V ; 4 – F ; 5 – V .

Exercice 25

1) Centre O angle $\frac{\pi}{2}$.

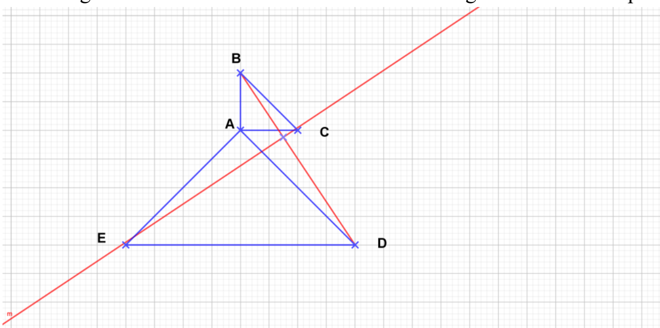
2) Centre A angle $\frac{\pi}{3}$.

3) Centre A angle $\frac{-\pi}{6}$.

4) à corriger r(F) = J et r(I) = E . Centre A angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 26 (A ajouter)

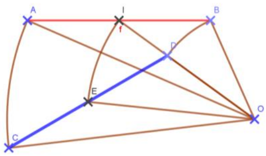
Les triangles de même sens ABC et ADE sont rectangles et isocèles au point A.



On considère la rotation r de centre A d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

r(B) = C et r(D) = E donc mes$(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}}) = \frac{\pi}{2}$ donc (BD) et (CE) sont perpendiculaires

Exercice 27
A corriger : b) « Justifie que le point E est le milieu du segment [CD] »

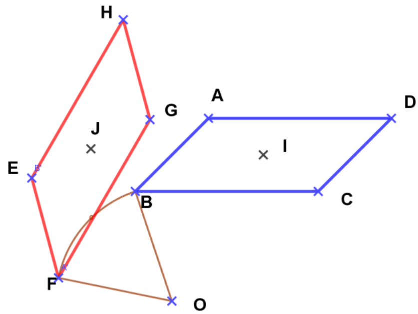


r(A) = C, r(B) = D ; I est le milieu de[AB] et r(I) = E

On a : r([AB] = [CD] donc E est le milieu de [CD]

L'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu de l'image de ce segment**.**

Exercice 28
A corriger : « b) Justifie que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme »



b) Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Son image EFGH par la rotation est aussi un parallélogramme (La conservation du parallélisme des droites)

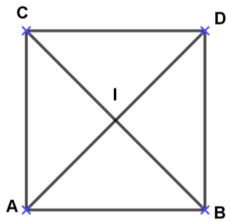
c) Les points A, I et C sont alignés. Leurs images E , J et G par la rotation sont aussi alignés

Exercice 29

Utiliser la rotation de de centre B d'angle $\frac{\pi}{3}$. ou la rotation de centre C d'angle$\frac{\pi}{3}$.

Exercice 30

1. La rotation de centre I milieu de [BC] et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
2. Construction



3. On a r(A) = C et r(D) = B donc AD = CB et mes$(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}})=-\frac{\pi}{2}$ donc (AD) et (CB) sont perpendiculaires en I. Ainsi le quadrilatère BACD est un carré.

EXERCICES D'APPRONDISSEMENT

Exercice 31

Justifier que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}})=\pi$ et AE=AF donc A est le milieu de [EF] et par conséquent E, A et F sont alignés.

Exercice 32

R(A) = G et r(B) = H donc AB = GH. On construit le point F tel que BC = CF et AC = GH.

Utilise pour construire le triangle GHF dont les côtés ont les mêmes longueurs que ceux du triangle ABC et conserve les mesures des angles orientés.

Le centre de la rotation est commun aux médiatrices des segments [AG], [BH] et [CF].

Exercice 33

On utilise la Conservation de l'orthogonalité par une rotation.

Exercice 34

On utilise la rotation r de centre C d'angle $\frac{\pi}{3}$

r(A) = B ; r(M) = N

Exercice 35

r(A) = B ; r(C) = D

Exercice 36

L'image du parallélogramme par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{4}$ est un parallélogramme dont les points A , E et F sont des sommets. Le point G est quatrième sommet du parallélogramme donc r(E)=G

Exercice 37

L'ensemble recherché est l'image la droite (D) par la rotation de centre A d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 38

1-On applique la propriété de Thales sur deux triangles pour montrer que AD=BE.

on a aussi et $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BE}$. Donc il existe une rotation qui applique B sur A et E sur D.

le centre de la rotation est le point O, point commun aux médiatrices des segments [AB] et [DE].

3-r(D)=E. . Donc le centre la rotation appartient à la médiatrice la médiatrice du segment [ED].

Exercice 39

1) Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$=$\frac{5\pi}{12}$
2) Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}}\right)$=$\frac{-5\pi}{12}$
3) Utiliser le ce qui précède.
4) AB'=AC'
5) On a : r1(C)=C' et r1(A)=A_1. Donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{C'A1}}\right)$=$\frac{5\pi}{12}$ = Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};BC}\right)$=$\frac{5\pi}{12}$
6) r2(B)= B' et r2(A=A_2. Donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{B'A1}}\right)$=$\frac{5\pi}{12}$ = Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CB};CA}\right)$=$\frac{5\pi}{12}$
7) Les droites (C'A_1) et (B'A_2) parallèles à une même droite qui est la droite (BC).
   la droite (B'C') est parallèle à (BC)..Donc les points A_1 et A_2 appartiennent à la droite (B'C').

Exercice 40

Construire la droite (D') ,'image de la droite (D) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.

le B, point commun à (L) et à (D') est l'un des sommet du triangle. Le troisième sommet est l'image de B par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 41

Construire la droite (D') ,'image de la droite (D) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

le B, point commun à (L) et à (D') est l'un des sommet du carré. Le troisième sommet est l'image de B par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

SITUATION COMPLEXE

Exercice 42

Construire la droite (K) ,'image de la droite (L) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.

le B , point commun à (L) et à (D') est l'un des sommet du triangle. Le troisième sommet est l'image de B par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.

15 INÉQUATIONS DANS ℝ × ℝ

I- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où se déroule la scène ?	A Korhogo.
	De quoi s'agit-il ?	Le père de Koronan doit recevoir son ami français Delhom qui vient faire du tourisme dans la region du Poro
Circonstances	Quelles sont les données ?	Deux types de 4x4 : -Type A : location 25000 F par jour plus 7500 F par km parcouru -Type B : 37 000 par jour plus 4800 F par km parcouru La direction Régionale du tourisme propose des circuits : -Un circuit de 1 jour et de 250 km -Un circuit de 2 jours et de 300 km -Un circuit de 3 jours et de 150 km
Tâche	Quel est le travail à faire ?	Proposer un type de location et un circuit qui coûteront le moins cher à son ami Delhom.
	Face à cette difficulté, qu'est ce que les élèves ont -ils décidé de faire ?	Les élèves s'organisent pour s'informer sur la résolution d'inéquations du premier degré dans IRxIR.

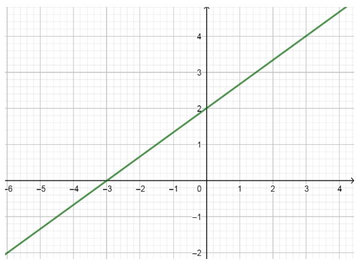
II- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

Activité 1 : Théorème fondamental

Objectif : *l'objectif de cette activité est de montrer qu'une droite (D) départage un plan en deux demi-plans ouverts (P_1) et (P_2) de bord (D).*

Solution

1-



2- a) (P_1) est le demi-plan ouvert de bord (D) contenant le point O, origine du repère (O,I,J)
b) (P_2) est le demi-plan ouvert de bord (D) ne contenant pas le point O.

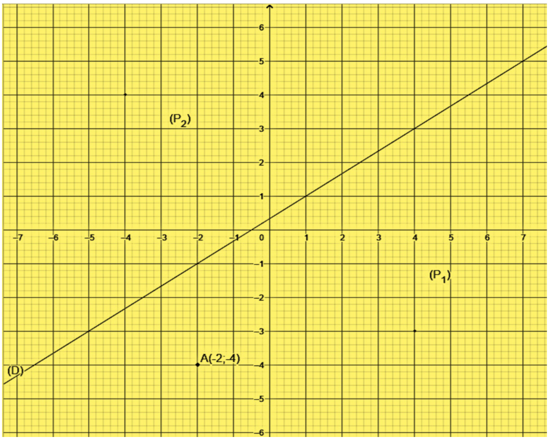
3- Soit M(x,y) un point du plan :

- M(x,y) appartient à (P_1) si $2x - 3y + 6 > 0$
- M(x,y) appartient à (P_1) si $2x - 3y + 6 < 0$
- M(x,y) appartient à (D) si $2x - 3y + 6 = 0$

Solution des exercices de fixation de l'activité 1

1 Soit l'inéquation (I) :$-2x + 5y \leq 3$.
Les couples solutions de l'inéquation sont : (5 ;1), (0 ;0).

2

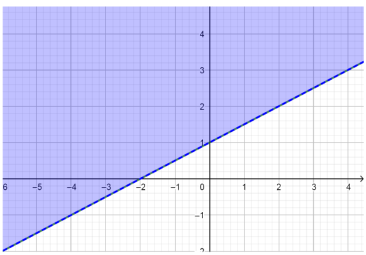


- Remplaçons dans l'inéquation (I_2) x par 0 et y par 0. On obtient ainsi : $2\times0 - 3\times0 + 1 > 0$ donc (P_1) est associé à (I_2).
- On justifie de même que (P_2) est associé à (I_1)..

<u>Activité 2</u> : Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Objectif : *cette activité a pour but de résoudre une inéquation du premier degré dans IRxIR*
Solution

1-



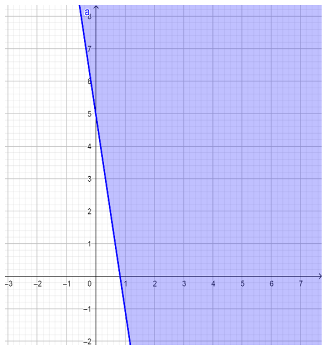
2-a) Voir graphique

b) l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est le demi plan ouvert de bord (D) ne contenant pas l'origine O du repère.

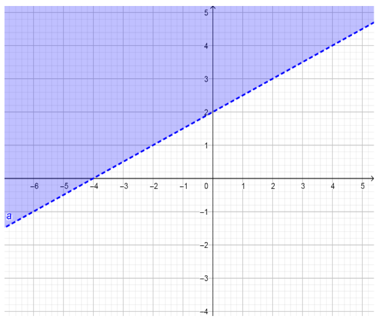
Solution de l'exercice de fixation de l'activité 2

3

a) $6x + y - 5 \geq 0$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) : $6x + y - 5 = 0$ ne contenant pas le point O, origine du repère.



b) $x - 2y + 4 < 0$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) : $x - 2y + 4 = 0$ ne contenant pas le point O, origine du repère.

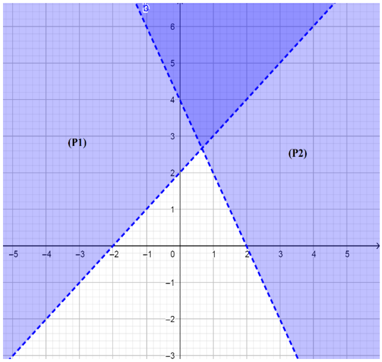


<u>Activité 3</u> : Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Objectif : *Cette activité a pour objectif de résoudre graphiquement un système d'équations du premier degré dans IRxIR*

Solution

1-a) et b)



2-La solution du système est l'ensemble des points du plan contenant à la fois les deux demi-plans déterminés par les deux inéquations.

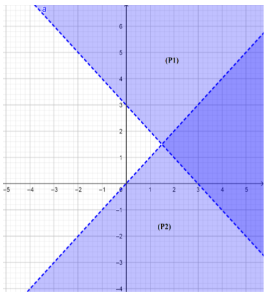
4 **Solution de l'exercice de fixation de l'activité 3**

$3\times3 - 2\times2 - 9 < 0$ et $-3\times3 - 4\times2 > -27$ donc A(3 ;2) est une solution du système

$3\times0 - 2\times11 - 9 < 0$ et $-3\times0 - 4\times11 < -27$ donc B(0 ;11) n'est pas une solution du système

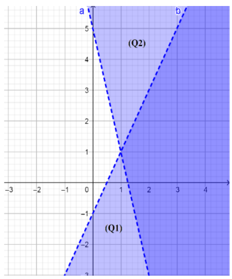
$3\times(-4) - 2\times3 - 9 < 0$ et $-3\times(-4) - 4\times3 > -27$ donc C(-4 ;3) est une solution du système

5 L'ensemble des solutions du système (S1) est l'intersection des plans (P1) et (P2):



L'ensemble des solutions du système (S2) est l'intersection des plans

(Q1) et (Q2):



Activité 4 : Traduire une situation à l'aide d'une inéquation

Objectif *Cette activité vise à traduire des situations par une inéquation du premier degré.*

Solution

Soit x le nombre de stylos à acheter et y le nombre de cahiers à acheter.
Puisqu'elle n'a que 2100 F pour ses achats alors on a : $90x + 240y = 2100$

- Pour 5 cahiers on a $90x + 240\times5 = 2100$ donc $x = \frac{900}{90} = 10$ donc Tiéwolo ne peut acheter au plus que 10 stylos.
- Pour 4 stylos on a $90\times4 + 240y=2100$ donc $y = \frac{1740}{240} = \frac{29}{4} \simeq 7,25$ donc Tiewolo ne peut acheter que 7 cahiers au plus.

2- $90x + 240y \leq 2100$

Solution des exercices de fixation de l'activité 4

6 Soit x le nombre de parties gagnées et y le nombre de parties nulles. L'inéquation qui correspond à cette situation est : $2x + y \geq 7$.

7 Soit x le nombre de poulets et y le nombre de pintades. L'inéquation qui correspond à cette situation est : $2500x + 4000y \leq 25\,000 \Rightarrow x+16y \leq 10$

Activité 5 : Traduire une situation par un système d'inéquations

Objectif : Cette activité vise à traduire des situations par un système inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Solution

1- Soit x le nombre de camions –citernes pouvant transporter 9 Tonnes de carburant par voyage ($x \leq 20$) et y le nombre de camions –citernes pouvant transporter 12 Tonnes de carburant par voyage ($y \leq 15$).
Les couples de nombres de camions – citernes de chaque type pouvant transporter le stock en un seul voyage sont de la forme (x , y). Exemple : (8 ; 14) , (16 ; 8) , (20 ; 5) , (12 ; 11) etc.

2-a) Oui, tout le stock peut être transporté en un seul voyage : les couples (x,y) de nombres de camions – citernes de chaque type pouvant transporter le stock en un seul voyage doivent vérifier l'équation $9x + 12y = 240$ avec $x + y \leq 35$.

b) Le nombre minimum de chauffeurs à mobiliser est 22 soit 8 chauffeurs de camions –citernes de 9 Tonnes et 14 chauffeurs de camions –citernes de 12 Tonnes soit : $8\times9 + 14\times12 = 240$.

Solution des exercices de fixation de l'activité 5

8 Soit x le prix d'une boîte d'allumettes et y le prix d'un crayon.

- Première proposition : $3x + 2y < 175$
- Deuxième proposition : $2x + 3y > 200$

Donc la situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+2y \prec 175 \\ 2x+3y \succ 200 \end{cases}$$

9 Soit x le nombre de membres de l'organisation et y le nombre des autres participants.

La situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 2000x+2500y \geq 1000000 \\ x+y \leq 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+5y \geq 2000 \\ x+y \leq 125 \end{cases}$$

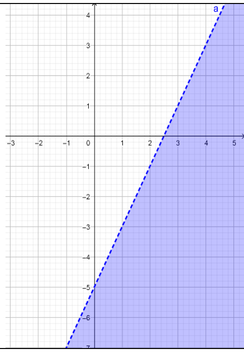
III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

1

Comment résoudre une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$2x - y - 5 > 0$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) : $2x - y - 5 = 0$ ne contenant pas l'origine O du repère.

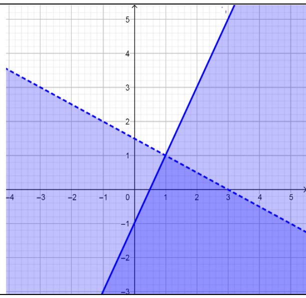


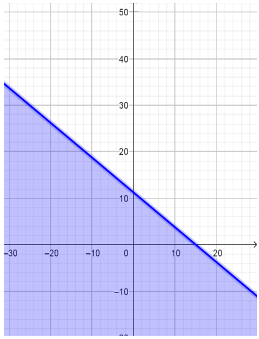
2

Comment résoudre un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?.

$$\begin{cases} x+2y-3 \prec 0 \\ 2x-y-1 \geq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système d'inéquations est la partie hachurée par les deux demi-plans définis par chaque inéquation.



3	**Comment résoudre graphiquement des situations concrètes à l'aide d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?** Soit x la masse en kg de viande de bœuf et y la masse en kg de viande de mouton. On a : La situation se traduit par les inéquations suivantes : $3000x + 4000y \leq 45\,000 \Rightarrow 3x + 4y \leq 45$ $x > 0$ $y > 0$ Donc l'ensemble des solutions sont les points M(x,y) situés dans le demi-plan de bord (D) : $3x+4y = 45$ contenant l'origine du repère tel que $x >$ et y > 0. 

4	**Comment résoudre des situations concrètes à l'aide de système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?** **Exercice 1** Soit x le nombre de casquettes vendues et y le nombre de chapeaux vendus. La situation peut se traduire par le système suivant : $\begin{cases} x + 1,5y \leq 24 \\ x + 1,5y \geq 21 \\ x \geq 10 \\ y \geq 7 \end{cases}$ **Exercice 2** Soit x le nombre de chaises en plastique et y le nombre de chaises en bois. La situation peut se traduire par le système suivant : $\begin{cases} x + 2y \leq 15 \\ x \geq 2 \\ y \geq x \end{cases}$

IV- MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

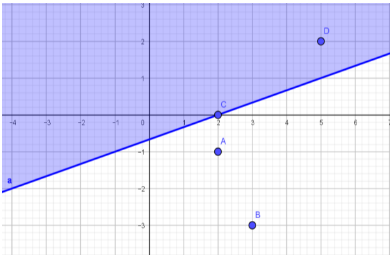
Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

Théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans IRxIR

Exercice 1

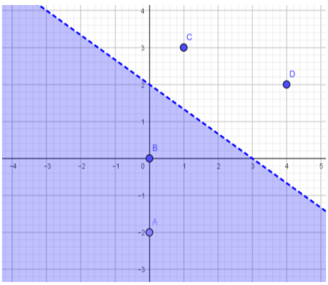
1. V ; 2. F ; 3.V

Exercice 2



Les points qui appartiennent à (P) sont : C et D

Exercice 3



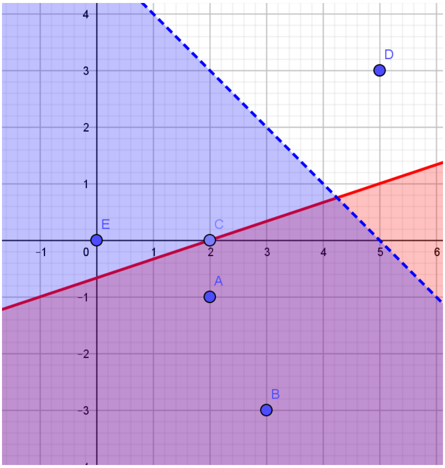
Les couples de nombres qui sont solutions sont: (0 ; 0) et (0 ; -2)

Exercice 4

$a + 3a + 8 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2 \Leftrightarrow a \in [-2; +\infty[$

Exercice 5

$$\begin{cases} -x+3y+2 \leq 0 \\ x+y-5<0 \end{cases}$$



Les points qui appartiennent à (P) sont : A , B et C

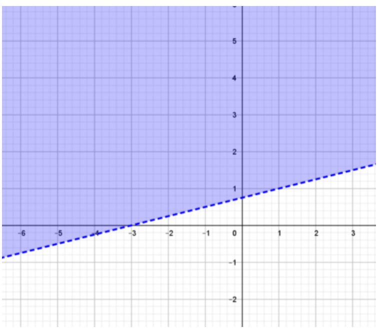
Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans IRxIR

Exercice 6

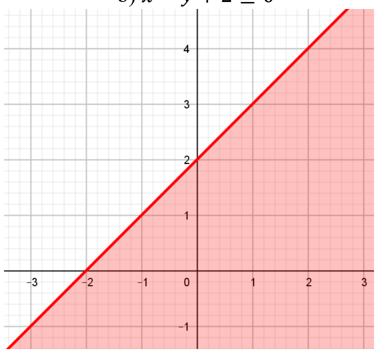
Programme 3

Exercice 7

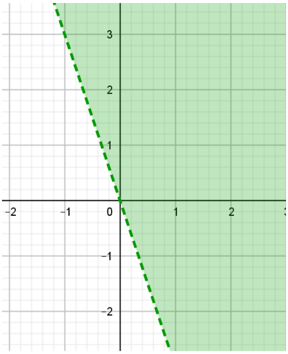
a) $x-4y+3<0$



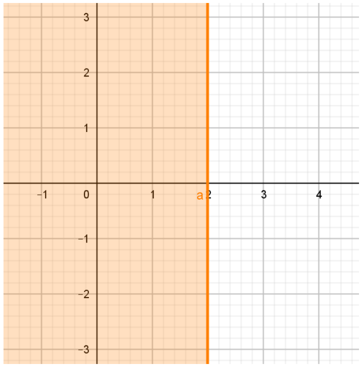
b) $x-y+2 \geq 0$



c) $3x + y > 0$



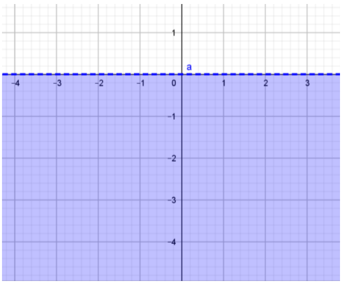
b) $y - 2 \leq 0$



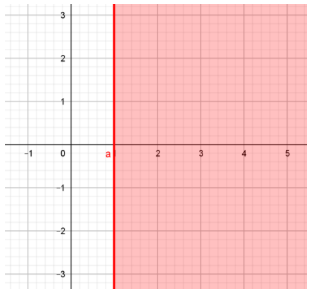
Pour chaque cas l'ensemble des solutions est la partie du plan colorée

Exercice 8

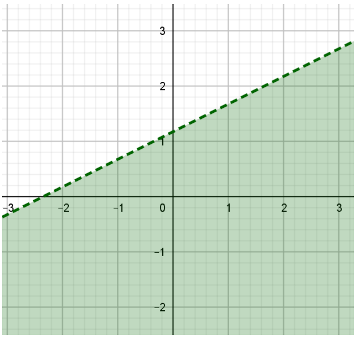
1) $y < 0$



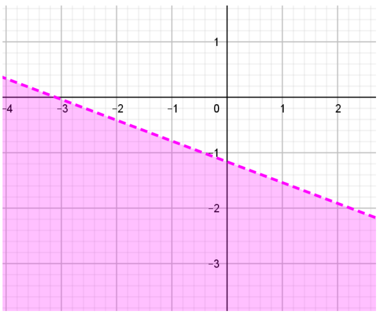
2) $x \geq 1$



3) $2y - \frac{3}{2} < x + \frac{5}{6}$



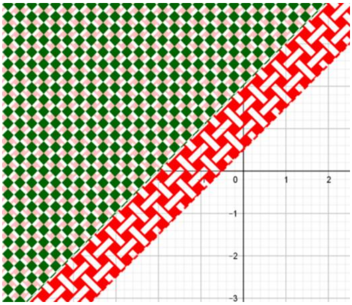
4) $-4y - \frac{2}{3}x > \frac{3}{2}x + 4$



Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans IRxIR

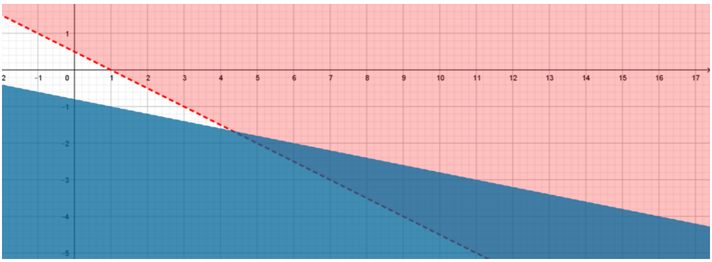
Exercice 9

1) $\begin{cases} 2x - 2y + 1 < 0 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$



L'ensemble des solutions est la partie du plan où il y a deux motifs.

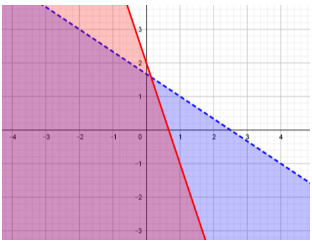
2) $\begin{cases} x + 2y - 1 > 0 \\ x + 5y + 4 < 0 \end{cases}$



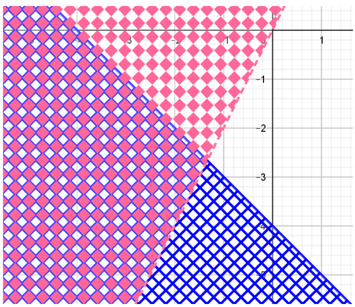
L'ensemble des solutions est la partie du plan où il y a deux couleurs.

Exercice 10

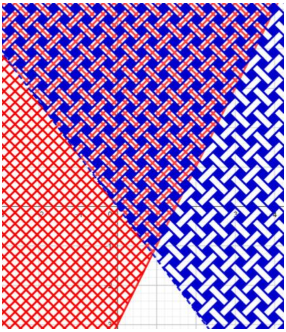
1) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 < 0 \\ 3x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$



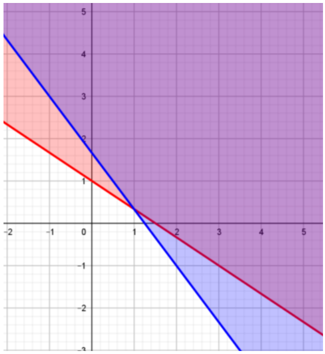
2) $\begin{cases} x + y + 4 \geq 0 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$



3) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$

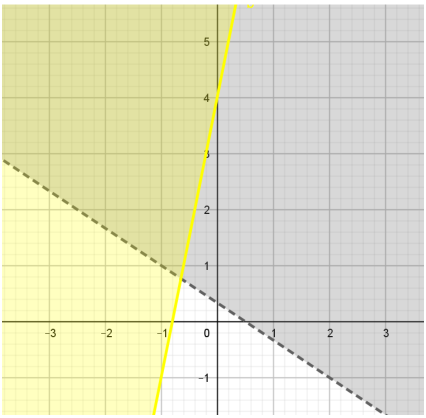


4) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 \geq 0 \\ 3x - 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$

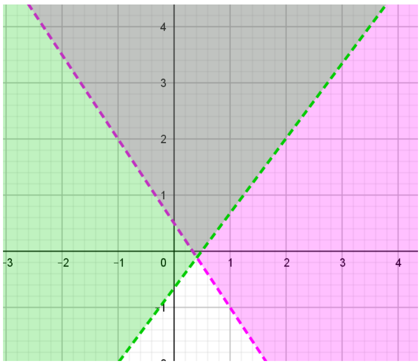


Exercice 11

1) $\begin{cases} -2x - 3y + 1 < 0 \\ 5x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$



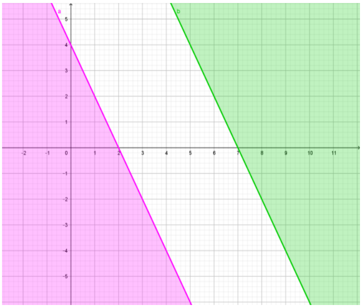
2) $\begin{cases} 3x + 2y > 1 \\ 4x - 3y < 2 \end{cases}$



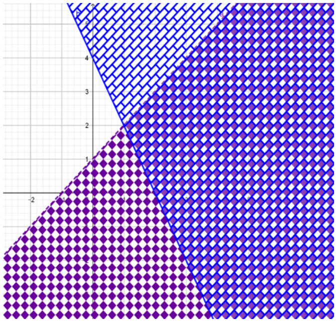
L'ensemble des solutions est la partie du plan où il y a deux couleurs

3) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 2 \\ 2x + y \geq 14 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$



L'ensemble des solutions est vide



La partie du plan où il y a deux motifs

Traduire en inéquations diverses situations concrètes

Exercice 12

a) $x + y < 7$; b) $2x - y \geq -6$; c) $\frac{1}{3}x + 4y \geq 5$; d) $x - y < 9$

Exercice 13

Soit x le nombre de places qui valent 4200 F l'une et y le nombre de places qui valent 8000 F l'une. Puisque l'association ne dispose que 150 000 F alors on a :

$4200x + 8000y \leq 150000 \Rightarrow 21x + 400y \leq 750$

Exercice 14

Soit x le nombre de jouets du modèle A et y le nombre de jouets du modèle B fabriqué par cette entreprise par jour. On a le système suivant :

$36x + 48y \leq 624 \Rightarrow 3x + 4y \leq 52$

Traduire en systèmes d'inéquations diverses situations concrètes

Exercice 15

Soit x le nombre d'annales de maths et y le nombre d'annales de physique chimie. Alors la situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 1500x + 2250y \leq 8000 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 6x + 9y \leq 32 \end{cases}$$

Exercice 16 Revoir le corrigé de cet exercice, le 3ème inéquation ne me semble pas assez logique, aucune contrainte n'a été faite sur le bénéfice, je l'ai donc supposé positif

Soit x le nombre de fauteuils et y le nombre de chaises que fabrique cette entreprise.

- Pour un fauteuil, on utilise les machines A et B pendant une heure et la machine C pendant 3 heures soit au total 4 heures. Donc pour x fauteuils on a $4x$ heures pour les fabriquer.
- Pour une chaise, on utilise les machines A et C pendant une heure et la machine B pendant 2 heures soit au total 3 heures. Donc pour y chaises, on a 3y heures pour les fabriquer.

La situation se traduit par le système suivant :

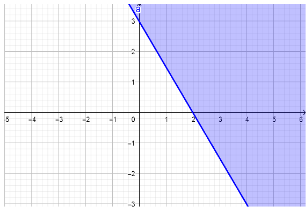
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 300 \\ 10000x + 5000y \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 300 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

Exercice 17

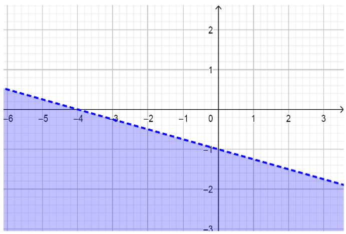
(I_1)

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est le demi-plan de bord la droite (D) : $3x + 2y - 6 = 0$ ne contenant pas l'origine O du repère (O,I,J)



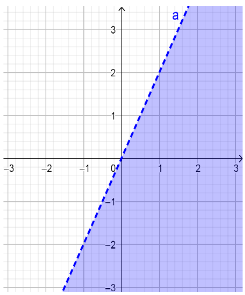
(I_2)

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) : $x + 4y + 4 = 0$ ne contenant pas l'origine O du repère (O,I,J)



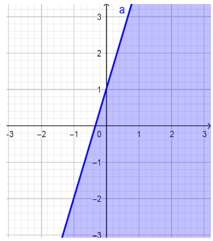
(I_3)

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) : $2x - y = 0$ contenant le point I(1 ;0) du repère (O,I,J).



(I_4)

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est le demi-plan de bord la droite (D) : $-3x + y - 1 = 0$ contenant le point O, origine du repère (O,I,J).



Exercice 18

1- Equation de la droite (L)

La droite (L) passe par les points A(3 ;0) et B(-1 ;2) donc une équation de (L) est : $x + 2y - 3 = 0$

2- Une inéquation dont l'ensemble des solutions est la partie hachurée en rouge est $x + 2y - 3 \leq 0$

Exercice 19

1- Equation de la droite (D)

La droite (D) passe par les points P(0 ;-2) et Q(-3 ;0) donc une équation de (D) est : $2x + 3y + 6 = 0$.

2- Une inéquation dont l'ensemble des solutions est la partie colorée est $2x + 3y + 6 \geq 0$

Exercice 20

- (P_1) : $x\geq 0$, est le demi-plan de bord la droite (OI) :$x = 0$ et contenant le point I(1 ;0) du repère (O,I,J)
- (P_2) : $y\geq 0$, est le demi-plan de bord la droite (OJ) :$y = 0$ et contenant le point J(0 ;1) du repère (O,I,J)
- (P_3) : $x+y - 4 \leq 0$, est le demi-plan de bord la droite (D) :$x + y - 4 = 0$ et contenant le point O, origine du repère (O,I,J)
- (P_1) : $x - y + 2 \geq 0$, est le demi-plan de bord la droite (L) :$x - y + 2= 0$ et contenant le point O, origine du repère (O,I,J).

L'ensemble des solutions du système est l'intersection des demi-plans (P_1), (P_2), (P_3) et (P_4), c'est-à-dire la partie blanche non hachurée du graphique.

Exercice 21

a) Le système recherché est :

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4 \leq 0 \\ -x + 2y + 5 \geq 0 \end{cases}$$

b) Le système recherché est :

$$\begin{cases} y - 1 \leq 0 \\ x + 2y + 2 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 22

Soit x le nombre de Stromboli et y le nombre de Vesuvio.

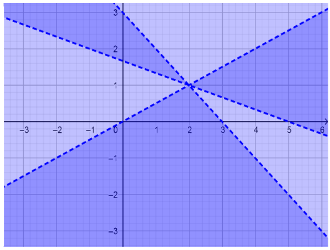
La situation peut être traduite par le système suivant :

$$\begin{cases} 100x+100y \le 1000 \\ 180x+80y \le 1600 \\ 80x+120y \le 1080 \\ 8000x+9000y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \le 10 \\ 9x+4y \le 80 \\ 2x+3y \le 27 \\ 8x+9y \ge 0 \end{cases}$$

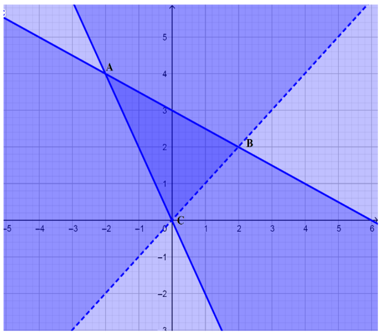
On procède ensuite à la résolution graphique de ce système pour déterminer le nombre de pizza de chaque sorte.

Exercice 23

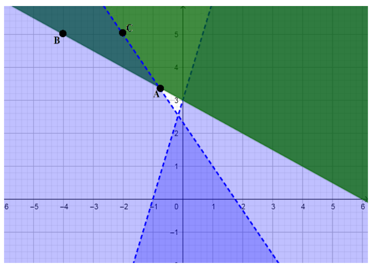
1- Ce système a pour solution unique le point A(2 ;1)



2- L'ensemble des solutions de ce système est la partie du plan délimitée par le triangle ABC où A(-2 ;4), B(2 ;2) et C(0 ;0).

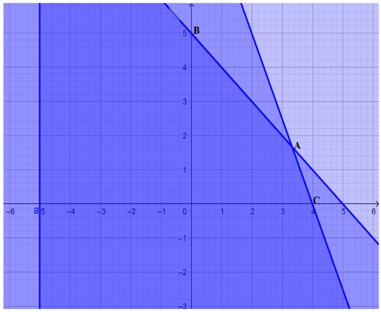


3- L'ensemble des solutions est la partie du plan délimité par les demi-droites [AB) et [AC) tel que précise sur la construction.



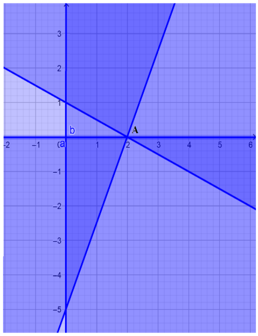
4-

L’ensemble des solutions est la partie du plan délimité par les demi-droites [AB), [AC) et la droite d’équation x = -5.



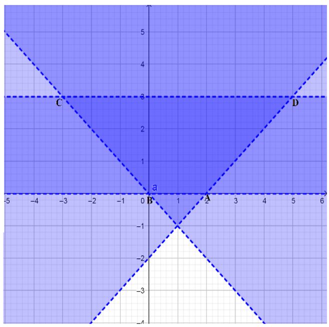
Exercice 24

a) La solution de ce système est le point A(2;0)



b)

L’ensemble des solutions de ce système est la partie du plan (trapèze) délimité par les points A(2 ;0), B(0 ;0), C(-3 ;3) et D(5 ;3).



Exercice 25

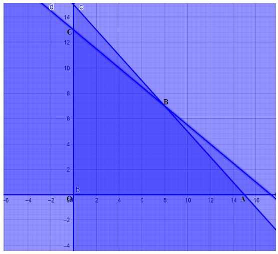
1- Soit x le nombre de jouets du modèle A et y le nombre de jouets du modèle B.

x et y sont des entiers naturels

$x + y \leq 15$; $36x + 48y \leq 624$ donc on en déduit que :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ x + y - 15 \leq 0 \\ 3x + 4y - 52 \leq 0 \end{cases}$$

2- Je représente les solutions de ce système.



L'ensemble des solutions est la partie du plan délimité par les points A, B C et O.

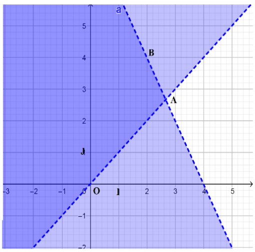
Exercice 26

1- Soit x le nombre de pantalons achetés et y le nombre de chaussures achetées

La situation peut se traduire par les inéquations suivantes : $x < y$ et $8000x + 4000y < 32\,000$, d'où

D'où $\begin{cases} 2x + y \prec 8 \\ x \prec y \end{cases}$

2- Représentation graphique du système précédent

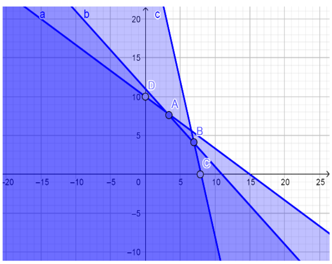


3- Les possibilités de commandes qui s'offrent à Remi sont les solutions de ce système.

L'ensemble des solutions de ce système est la partie du plan ouvert délimité par les demi-droites [AB), [AO) et contenant le point J.

Exercice 27

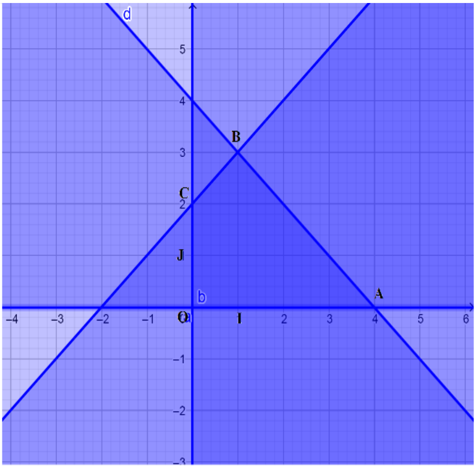
1- Représentation graphique de (E)



2- Selon la représentation graphique, la fonction $f(x,y) = 2x + 3y$ est maximisée pour $x = 0$ et $y = 10$ donc ces conditions $f(0\,;10) = 30$ et les contraintes sont bien respectées.

Exercice 28

1- Représentation graphique de l'ensemble des points $M(x,y)$



2- On minimise la fonction (x,y) $(x,y) \mapsto x+y$ lorsque $x = 4$ et $y = 0$ dans ces conditions le minimum est 4.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 29

Soit x le nombre de fût de peinture à eau et y le nombre de fûts de peinture à huile.

La situation peut se traduire par les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 12x + 8y \leq 360 \\ 1500x + 2000y \leq 60000 \\ (3000x + 3000y) - (1500x + 2000y) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 90 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce système permet de déterminer le nombre de fût de peinture à huile et de peinture à eau.

Exercice 30

Soit x la masse en kg de produit A et y la masse en kg de produit B fabriquée par jour

$$\begin{cases} 300 \leq x \\ 200 \leq y \\ 30x + 10y \leq 2200 \\ \dfrac{x}{100} + \dfrac{2y}{100} \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 300 \leq x \\ 200 \leq y \\ 3x + y \leq 220 \\ x + 2y \leq 1600 \end{cases}$$

2. Construction
3. $x + y$ est maximum pour (400 ,600) ; (600 ,400) ; (500 ,500).

Exercice 31

1) Soit x le nombre de cars de 40 places et y le nombre de cars de 50 places.

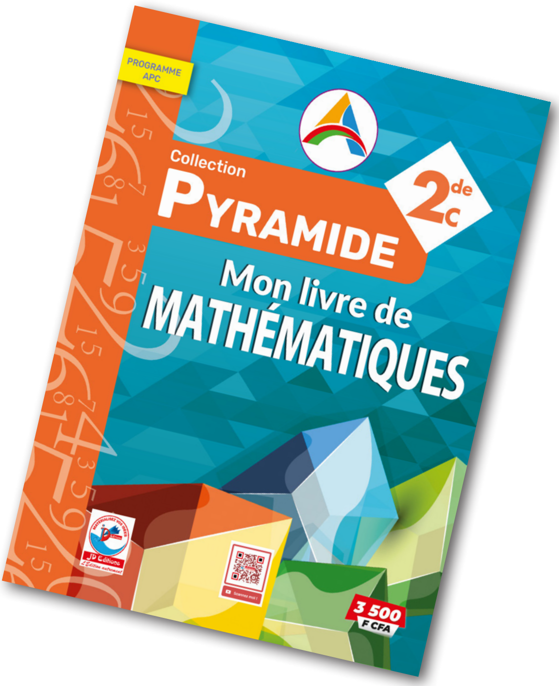
$$\begin{cases} x + y \leq 18 \\ 40x + 50y \leq 540 \end{cases}$$

Figure. (faire la figure et hachurer)

Il faut commander x cars de 40 places et y cars de 50 places tels que le point de coordonnées (x, y) appartienne à la partie hachurée de la figure.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

Manuel de base



COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

Lavez-vous les mains fréquemment

Respectez la distanciation physique

Portez un masque

Toussez ou éternuez dans votre coude

Ouvrez les fenêtres

Faites-vous vacciner