Collection Butterfly

Terminale A

Primitives et Calcul intégral

Statistques

Systèmes linéaires

Etude de fonctions

Tome 2

OUALE K. Fidèle
Professeur de Mathématiques
au Lycée Moderne d'Agnibilékrou
Cel : 58 22 07 09 / 02 58 82 72 / 05 65 91 86

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Les Mathématiques, depuis toujours, sont des mystères pour les élèves, tout simplement parce qu'ils ignorent certains principes d'apprentissage :

1ère étape : la connaissance

2ème étape : la compréhension

3ème étape : l'application

4ème étape : l'analyse

5ème étape : la synthèse

Ces cinq différentes étapes sont primordiales pour assimiler les cours de mathématiques afin de pouvoir aisément traiter des exercices …

La connaissance

Cette étape passe par la mémorisation des définitions, des propriétés et des formules. Chaque élève doit être capable de se souvenir simplement, de se rappeler des formules qu'il a vu durant le cours …

La compréhension

Elle vient après la connaissance ; en effet peut-on comprendre ce qu'on ne connait pas ? Comprendre les formules, c'est saisir leur signification afin de pouvoir les traduire, les interpréter, les reformuler.

L'application

C'est utiliser ce qu'on a compris dans des situations nouvelles ; résoudre un exercice qui fait simplement appel à votre mémoire et votre compréhension : passer du général au concret

L'analyse

Cette étape consiste à décomposer les parties d'un exercice, identifier les formules à utiliser : mettre en relation vos connaissances, votre compréhension et votre attitude à appliquer les formules.

La synthèse

C'est mettre en rapport des connaissances des différentes parties d'une leçon ou de plusieurs leçons

L'objectif premier de l'auteur est d'aider les élèves à s'approprier dans l'ordre ces cinq étapes ; à cet effet les annales de la collection qu'il a mis à la disposition des apprenants sont composées de trois (3) grandes parties :

- ***Les cours***
- ***Des exercices corrigés*** (corrections détaillées et commentées)
- ***Des exercices proposés*** (non corrigés)

Afin de mettre à la disposition des élèves de Terminale A ,

des annales de mathématiques leur permettant d'***optimiser leur résultat scolaire*** ,

l'auteur a scindé en ***deux (2) tomes*** les cours qui font la spécificité de la série A .

Tome 1

Quelques formules utiles pour la Terminale A

Limites et compléments sur les dérivées - Probabilités

Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle népérienne

Suites numériques

Tome 2

Primitives et Calcul intégral - Statistiques - Systèmes linéaires

Etude de fonctions

« Sans la maîtrise des formules , les Mathématiques restent un mystère »

L'auteur

Collection
Marathon de Butterfly

Sommaire

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Chapitre 1 : PRIMITIVES - CALCUL INTEGRAL

I- PRIMITIVES

a- Définition

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle $[\,a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ si pour tout x appartenant à l'intervalle $[\,a\,;b]$, la dérivée $F'(x)$ de F est égale à $f(x)$
C'est-à-dire que : pour tout $x \in [\,a\,;b]$, $F'(x) = f(x)$

Exemple

- La fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$
car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = 2x$
- La fonction $F(x) = 3x^2 - x + 2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 6x - 1$
sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = 6x - 1$

b- Primitives d'une fonction

Lorsqu'une fonction est ***continue*** sur un intervalle, elle ***admet une infinité de primitives*** sur cet intervalle
Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle $[\,a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ alors pour toute autre primitive G de f sur $[\,a\,;b]$ il existe un nombre réel c tel que :
pour tout $x \in [\,a\,;b]$, $\boldsymbol{G(x) = F(x) + c}$

c- Détermination des primitives d'une fonction continue

Soit a un nombre réel non nul $(a \neq 0)$.
Pour déterminer une primitive d'une fonction continue sur un intervalle donné , il est utile et nécessaire de maitriser les formules des deux tableaux ci-dessous

(1) Tableau des primitives de fonctions élémentaires

Fonctions	Primitives
a (a est un nombre réel)	$ax + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
ax	$\frac{1}{2}ax^2 + c$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} + c$

- c est un nombre réel

Exercice résolu

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = 5x - 7$ c) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ e) $f(x) = 2x - \frac{4}{x^3}$ f) $f(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 8$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = 5x^4 - \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{8\,x^3}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Proposition de solution

a) $f(x) = x + 3$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x \ + c} \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

b) $f(x) = 5x - 7$

$$F(x) = 5 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right) - 7x \ + c \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}x^2 - 7x \ + \ c} \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

c) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

$$F(x) = -3 \times \left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right) - x + c \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

$$= \boldsymbol{-x^3 + x^2 - x + c} \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

$$F(x) = \frac{-1}{(5-1) \times x^{5-1}} \ + c \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

$$= \boldsymbol{\frac{-1}{4\,x^4} + c} \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

e) $f(x) = 2x - \dfrac{4}{x^3} = \ 2x - 4 \times \dfrac{1}{x^3}$

$$F(x) = 2 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right) - 4 \times \frac{-1}{(3-1) \times x^{3-1}} \ + c \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

$$= x^2 \ + \ \frac{4}{2\,x^2} + c \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

$$= \boldsymbol{x^2 + \frac{2}{x^2} \ + c} \qquad (\ c \in \mathbb{R} \ )$$

f) $f(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 8$

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}x^3\right) + 8x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 8x + c} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$F(x) = 3 \times 2\sqrt{x} \ + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= \boldsymbol{6\sqrt{x} \ + c} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

h) $f(x) = 5x^4 - \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{8\,x^3} = 5x^4 - \frac{7}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{x^3}$

$$F(x) = 5 \times \left(\frac{1}{5}x^5\right) - \frac{7}{2} \times 2\sqrt{x} + \frac{1}{8} \times \frac{-1}{(3-1) \times x^{3-1}} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= x^5 - 7\sqrt{x} \ + \frac{1}{8} \times \frac{-1}{2 \times x^2} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= x^5 - 7\sqrt{x} + \frac{-1}{16x^2} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= \boldsymbol{x^5 - 7\sqrt{x} - \frac{1}{16x^2} + c} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

(2) Tableau des primitives de fonctions

u et v sont des fonctions dérivables , a est un nombre réel

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$(u + v) \ + \ c$
$a \times u'$	$a \times u \ + \ c$
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} \ + \ c$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{-u'}{(n-1)u^{n-1}} \ + \ c$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} \ + \ c$

Comment utiliser le tableau 2 ?

Proposition de méthode

Pour déterminer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle donné , on peut procéder par étapes :

1ère étape : Déterminer à partir de la fonction f donnée, la ***formule à utiliser***

2ème étape : Savoir reconnaître dans la fonction donnée l'expression de la fonction u

3ème étape : Dériver la fonction u

4ème étape : Réécrire la fonction f en fonction de u et u' , afin de mieux faire apparaître la formule de la 1ère étape

5ème étape : Application des formules du tableau 2

Exemple d'application

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3(2x-1)^5$

- ***1ère étape*** : Détermination à partir de la fonction f donnée de la formule à utiliser

  La formule à utiliser est $\boldsymbol{u'u^n}$ avec $n = 5$

- ***2ème étape*** : Savoir reconnaître la fonction u

  (Dans l'exemple donné la fonction u est l' expression qui a pour exposant 5)

  On a $\boldsymbol{u(x) = 2x - 1}$

- ***3ème étape*** : Dériver la fonction u

  La dérivée de la fonction u est donnée par : $\boldsymbol{u'(x) = 2}$

- ***4ème étape*** : On réécrit la fonction f en fonction de u et u'

  On sait que : $f(x) = 3(2x-1)^5$ et $u(x) = 2x - 1$

  Exprimons **3** en fonction $u'(x)$

$$
\begin{aligned}
2x - 1 = u(x) &\Leftrightarrow (2x-1)' = u'(x) \\
&\Leftrightarrow 2 = u'(x) \\
&\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}u'(x) \\
&\Leftrightarrow 3 \times 1 = 3 \times \frac{1}{2}u'(x) \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{3 = \frac{3}{2}\, u'(x)}
\end{aligned}
$$

donc $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}\, u'(x) \times [\, u(x)]^5}$

- *5ème étape* : Application des formules du tableau général

$$\boldsymbol{f = u'u^5} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F = \frac{1}{5+1} u^{5+1} + c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\, u'(x) \times [\, u(x)]^5 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5+1} [\, u(x)]^{5+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} (\, 2x - 1)^6 + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4} (\, 2x - 1)^6 + c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Exercice résolu

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 7(3x+4)^3$ b) $f(x) = 12x(6x^2+3)^4$ c) $f(x) = \dfrac{5}{(5x-3)^4}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{(3x+10)^3}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-9}}$

Proposition de solution

a) La fonction est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 3x + 4$ et $n = 3$

Exprimons 7 en fonction de $u'(x)$

$$3x + 4 = u(x) \Longrightarrow (3x+4)' = u'(x)$$

$$\Longrightarrow 3 = u'(x)$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{1}{3} u'(x)$$

$$\Longrightarrow 7 \times 1 = 7 \times \frac{1}{3} u'(x)$$

$$\Longrightarrow 7 = \frac{7}{3}\, u'(x)$$

Donc $f(x) = \frac{7}{3}\, u'(x) \times [\, u(x)]^3$

$$f(x) = \frac{7}{3}\, u'(x) \times [\, u(x)]^3 \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{7}{3} \times \frac{1}{3+1}[\, u(x)]^{3+1} + c \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$$

$$\Rightarrow\; F(x) = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4}(\,3x+4)^4 + c \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{F(x) = \frac{7}{12}(\,3x+4)^4 + c} \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$$

Une primitive de $f(x) = 7(3x+4)^3$ est $F(x) = \frac{7}{12}(\,3x+4)^4 + c \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$

b) La fonction est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 6x^2 + 3$ et $n = 4$

Exprimons $12x$ en fonction de $u'(x)$

$$6x^2 + 3 = u(x) \;\Rightarrow\; (6x^2+3)' = u'(x)$$

$$\Rightarrow\; 12x = u'(x)$$

Donc $f(x) = u'(x) \times [\, u(x)]^4$

$$f(x) = u'(x) \times [\, u(x)]^4 \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{4+1}[\, u(x)]^{4+1} + c \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{F(x) = \frac{1}{5}(\,6x^2+3)^5 + c} \quad (\; c \in \mathbb{R}\;)$$

c) La fonction est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = 5x - 3$ et $n = 4$

Exprimons 5 en fonction de $u'(x)$

$$5x - 3 = u(x) \;\Rightarrow\; (5x-3)' = u'(x)$$

$$\Rightarrow\; 5 = u'(x)$$

Donc $f(x) = \frac{u'(x)}{[\, u(x)]^4}$

$$f(x) = \frac{u'(x)}{[\,u(x)]^4} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{-1}{(4-1)[\,u(x)]^{4-1}} + c \quad (\ c \in \mathbb{R}\ )$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{F(x) = \frac{-1}{3(5x-3)^3} + c} \quad (\ c \in \mathbb{R}\ )$$

d) La fonction est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = 3x + 10$ et $n = 3$

Exprimons 2 en fonction de $u'(x)$

$$3x + 10 = u(x) \;\Longrightarrow\; (3x+10)' = u'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 3 = u'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{3}u'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2 \times 1 = 2 \times \frac{1}{3}u'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2 = \frac{2}{3}\,u'(x)$$

Donc $f(x) = \dfrac{\frac{2}{3}u'(x)}{[\,u(x)]^3}$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}u'(x)}{[\,u(x)]^3} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{[\,u(x)]^3}$$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-1}{(3-1)[\,u(x)]^{3-1}} + c \quad (\ c \in \mathbb{R}\ )$$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-1}{2(3x+10)^2} + c \quad (\ c \in \mathbb{R}\ )$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{F(x) = \frac{-1}{3(3x+10)^2} + c} \quad (\ c \in \mathbb{R}\ )$$

e) La fonction est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 2x^2 - 9$

Exprimons x en fonction de $u'(x)$

$$2x^2 - 9 = u(x) \Longrightarrow (2x^2 - 9)' = u'(x)$$

$$\Longrightarrow 4x = u'(x)$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{4}u'(x)$$

Donc $f(x) = \dfrac{\frac{1}{4}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{4}u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{u(x)} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 - 9} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

d- Primitive vérifiant une condition donnée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f , les primitives de f sur $[\,a\,;b]$ sont de la forme : $\boldsymbol{F(x)+c}$, où c est un nombre réel

De toutes les primitives $F(x)+c$ de f , il existe ***une et une seule*** qui vérifie la condition $\boldsymbol{F(x_0)=y_0}$

En d'autres termes , la condition $F(x_0)=y_0$ permet de déterminer la valeur du réel c

Exercice résolu

Déterminer la primitive F de f qui vérifie la condition donnée.

$f(x)=2x-3$ et $F(1)=2$

Proposition de solution

Une primitive de f est $F(x)=x^2-3x+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Déterminons la primitive F de f qui vérifie la condition $F(1)=2$

$F(1)=2 \implies 1^2-3\times 1+c=2$

$\implies 1-3+c=2$

$\implies -2+c=2$

$\implies c=2+2$

$\implies c=4$

On conclut donc que la primitive F de f qui vérifie la condition $F(1)=2$ est la fonction $\boldsymbol{F(x)=x^2-3x+4}$

II- CALCUL INTEGRAL

a- Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,,\ b\,]$ et F une primitive de f.
On appelle ***intégrale*** de la fonction f entre les réels a et b , le nombre réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$ tel que : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

- **Notation**

(1) $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\ dx$ »

(2) les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont appelés les ***bornes*** de l'intégrale

(3) Dans l'expression $\int_a^b f(x)dx$, x peut être remplacé une autre lettre ou symbole excepté les bornes a et b .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

On dit que x est une ***variable muette***

Exemple

Sachant que la fonction $F(x) = x^2 - x - 3$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x - 1$ sur $[\,1\,;4\,]$, calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^4 (2x-1)\,dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^4 (2x-1)\,dx \\
&= F(4) - F(1) \\
&= (4^2 - 4 - 3\ ) - \ (1^2 - 1 - 3) \\
&= 9\ -\ (-3) \\
&= 9\ + 3 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Remarque
Pour calculer l'intégrale définie par $I = \int_a^b f(x)\,dx$, il faut d'abord déterminer une primitive F de la fonction f

Exercice résolu
Calculer les intégrales suivantes

$A = \int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\,dx$ $\qquad B = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} + x - 1\right) dx$

Proposition de solution
Calculons A
Déterminons une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$
Une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$
donc $A = \int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\,dx$

$$= F(1) - F(0)$$

$$= \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + 3 \times 1 - \left(\frac{1}{3} \times 0^3 - 0^2 + 3 \times 0\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 3$$

$$= \frac{7}{3}$$

Calculons B
Déterminons une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4}{x^2} + x - 1$
Une primitive de f est $F(x) = -\frac{4}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$
donc $B = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} + x - 1\right) dx = F(2) - F(1)$

$$= -\frac{4}{2} + \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - \left(-\frac{4}{1} + \frac{1}{2} \times 1^2 - 1\right)$$
$$= -2 - \left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{5}{2}$$

- **Conséquences de la définition**

  - ✓ $\int_a^a f(x)dx = 0$
  - ✓ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Inversion des bornes)
  - ✓ $\int_a^b k\, dx = k(b-a)$ (k est un réel quelconque)

- **Propriétés algébriques de l'intégrale**

  - ✓ **Linéarité**

(1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b \boldsymbol{k} \times f(x)dx = \boldsymbol{k} \times \int_a^b f(x)dx$; $k \in \mathbb{R}$

  - ✓ **Relation de Chasles**

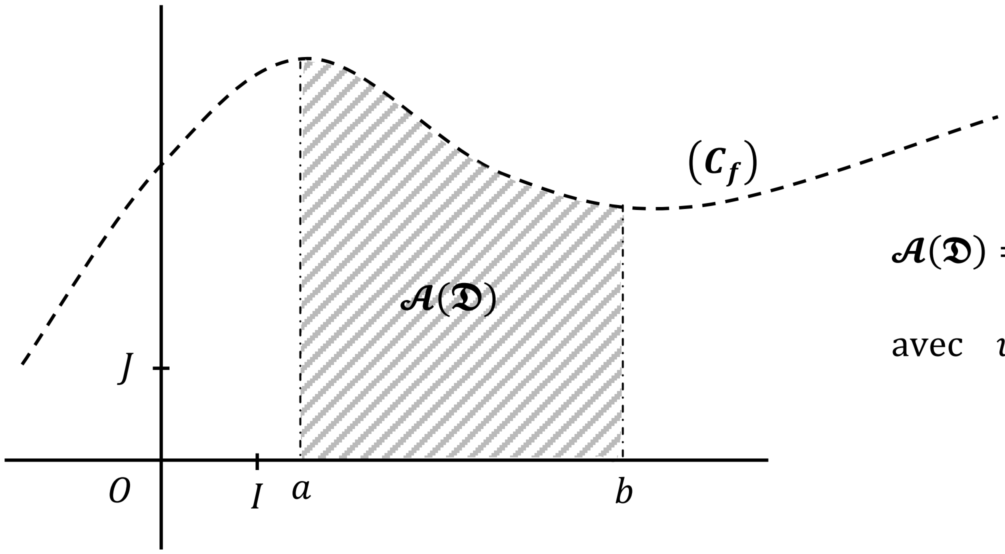
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ ($a < b < c$)

(Utilisée souvent avec les intégrales contenant une valeur absolue)

b- Calcul d'aire

Remarque
Les calculs d'aires se font de manière générale après la construction de la courbe (ou des courbes) et cela permet à l'élève de "visualiser " la partie du plan concernée par ce calcul .

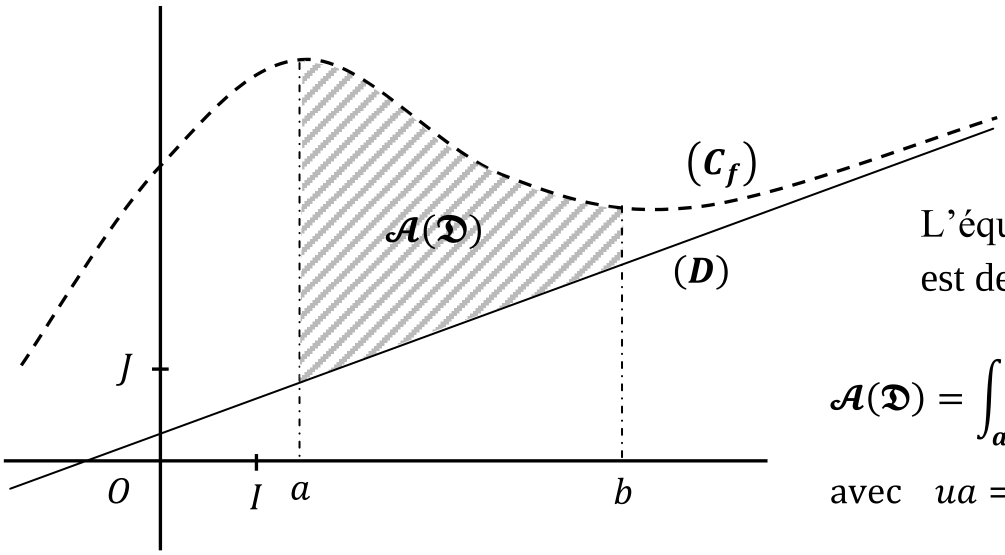
1er cas : L'aire de la partie du plan limitée par une courbe (C_f), l'axe (OI) des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$



$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b f(x)\,dx \times ua$$

avec $ua = OI \times OJ \ cm^2$

2ème cas : L'aire de la partie du plan limitée par une courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y = ax + b$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$



L'équation de l'asymptote (D) est de la forme $y = ax + b$

$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b (f(x) - y)\,dx \times ua$$

avec $ua = OI \times OJ \ cm^2$

En Terminale A_1 , les exercices portant sur les primitives au cours des devoirs ont des questions biens précises :

- ***Montrer que F est une primitive de f ?***
  Il suffit de calculer la dérivée F' de F et de vérifier que $F'(x) = f(x)$

- ***Calculer la dérivée de la fonction h , puis en déduire une primitive de la fonction f***
  Après avoir calculer la dérivée h' de h ; on vérifie que $h'(x) = f(x)$

- ***Calculer , en $\boldsymbol{cm^2}$, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\boldsymbol{C_f})$, la droite $(\boldsymbol{OI})$ et les droites d'équations respectives $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$***
  Cela revient à calculer $\int_a^b f(x)\,dx \times ua$ avec $ua = OI \times OJ \ cm^2$

- ***Calculer , en $\boldsymbol{cm^2}$, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\boldsymbol{C_f})$, la droite $(\boldsymbol{D})$ d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ et les droites d'équations respectives $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$***
  Cela revient à calculer $\int_a^b (f(x) - y)\,dx \times ua$ avec $ua = OI \times OJ \ cm^2$

Exercice résolu

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est $1cm$.
On désigne par (C_f) la représentation graphique de la fonction f definie et derivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1) Montrer que la fonction g definie et derivable sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer et exprimer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

Proposition de solution

1) La fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ si pour tout x élément de $\mathbb{R}$ on a : $g'(x) = f(x)$

   Montrons que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ g'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1\right)' \\ &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

   On en déduit que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

2) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx \ \times ua \qquad ; \text{ avec } ua = OI \times OJ\ cm^2 = 1\ cm^2$$

$$= [\, g(x)\,]_0^1 \ \times 1cm^2 \qquad ; \text{ car } g \text{ est une primitive de } f$$

$$\begin{aligned} &= \big(\,g(1) - \ g(0)\big) \times 1cm^2 \\ &= \left[\,\left(\frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + 2 \times 1 + 1\right) - 1\,\right] \times 1cm^2 \\ &= \left(\frac{7}{3}\ -\ 1\right) \times 1cm^2 \\ &= \frac{4}{3}cm^2 \\ &= 1{,}33\ cm^2\end{aligned}$$

Chapitre 2 : STATISTIQUES

Rappels (classe de 3ème)

- ***Population***

C'est l'ensemble des personnes, des animaux ou des choses sur lequel porte l'étude statistique

- ***Individu***

C'est une personne ou un élément de la population

- ***Caractère***

C'est ce que l'on étudie sur la population.

✓ Le caractère étudié est dit **quantitatif** lorsque les réponses obtenues sont des nombres

✓ Le caractère étudié est dit **qualitatif** lorsque les réponses obtenues ne sont pas des nombres

- ***Modalités***

Ce sont les différentes valeurs ou expressions du caractère étudié

- **Séries statistiques double**

Contrairement en classe de 3ème où les statistiques portent sur un caractère, en Terminale elles portent sur deux (2) caractères ; d'où le terme de série statistique double

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

X est le premier caractère et ses modalités sont : x_1 ; x_2 ; x_3 ; … ; x_n

Y est le deuxième caractère et ses modalités sont : y_1 ; y_2 ; y_3 ; … ; y_n

Remarque : De manière générale, en Terminale, les tableaux statistiques donnés sont de la forme :

Tableau 1

X	3	5	6	9
Y	1	4	5	7

$N_1 = 4$

Tableau 2

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	250	275	325	350	475	525

$N_2 = 6$

L'effectif total est égale au nombre de colonnes contenant des nombres .

✓ **Nuage de points**

On muni le plan d'un repère orthogonal.
L'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ est appelé nuage de points associé à la série statistique double
Dans la pratique ***chaque couple*** $(\boldsymbol{x_i}\,;\boldsymbol{y_i})$ ***correspond à un point du repère d'abscisse*** $\boldsymbol{x_i}$ ***et de coordonnées*** $\boldsymbol{y_i}$; c'est l'ensemble de tous ces différents points qui est appelé nuage de points.

Exercice résolu

Le tableau ci-dessous donne la superficie x_i (en hectares) et le bénéfice annuel y_i (en centaines de milliers de francs CFA) de huit exploitations agricoles d'une même région :

Superficie x_i (en hectares)	1	4	6	9	12	14	16	18
Bénéfice annuel y_i (en centaines de milliers de francs CFA)	7	8	8,9	10,1	12	13	13,5	15,5

Représenter le nuage de points associé à la série double (x_i, y_i) dans un repère orthonormé. Sur le graphique on prendra pour unité :

- ***1 cm pour un hectare en abscisse***
- ***1 cm pour une centaine de milliers de francs CFA en ordonnée***

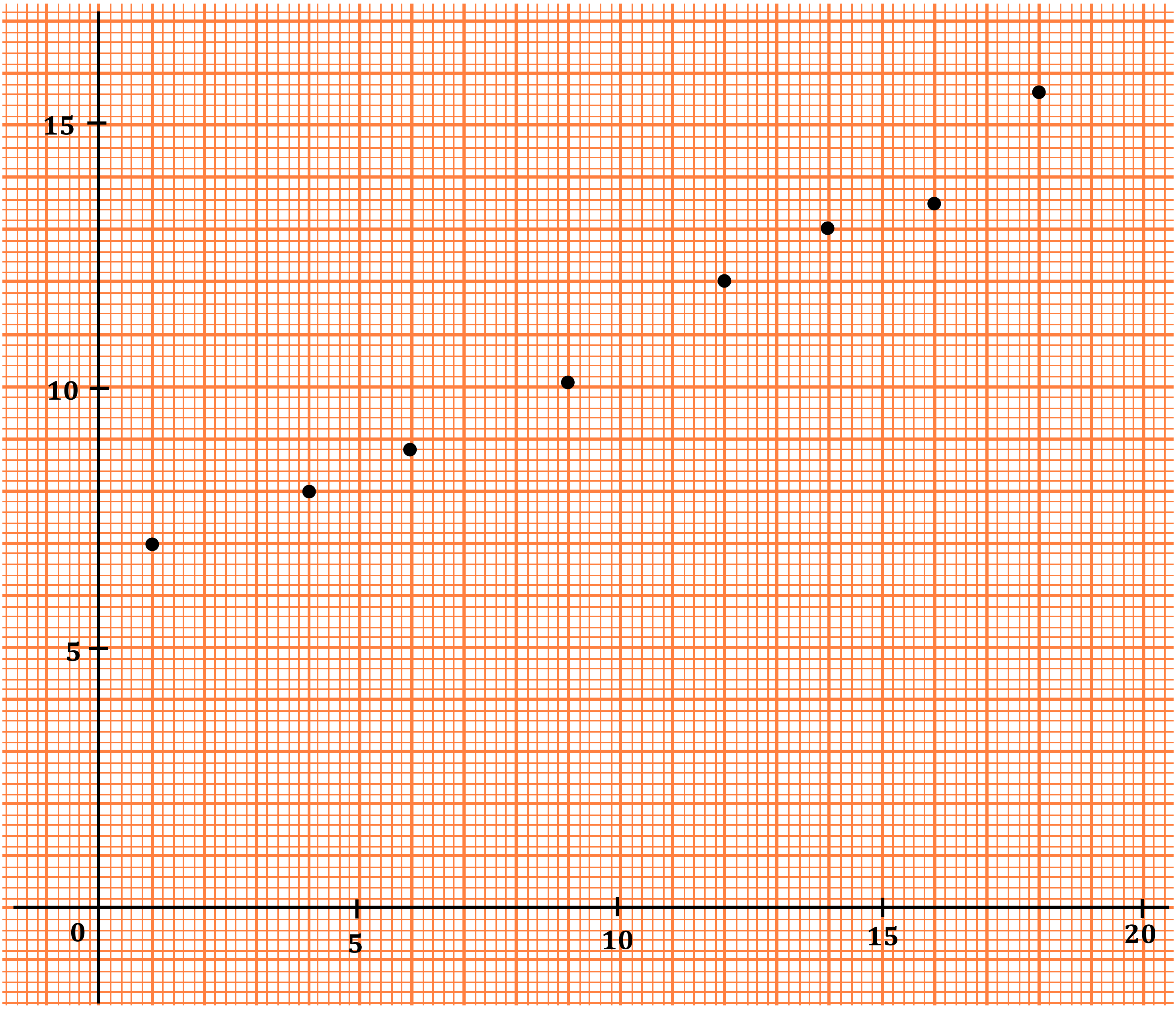
Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Proposition de solution

Remarque

L'effectif total est 8 par conséquent le nuage de points sera composé de 8 points dont les coordonnées sont respectivement :

(1 ,7) , (4 ,8) , (6 ; 8,9) , (9 ; 10,1) , (12 ; 12) , (14 ; 13) , (16 ; 13,5) , (18 ; 15,5)



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

✓ **Point moyen**

On appelle ***point moyen*** d'un nuage de points le point noté ***G*** dont les coordonnées sont $\bar{x}$ (abscisse) et $\bar{y}$ (ordonnée) tels que :

$\bar{x}$ est égal à la somme de tous les x_i divisée par l'effectif total N

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{N}$$

$\bar{y}$ est égal à la somme de tous les y_i divisée par l'effectif total N

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{N}$$

- **Ajustement linéaire** (ou **ajustement affine**)

Objectif : Trouver ***une droite*** qui passe « ***le plus près possible*** » de tous les points du nuage de Points. Pour déterminer l'équation de cette droite, on dispose de deux méthodes :

(1) la ***méthode de Mayer***

(2) la ***méthode des moindres carrées*** (***uniquement A1***)

Cette droite, si elle existe, est appelée ***droite d'ajustement linéaire de y en x***

➢ **Méthode de Mayer**

(1) ***Si l'effectif total est un nombre pair***

On divise le tableau en deux tableaux T_1 et T_2 de même effectif dans l'ordre où les points se présentent

Exemple

Si l'effectif est 8 alors le 1^er tableau (T_1) est composé des 4 premiers points et le 2^ème tableau (T_2) est composé des 4 derniers points

Si l'effectif total est un nombre impair

On divise le tableau en deux tableaux T_1 et T_2 dans l'ordre où les points se présentent

Exemple

Si l'effectif est 7 alors on choisit l'un des deux cas suivants :

1er cas : le 1er tableau (T_1) est composé des 4 premiers points et le 2ème tableau (T_2) est composé des 3 derniers points

2ème cas : le 1er tableau (T_1) est composé des 3 premiers points et le 2ème tableau (T_2) est composé des 4 derniers points

Remarque

De manière générale, en Terminale, la méthode de Mayer ne s'applique que dans les cas où l'***effectif***, c'est-à-dire le nombre de points du nuage, ***est un nombre pair.***

Mais si l'effectif est un ***nombre impair*** , on procède de la même manière c'est-à-dire qu'on partage le tableau initial en deux en mettant le couple central dans le premier tableau ou dans le deuxième tableau .

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	12	15	17	26	29	35	40

couple central

1er cas : le couple central peut être dans le tableau 1

Tableau 1

x_i	1	2	3	4
y_i	12	15	17	26

Tableau 2

x_i	5	6	7
y_i	29	35	40

2ème cas : le couple central peut être dans le tableau 2

Tableau 1

x_i	1	2	3
y_i	12	15	17

Tableau 2

x_i	4	5	6	7
y_i	26	29	35	40

(2) On détermine les points moyens respectifs G_1 et G_2 de chaque tableau

(3) La droite de Mayer est la droite qui passe par les points G_1 et G_2 , son équation est de la forme $y = ax + b$ avec :

$$\boldsymbol{a = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1}$$

Remarque

Pour déterminer $\boldsymbol{b}$ on peut aussi utiliser $\boldsymbol{b = \overline{y}_2 - a\overline{x}_2}$ (les coordonnées du point G_2) ou $\boldsymbol{b = \overline{y} - a\overline{x}}$ (les coordonnées du point moyen G)

La droite (G_1G_2) , aussi appelée ***droite de Mayer***, elle passe par le point moyen G

Lorsque la droite de régression de Y en X par la méthode de Mayer est déterminée, on peut demander à l'élève :

- ***graphiquement***
  de déterminer y lorsque x est connue ou de déterminer x lorsque y est connue
- ***algébriquement (par calcul)***
  de déterminer y lorsque x est connue ou de déterminer x lorsque y est connue

Exercice résolu

Le tableau ci-dessous donne les pourcentages X de femmes et Y d'hommes atteint du paludisme pendant les dix dernières années dans un pays.

X	3	4	6	8	9	11	12	15	17	20
Y	2	3	4	6	5	8	10	12	13	17

On divise la série double $(x_i; y_i)$ en deux séries S_1 et S_2 de même effectif. On note respectivement G_1 et G_2 les points moyens des séries S_1 et S_2.

S_1

X	3	4	6	8	9
Y	2	3	4	6	5

S_2

X	11	12	15	17	20
Y	8	10	12	13	17

1- a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2
   b) Tracer la droite (D) d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer

2- On admet qu'une équation de la droite (D) est : $y = \frac{8}{9}x - \frac{4}{3}$
   a) Déterminer les coordonnées du point moyen G du tableau initial
   b) Vérifier que le point G appartient à la droite (D)

3- Si le pourcentage des femmes atteintes par le paludisme est $25\ \%$, à quel pourcentage d'hommes atteints par cette maladie doit-on s'attendre ?

Proposition de solution

1- a) Déterminons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2

- les coordonnées du point moyen G_1

$$x_{G_1} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{3+4+6+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$y_{G_1} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{2+3+4+6+5}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

les coordonnées du point moyen G_1 sont $(6\,;4)$

- les coordonnées du point moyen G_2

$$x_{G_2} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{11+12+15+17+20}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$y_{G_2} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{8+10+12+13+17}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

les coordonnées du point moyen G_2 sont (15 ; 12)

b) Traçons la droite (D) d'justement par la méthode de Mayer
(Voir à la fin de l'exercice)

2- a) Déterminons les coordonnées du point moyen G du tableau initial

$$x_G = \frac{x_{G_1} + x_{G_2}}{2} = \frac{6+15}{2} = 10{,}5$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} + y_{G_2}}{2} = \frac{4+12}{2} = 8$$

les coordonnées du point moyen G sont (10,5 ; 8)

Remarque

On peut aussi procéder comme suite

$$x_G = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{3+4+6+8+9+11+12+15+17+20}{10} = \frac{105}{10} = 10{,}5$$

$$y_G = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{2+3+4+6+5+8+10+12+13+17}{10} = \frac{80}{10} = 8$$

b) Vérifions que le point moyen G appartient à la droite (D)

Il suffit de vérifier que $y_G = \frac{8}{9}x_G - \frac{4}{3}$

$$\frac{8}{9}x_G - \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \times 10{,}5 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{84}{9} - \frac{4}{3}$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

$$= \frac{84}{9} - \frac{12}{9}$$

$$= \frac{72}{9}$$

$$= 8$$

$$= y_G$$

On déduit donc que : $y_G = \frac{8}{9}x_G - \frac{4}{3}$

Par conséquent le point moyen G appartient à la droite (D)

3- Déterminons le pourcentage d'hommes atteints de paludisme si le pourcentage des femmes atteintes par cette maladie est $25\ \%$

Si le pourcentage des femmes atteintes par le paludisme est $25\ \%$ alors $X = 25$, déterminons donc la valeur de Y

$$y = \frac{8}{9}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{9} \times 25 - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{200}{9} - \frac{4}{3}$$

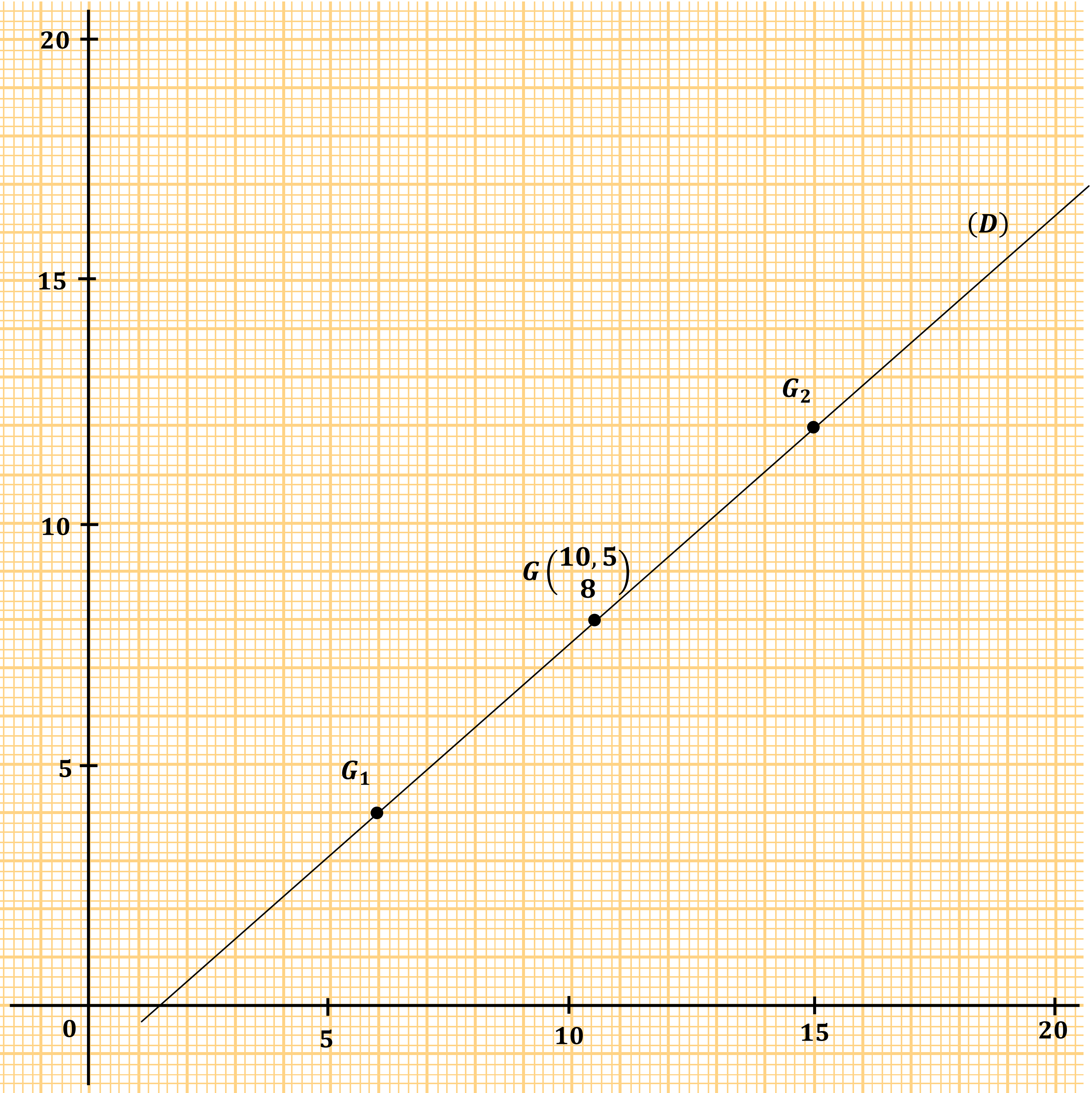
$$\Rightarrow y = \frac{200}{9} - \frac{12}{9}$$

$$\Rightarrow y = \frac{188}{9}$$

$$\Rightarrow y = 20{,}88$$

Si le pourcentage des femmes atteintes par le paludisme est $25\ \%$, alors le pourcentage d'hommes atteints par cette maladie est $20{,}88\ \%$

La droite (D) d'justement par la méthode de Mayer est la droite qui passe par les points G_1 et G_2



Exercice résolu

Une société de fabrication de bijoux ouvre de nouveaux points de vente. Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires mensuel y_i en fonction du nombre x_i de points de vente de Janvier 2013 en Juin 2013.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Nombre de points de vente (x_i)	10	12	14	17	18	19
Chiffre d'affaires en millions de francs (y_i)	29	32	35	37	39	44

1- Représenter le nuage de points de cette série statistique double dans un repère orthonormé, en choisissant 1 cm pour deux (2) points de vente en abscisse et 1 cm pour trois (3) millions en ordonnée

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points obtenus

3- a) Justifier qu'une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est : $y = \frac{4}{3}x + 16$

b) Vérifier que le point moyen G appartient à la droite (D)

c) Représenter graphiquement cette droite

4- Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente

5- Déterminer par le calcul, le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente

6- Déterminer graphiquement, le nombre de points de vente nécessaire pour atteindre un chiffre d'affaires de 50 millions de francs.

Proposition de solution

1- Représentons le nuage de points de cette série statistique double
(Voir le schéma à la fin de l'exercice)

2- Calculons les coordonnées du point moyen G

$$x_G = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{10+12+14+17+18+19}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$$y_G = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{29+32+35+37+39+44}{6} = \frac{216}{6} = 36$$

les coordonnées du point moyen G sont $(15\,;\ 36)$

3- a) Justifions qu'une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est : $y = \frac{4}{3}x + 16$

Partageons le tableau en deux tableaux T_1 et T_2 de même effectif, puis déterminons les coordonnées de leurs points moyens respectifs G_1 et G_2 .
La droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est la droite (G_1G_2) , en d'autres termes la droite qui passe par les points G_1 et G_2

Tableau T_1

X_1	10	12	14
Y_1	29	32	35

Tableau T_2

X_2	17	18	19
Y_2	37	39	44

- Calculons les coordonnées du point moyen G_1

$$x_{G_1} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{10+12+14}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$y_{G_1} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{29+32+35}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

les coordonnées du point moyen G_1 sont $(12\,;32)$

- Calculons les coordonnées du point moyen G_2

$$x_{G_2} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{17+18+19}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

$$y_{G_2} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{37+39+44}{3} = \frac{120}{3} = 40$$

les coordonnées du point moyen G_2 sont (18 ; 40)

Déterminons l'équation de la droite qui passe par les points G_1 et G_2

L'équation de cette droite est de la forme $y = ax + b$ avec

$$\boldsymbol{a} = \frac{\bar{y}_{G_2} - \bar{y}_{G_1}}{\bar{x}_{G_2} - \bar{x}_{G_1}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \bar{y}_{G_1} - \boldsymbol{a} \times \bar{x}_{G_1}$$

$$a = \frac{32 - 40}{12 - 18}$$

$$= \frac{-8}{-6}$$

$$= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$$b = 32 - \frac{4}{3} \times 12$$

$$= 32 - 16$$

$$= \mathbf{16}$$

On conclut donc qu'une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x + 16}$

b) Vérifions que le point moyen G appartient à la droite (D)

Il suffit de vérifier que $y_G = \frac{4}{3}x_G + 16$

$$\frac{4}{3}x_G + 16 = \frac{4}{3} \times 15 + 16$$

$$= 20 + 16$$

$$= 36$$

$$= y_G$$

On déduit donc que : $y_G = \frac{4}{3}x_G + 16$

Par conséquent le point moyen G appartient à la droite (D)

c) Représentation graphique de la droite (D)

Voir le schéma à la fin de l'exercice

4- Déterminons graphiquement le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente.

Si la société ouvre quatre nouveaux points de vente alors elle aura en tout 23 points de vente. Ces 23 points de vente correspondent à la valeur x_i ;
Graphiquement la valeur de y_i est d'environ 46,60

5- Déterminons par le calcul le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente.

Si la société ouvre quatre nouveaux points de vente alors elle aura en tout 23 points de vente. Ces 23 points de vente correspondent à la valeur x_i ; déterminons donc la valeur de y_i

$$y = \frac{4}{3}x + 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3} \times 23 + 16$$

$$\Rightarrow \quad y = 30{,}66 + 16$$

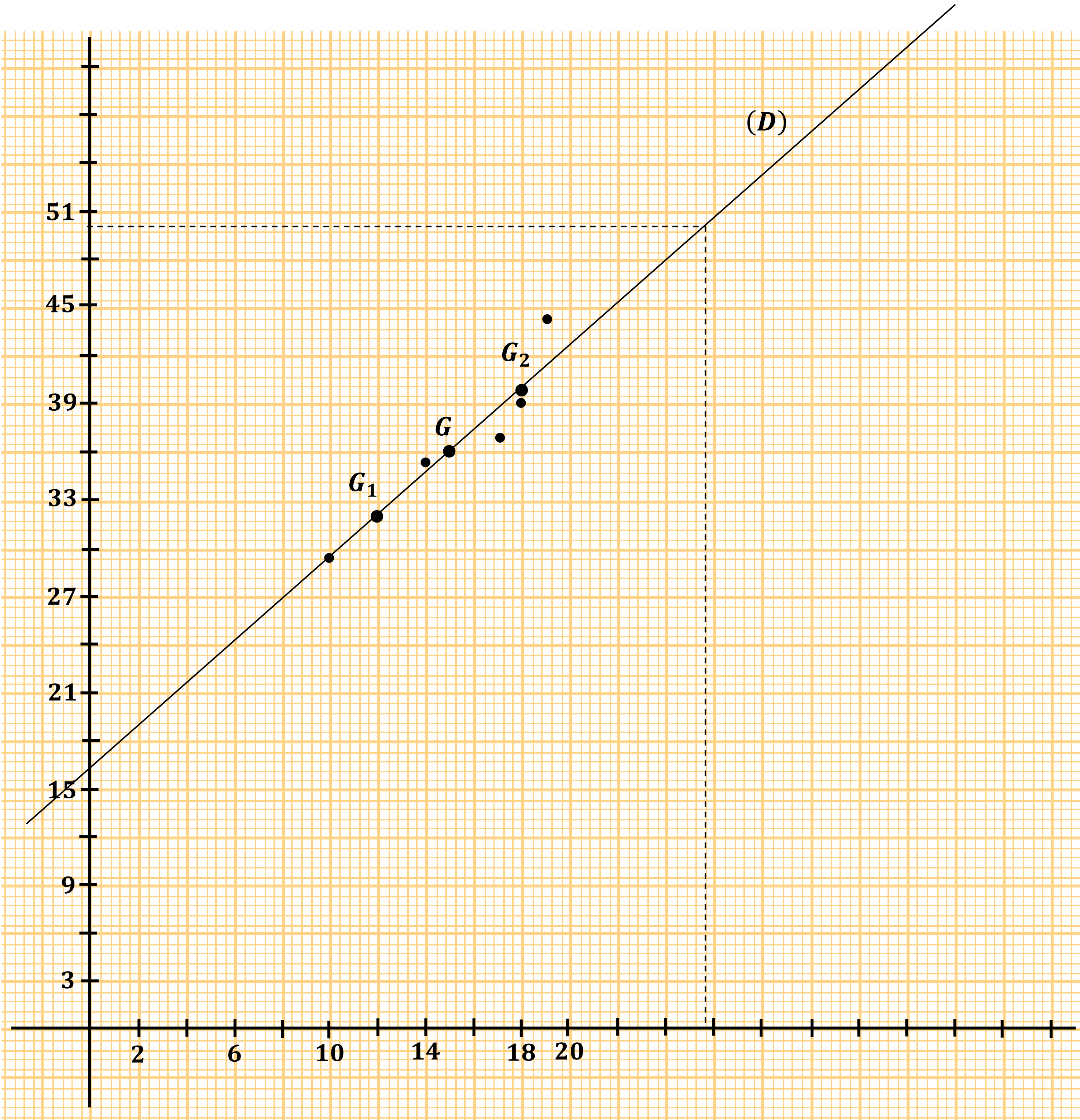
$$\Rightarrow \quad y = 46{,}66$$

Si la société ouvre quatre nouveaux points de vente alors le chiffre d'affaires serait de 46,66 millions de francs

6- Déterminons graphiquement, le nombre de points de vente nécessaire pour atteindre un chiffre d'affaires de 50 millions de francs.

Pour atteindre un chiffre d'affaires de 50 millions, graphiquement la société doit avoir 26 points de vente.

Remarque
Pour un chiffre d'affaires de 50 millions, graphiquement la société doit avoir 25,5 points de vente. On arrondi donc cette valeur à 26



(D)
51
45
39
33
27
21
15
9
3
2
6
10
14
18
20
G_2
G
G_1

Exercice résolu (BAC A2 2013)

La Mutuelle des Cadres de Konankpinkro (MUCAKO) a été créée le 1er Janvier 2005 . Le premier Janvier de chaque nouvelle année, le secrétaire général calcule le taux global d'adhésion à la mutuelle.

Le tableau ci-dessous donne les taux respectifs obtenus sur la période 2006-2011.

	2006	2007	2008	2009	2010	2011
X Age de la MUCAKO (en années)	1	2	3	4	5	6
Y Taux global d'adhésion (en pourcentage)	75	77	77,3	78,2	79,3	80

1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double $(X;Y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. L'unité graphique est telle que :
- 2 cm représente une année sur l'axe des abscisses
- 2 cm représente un taux de 1% sur l'axe des ordonnées

On pourra prendre le point de couple de coordonnées $(\mathbf{0}\,;\mathbf{74})$ ***comme origine***

2- Calculer les coordonnées du point moyen G

3- On partage la série statistique double $(X;Y)$ en deux séries statistiques doubles $(X_1\,;Y_1)$ et $(X_2\,;Y_2)$ comme indiqué dans les tableaux ci-dessous.

X_1	1	2	3
Y_1	75	77	77,3

X_2	4	5	6
Y_2	78,2	79,3	80

a) Calculer les coordonnées respectives des points moyens G_1 et G_2 des séries statistiques doubles $(X_1\,;Y_1)$ et $(X_2\,;Y_2)$

On donnera l'arrondi d'ordre* 1 *des coordonnées non entières.

b) Tracer la droite (D) de régression linéaire de Y en X par la méthode de Mayer sur la figure de la question 1

c) Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : $y = 0{,}93x + 74{,}5$

4- Quel devrait être le taux d'adhésion de la MUCAKO en 2015 selon l'ajustement réalisé ?

Proposition de solution

1- Représentons le nuage de points associé à la série statistique double
Voir la figure à la fin de l'exercice

2- Calculons les coordonnées du point moyen G

$$x_G = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$y_G = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{75+\ 77+\ 77{,}3\ +78{,}2\ +79{,}3\ +80}{6} = \frac{466{,}8}{6} = 77{,}8$$

les coordonnées du point moyen G sont $(\,3{,}5\,;\ 77{,}8\,)$

3- a) Calculons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2

Calculons les coordonnées du point moyen G_1

$$x_{G_1} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_{G_1} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{75+\ 77+\ 77{,}3}{3} = \frac{229{,}3}{3} = 76{,}4$$

les coordonnées du point moyen G_1 sont $(\,2\,;76{,}4\,)$

Calculons les coordonnées du point moyen G_2

$$x_{G_2} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$y_{G_2} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{78{,}2\ +79{,}3\ +80}{3} = \frac{237{,}5}{3} = 79{,}2$$

les coordonnées du point moyen G_2 sont $(\,5\,;79{,}2\,)$

b) Traçons la droite (D) de regression linéaire de Y en X par la méthode de Mayer

Voir la figure à la fin de l'exercice

c) Démontrons qu'une équation de la droite (D) est : $y = 0{,}93x + 74{,}5$

La droite (D) de regression linéaire de Y en X par la méthode de Mayer est la droite (G_1G_2) , or une équation de cette droite est de la forme

$y = ax + b$ avec $\boldsymbol{a} = \dfrac{\bar{y}_{G_2} - \bar{y}_{G_1}}{\bar{x}_{G_2} - \bar{x}_{G_1}}$ et $\boldsymbol{b} = \bar{y}_{G_1} - \boldsymbol{a} \times \bar{x}_{G_1}$

$$a = \frac{76{,}4 - 79{,}2}{2 - 5}$$

$$= \frac{-2{,}8}{-3}$$

$$= \mathbf{0{,}93}$$

$$b = 76{,}4 - 0{,}93 \times 2$$

$$= 76{,}4 - 1{,}86$$

$$= \mathbf{74{,}54}$$

On conclut donc qu'une équation de la droite (D) est : $\boldsymbol{y = 0{,}93x + 74{,}5}$

4- Déterminons le taux d'adhésion de la MUCAKO en 2015.

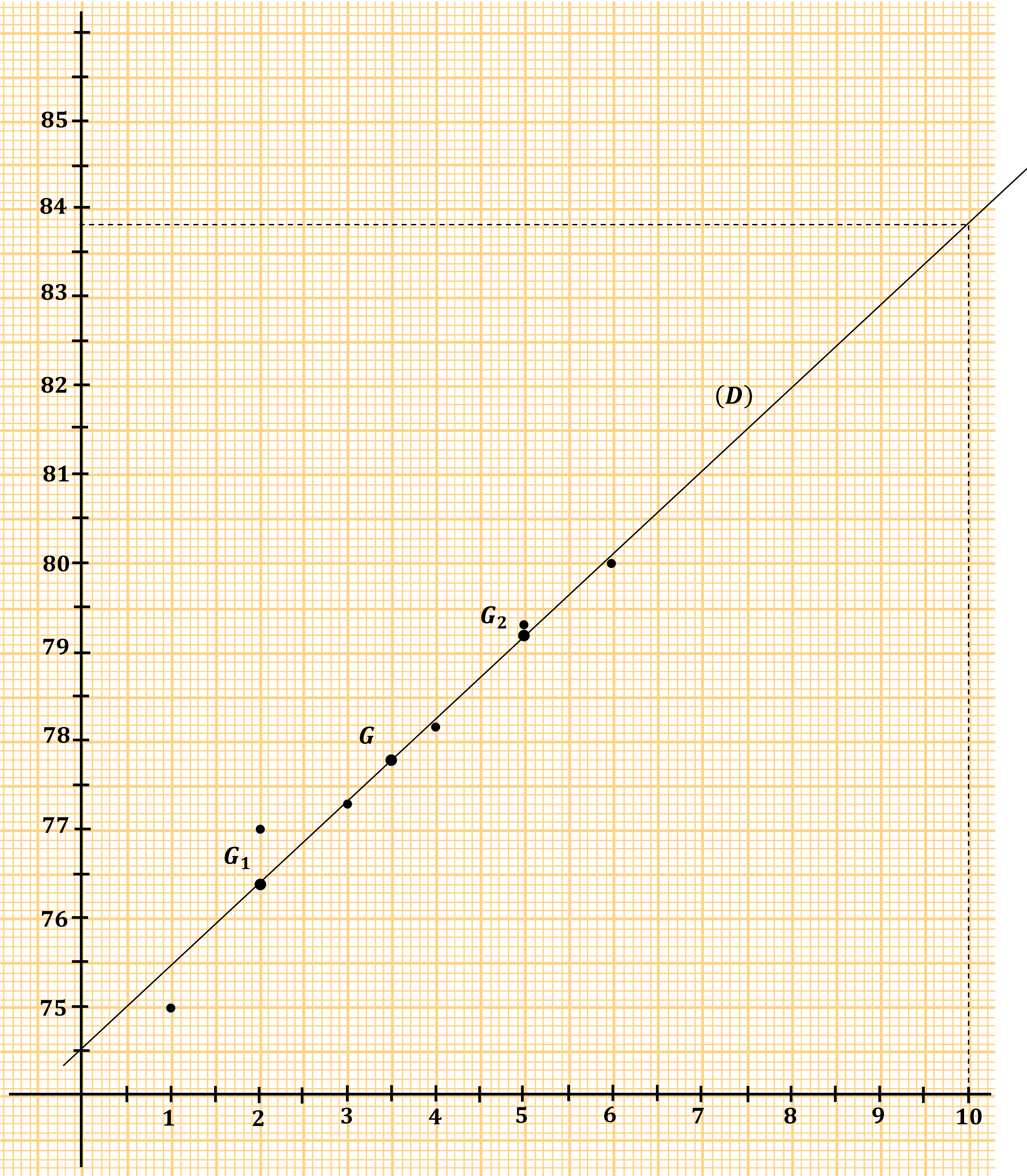
En 2015 , la MUCAKO sera à sa 10ème année , autrement dit $X = 10$; déterminons donc la valeur de Y

$$y = 0{,}93x + 74{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}93 \times 10 + 74{,}5$$

$$\Rightarrow \quad y = 9{,}3 + 74{,}5$$

$$\Rightarrow \quad y = 83{,}8$$

On conclut donc d'après l'ajustement réalisé, en 2015 la MUCAKO aura 83,8 % de taux d'adhésion



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

❆ ***uniquement série A1***

➢ **Méthode des moindres carrées**

- **Variance et Covariance**

On dispose de deux (2) méthodes différentes pour calculer la **Variance** $\boldsymbol{V(X)}$ et la **Covariance** $\boldsymbol{COV(X,Y)}$

> ***Remarque***
>
> $\boldsymbol{V(X)}$ se lit ***variance*** de X
>
> $\boldsymbol{COV(X,Y)}$ se lit ***covariance*** de X Y

Calcul de $\boldsymbol{V(X)}$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2}{N} - (\bar{x})^2$$

Calcul de $\boldsymbol{V(Y)}$

$$\boldsymbol{V(Y)} = \frac{\sum n_i {y_i}^2}{N} - (\bar{y})^2$$

$$= \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + \cdots + {y_n}^2}{N} - (\bar{y})^2$$

Calcul de $\boldsymbol{COV(X,Y)}$

$$\boldsymbol{COV(X,Y)} = \frac{\sum n_i x_i \times y_i}{N} - \bar{x} \times \bar{y}$$

$$\frac{x_1 \times y_1 \; + \; x_2 \times y_2 \; + \; x_3 \times y_3 \; + \; \ldots + \; x_n \times y_n}{N} - \bar{x} \times \bar{y}$$

Pour calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $COV(X,Y)$; on peut s'aider du tableau ci-dessous

Tableau de calculs

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \times y_i$
	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 \times y_1$
	x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 \times y_2$
	x_3	y_3	x_3^2	y_3^2	$x_3 y_3$
	...	...	...	...	...
	x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n \times y_n$
Total	$\sum n_i x_i$ **(1)**	$\sum n_i y_i$ **(2)**	$\sum n_i x_i^2$ **(3)**	$\sum n_i y_i^2$ **(4)**	$\sum n_i x_i \times y_i$ **(5)**

(1) la somme $\sum n_i x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ est utilisée pour calculer $\bar{x}$

(2) la somme $\sum n_i y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$ est utilisée pour calculer $\bar{y}$

(3) la somme $\sum n_i x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ est utilisée pour calculer $V(X)$

(4) la somme $\sum n_i y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2$ est utilisée pour calculer $V(Y)$

(5) la somme $\sum n_i x_i \times y_i = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + x_3 \times y_3 + \cdots + x_n \times y_n$ est utilisée pour calculer $COV(X,Y)$

Remarque :

- Le tableau de calculs ci-dessus peut être modifié selon les questions posées
- $COV(X,Y)$ peut-être un nombre ***négatif***

Exercice résolu

On dispose du tableau statistique ci-dessous

x_i	4	6	7	9	11
y_i	3	4	6	8	10

1- Calculer les coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ du point moyen G de cette série statistique

2- Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $COV(X;Y)$

Proposition de solution

Remarque

Dans un exercice de statistique où on doit calculer l'une des valeurs suivantes : $V(X)$, $V(Y)$ ou $COV(X;Y)$, il est judicieux d'utiliser un tableau de calculs

Dressons un tableau de calculs

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i.y_i$
	4	3	16	9	12
	6	4	36	16	24
	7	6	49	36	42
	9	8	81	64	72
	11	10	121	100	110
Total	**37**	**31**	**303**	**225**	**260**

1- Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{37}{5} = 7,4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{31}{5} = 6,2$$

Les coordonnées du point moyen G sont (7,4 ; 6,2)

2- Calculons $V(X)$, $V(Y)$ et $COV(X;Y)$

Calculons $V(X)$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - (\overline{x})^2$$

$$= \frac{303}{5} - (7{,}4)^2$$

$$= 60{,}6 - 54{,}76$$

$$= \mathbf{5{,}84}$$

Calculons $V(Y)$

$$\boldsymbol{V(Y)} = \frac{\sum n_i {y_i}^2}{N} - (\overline{y})^2$$

$$= \frac{225}{5} - (6{,}2)^2$$

$$= 45 - 38{,}44$$

$$= \mathbf{6{,}56}$$

Calculons $COV(X,Y)$

$$\boldsymbol{COV(X,Y)} = \frac{\sum n_i x_i \times y_i}{N} - \overline{x} \times \overline{y}$$

$$= \frac{260}{5} - 7{,}4 \times 6{,}2$$

$$= 52 - 45{,}88$$

$$= \mathbf{6{,}12}$$

Exercice résolu

Le tableau ci-dessous donne les pourcentages X de femmes et Y d'hommes atteint du paludisme pendant les dix dernières années dans un pays.

X	3	4	6	8	9	11	12	15	17	20
Y	2	3	4	6	5	8	10	12	13	17

Justifier que les variances respectives $V(X) = 28{,}25$ et $V(Y) = 21{,}6$

Proposition de solution

Dressons le tableau de calculs

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$
	3	2	9	4
	4	3	16	9
	6	4	36	16
	8	6	64	36
	9	5	81	25
	11	8	121	64
	12	10	144	100
	15	12	225	144
	17	13	289	169
	20	17	400	289
Total	**105**	**80**	**1385**	**856**

Remarque

La colonne des $x_i . y_i$ n'est pas utile puisqu'on ne demande pas de calculer la covariance de X et de Y ($COV(X\,;Y)$)

Calculons $V(X)$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - \overline{x}^2$$

$$= \frac{1385}{10} - \left(\frac{105}{10}\right)^2$$

$$= 138{,}5 - (10{,}5)^2$$

$$= 138{,}5 - 110{,}25$$

$$= 28{,}25$$

Calculons $V(Y)$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\sum n_i {y_i}^2}{N} - \overline{y}^2$$

$$= \frac{856}{10} - \left(\frac{80}{10}\right)^2$$

$$= 85{,}6 - 8^2$$

$$= 85{,}6 - 64$$

$$= 21{,}5$$

- **Droite de régression de $\boldsymbol{Y}$ en $\boldsymbol{X}$**

La droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées passe par le point moyen G ; l'équation de cette droite peut se mettre sous la forme $y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ avec :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{COV}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$$

où $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{y}}$ sont les coordonnées du point moyen $\boldsymbol{G}$

- **Coefficient de corrélation linéaire**

On appelle « coefficient de corrélation linéaire » d'une série statistique double le nombre réel $\boldsymbol{r}$ défini par : $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{COV}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\sqrt{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y})}}$

Le coefficient de corrélation linéaire $\boldsymbol{r}$ permet de vérifier " la dépendance " entre les deux caractères étudiés c'est-à-dire entre X et Y ; elle justifie aussi la possibilité d'effectuer un ajustement linéaire lorsqu'elle est ***très proche de* 1**

Lorsque $\boldsymbol{0,87 \leq |\, r\,| \leq 1}$ on dit qu'il y a une ***bonne corrélation*** (ou une ***forte corrélation***) entre les deux variables X et Y

Exercice résolu

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son office, le chiffre d'affaires en millions de Francs. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau ci-dessous où X designe le numero du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1- Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique double
2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G .
Unité : $2\ cm$ en abscisse et $1\ cm$ en ordonnée
3- Déterminer par la méthode de Mayer, une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire
4- Tracer la droite (D)
5- Donner, en utilisant la droite (D) , une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7$^{\text{ème}}$ mois.

(***Uniquement A1***)

6- Recopier et compléter le tableau ci-dessous

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	x_iy_i
	1	12	1		12
	2	13		169	
	3	15			
	4	19	16		
	5	21			105
	6	22		484	
Total	**21**				**396**

7- Vérifier les résultats suivants :

$$V(X) = \frac{35}{12} \qquad \text{et} \qquad COV(X,Y) = \frac{13}{2}$$

8- Justifier qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $y = 2{,}23x + 9{,}2$

Proposition de solution

1- Déterminons les coordonnées du point moyen G

$$x_G = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$y_G = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{12+13+15+19+21+22}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

Les coordonnées du point moyen G sont $(3{,}5\,;17)$

2- Représentons graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G .
Voir la figure à la fin de l'exercice

3- Déterminons une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Partageons le tableau en deux tableaux T_1 et T_2 de même effectif, puis déterminons les coordonnées de leurs points moyens respectifs G_1 et G_2 .
La droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est la droite (G_1G_2) , en d'autres termes la droite qui passe par les points G_1 et G_2

Tableau T_1

X_1	1	2	3
Y_1	12	13	15

Tableau T_2

X_2	4	5	6
Y_2	19	21	22

- Calculons les coordonnées du point moyen G_1

$$x_{G_1} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_{G_1} = \frac{12+13+15}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}33$$

les coordonnées du point moyen G_1 sont $(2\,;13{,}33)$

- Calculons les coordonnées du point moyen G_2

$$x_{G_2} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$y_{G_2} = \frac{19+21+22}{3} = \frac{62}{3} = 20{,}66$$

les coordonnées du point moyen G_2 sont $(5\,;\,20{,}66)$

Déterminons l'équation de la droite qui passe par les points G_1 et G_2

L'équation de cette droite est de la forme $y = ax + b$ avec

$$\boldsymbol{a} = \frac{\bar{y}_{G_2} - \bar{y}_{G_1}}{\bar{x}_{G_2} - \bar{x}_{G_1}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \bar{y}_{G_1} - \boldsymbol{a} \times \bar{x}_{G_1}$$

$$a = \frac{20{,}66 - 13{,}33}{5-2}$$

$$= \frac{7{,}33}{3}$$

$$= \mathbf{2{,}44}$$

$$b = 13{,}33 - 2{,}44 \times 2$$

$$= 13{,}33 - 4{,}88$$

$$= \mathbf{8{,}45}$$

On conclut donc qu'une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est $\boldsymbol{y = 2{,}44\,x + 8{,}45}$

4- Voir la figure à la fin de l'exercice

5- Donnons , en utilisant la droite (D) , une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7$^{\text{ème}}$ mois.

Remarque

Le mois correspond à X le chiffre d'affaires correspond à Y

On sait que $X = 7$, déterminons Y

$y = 2{,}44\,x + 8{,}45$ avec $x = 7$

$y = 2{,}44 \times 7 + 8{,}45$

$y = 17{,}08 + 8{,}45$

$y = 25{,}53$

à la fin du 7ème mois , le chiffre d'affaires de cette pharmacie est estimé à 25,53 millions

6- Complétons le tableau de calculs

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	x_iy_i
	1	12	1	144	12
	2	13	4	169	26
	3	15	9	225	45
	4	19	16	361	76
	5	21	25	441	105
	6	22	36	484	132
Total	**21**	**102**	**91**	**1824**	**396**

7- Vérifions les résultats suivants :

$$V(X) = \frac{35}{12} \qquad COV(X,Y) = \frac{13}{2}$$

Calculons $V(X)$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - \overline{x}^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{441}{36}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{105}{36}$$

$$= \boldsymbol{\frac{35}{12}}$$

Calculons $COV(X,Y)$

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_i x_i \times y_i}{N} - \overline{x} \times \overline{y}$$

$$= \frac{396}{6} - \frac{21}{6} \times \frac{102}{6}$$

$$= 66 - \frac{7}{2} \times 17$$

$$= 66 - \frac{119}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{13}{2}}$$

8- Justifions qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $y = 2{,}23x + 9{,}2$

L'équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est de la forme $y = ax + b$ avec

$\boldsymbol{a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}}$ et $\boldsymbol{b = \overline{y} - a\overline{x}}$; où $\boldsymbol{\overline{x}}$ et $\boldsymbol{\overline{y}}$ sont les coordonnées du point moyen $\boldsymbol{G}$

$$a = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}}$$

$$= \frac{13}{2} \times \frac{12}{35}$$

$$= 2{,}228$$

$$= 2{,}23$$

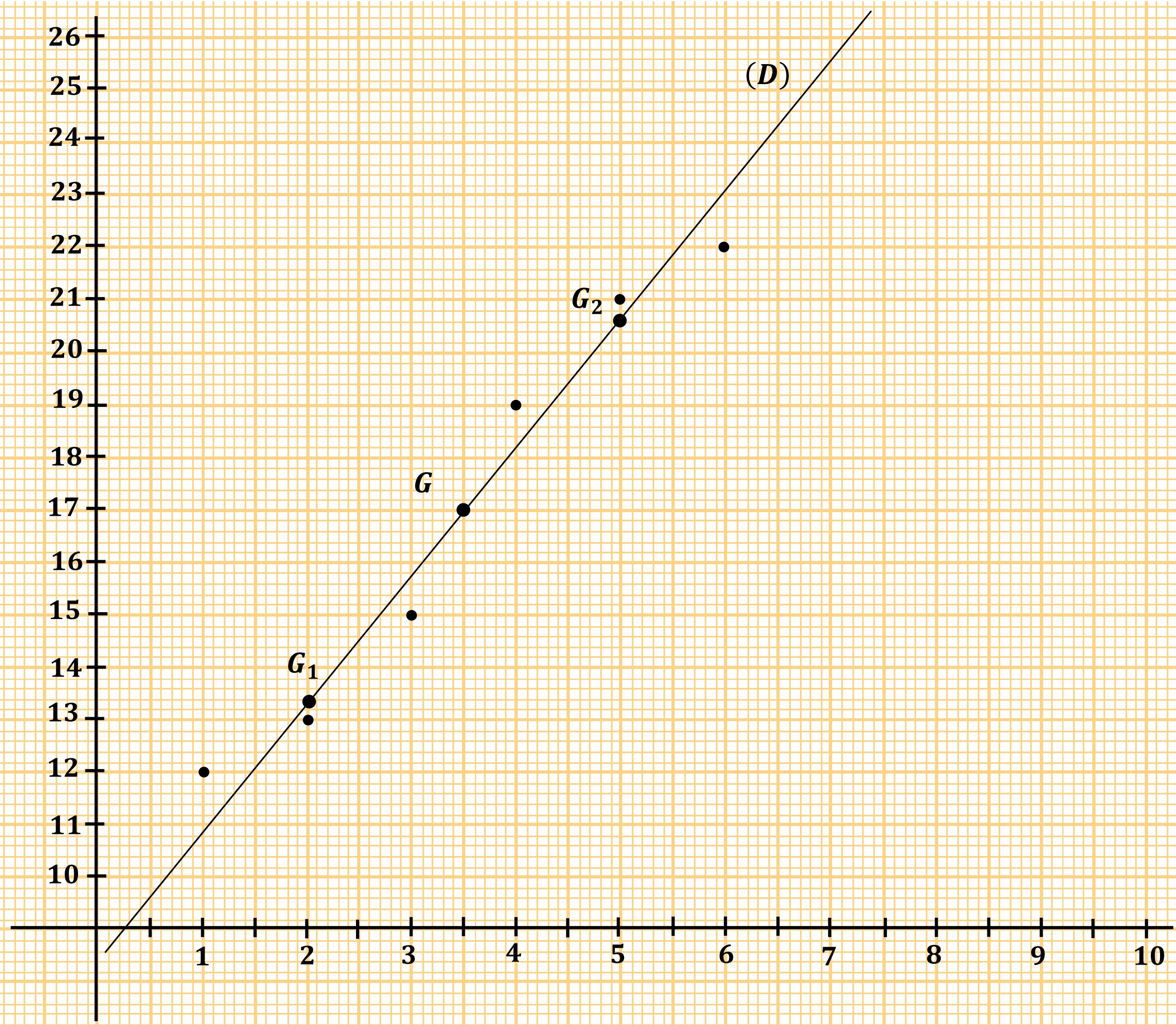
$b = 17 - 2{,}23 \times 3{,}5$

$= 17 - 7{,}805$

$= 9{,}195$

$= 9{,}2$

On déduit donc qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $y = 2{,}23x + 9{,}2$



Exercice résolu

(*On justifiera toutes les réponses*)

On a relevé (en tonne) la quantité de riz importé par une ville qui mène une politique d'autosuffisance en riz. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Année (x_i)	2007	2008	2009	2010	2011
Quantité de riz (y_i)	81,5	79	76	74	70,5

On désigne par X le caractère « Année » et par Y le caractère « Quantité de riz importé »
Les conditions du relevé ne changent pas à long terme.

1- a) Représenter le nuage de points de la série statistique de caractère $(X;Y)$
   <u>Echelles</u> : 2 cm pour 1 an et 1 cm pour une tonne de riz
   b) Le nuage de points est-il justiciable d'un ajustement linéaire ?

2- Calculer le coefficient de corrélation linéaire r entre X et Y sous forme d'un arrondi d'ordre 3.
   Interpréter graphiquement le résultat.

3- a) Trouver une équation de la droite (D) de regression de Y en X par la méthode des moindres carrées
   b) Tracer la droite (D)

4- a) A combien peut-on estimer la quantité de riz importé en 2012
   b) Estimer, par lecture graphique, la quantité de riz importé en 2012

5- En quelle année la ville va cesser d'importer du riz ?

Proposition de solution

1- a) Représentons le nuage de points de la série statistique de caractère $(X;Y)$

(Voir à la fin de l'exercice)

b) Un ajustement linéaire semble justiciable car les points du nuage semblent alignés

2- Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

Le coefficient de corrélation linéaire r est défini par $\boldsymbol{r = \dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Calculons d'abord $V(X)$, $V(Y)$ et $COV(X,Y)$

Dressons un tableau de calculs

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	x_iy_i
	2007	81,5	4028049	6642,25	163570,5
	2008	79	4032064	6241	158632
	2009	76	4036081	5776	152684
	2010	74	4040100	5476	148740
	2011	70,5	4044121	4970,25	141775,5
Total	**10045**	**381**	**20180415**	**29105,5**	**765402**

Calculons $V(X)$

$$V(X) = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - (\overline{x})^2$$

$$= \frac{20180415}{5} - \left(\frac{10045}{5}\right)^2$$

$$= 4036083 - 2009^2$$

$$= 4036083 - 4036081$$

$$= \mathbf{2}$$

Calculons $V(Y)$

$$V(Y) = \frac{\sum n_i {y_i}^2}{N} - (\overline{y})^2$$

$$= \frac{29105{,}5}{5} - \left(\frac{381}{5}\right)^2$$

$$= 5821{,}1 - (76{,}2)^2$$

$$= 5821{,}1 - 5806{,}44$$

$$= \mathbf{14{,}66}$$

Calculons $COV(X,Y)$

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_i x_i \times y_i}{N} - \overline{x} \times \overline{y}$$

$$= \frac{765402}{5} - \frac{10045}{5} \times \frac{381}{5}$$

$$= 153080{,}4 - 2009 \times 76{,}2$$

$$= 153080{,}4 - 153085{,}8$$

$$= \mathbf{-5{,}4}$$

Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$$

$$= \frac{-5{,}4}{\sqrt{2 \times 14{,}66}}$$

$$= \frac{-5{,}4}{\sqrt{29{,}32}}$$

$$= \mathbf{-0{,}997}$$

Comme $0{,}87 \leq |r| \leq 1$; c'est-à-dire r est très proche de 1 alors on peut affirmer qu'il y a une bonne corrélation (ou une forte corrélation) entre les deux variables X et Y

3- a) Trouvons une équation de la droite (D) de regression de Y en X par la méthode des moindres carrées

L'équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est de la forme $y = ax + b$ avec

$\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{COV(X,Y)}}{\boldsymbol{V(X)}}$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\overline{y} - a\overline{x}}$; où $\boldsymbol{\overline{x}}$ et $\boldsymbol{\overline{y}}$ sont les coordonnées du point moyen $\boldsymbol{G}$

$$a = \frac{-5,4}{2}$$
$$= -2,7$$

$$b = \frac{381}{5} - (-2,7) \times \frac{10045}{5}$$
$$= 76,2 + 2,7 \times 2009$$
$$= 5500,5$$

On déduit donc qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $\boldsymbol{y = -2,7x + 5500,5}$

b) Voir la figure

4- a) Estimation de la quantité de riz importé en 2012
Pour $x = 2012$ déterminons la valeur de y

$y = -2,7x + 5500,5$; avec $x = 2012$
$y = -2,7 \times 2012 + 5500,5$
$y = 68,1$

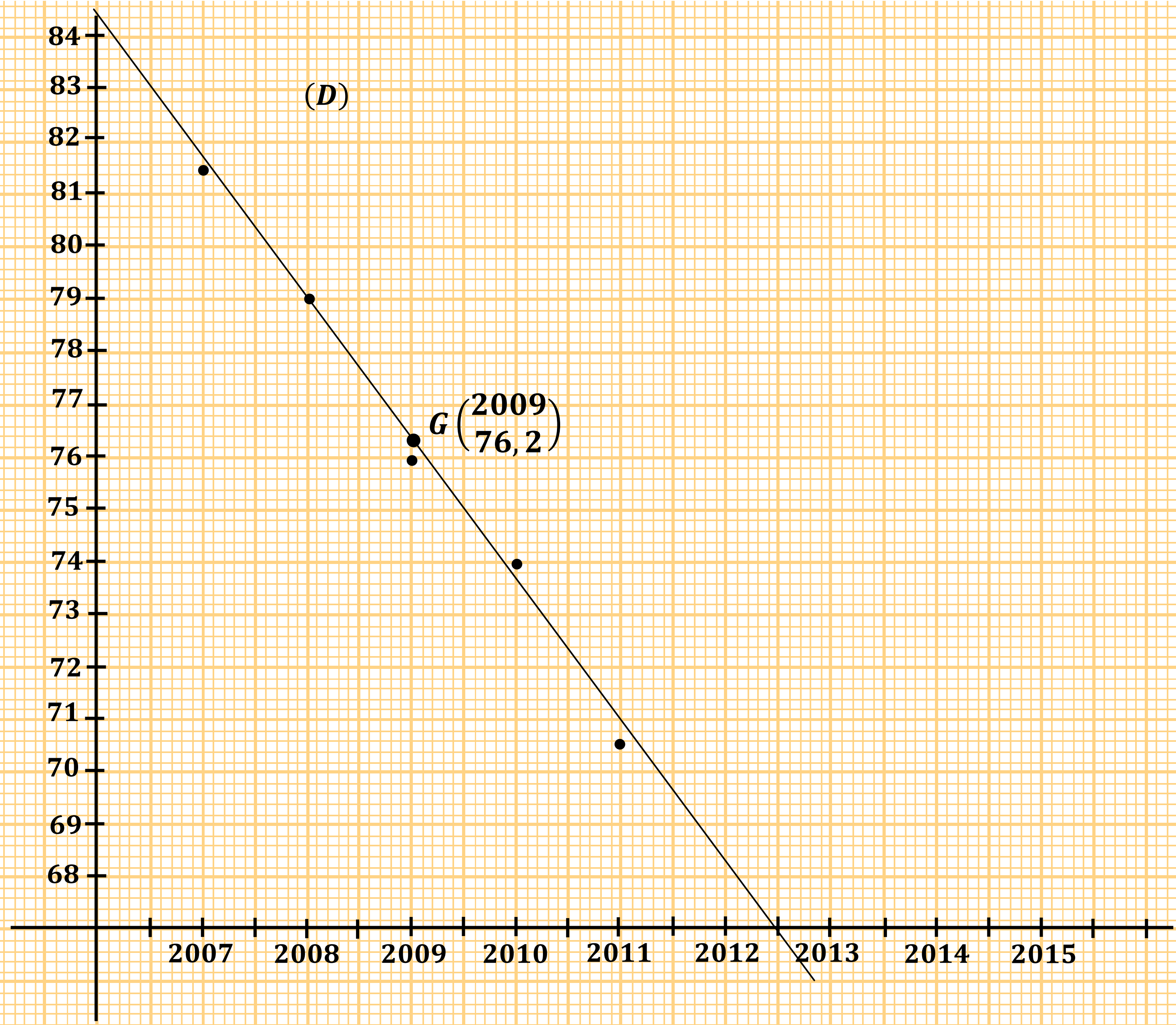
On estime à 68,1 tonnes la quantité de riz à importer en 2012

b) Par lecture graphique 68 tonnes, on estime à la quantité de riz à importer en 2012

5- Déterminer l'année où la ville va cesser d'importer du riz
Lorsque la ville va cesser d'importer du riz alors $y = 0$
Pour $y = 0$ on a : $-2,7x + 5500,5 = 0$

$$-2,7x = -5500,5$$
$$x = \frac{5500,5}{2,7}$$
$$x = 2037,22$$

C'est donc en **2038** que la ville va cesser d'importer du riz


84
83
82
81
80
79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
69
68
(D)
G (2009; 76,2)
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015

Exercice résolu (BAC A1 2013)

La Mutuelle des Cadres de Konankpinkro (MUCAKO) a été créée le 1er Janvier 2005 . Le premier Janvier de chaque nouvelle année, le secrétaire général calcule le taux global d'adhésion à la mutuelle.

Le tableau ci-dessous donne les taux respectifs obtenus sur la période 2006-2011.

	2006	2007	2008	2009	2010	2011
X Age de la MUCAKO (en années)	1	2	3	4	5	6
Y Taux global d'adhésion (en pourcentage)	75	77	77,3	78,2	79,3	80

1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double $(X;Y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. L'unité graphique est telle que :
- 2 cm représente une année sur l'axe des abscisses
- 2 cm représente un taux de 1% sur l'axe des ordonnées

On pourra prendre le point de couple de coordonnées (**0** ; **74**) ***comme origine***

2- Calculer les coordonnées du point moyen G

3- a) Justifier que $cov(X;Y) = 2{,}7$, $V(X) = 2{,}9$ et $V(Y) = 2{,}7$ (***arrondis d'ordre* 1**)
où $Cov(X;Y)$ est la covariance de $(X;Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$ les variances respectives des séries statistiques simples X et Y .

b) Calculer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

c) Justifier qu'il existe une forte corrélation linéaire entre l'âge de la mutuelle et le taux global d'adhésion.

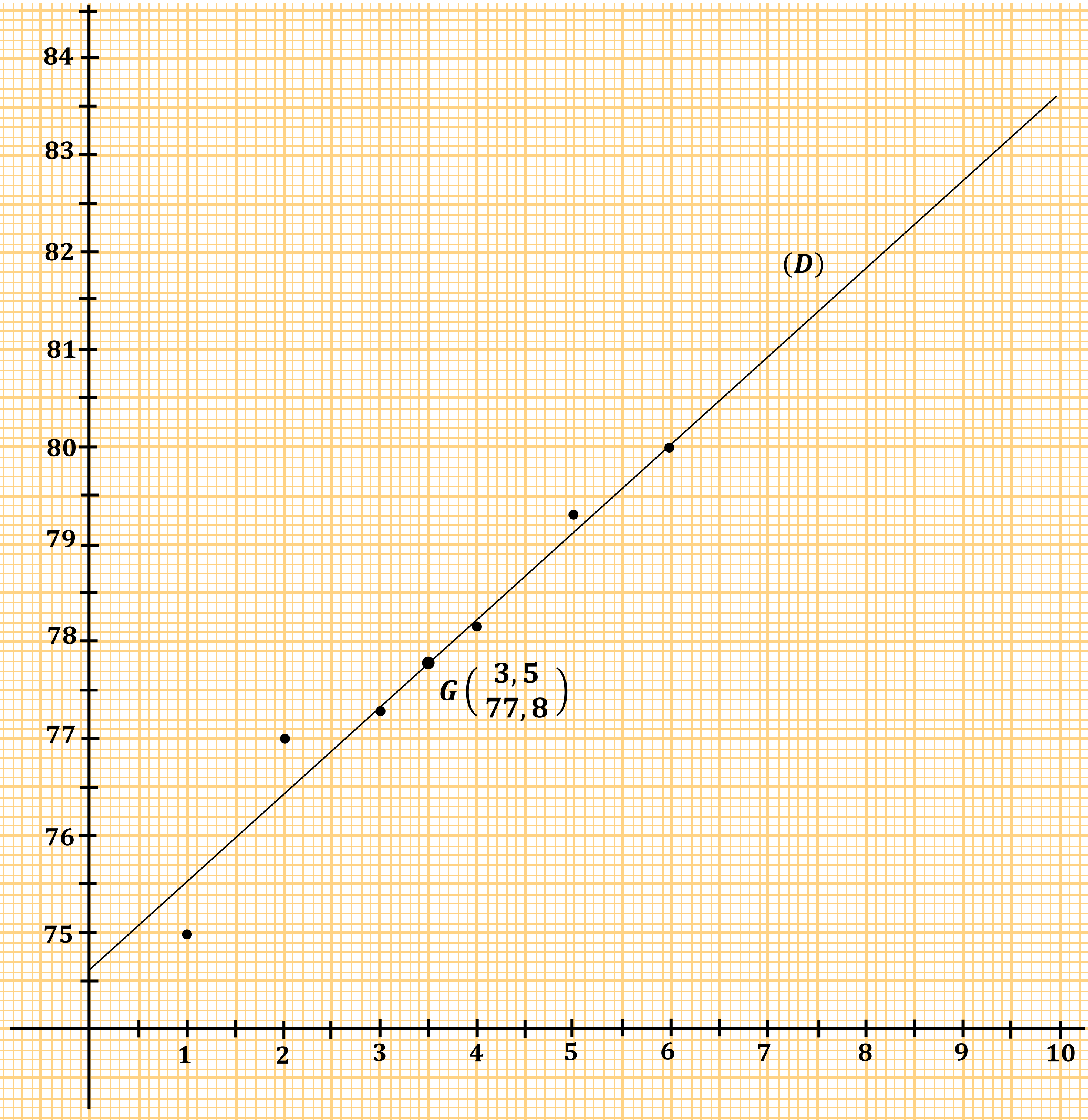
4- a) Justifier qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en X est :
$(D): y = 0{,}9x + 74{,}7$. (***Les résultats seront arrondis à l'ordre* 1**)

b) Tracer (D) sur la figure de la question 1

5- Quel devrait être le taux d'adhésion de la MUCAKO en 2015 selon l'ajustement réalisé ?

Proposition de solution

1- Représentons le nuage de points associé à la série statistique double $(X;Y)$



2- Calculons les coordonnées du point moyen G

$$x_G = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$y_G = \frac{\sum n_i y_i}{N} = \frac{75+\ 77+\ 77,3\ +78,2\ +79,3\ +80}{6} = \frac{466,8}{6} = 77,8$$

les coordonnées du point moyen G sont $(\,3,5\,;\ 77,8\,)$

3- a) Justifions que $Cov(X;Y) = 2,7$, $V(X) = 2,9$ et $V(Y) = 2,9$

Dressons un tableau de calculs

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i y_i$
	1	75	1	5625	75
	2	77	4	5929	154
	3	77,3	9	5975,29	231,9
	4	78,2	16	6115,24	312,8
	5	79,3	25	6288,49	396,5
	6	80	36	6400	480
Total	**21**	**466,8**	**91**	**36333,02**	**1650,2**

Calculons $COV(X,Y)$

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_i x_i y_i}{N} - \bar{x} \times \bar{y}$$

$$= \frac{1650,2}{6} - 3,5 \times 77,8$$

$$= 275,03 - 272,3$$

$$= 2,73$$

$$= 2,7$$

Calculons $V(X)$

$$V(X) = \frac{\sum n_i {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{91}{6} - (3{,}5)^2$$

$$= 15{,}16 - 12{,}25$$

$$= 2{,}91$$

$$= 2{,}9$$

Calculons $V(Y)$

$$V(X) = \frac{\sum n_i {y_i}^2}{N} - \bar{y}^2$$

$$= \frac{36333{,}02}{6} - (77{,}8)^2$$

$$= 6055{,}50 - 6052{,}84$$

$$= 2{,}66$$

$$= 2{,}7$$

b) Calculons l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$$

$$= \frac{2{,}7}{\sqrt{2{,}9 \times 2{,}7}}$$

$$= \frac{2{,}7}{\sqrt{7{,}83}}$$

$$= 0{,}96$$

c) Comme $\mathbf{0{,}87 \leq r \leq 1}$ alors il y a une forte corrélation linéaire entre l'âge de la mutuelle et le taux global d'adhésion

4- a) Justifions qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en X est : $(D): y = 0,9x + 74,7$

L'équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est de la forme $y = ax + b$ avec

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{COV}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$$

; où $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{y}}$ sont les coordonnées du point moyen $\boldsymbol{G}$

$$a = \frac{2,7}{2,9}$$
$$= 0,93$$
$$= \mathbf{0,9}$$

$$b = 77,8 - 0,9 \times 3,5$$
$$= 77,8 - 3,15$$
$$= 74,65$$
$$= \mathbf{74,7}$$

On déduit donc qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $\boldsymbol{y = 0,9x + 74,7}$

b) Voir la figure

5- Déterminons le taux d'adhésion de la MUCAKO en 2015

2015 correspond à la 10ème année d'existence de la MUCAKO

donc $x = 10$ $(2015 - 2005 = 10)$

Déterminons y

Pour $x = 10$ on a : $y = 0,9 \times 10 + 74,7$

$y = 9 + 74,7$

$y = \mathbf{83,7}$

Selon l'ajustement réalisé, on estime à $83,7\%$ le taux d'adhésion de la MUCAKO en 2015

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Chapitre 3 : SYSTEMES LINEAIRES

Dans cette partie du cours l'objectif est de résoudre des problèmes à l'aide des systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ faisant intervenir la fonction logarithme (ln) et la fonction exponentielle.

I- Résolution d'un Système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{cases}$$

On a vu en classe de 3ème qu'on dispose de trois (3) méthodes pour résoudre un tel système :

- ***La méthode de substitution***
- ***La méthode de combinaison***
- ***La méthode graphique***

La solution, si elle existe, d'un tel système est un couple de nombres réels $(x_0\ ;\ y_0)$ qui vérifie les deux équations du système

Dans ce chapitre , nous allons utiliser la méthode de substitution ou la méthode de combinaison

Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$

Proposition de solution

1- Méthode de substitution

$$\begin{cases} 4x + y = 1 & (1) \\ x + 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad x = -2y - 5$$

On remplace x par son expression dans l'équation (1)

$$4x + y = 1 \qquad \Longrightarrow \quad 4(\boldsymbol{-2y - 5}) + y = 1$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

$$\Longrightarrow -8y - 20 + y = 1$$
$$\Longrightarrow -8y + y = 1 + 20$$
$$\Longrightarrow -7y = 21$$
$$\Longrightarrow y = \frac{21}{-7}$$
$$\Longrightarrow y = -3$$

Donc en remplaçant y par sa valeur dans l'expression $x = -2y - 5$, on a :

$x = -2 \times (-3) - 5$

$x = 6 - 5$

$x = 1$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\mathbf{1} ; \mathbf{-3}) \}$

2- Méthode de combinaison

Remarque

On peut choisir d'éliminer x puis déterminer la valeur de y

(ou choisir d'éliminer y et ensuite déterminer la valeur de x)

On élimine x et on en déduit la valeur de y

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times (-4) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} 4x + y = 1 \\ -4x - 8y = 20 \end{cases}$$

$$-7y = 21$$
$$y = \frac{21}{-7}$$
$$y = -3$$

On élimine y et on en déduit la valeur de x

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} -8x - 2y = -2 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$-7x = -7$$
$$x = \frac{-7}{-7}$$
$$x = 1$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\mathbf{1} ; \mathbf{-3}) \}$

II- Systèmes linéaires comportant la fonction ln $\begin{cases} \boldsymbol{a\ln x + b\ln y = c} \\ \boldsymbol{a'\ln x + b'\ln y = c'} \end{cases}$

Pour la résolution de ce type de système, on utilise un "changement de variable" en posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ afin d'obtenir le système $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$

Par la suite, on utilise la méthode de substitution ou la méthode de combinaison pour résoudre le nouveau système

Proposition de méthode de résolution d'un système de type $\begin{cases} a\ln x + b\ln y = c \\ a'\ln x + b'\ln y = c' \end{cases}$

1ère étape : ***Détermination de l'ensemble de validité***

$(x; y) \in D_V \Rightarrow x > 0$ et $y > 0$

$\Rightarrow x \in]0; +\infty[$ et $y \in]0; +\infty[$

$D_V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

2ème étape : ***Changement de variable***

Posons $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

Le système linéaire devient : $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$

On résout ce nouveau système par la méthode de substitution ou par la méthode de combinaison

Les solutions partielles sont $X = \alpha$ et $Y = \beta$

3ème étape : ***Ensemble de solution***

L'élève ne doit pas oublier que ce sont les valeurs de x (petit x) et y (petit y) qu'on cherche

$$\begin{cases} X = \alpha \\ Y = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \alpha \\ \ln y = \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{\alpha} \\ y = e^{\beta} \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (e^{\alpha} ; e^{\beta}) \}$

Exercice résolu

1- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $S_1 \begin{cases} 2x + 5y = 21 \\ 7x - 3y = -29 \end{cases}$

2- En déduire la solution du système $S_2 \begin{cases} 2\ln x + 5\ln y = 21 \\ 7\ln x - 3\ln y = -29 \end{cases}$

Proposition de solution

1- Résolvons par la méthode de combinaison le système d'équations $S_1 \begin{cases} 2x + 5y = 21 \\ 7x - 3y = -29 \end{cases}$

On élimine x et on en déduit la valeur de y

$$\begin{array}{l|l} 2x + 5y = 21 & \times 7 \\ 7x - 3y = -29 & \times (-2) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 14x + 35y = 147 \\ -14x + 6y = 58 \end{cases}$$

$$41y = 205$$

$$y = \frac{205}{41}$$

$$y = 5$$

On élimine y et on en déduit la valeur de x

$$\begin{array}{l|l} 2x + 5y = 21 & \times 3 \\ 7x - 3y = -29 & \times 5 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 15y = 63 \\ 35x - 15y = -145 \end{cases}$$

$$41x = -82$$

$$x = \frac{-82}{41}$$

$$x = -2$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\mathbf{-2} ; \mathbf{5}) \}$

2- Résolvons le système d'équations $S_2 \begin{cases} 2\ln x + 5\ln y = 21 \\ 7\ln x - 3\ln y = -29 \end{cases}$

Détermination de l'ensemble de validité

$(x; y) \in D_V \implies x > 0$ et $y > 0$

$\implies x \in]0; +\infty[$ et $y \in]0; +\infty[$

$D_V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

Posons $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

Le système (S_2) devient : $\begin{cases} 2X + 5Y = 21 \\ 7X - 3Y = -29 \end{cases}$

Le système obtenu est le système de la question 1 ; On en déduit donc que :
$X = -2$ et $Y = 5$

Déterminons la solution du système (S_2)

$$\begin{cases} X = -2 \\ Y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = -2 \\ \ln y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = e^{5} \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (e^{-2} ; e^{5}) \}$

III- Systèmes linéaires comportant la fonction exponentielle $\begin{cases} \boldsymbol{ae^x + be^y = c} \\ \boldsymbol{a'e^x + b'e^y = c'} \end{cases}$

Pour la résolution de ce type de système, on utilise un "changement de variable" en posant $X = e^x$ et $Y = e^y$ afin d'obtenir le système $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$

Par la suite, on utilise la méthode de substitution ou la méthode de combinaison pour résoudre le nouveau système

Proposition de méthode de résolution d'un système de type $\begin{cases} ae^x + be^y = c \\ a'e^x + b'e^y = c' \end{cases}$

1ère étape : ***Détermination de l'ensemble de validité***

$D_V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2ème étape : ***Changement de variable***

Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$

X et Y doivent être strictement positifs ($X > 0$ et $Y > 0$)

Car pour tout nombre réel x , e^x est strictement positif c'est-à-dire que : $e^x > 0$

Le système linéaire devient : $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$

On résout ce nouveau système par la méthode de substitution ou par la méthode de combinaison

Les solutions partielles sont $X = \alpha$ et $Y = \beta$

3ème étape : ***Ensemble de solution***

L'élève ne doit pas oublier que ce sont les valeurs de x (petit x) et y (petit y) qu'on cherche

$$\begin{cases} X = \alpha \\ Y = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = \alpha \\ e^y = \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \ln\alpha \\ y = \ln\beta \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\ln\alpha \ ; \ln\beta) \}$$

Exercice résolu

1- Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $S_1\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$

2- En déduire la solution du système $S_2\begin{cases} e^x - e^y = 3 \\ 3e^x + 2e^y = 14 \end{cases}$

Proposition de solution

1- Résolvons par la méthode de combinaison le système d'équations $S_1\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$

On élimine x et on en déduit la valeur de y

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 3 \\ \times(-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 9 \\ -3x - 2y = -14 \end{cases}$$

$$-5y = -5$$

$$y = \frac{-5}{-5}$$

$$y = 1$$

On élimine y et on en déduit la valeur de x

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\mathbf{4}\,;\mathbf{1}) \}$

2- Résolvons le système d'équations $S_2\begin{cases} e^x - e^y = 3 \\ 3e^x + 2e^y = 14 \end{cases}$

Détermination de l'ensemble de validité

$D_V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$ avec $X > 0$ et $Y > 0$

Le système (S_2) devient : $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$

Le système obtenu est le système de la question 1 ; On en déduit donc que :
$X = 4$ et $Y = 1$

Déterminons la solution du système (S_2)

$$\begin{cases} X = 4 \\ Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 4 \\ e^y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \ln 4 \\ y = \ln 1 = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\ln 4 ; 0) \}$

Exercice résolu

1- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant : $(S)\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

2- En déduire les solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des deux systèmes suivants :

a) (S_1) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = -7 \\ 2\ln x + \ln y = 6 \end{cases}$

b) (S_2) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -7 \\ 2e^x + e^y = 6 \end{cases}$

Proposition de solution

1- Résolvons, par la méthode de substitution, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = -7 & (1) \\ 2x + y = 6 & (2) \end{cases}$$

$(1) \implies x = 2y - 7$

On remplace x par son expression dans l'équation (2)

$$\begin{aligned} 2x + y = 6 \quad &\implies 2(2y - 7) + y = 6 \\ &\implies 4y - 14 + y = 6 \\ &\implies 4y + y - 14 = 6 \\ &\implies 5y = 6 + 14 \\ &\implies 5y = 20 \\ &\implies y = \frac{20}{5} \\ &\implies \boldsymbol{y = 4} \end{aligned}$$

On sait que $x = 2y - 7$ et $y = 4$

donc $x = 2 \times 4 - 7$

$x = 8 - 7$

$\boldsymbol{x = 1}$

L'ensemble de solutions du système (S) est : $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\,\mathbf{1}\,;\mathbf{4}\,) \}$

2- a) Résolvons le système (S_1) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = -7 \\ 2\ln x + \ln y = 6 \end{cases}$

- Contraintes sur les inconnues : $x > 0$ et $y > 0$
- Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, posons : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

  Le système devient : $\begin{cases} X - 2Y = -7 \\ 2X + Y = 6 \end{cases}$

  Le système obtenu est celui de la question 1 , on en déduit donc que :
  $X = 1$ et $Y = 4$

  $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln y = 4 \end{cases}$

  $\Rightarrow \begin{cases} e^{\ln x} = e^1 \\ e^{\ln y} = e^4 \end{cases}$

  $\Rightarrow \begin{cases} x = e^1 = e \\ y = e^4 \end{cases}$

Donc l'ensemble de solutions du système (S_1) est : $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\boldsymbol{e} ; \boldsymbol{e^4}) \}$

b) Résolvons le système (S_2) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -7 \\ 2e^x + e^y = 6 \end{cases}$

- posons : $X = e^x$ et $Y = e^y$; avec $X > 0$ et $Y > 0$

  Le système devient : $\begin{cases} X - 2Y = -7 \\ 2X + Y = 6 \\ X > 0 \quad \text{et} \quad Y > 0 \end{cases}$

  Le système obtenu est celui de la question 1 , on en déduit donc que :
  $X = 1$ et $Y = 4$

  $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^y = 4 \end{cases}$

  $\Rightarrow \begin{cases} \ln(e^x) = \ln 1 \\ \ln(e^y) = \ln 4 \end{cases}$

  $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \ln 4 \end{cases}$

Donc l'ensemble de solutions du système (S_2) est : $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\mathbf{0} ; \mathbf{\ln 4}) \}$

La résolution des systèmes d'équations comportant ln et exp ne se limitent pas seulement à poser :

1**^{er} **cas : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

2**^{ème} **cas : $X = e^x$ et $Y = e^y$

dans certains cas , d'autres conditions sont nécessaires :

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $(S)\begin{cases} -x + y = 1 & (1) \\ e^x + e^y = 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \implies \quad y = x + 1$

$$\begin{aligned}(2) \implies\ & e^x + e^{x+1} = 1 \\ \implies\ & e^x + e^x \times e^1 = 1 \\ \implies\ & e^x + e^x \times e = 1 \\ \implies\ & e^x(1 + e) = 1 \\ \implies\ & e^x = \frac{1}{1 + e} \\ \implies\ & \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{1 + e}\right) \\ \implies\ & x = \ln\left(\frac{1}{1 + e}\right)\end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que : $y = \ln\left(\frac{1}{1 + e}\right) + 1$; car $y = x + 1$

L'ensemble de solutions du système (S) est :

$$\boldsymbol{S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{ \left(\ln\left(\frac{1}{1 + e}\right) ; \ln\left(\frac{1}{1 + e}\right) + 1 \right) \right\}}$$

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $(S)\begin{cases} 2\ln(x+2) + 5\ln(y-1) = 1 & (1) \\ \ln(x+2) - 3\ln(y-1) = 6 & (2) \end{cases}$

- contraintes sur les inconnues : $x + 2 > 0$ et $y - 1 > 0$

  $x > -2$ et $y > 1$

- Pour tout $x > -2$ et $y > 1$, posons : $\boldsymbol{X = \ln(x+2)}$ et $\boldsymbol{Y = \ln(y-1)}$

  Le système devient : $\begin{cases} 2X + 5Y = 1 \\ X - 3Y = 6 \end{cases}$

  La résolution du nouveau système donne : $X = 3$ et $Y = -1$

$$\begin{cases} X = 3 \\ Y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x+2) = 3 \\ \ln(y-1) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\ln(x+2)} = e^3 \\ e^{\ln(y-1)} = e^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = e^3 \\ y - 1 = e^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^3 - 2 \\ y = e^{-1} + 1 \end{cases}$$

L'ensemble de solutions du système (S) est : $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\boldsymbol{e^3 - 2} \ ; \ \boldsymbol{e^{-1} + 1}) \}$

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $(S)\begin{cases} e^{2x+y} = 1 \\ e^{x-y} = e^6 \end{cases}$

$$\begin{cases} e^{2x+y} = 1 \\ e^{x-y} = e^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(e^{2x+y}) = \ln 1 \\ \ln(e^{x-y}) = \ln e^6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 & (1) \\ x - y = 6 & (2) \end{cases}$$

Remarque
Pour résoudre le système obtenu, on peut utiliser ***la méthode de combinaison*** ou ***la méthode de substitution***.

Résolvons le système obtenu par la méthode de substitution
$(1) \Rightarrow y = -2x$

Je remplace y par $-2x$ dans l'équation (2)
$(2) \Rightarrow x - (-2x) = 6$

$\Rightarrow x + 2x = 6$

$\Rightarrow 3x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{3}$

$\Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

En remplaçant x par 2 dans l'égalité $y = -2x$, on a :

$y = -2 \times 2$

$\boldsymbol{y = -4}$

L'ensemble de solutions du système (S) est : $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{ (\ \mathbf{2}\ ; \mathbf{-4}\ ) \}$

Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $(S) \begin{cases} \ln(xy) = \ln 3 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$

- Contraintes sur les inconnues : $xy > 0$ et $\dfrac{x}{y} > 0$

  x et y ont le même signe

Remarque
Si le produit de deux nombres est strictement positif alors ces deux nombres sont différents de 0 et de plus ils ont le même signe.
C'est-à-dire si $x > 0$ alors $y > 0$ aussi

si $x < 0$ alors $y < 0$ aussi

- Transformation du système

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln 3 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\ln(xy)} = e^{\ln 3} \\ e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\ln(xy)} = e^{\ln 3} \\ e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 3 & (1) \\ \dfrac{x}{y} = e & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = e\,y$

Je remplace x par $e\,y$ dans l'équation (1)

$(1) \Rightarrow (e\,y) \times y = 3$

$\Rightarrow e\,y^2 = 3$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{e}$

$$\Longrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{3}{e}} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{\frac{3}{e}}$$

En remplaçant y par sa valeur dans l'égalité (2) , on a :

Si $y = \sqrt{\frac{3}{e}}$ alors $x = e \times \sqrt{\frac{3}{e}}$

$$x = \sqrt{e^2} \times \sqrt{\frac{3}{e}}$$

$$x = \sqrt{e^2 \times \frac{3}{e}}$$

$$x = \sqrt{e \times 3}$$

$$x = \sqrt{3e}$$

Si $y = -\sqrt{\frac{3}{e}}$ alors $x = e \times \left(-\sqrt{\frac{3}{e}}\right)$

$$x = -e \times \sqrt{\frac{3}{e}}$$

$$x = -\sqrt{e^2} \times \sqrt{\frac{3}{e}}$$

$$x = -\sqrt{e^2 \times \frac{3}{e}}$$

$$x = -\sqrt{e \times 3}$$

$$x = -\sqrt{3e}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{ \left(\sqrt{3e} \;\; ; \sqrt{\frac{3}{e}} \right) \;\; , \left(-\sqrt{3e} \;\; ; -\sqrt{\frac{3}{e}} \right) \right\}$$

Chapitre 4 : ETUDE DE FONCTIONS

L'objectif des annales de Mathématiques que vous tenez dans vos mains est de permettre aux élèves des classes de Terminale A d'affronter aisément les études de fonctions dans un devoir, un examen blanc ou l'examen du Baccalauréat en fin d'année scolaire.

Un sujet de Mathématiques en Terminale A noté sur 20 , est généralement composé de deux exercices et d'une étude de fonction communément appelée problème ; la note du problème varie entre 09 et 12 .

Comprendre et maitriser une étude de fonction revient à maitriser :

- Le questionnement
- Les méthodes de résolution
- La rédaction

De plus chaque élève doit savoir qu'une étude de fonctions a pour objectifs de faire ressortir certains éléments qui permettront de construire la courbe représentative de la fonction dans un repère.

Voici la liste des chapitres qui interviennent dans une étude de fonction

- Limites et compléments sur les dérivées
- Primitives et intégrale d'une fonction sur un intervalle (Uniquement A1)
- Fonctions logarithme népérien
- Fonction exponentielle népérienne

Il existe au moins trois (3) types de problèmes :

- une ***fonction*** donnée de manière explicite suivie de questions
- un ***tableau de variation*** suivi de questions
- une ***courbe*** suivie de questions

L'un des objectifs de ces annales c'est exposer des problèmes " de types BAC " afin d'aider les élèves à mieux se préparer.

(1) Limites et compléments sur les dérivées

Calculer des limites demande la maitrise de certaines propriétés et méthodes :

- ***Limite de fonctions élémentaires en $-\infty$ ou en $+\infty$***

Soit n un nombre entier naturel non nul

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ quelque soit la valeur de n
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ → $+\infty$ si n est pair ; → $-\infty$ si n est impair

Attention : Ne pas oublier de tenir compte du ***coefficient du monôme***

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$ quel que soit la valeur de n

- ***Limites des fonctions polynômes en $-\infty$ ou en $+\infty$***
  La limite à l'infini (en $-\infty$ ou en $+\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini du monôme de plus haut degré de ce polynôme (***Attention*** au signe du coefficient)

- ***Limites des fonctions rationnelles en $-\infty$ ou en $+\infty$***

La limite à l'infini (en $-\infty$ ou en $+\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur et du monôme de plus haut degré du dénominateur (***Attention*** au signe des coefficients)

- ***Les formes indéterminées***
  Dans un calcul de limites, lorsqu'on ne peut pas conclure, on dit qu'il y'a une ***forme indéterminée***. On relève quatre (4) types de formes indéterminées :

(1) $\infty - \infty$ (2) $0 \times \infty$ (3) $\frac{0}{0}$ (4) $\frac{\infty}{\infty}$

Astuce

Les formes suivantes ne sont pas des formes indéterminées :

$\dfrac{\infty}{Réel}$; $\dfrac{0}{Réel}$; $\dfrac{Réel}{0}$; $\dfrac{Réel}{\infty}$

Pour ne pas les oublier on peut se servir de la phrase : « **IRI** de **ORO** est le **ROI** de **RIO**»

IRI : Infini sur Réel donne Infini

ORO : zéro sur Réel donne zéro

ROI : Réel sur zéro donne Infini

RIO : Réel sur Infini donne zéro

En Terminale A , dans les études de fonctions ,lorsqu'il y a une forme indéterminée dans les calculs de limites , on utilise généralement le ***développement*** ou la ***factorisation*** pour lever cette indétermination.

Comment mettre un élément en facteur dans une somme algébrique

(1) ***Pour mettre a en facteur dans l'expression*** $a + b + c$

- On écrit a
- On ouvre une parenthèse dans laquelle on divise tous les termes de $a + b + c$ par a , puis on ferme la parenthèse
- On simplifie si possible l'expression obtenue dans la parenthèse.

$$a + b + c = a\left(\frac{a}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

(2) ***Pour mettre*** $\dfrac{1}{a}$ ***en facteur dans l'expression*** $a + b + c$

- On écrit $\dfrac{1}{a}$
- On ouvre une parenthèse dans laquelle on multiplie tous les termes de $a + b + c$ par a , puis on ferme la parenthèse
- On simplifie si possible l'expression obtenue dans la parenthèse.

$$a + b + c = \frac{1}{a}(\, a \times a \;\; + \; a \times b \;\; + \; a \times c\,)$$
$$= \frac{1}{a}(\, a^2 + ab + ac \,)$$

- ***Autres méthodes de calculs de limites***
  On peut déduire les limites d'une fonction à l'aide :
  - la ***représentation graphique*** de la fonction
  - le ***tableau de variation*** de la fonction

Transformation d'une fraction rationnelle

Cette transformation peut se faire à l'aide de l'une des trois méthodes suivantes:

(1) ***La méthode d'identification***
(2) ***La division euclidienne***
(3) ***La méthode de Horner***

Exemple

Pour tout $x \neq 1$, déterminer les réels a , b et c tels que :

$$\frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

Proposition de solution

(1) La méthode d'identification

Cette méthode consiste à rendre au même dénominateur l'expression $ax + b + \frac{c}{x-2}$, puis à identifier les coefficients du polynôme obtenu au numérateur aux coefficients du polynôme $2x^2 - 5x + 8$

$$ax + b + \frac{c}{x - 2} = \frac{(ax + b)(x - 2) + c}{x - 2}$$
$$= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2}$$
$$= \frac{ax^2 + (-2a + b)x - 2b + c}{x - 2}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 2 & \text{(les coefficients des } x^2\text{)} \quad (1) \\ -2a + b = -5 & \text{(les coefficients des } x \text{)} \quad (2) \\ -2b + c = 8 & \text{(les constantes)} \quad (3) \end{cases}$$

$(1) \implies \boldsymbol{a = 2}$

$$\begin{aligned} (2) &\implies -2a + b = -5 \\ &\implies -2 \times 2 + b = -5 \\ &\implies -4 + b = -5 \\ &\implies b = -5 + 4 \\ &\implies \boldsymbol{b = -1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &\implies -2b + c = 8 \\ &\implies -2 \times (-1) + c = 8 \\ &\implies 2 + c = 8 \\ &\implies c = 8 - 2 \\ &\implies \boldsymbol{c = 6} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -5 \\ -2b + c = 8 \end{cases}$$

On déduit donc que : $\dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = \mathbf{2}x - \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{6}}{x - 2}$

(2) La division euclidienne

On rappelle que : $\boxed{\dfrac{Dividende}{Diviseur} = Quotient + \dfrac{Reste}{Diviseur}}$

Dividende *Quotient*

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\;\; 2x^2 - 4x & \mathbf{2}x - \mathbf{1} \\ \cline{1-1} -x + 8 & \\ -\;\; -x + 2 & \\ \cline{1-1} \mathbf{6} & \end{array}$$

Diviseur

Reste

On en déduit que : $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{b = -1}$ et $\boldsymbol{c = 6}$

donc $\dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = \mathbf{2}x - \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{6}}{x - 2}$

(3) La méthode de Horner

Cette méthode est un genre de division euclidienne qui s'effectue dans un tableau
Elle est expliquée dans le « ***Marathon de Butterfly – Cours et exercices corrigés – Terminale A*** »

Division euclidienne de $2x^2 - 5x + 8$ par $x - 2$

	2	-5	8
2		4	-2
	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{6}$

On déduit du tableau ci-dessus que : $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{b = -1}$ et $\boldsymbol{c = 6}$

donc $\dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = \mathbf{2}x - \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{6}}{x - 2}$

Interprétation graphique de limites et Asymptotes

a et b sont des nombres réels

	Limites	**Interprétation**
Asymptote verticale	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)
	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)
Asymptote horizontale	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $-\infty$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$
Asymptote oblique	$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$

Astuce

Asymptote verticale : L'équation est de la forme $\boldsymbol{x = réel}$

Asymptote horizontale : L'équation est de la forme $\boldsymbol{y = réel}$

Asymptote oblique : L'équation est de la forme $\boldsymbol{y = ax + b}$

Application de la dérivation

1- Tableaux récapitulatifs des dérivées

fonctions	fonctions dérivées
a (est un réel)	0
x	1
ax	a
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

fonctions	fonctions dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$a \times u$ (a est un réel)	$a \times u'$
$u \times v$	$u' \times v \quad + \quad v' \times u$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{a \times d \quad - \quad c \times b}{(cx+d)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v \quad - \quad v' \times u}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$

Dans une étude de fonction en ***Terminale A***, les calculs de dérivées portent en générale sur les formules suivantes :

- Produit de fonctions : $(u \times v)' = u' \times v \quad + \quad v' \times u$
- Quotient de fonctions : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v \quad - \quad v' \times u}{v^2}$

Exercice résolu

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \quad ; \quad g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} \quad ; \quad h(x) = \frac{-x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+4x+3)' \\ &= (x^2)' + (4x)' + (3)' \\ &= 2x + 4 + 0 \\ &= \mathbf{2x+4} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}\right)'$$

$$= (x)' - \left(\frac{1}{2}\right)' + \left(\frac{1}{x+2}\right)'$$

$$= 1 - 0 + \frac{-(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \mathbf{1} + \frac{\mathbf{-1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2}$$

$$h(x) = \left(\frac{-x^2+5x-4}{2x-1}\right)'$$

$$= \frac{(-x^2+5x-4)' \times (2x-1) - (2x-1)' \times (-x^2+5x-4)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(-2x+5) \times (2x-1) - 2 \times (-x^2+5x-4)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+2x+10x-5+(2x^2-10x+8)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+2x+10x-5+2x^2-10x+8}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{\mathbf{-2x^2+2x+3}}{(\mathbf{2x-1})^2}$$

Comment utiliser les dérivées ?

Dans les études de fonctions, le calcul de la fonction dérivée permet de déterminer le ***sens de variation*** de la fonction et cela à partir du signe de la dérivée

L'étude du signe de la dérivée peut passer par :

- Un tableau de signe
- Un produit remarquable
- Une simple factorisation
- …

Sens de variation d'une fonction

Pour déterminer les variations d'une fonction f sur un intervalle $[\ a\ ;b\ ]$, il suffit de connaitre le signe de la dérivée f' sur cet intervalle .

∗ Si pour tout $x \in [\ a\ ;b\ ]$, $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ (f' est strictement positive sur $[\ a\ ;b\ ]$)
alors ***f est strictement croissante*** sur $[\ a\ ;b\ ]$

∗ Si pour tout $x \in [\ a\ ;b\ ]$, $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ (f' est strictement négative sur $[\ a\ ;b\ ]$)
alors ***f est strictement décroissante*** sur $[\ a\ ;b\ ]$

∗ Si pour tout $x \in [\ a\ ;b\ ]$, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ (f' est nulle sur $[\ a\ ;b\ ]$)
alors ***f est constante*** sur $[\ a\ ;b\ ]$

Attention

On peut donner ***le signe de la dérivée*** d'une fonction sur la réunion de deux ou plusieurs intervalles par contre ***le sens de variation*** est donné sur un intervalle.

Exemple

- ***<u>Signe de la dérivée suivant les valeurs de x</u>***

  $\forall\, x \in]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]\ 2\ ;+\infty[\ ,\ f'(x) > 0$

- ***<u>Sens de variation</u>***

  On ne dit pas : f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]\ 2\ ;+\infty[$

  Mais ***on dit plutôt***

  f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et sur $]\ 2\ ;+\infty[$

Equation de la tangente en un point a

Pour déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse a , il faut d'abord calculer $f(a)$ et $f'(a)$, puis utiliser la formule suivante :

$$(\boldsymbol{T}) : \quad \boldsymbol{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

(2) Primitives et Intégrale d'une fonction (Tle A1)

Primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$.

On dit qu'une fonction dérivable F est une primitive de f sur $[\,a\,;b\,]$ si pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $F'(x) = f(x)$

En d'autres termes F est une primitive de f sur $[\,a\,;b\,]$ si la dérivée de F sur $[\,a\,;b\,]$ est égale à f (Il suffit simplemenrt de dériver la fonction F)

Tableau 1
fonctions élémentaires

Fonctions	Primitives
a (a est un nombre réel)	$ax + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
ax	$\frac{1}{2}ax^2 + c$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$

Tableau 2
u et v sont des fonctions continues

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$(u + v) + c$
$a \times u'$	$a \times u + c$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-u'}{(n-1)u^{n-1}} + c$

Dans les études de fonctions, de manière générale, on ne demande pas à l'élève de déterminer une primitive d'une fonction f donnée mais plutôt de ***montrer qu'une fonction F est une primitive de f*** :

Il suffit simplement donc de montrer que la dérivée F' de F est égale à f ; en d'autres termes pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Calcul intégral

a) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ et F une primitive de f.
On appelle ***intégrale*** de la fonction f entre les réels a et b , le nombre réel noté

$\int_a^b f(x)\,dx$ tel que : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

b) Notation

(1) $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)$ dx »

(2) les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont appelés les ***bornes*** de l'intégrale

(3) Dans l'expression $\int_a^b f(x)dx$, x peut être remplacé une autre lettre ou symbole excepté les bornes a et b .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

On dit que x est une ***variable muette***

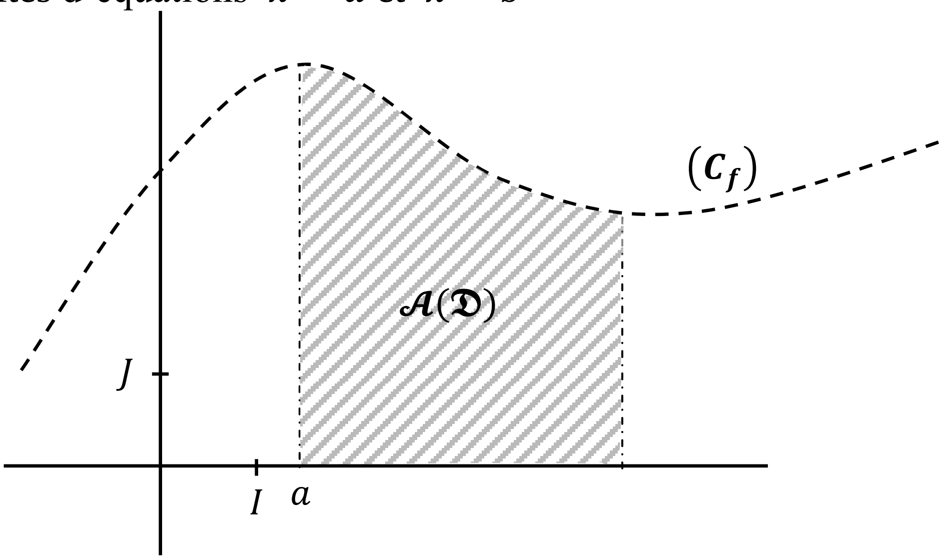
c) Calcul d'aire

Dans la pratique , on distingue deux cas dans le calcul d'aire d'une partie du plan

1^er^ cas : Calcul , en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OI) des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b f(x)\,dx \times ua}$$

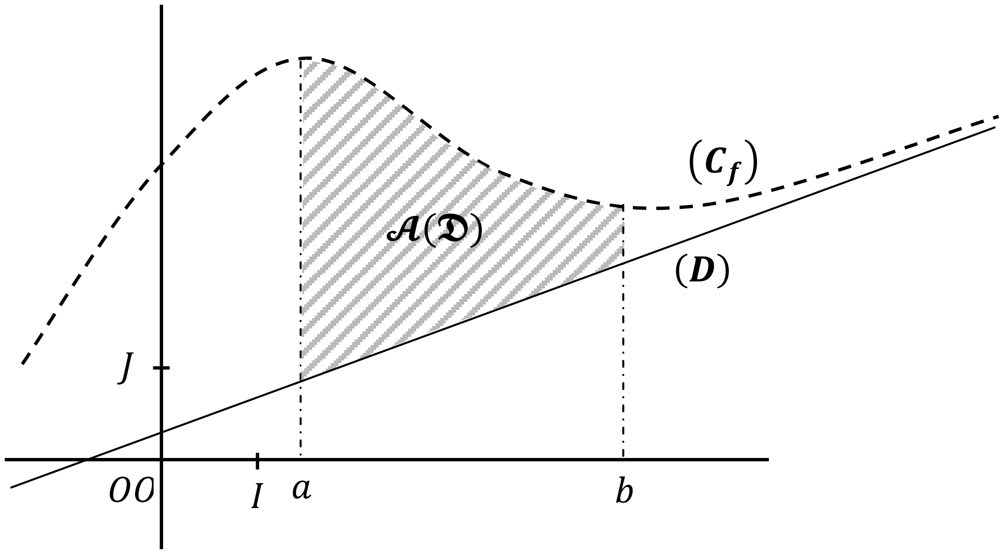
avec $ua = OI \times OJ\ \ cm^2$



2ème cas : Calcul , en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Remarque : l'équation de la droite (D) est de la forme $y = ax + b$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b (f(x) - y)\, dx \times ua} \quad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ \ cm^2$$



(3) Fonction Logarithme Népérien Fonction Exponentielle Népérienne

Fonction logarithme népérien

Dans une étude de fonction contenant le logarithme népérien, l'élève doit être capable de :

- Connaitre et savoir utiliser les propriétés algébriques
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Calculer des limites à l'aide des limites de référence de la fonction logarithme népérien en utilisant la méthode de changement de variable
- Dériver les fonctions

1- Propriétés algébriques

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs ($a > 0$ et $b > 0$) , on a :

⋆ $\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ (Logarithme d'un produit)

⋆ $\mathbf{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$ (Logarithme de l'inverse)

⋆ $\mathbf{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$ (Logarithme d'un quotient)

⋆ $\mathbf{\ln a^n = n \times \ln a}$ $(n \in \mathbb{Q})$ (Logarithme d'une puissance)

En particulier , avec le logarithme d'une puissance , on déduit le logarithme d'une racine carrée

$$\mathbf{\ln\sqrt{a} = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln a}$$ (Logarithme d'une racine carrée)

2- Ensemble de définition de fonctions composées avec le logarithme népérien

(1) Ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln x$

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est $]\,0\,;+\infty[$

(2) Ensemble de définition des fonctions de types $x \mapsto ln\big(u(x)\big)$

Soit u une fonction d'ensemble de définition D_u ; si une fonction f est de la forme :

$(\star)$ $\boldsymbol{f(x) = \ln(u(x))}$ alors $x \in D_f \iff \boldsymbol{x \in D_u}$ et $\boldsymbol{u(x)} > 0$

3- Limites de référence

$(\mathbf{1})$ $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$

$(\mathbf{2})$ $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$(\mathbf{4})$ $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$(\mathbf{3})$ $\displaystyle \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

Remarque
Pensez à ***factoriser*** ou à ***développer*** lorsqu'il y a une forme indéterminée

4- Dérivée de fonctions composées avec le logarithme népérien

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est $\dfrac{1}{x}$

De manière générale, lorsque la fonction est de la forme $\mathbf{ln}\big(\boldsymbol{u(x)}\big)$ **,** où $u(x)$ est une fonction dérivable telle que $u(x) \neq 0$, alors sa dérivée est $\dfrac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$

Attention
N'oubliez pas que dans certains cas on peut utiliser les autres formules de dérivées vues dans le chapitre « Limites et compléments sur les dérivées »

Exercice résolu
Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$f(x) = x + 1 - \ln(x)$; $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1 + 2\ln x$; $h(x) = x + \dfrac{1 - \ln x}{x}$

Proposition de solution

$$f'(x) = (x + 1 - \ln(x))'$$

$$= (x)' + (1)' + (\ln(x))'$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln x\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)' - (1)' + 2 \times (\ln(x))'$$

$$= \frac{-1}{x^2} - 0 + 2 \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{-1 + 2x}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(x + \frac{1 - \ln x}{x}\right)'$$

$$= (x)' + \left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)'$$

$$= 1 + \frac{(1 - \ln x)' \times x - \ (x)' \times (1 - \ln x)}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \times x - \ 1 \times (1 - \ln x)}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{-\frac{x}{x} \ - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{-1 \ \ - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{-2 \ + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2 \ + \ln x}{x^2}$$

Fonction exponentielle népérienne

Dans une étude de fonction contenant une exponentielle népérienne, l'élève doit être capable de :

- Connaitre et savoir utiliser les propriétés algébriques
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Calculer des limites à l'aide des limites de référence de la fonction exponentielle népérienne en utilisant la méthode de changement de variable
- Dériver les fonctions

1- Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b , on a :

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$

2) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

4) $(e^a)^n = e^{n\times a} \qquad (n \in \mathbb{Q})$

Conséquences de la définition

a) Pour tout nombre réel x , $e^x > 0$

b) $e^0 = 1$

c) Pour tout nombre réel x , $\ln e^x = x$

d) Pour tout nombre réel strictement positif x ($x > 0$) , $e^{\ln x} = x$

e) Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel strictement positif y
$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

2- Ensemble de définition de fonctions composées avec une exponentielle népérienne

(1) Ensemble de définition de la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto e^x}$

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto e^x$ est $\mathbb{R}$

(2) Ensemble de définition des fonctions de types $\boldsymbol{x \longmapsto e^{u(x)}}$

Soit u une fonction d'ensemble de définition D_u ; si une fonction f est de la forme : $\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$ alors $\boldsymbol{D_f = D_u}$

De manière générale, on n'oubliera pas de tenir compte des cas de quotient (tout dénominateur doit être toujours différent de zéro)

3- Limites de référence

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Remarque

Pensez à ***factoriser*** ou à ***développer*** lorsqu'il y a une forme indéterminée

4- Dérivée de fonctions composées avec le logarithme népérien

La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est e^x

De manière générale, lorsque la fonction est de la forme $\boldsymbol{e^{u(x)}}$ **,** où $u(x)$ est une fonction dérivable, alors sa dérivée est $\boldsymbol{u'(x) \times e^{u(x)}}$

Attention

N'oubliez pas que dans certains cas on peut utiliser les autres formules de dérivées vues dans le chapitre « Limites et compléments sur les dérivées »

Exercice résolu

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$f(x) = -2x - 3 + e^x$ $\qquad g(x) = (-2x + 3)e^x$

$h(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ $\qquad p(x) = (-x + 2)e^{-x}$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x - 3 + e^x)' \\ &= (-2x)' - (3)' + (e^x)' \\ &= -2 - 0 + e^x \\ &= -2 + e^x \end{aligned}$$

On peut aussi écrire $f'(x) = e^x - 2$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big((-2x + 3)e^x\big)' \\ &= (-2x + 3)' \times e^x + (e^x)' \times (-2x + 3) \\ &= -2 \times e^x + e^x \times (-2x + 3) \\ &= \big(-2 + (-2x + 3)\big)e^x \\ &= (-2x + 3 - 2)e^x \\ &= (-2x + 1)e^x \end{aligned}$$

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)'$$
$$= \frac{(e^x)' \times (x+1) - \ (x+1)' \times e^x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x \times (x+1) - \ 1 \times e^x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{xe^x + e^x \ - \ e^x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$$p(x) = \big((-x+2)e^{-x}\big)'$$
$$= (-x+2)' \times e^{-x} \ + \ (e^{-x})' \times (-x+2)$$
$$= -1 \times e^{-x} \ + \ \big((-x)' \times e^{-x}\big) \times (-x+2)$$
$$= -e^{-x} \ + \ (-1 \times e^{-x}) \times (-x+2)$$
$$= -e^{-x} \ - \ e^{-x} \times (-x+2)$$
$$= \big(-1 \ - \ (-x+2)\big)e^{-x}$$
$$= (-1 + x - 2)e^{-x}$$
$$= (x - 2 - 1)e^{-x}$$
$$= (x-3)e^{-x}$$

(4) Quelques questions rencontrées lors d'une étude de fonction

Une étude de fonction passe nécessairement par la maitrise des méthodes de résolution des questions ci-dessous :
Attention : cette liste ne contient pas toutes les questions, mais plutôt des propositions

(1) Déterminer l'***ensemble de définition*** de la fonction
Voir les conditions sur :
- les fonctions ***quotients*** (fonctions rationnelles)
- les fonctions ***racines carrées***
- les fonctions comportant " ***ln*** "
- les fonctions comportant " ***expo*** "

(2) Calculer les ***limites aux bornes*** de l'ensemble de définition et ***interprétation des résultats*** (les asymptotes)

(3) Etudier la ***continuité en un point***

(4) Calcul de la ***dérivée d'une fonction***
Penser à mettre la fonction dérivée sous forme factorisée pour faciliter l'étude de son signe

(5) Etude du ***signe de la fonction dérivée***
On peut utiliser un tableau de signe ; mais dans certains cas , en tenant compte de l'intervalle d'étude on détermine aisément le signe de la fonction dérivée

(6) ***Sens de variation*** d'une fonction
Il s'agit de dire sur quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante ou décroissante ;
Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa dérivée
Attention : il ne s'agit pas du tableau de variation

(7) Justifier que la fonction f est ***croissante*** (ou ***décroissante***) sur l'intervalle $[\, a\,; b\,]$
- Pour qu'***une fonction soit croissante*** sur un intervalle I il faut que ***sa dérivée soit positive*** sur I (pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$)

- Pour qu'***une fonction soit décroissante*** sur un intervalle I il faut que ***sa dérivée soit négative*** sur I (pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$)

(8)*Tableau de variation* d'une fonction

Pour le remplir on tient compte de :

- L'ensemble de définition et des valeurs qui annulent la fonction dérivée (1ère partie)
- Le signe de la fonction dérivée (2ème partie)
- Les variations de la fonction (3ème partie)

x	***1ère partie***
$f'(x)$	***2ème partie***
$f(x)$	***3ème partie***

(9) Déterminer une ***équation de la tangente*** $(\boldsymbol{T})$ à la courbe (C) au point d'abscisse a
(T) : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

(10) Etudier ***les position relatives*** de la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ par rapport à la droite (T)

(11) Montrer que le point $K(a\,;b\,)$ est un ***centre de symétrie*** de la courbe $(\boldsymbol{C_f})$

(12) Montrer que la droite d'équation $x = a$ est un ***axe de symétrie*** de la courbe $(\boldsymbol{C_f})$

(13) Montrer que ***l'équation*** $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ***admet une unique solution*** $\boldsymbol{\alpha}$ dans l'intervalle $\left]\, a\,;b\,\right[$

(14) Donner un ***encadrement de*** $\boldsymbol{\alpha}$ par deux nombres décimaux consécutifs

(15) Montrer que la fonction F est une ***primitive*** de la fonction f

(16) ***Construction de la courbe*** $(\boldsymbol{C_f})$ de f et des tangentes

(17) ***Calculer l'aire $\mathcal{A}$*** , *en* cm^2 , de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \times ua \quad , \text{ où } \quad ua = OI \times OJ\ cm^2$$

Quelques éléments intervenant dans la construction de la courbe représentative d'une fonction

(1) ***L'ensemble de définition***
Il donne sur l'axe (OI) des abscisses l'intervalle sur lequel on doit tracer la courbe

(2) ***Les extremums relatifs et les limites aux bornes de l'ensemble de définition***
Ils donnent l'axe (OJ) des ordonnées l'intervalle sur lequel on doit tracer la courbe

(3) ***Les asymptotes, les tangentes et les demi-tangentes***
Elles guident la courbe

(4) ***Les positions relatives de la courbe par rapport à une tangente***
Elles permettent de mieux disposer la courbe par rapport à une tangente
Attention : Une tangente à une courbe en un point d'abscisse x_0 peut couper la courbe en un autre point

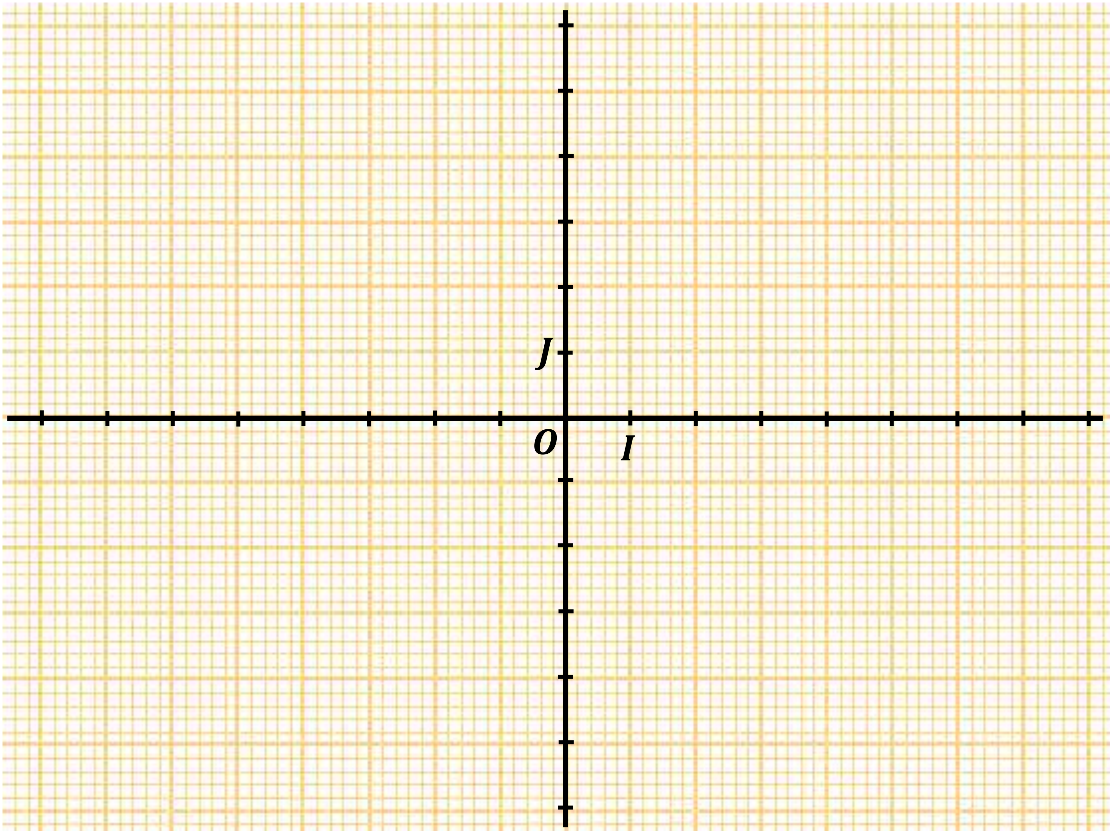
(5) ***Le tableau de variation***
Il donne l'allure générale de la courbe

(6) ***Unités graphiques*** (cas particulier du papier millimétré)

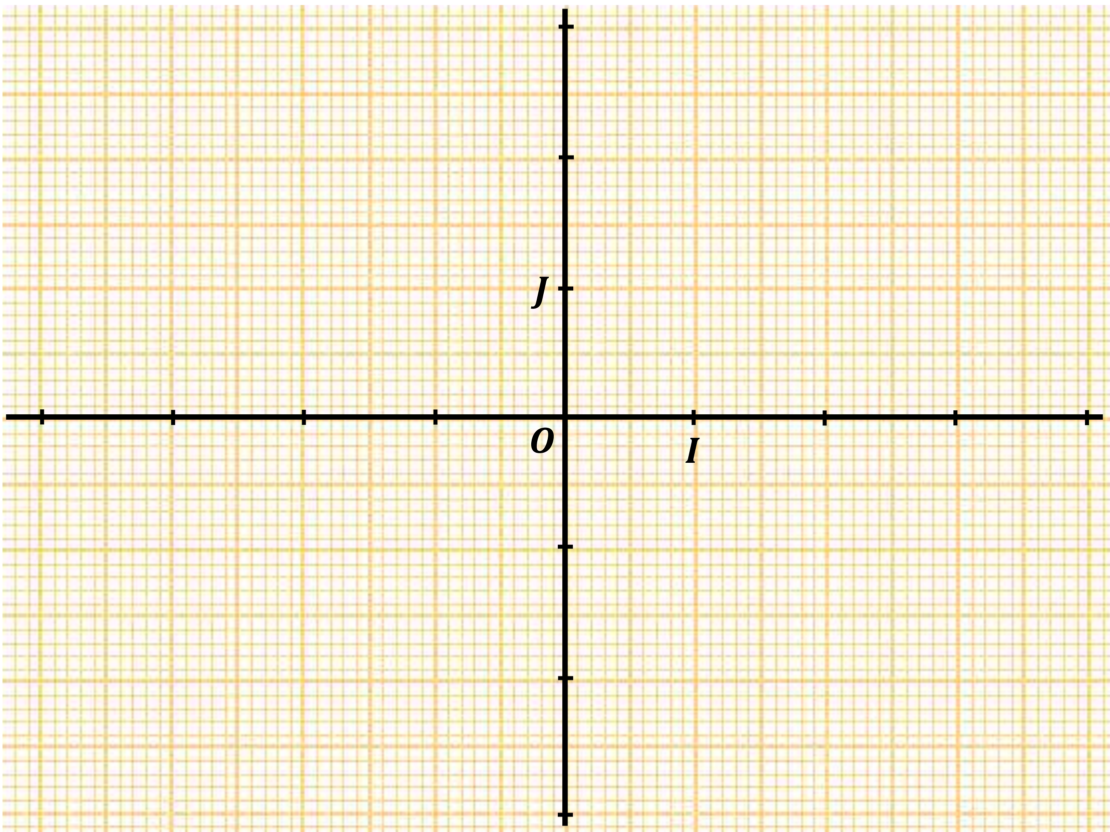
- Pour tracer les axes du repère, on tient compte de deux éléments :
  1- L'ensemble de définition pour l'axe des abscisses
  2- Les extremums (maximums et minimums) pour l'axe des ordonnés

- Pour graduer le repère, on tient compte des unités graphiques proposées par l'exercice sans oublier que le papier millimétré est déjà gradué en cm ;

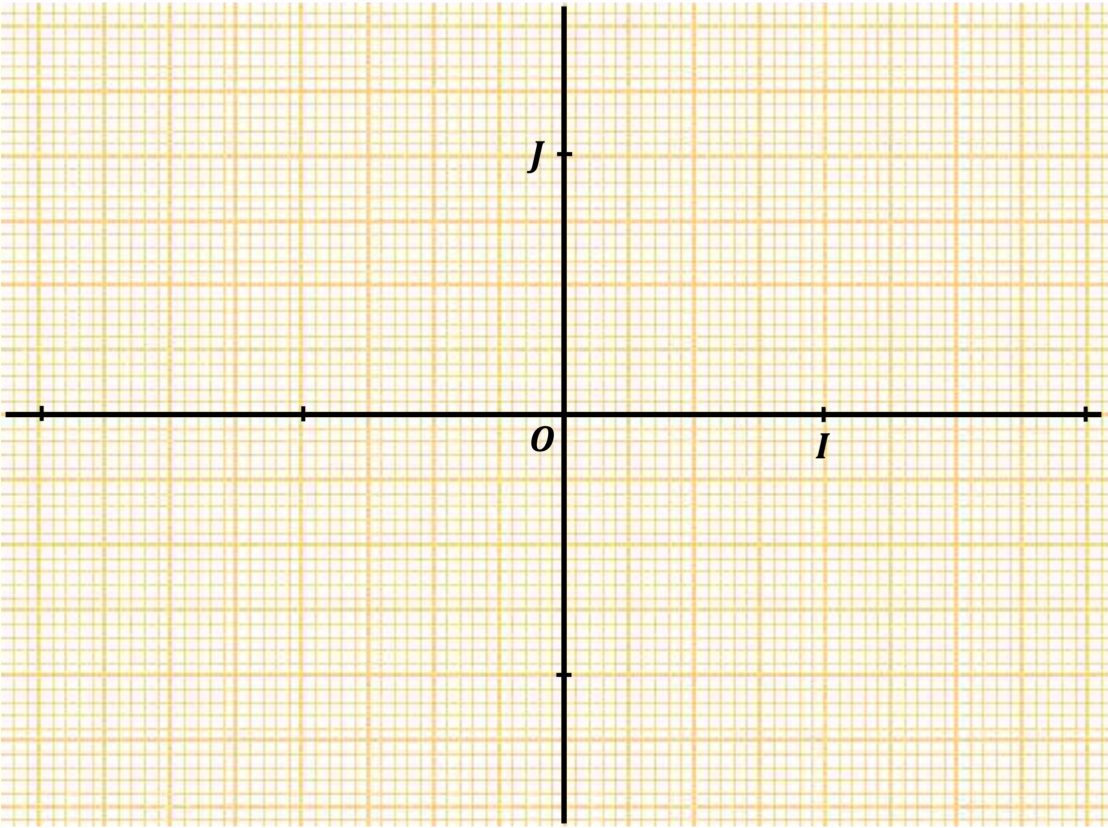
Unité graphique : 1 cm



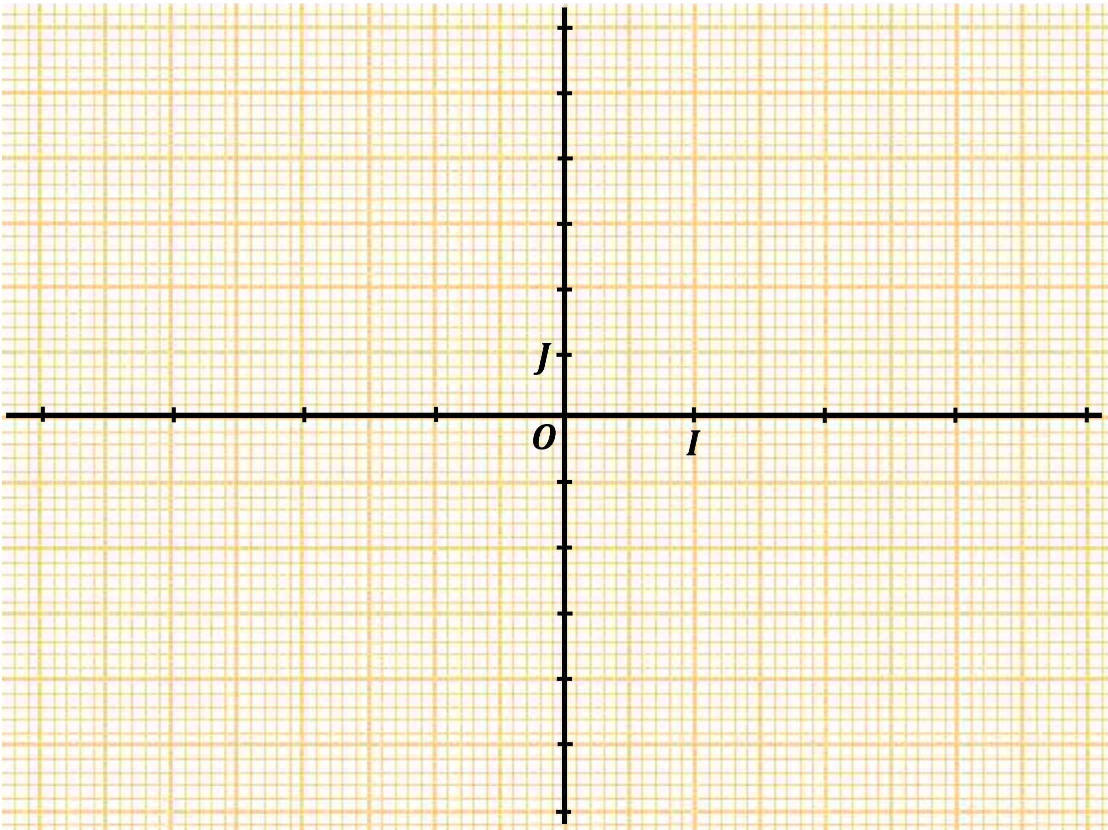
Unité graphique : 2 cm



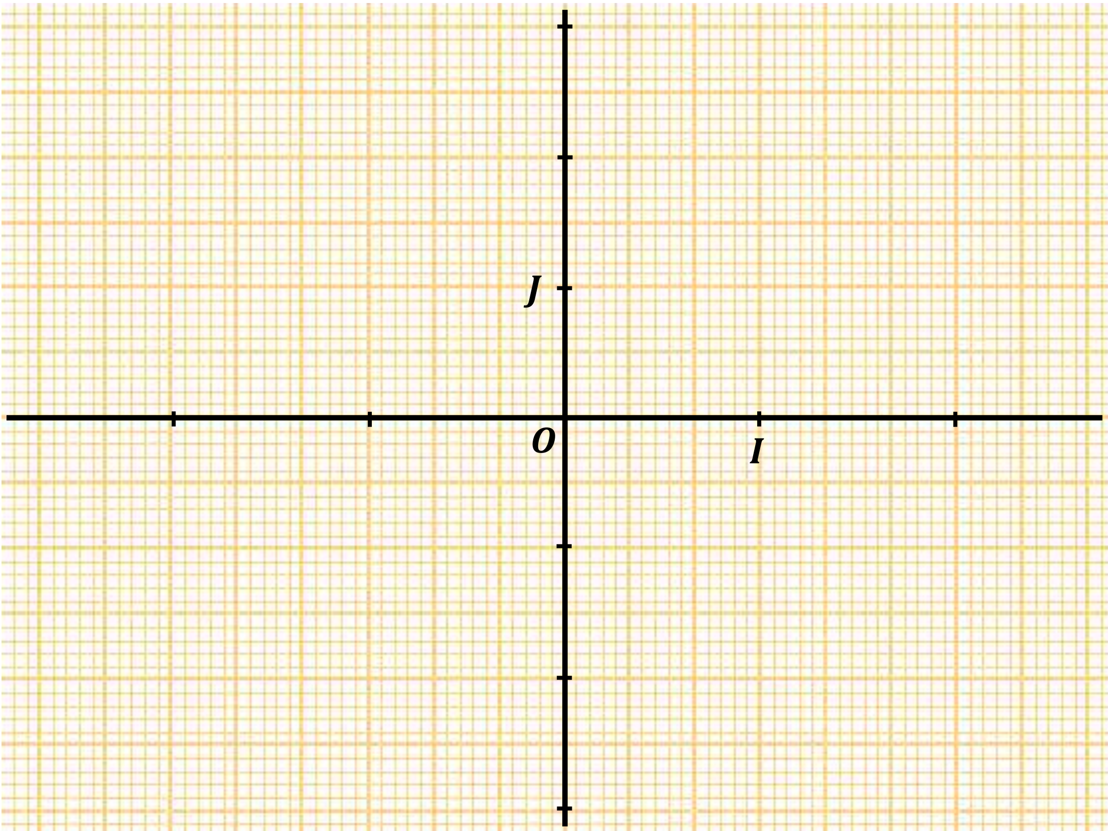
Unité graphique : 4 cm



Unité graphique : $\boldsymbol{OI = 2\ cm}$ ***et*** $\boldsymbol{OJ = 1\ cm}$



Unité graphique : $OI = 3\ cm$ ***et*** $OJ = 2\ cm$



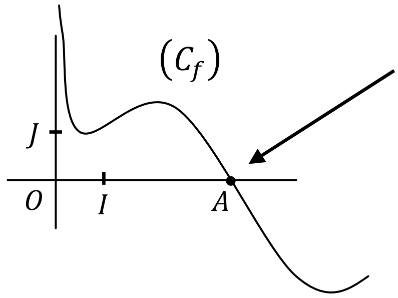
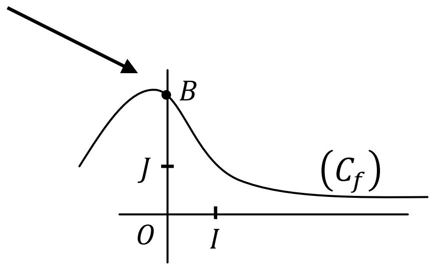
$\lim\limits_{\text{Elève} \to \text{Travail}}$ **Terminale** $= BAC$

Quelques questions et propositions de méthode de résolution

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

n°	Questions	Proposition de méthodes
1	Etudier **la continuité** de f en x_0	Il suffit de vérifier que $x_0 \in D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ • Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en x_0 • Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ alors f n'est pas continue en x_0
2	Démontrer que ***la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie*** de la courbe (C_f)	Pour montrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) : On calcule $f(a + x)$ et $f(a - x)$ Puis on montre que $f(a + x) = f(a - x)$
3	Démontrer que ***le point $A(a, b)$ est un centre de symétrie*** de la courbe (C_f)	Pour montrer que le point $A(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f) On calcule $f(a + x)$ et $f(a - x)$ Puis on montre que $\frac{f(a+x) + f(a-x)}{2} = b$
	Montrons que ***le point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la courbe (C_f)***	Pour montrons que le point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la courbe (C_f), il suffit de vérifier les deux conditions suivantes : (1) On vérifie que $x_A \in D_f$ (2) On calcule (x_A), et montre que $f(x_A) = y_A$

4	Interpréter graphiquement les limites suivantes (1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = Infini$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (3) $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (4) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$	**Asymptotes verticales , horizontales , obliques** (1) La droite d'équation $x = x_0$ est une ***asymptote verticale*** à la courbe (C_f) (2) La droite d'équation $y = b$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe (C_f) en $+\infty$ (ou $-\infty$) (3) La droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe (C_f) en $+\infty$ (ou $-\infty$) **Branches paraboliques** (4) La courbe (C_f) admet une ***branche parabolique de direction*** $(\boldsymbol{OI})$ (5) La courbe (C_f) admet une ***branche parabolique de direction*** $(\boldsymbol{OJ})$ **Remarque** : Préciser en $+\infty$ ou en $-\infty$ selon le cas
5	Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote à la courbe** (C_f) en $+\infty$	Il suffit de montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$ (Il faut aussi préciser que c'est une ***asymptote oblique***) ***Attention*** : Si c'est en $-\infty$, on montre que : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0$

6	Déterminer ***les coordonnées du point d'intersection*** A de la courbe (C_f) ***avec l'axe des abscisses***	 Si A est le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses alors $y_A = 0$ Pour déterminer l'abscisse x_A du point A , on résout l'équation $f(x) = 0$
7	Déterminer ***les coordonnées du point d'intersection*** B de la courbe (C_f) avec ***l'axe des ordonnées***	 Si B est le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées alors $x_B = 0$ L'ordonnée y_B du point B est égale à $f(0)$
8	Déterminer une équation de la **tangente à la courbe** (C_f) au point **d'abscisse** $\boldsymbol{a}$	une équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 est donnée par : $(T) : \boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$ ***Remarque*** : n'oublier pas de calculer $f'(a)$ et $f(a)$, puis les remplacer par leurs valeurs dans l'équation ci-dessus

9	Etudier la **position relative** de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax + b$	Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) revient à déterminer quel est l'élément qui est au-dessus ou en dessous de l'autre ; pour le savoir, la méthode consiste à : (1) déterminer le signe de $[\,f(x) - y]$ (2) Interpréter le signe de $[\,f(x) - y]$ • Si $\boldsymbol{f(x) - y > 0}$ alors la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ ***est au dessus*** de la droite (D) • Si $\boldsymbol{f(x) - y < 0}$ alors la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ ***est en dessous*** de la droite (D)
10	Etudier les **variations d'une fonction** $\boldsymbol{f}$	Etudier les variations d'une fonction consiste à montrer que cette fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donné , et cela dépend du signe de la dérivée **(1)** On calcule d'abord la dérivée f' de la fonction f (si cela n'est pas déjà fait) **(2)** On étudie le signe de la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x • Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ alors $\boldsymbol{f}$ ***est strictement croissante*** • Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ alors $\boldsymbol{f}$ ***est strictement décroissante*** ***Attention*** On ne donne pas le sens de variation d'une fonction sur une réunion d'intervalles mais plutôt sur un intervalle. ***Exemple*** On ne dit pas f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[\, \cup\,]4\,; 6]$ mais on dit plutôt que f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]4\,; 6]$

<table>
<tr>
<td>11</td>
<td>Dresser
le tableau de variation
d’une fonction f</td>
<td>
Le tableau de variation est composé de " trois (3) parties "

1^{ère} partie : y figure les nombres réels qui apparaissent dans l’ensemble de définition de f (y compris $-\infty$ et/ou $+\infty$) et les nombres réels qui annulent la fonction dérivée

2^{ème} partie : les signes de la fonction dérivée f' suivant les valeurs de x

3^{ème} partie : les variations de la fonction f

<table>
<tr><td>x</td><td>1ère partie</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>2ème partie</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>3ème partie</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>12</td>
<td>Démontrer que
l’équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une solution unique α dans $]a; b[$</td>
<td>
Rappel
Une fonction f est dite monotone sur un intervalle $[a; b]$ si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I

1- f est dérivable et strictement monotone sur l’intervalle $]a\,; b[$
2- Calculer $f(a)$ et $f(b)$, puis vérifier que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires .

Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l’équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l’intervalle $]a\,; b[$
</td>
</tr>
</table>

13	Montrer que la fonction F est **une primitive de la fonction $\boldsymbol{f}$** sur l'intervalle $[\ a\ ;b\ ]$	Il suffit de montrer que la dérivée de la fonction F est égale à la fonction f : $\forall\ x \in [\ a\ ;b\ ]\ ,\ \boldsymbol{F'(x) = f(x)}$
14	Calculer **l'aire de la partie du plan** délimitée par la courbe (C_f), l'axe (OI) des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$	Cela revient à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx \times ua$ où ua est l'***unité d'aire*** exprimée généralement en cm^2. $ua = OI \times OJ$

Les fonctions à étudier en Terminale A sont de types :

- $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$
- $x \mapsto ax + b + \ln x$
- $x \mapsto ax + b + e^x$
- $x \mapsto (ax + b)e^x$
- $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax + b}$
- …

Chaque élève, afin de mieux se préparer pour les ***devoirs*** , les ***examens blancs*** et l'examen de fin d'année (le ***BAC***) , doit traiter au moins un problème de chaque type de fonctions…

En voici quelques exemples …

Bonne chance

On ne récolte que ce que l'on a semé …

Problèmes

Problème 01 (Bac A 2012)

On considère la fonction f dérivable et définie sur les intervalles $[\,0\,;2\,[$ et $]\,2\;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x - 2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est $2\ cm$.

1- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $[\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$ on a : $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x - 2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement chaque résultat .

3- On désigne par (D) la droite d'équation $y = 2x - 1$

a) Justifier que la droite (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C) et (D)

4- a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $[\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{(x - 2)^2}$$

b) Démontrer que f est strictement croissante sur $[\,0\,;2\,[$ et sur $]\,2\;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f

5- a) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2,5	3	4
$f(x)$							

(*On donnera l'arrondi d'ordre* 1 *de chaque résultat*)

b) Tracer (C) et ses asymptotes.

(***uniquement A1***)

6- a) Hachurer la partie du plan délimitée par :

- $*$ la courbe (C)
- $*$ la droite (D) ;
- $*$ la droite d'équation $x = 3$
- $*$ la droite d'équation $x = 4$

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie hachurée.

Problème 02 (Bac 2005)

Partie A

On donne dans $\mathbb{R}$, le polynôme $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

1- Résoudre l'équation : $P(x) = 0$

2- Justifier que :

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;\,-3\,[\,\cup\,]-1\,;+\infty[\;,\;\; P(x) > 0$

$\forall\, x \in \,]-3\,;\,-1\,[\;,\;\; P(x) < 0$

Partie B

On donne la fonction $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2 + 3x}{2x + 4}$$

(C) désigne la représentation graphique de f dans le repere orthonormé (O, I, J) .

Unité graphique : 1 cm

1- Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f

2- a) Calculer les limites de $f(x)$ à gauche et à droite en -2

b) Justifier que la droite (Δ) déquation $x = -2$ est une asymptote à (C)

3- a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\;,\;\; f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x + 2}$

b) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C)

c) Démontrer que le point $\Omega\left(-2\,;-\frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C)

4- a) Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$

b) Utiliser les questions 4-a) et A-2 pour dresser le tableau de variation de f

5- a) Compléter le tableau de valeurs suivant

x	$-1{,}75$	$-1{,}5$	0	2	4	5
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	1,8					

b) Tracer les droites (Δ) et (D) dans le repère (O, I, J)

c) Construire la courbe (C)

Partie C (***Uniquement A1***)

On considéré la fonction

$$G : \left]-2\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x+2) - 1$$

1- Démontrer que G est une primitive sur $\left]-2\,;+\infty\right[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$

2- Déduire des questions C-1 et B-3-a , une primitive F de la fonction f sur $\left]-2\,;+\infty\right[$

3- Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la portion du plan limitée par (OI) , (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$

Problème 03

La fonction numérique f , dont le tableau de variations est donné ci-dessous, est continue et dérivable en tout point de son ensemble de définition. On se propose de l'étudier.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	$0{,}5$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	0

1) Donner l'ensemble D_f de définition de f .

2) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Donner une équation des asymptotes à la courbe représentative (C_f) de f .

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

5) Tracer (T) , puis construire à main levée une esquisse de la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : $1cm$).

6) Justifier que l'équation $x \in D_f$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-3\,;-1\,[$

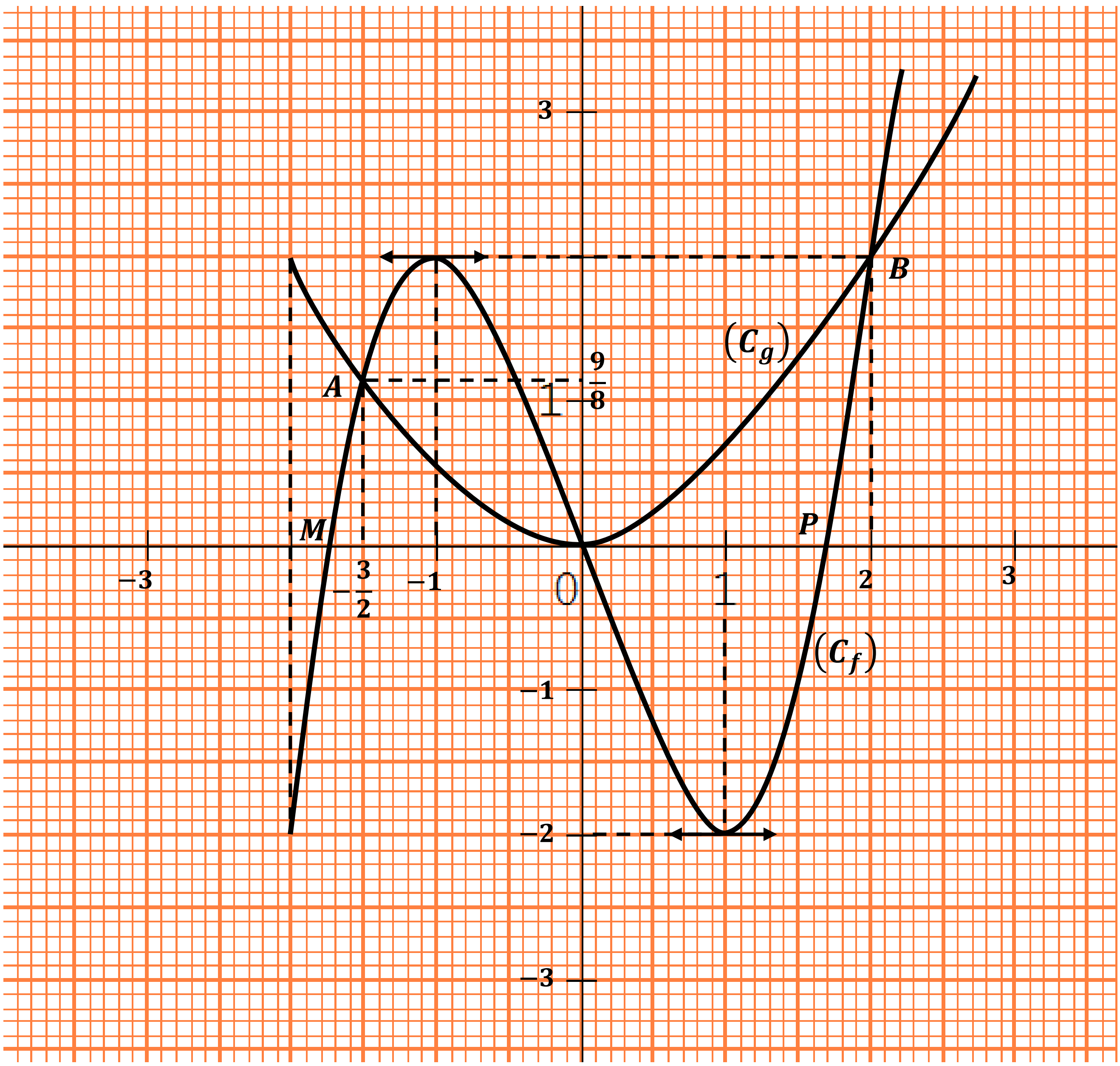
7) Résoudre l'inéquation $x \in D_f$, $f(x) < 0$

Problème 04

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On considère les fonctions f et g definies sur $[-2\,;+\infty[$, (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g.

- Les points O , $A\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{9}{8}\right)$ et $B(\,2\,;2\,)$ sont les points d'intersections des deux courbes
- La courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en $M(-\sqrt{3}\,;0)$, $P(\sqrt{3}\,;0)$ et O



Email : oualefidele@gmail.com   **Cel** : 58 22 07 09   02-58-82-72   05-65-91-86

A l'aide du graphique :

1- Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) > 0$

d) $f(x) > g(x)$

2- Donner les variations de g sur $[-2\,;+\infty[$

3- Résoudre dans $[-2\,;+\infty[$

a) L'équation $f'(x) = 0$

b) L'inéquation $f'(x) < 0$

4- Dresser le tableau de variation de f

Problème 05

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \ln(x)$. On designe par (C_f) la representation graphique de f

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat

2- a) Montrer que pour tout x élément de D_f , $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$

3- a) Montrer que pour tout x élément de D_f , $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]\,0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur $]\,0\,;+\infty[$

4- a) Reproduire et compléter le tableau suivant

(*on donnera l'arrondi d'ordre* 1 *de chaque résultat*)

x	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

b) Construire (C_f) sur] 0 ; 6]

5- a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle] 0 ; +∞[, $f(x) \geq 2$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur] 0 ; +∞[

(***uniquement A1***)

6- Soit la fonction h définie sur] 0 ; +∞[par $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - x\ln x$

a) Calculer $h'(x)$ et en deduire une primitive de f sur] 0 ; +∞[

b) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

Problème 06

Soit la fonction numérique f de variable réelle x par $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2\ln x$

On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2 cm

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f

b) Justifier que $f(x) = \frac{1}{x}(1 - x + 2x\ln x)$

c) Montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$

d) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

2- a) Justifier que pour tout $x \in] 0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

c) En déduire les variations de f

3- a) Montrer que le point $A(1 ; 0)$ appartient à la courbe (C_f)

b) Calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(0{,}2)$ et $f(0{,}3)$

En déduire que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse α compris entre 0,2 et 0,3

c) Dresser le tableau de variation de f

4- a) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$						

b) Construire la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J)

Uniquement A1

5- Soit la fonction numérique F de variable réelle x définie par
$F(x) = (2x + 1)\ln x - 3x$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_F de la fonction F

b) Montrer que pour tout réel x de D_F on a : $F'(x) = f(x)$

c) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe (OI) , les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ et la courbe (C_f)

Problème 07 (Bac 2017)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est égale à 2 cm.
On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x + 2)e^x$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J)

1- a) Justifie que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

b) Interprète graphiquement le résultat de la question précédente.

2- Justifie que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3- On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que , pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x + 1)e^x$

b) Vérifie que $f'(1) = 0$

c) Justifie que f est croissante sur $]-\infty; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$

d) Dresse le tableau de variation de f

4- a) Recopie puis complète le tableau ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,5
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,1		0,5			2,7		$-6,1$

b) Trace la courbe (C) sur l'intervalle $[-4\,;2{,}5]$

(***uniquement A1***)

5- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x+3)e^{x}$.

a) Justifie que , pour tout $x \in]-\infty\,;2]$, $f(x) \geq 0$

b) Justifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

c) Calcule , en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OI) et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$

Problème 08

Le plan est muni repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques $OI = 2cm$ et $OJ = 1cm$
On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$
On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Vérifier que pour x différent de 0 , on a : $f(x) = -x\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)$
puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- a) Pour tout x appartenant de $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$

b) Justifier que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0\,[$ et strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

c) Dresser le tableau de variation de f

3- a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

b) Etudier les positions relatives de (C) et (D)

4- a) Recopier et compléter le tableau suivant

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$							

b) Tracer (D)

c) Construire (C) sur l'intervalle $[-3\,;3\,]$

(***uniquement A1***)

5- Soit la fonction F derivable et definie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - e^{-x} + 1$

a) Justifier que F est une primitive de f
b) Calculer le nombre réel : $I = F(3) - F(1)$

Problème 09 (Bac 2009)

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On prendra $OI = 2\ cm$ et $OJ = 1\ cm$
On considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2x - 3 + e^x$.
On désigne par (C) la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J).

Partie A

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ $\left(\text{on pourra écrire que } g(x) = x\left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}\right)\right)$

2- a) Calculer $g'(x)$

b) Justifier que g est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; \ln 2\ [$ et strictement croissante sur $]\ \ln 2\ ;\ +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de g

3- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$)

b) Justifier que $1{,}9 < \beta < 2$

c) Etudier le signe de g suivant les valeurs de x .
On prendra $\alpha = -1{,}35$ et $\beta = 1{,}95$

4- a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = -2x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier les positions relatives de (D) et (C)

5- a) Recopier et compléter le tableau des valeurs ci-dessous :
(*on donnera l'arrondi d'ordre* 1 *de chaque résultat*)

x	-3	-2	2	3
Arrondi d'ordre 1 de $g(x)$				

b) Tracer (D)

c) Construire (C) sur l'intervalle $[-3\ ; 3\ ]$. *On prendra* $\ln 2 = 0{,}69$

Partie B (***uniquement A1***)

1- a) Déterminer une primitive G de g sur $[-3\,;3\,]$

b) Calculer $I = \int_{2}^{3} g(x)\,dx$

2- a) Hachurer la région du plan délimitée par (C) , (OI) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$

b) Vérifier que l'arrondi d'ordre 2 de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie hachurée est égale à $9{,}39\ cm^2$.

Problème 10 (Bac Blanc 2012 Lycée Classique d'Abidjan)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unités graphiques : $OI = 1\ cm$ et $OJ = 1\ cm$.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

On note (C) la courbe representative de f dans le repère (O, I, J)

Partie A

1- Justifier que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2- Vérifier que , pour tout x élément de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

3- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4- Justifier que la droite $(T) :\ y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$, est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1 (la courbe (C) est au-dessus de la droite (T) sur $]-1\,;+\infty[$)

5- Tracer la droite (T) puis construire les parties de la courbe (C) relatives à $]-\infty; -1[\ \cup\ ]-1; 3\,]$

Partie B (***uniquement A1***)

On pose $K = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

1- a) Démontrer que : $\forall x \in [0;1]$; $\frac{e^x}{2} \leq \frac{e^x}{x+1} \leq e^x$

b) En déduire un encadrement de K

2- Interpréter géométriquement l'intégrale K .

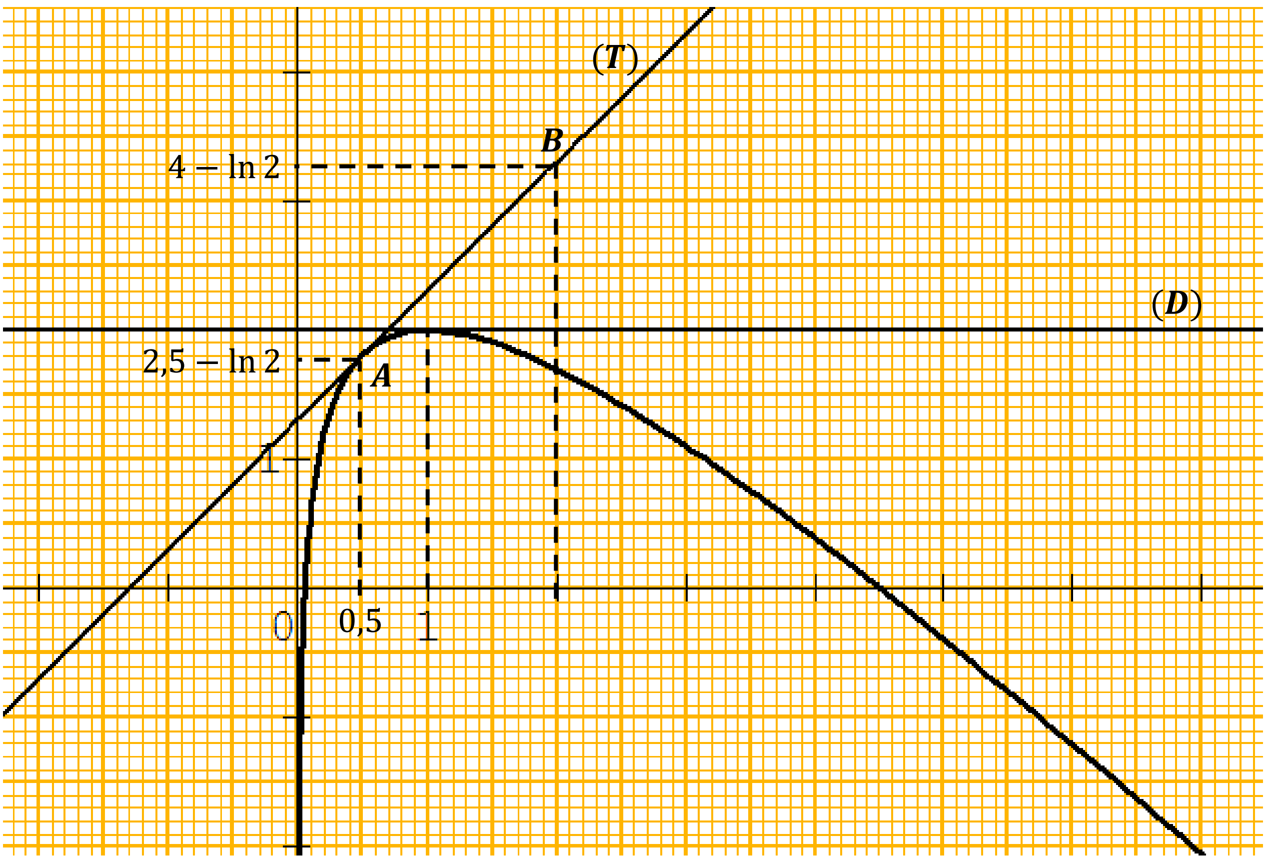
En déduire un encadrement de l'aire, en cm^2 , du domaine du plan compris entre (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 11 (Bac Blanc 2012 Lycée Sainte Marie de Cocody)

Sur le graphique donné ci-dessous, (C) est la courbe de la fonction f definie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + \ln x$

* La droite (D) d'équation $y = 2$ est la tangente à (C) au point d'abscisse 1
* (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 0,5 . Cette droite passe par les points $A(0{,}5\ ;\ 2{,}5 - \ln 2)$ et $B(2\ ;\ 4 - \ln 2)$
* La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C)

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2\ cm$.



Partie A

Dans cette partie, les réponses sont données à partir de la lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1- Préciser la limite de f en 0
2- Calculer la valeur du coefficient directeur de la droite (T)
3- Préciser le signe de la fonction dérivée f' de f sur les intervalles] 0 ; 0,5] et [2 ; 5]
4- Donner la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum. Préciser ce maximum
5- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$

Partie B

Dans cette partie, on justifie les résultats trouvés dans la partie A

1- Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$
2- Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à] 0 ; $+\infty$[
3- a) Calculer
   b) Ecrire une équation de la droite (T)
4- a) Justifier que f est strictement décroissante sur] 1 ; $+\infty$[
   b) Dresser le tableau de variation de f sur] 0 ; $+\infty$[
5- Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à] 0 ; $+\infty$[; $f(x) \leq 2$
6- a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α comprise entre 4 et 5
   b) Dans le tableau ci-dessous, on donne les signes des valeurs de $f(x)$ entre 4,50 et 4,51 . A l'aide de ce tableau, donner l'arrondi de α au centième près.

x	4,500	4,501	4,502	4,503	4,504	4,505	4,506	4,507	4,508	4,509	4,510
Signe de $f(x)$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−

Partie C

1- Tracer sur le graphique la droite (D') d'équation $y = 3 - x$
2- Etudier la position de (C) par rapport à (D')
3- Hachurer le domaine délimité par la courbe (C) , la droite (D') et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$
4- Soit g la fonction définie sur] 0 ; $+\infty$[par $g(x) = -x + x \ln x$
   a) Justifier que g est une primitive de la fonction $\ln x$.
   b) En déduire en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré à la question 3 de la partie C

Problème 12 (Bac 2008)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 2]$ par $f(x) = (-2x + 3)e^x$
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1) Justifier que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

(*On pourra écrire que* $f(x) = -2xe^x + 3e^x$)

2) a- Vérifier que pour tout x élément de $]-\infty; 2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$
   b- Etudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty; 2]$. En déduire les variations de f sur $]-\infty; 2]$
   c- Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
   Déterminer les coordonnées respectives de A et B .

4) Recopier et compléter le tableau des valeurs ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	$0{,}2$	$0{,}4$		$1{,}8$		$3{,}3$			$-7{,}4$

5) Construire (C) sur l'intervalle $]-\infty; 2]$

Partie B (***uniquement A1***)

On considère la fonction F dérivable et définie sur $]-\infty; 2]$ par $F(x) = (-2x + 5)e^x$.

1) Vérifier que F est une primitive de f sur $]-\infty; 2]$

2) a- Calculer l'intégrale $M = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\, dx$
   b- Donner une interprétation graphique du nombre réel M .

3) a- Vérifier que l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du triangle OAB est $2{,}25$.
   b- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et le segment $[AB]$.

   (*On donne la valeur en cm^2 à 10^{-2} près*).

Problème 13 (Bac 2013)

On considère la fonction f derivable et definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^x$

On note (C) la courbe representative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Les unités graphiques sont : 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ)

Partie A

1- a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

2- a) Justifier que pour tout nombre réel x : $f'(x) = 1 + e^x$

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

3- a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

b) Justifier que : $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$

4- a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier les positions relatives de (D) et (C)

5- Justifier qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = 2x + 1$

6- a) Recopier puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-2{,}5$	-2	-1	0	1	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$						

b) Tracer (D) , (T) et (C) sur $]-\infty\,; 2\,]$. ***On prendra*** $\boldsymbol{\alpha = -06}$

Partie B (***uniquement A1***)

1- Justifier que $e^{\alpha} = -\alpha$

2- On pose $I = \int_{-1}^{\alpha} e^x \, dx$

a) Justifier que $I = -\left(\alpha + \frac{1}{e}\right)$

b) Hachurer la région du plan délimitée par (C) , (D) et les droites d'équations Respectives $x = -1$ et $x = \alpha$

c) Calculer l'aire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région hachurée

***On donnera l'arrondi d'ordre* 1 *de* $\mathcal{A}$**

Problème 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2\ cm$.

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

1- Justifier que l'ensemble de définition de f est : $D_f =]-\infty; 0\ [\ \cup\ ]\ 1\ ; +\infty[$

2- Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3- a) Déterminer la dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

4- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative (C_f) de f

5- Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur les intervalles $]-\infty; 0\ [$ et $]\ 1\ ; +\infty[$

6- Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ)

Correction des problèmes

Problème 01 *(BAC A 2012)*

1- Calculons la limite de *f* en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x$$

$$= +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2- a) Pour tout nombre réel x appartenant à [0 ; 2 [∪] 2 + ∞[, montrons que :

$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x-2}}$$

1ère méthode

$$2x - 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{(2x-1)(x-2)-1}{x-2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-x+2-1}{x-2}$$

$$= \frac{2x^2-5x+1}{x-2}$$

$$= f(x)$$

On conclut donc $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$

2ème méthode : Utilisation de la division euclidienne

$$\boxed{\frac{Dividende}{Diviseur} = Quotient + \frac{Reste}{Diviseur}}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & -\ 5x & +\ 1 & x-2 \\ \cline{4-4} 2x^2 & -\ 4x & & 2x-1 \\ \cline{1-2} & -x & +\ 1 & \\ & -x & +\ 2 & \\ \cline{2-3} & & -1 & \end{array}$$

On déduit de la division euclidienne que $\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2} = 2x-1+\dfrac{-1}{x-2}$

$$= 2x-1-\frac{1}{x-2}$$

donc $f(x) = 2x-1-\dfrac{1}{x-2}$

b) Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}}\left(2x-1-\frac{1}{x-2}\right)\\ &= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}}(2x-1) - \lim_{\substack{x\to 2\\ <}}\left(\frac{1}{x-2}\right)\\ &= 3 - (-\infty)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(2x-1-\frac{1}{x-2}\right)\\ &= \lim_{\substack{x\to 2\\ >}}(2x-1) - \lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\frac{1}{x-2}\right)\\ &= 3 - (+\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique de chaque résultat

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$ $\Longrightarrow$ La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique (C) de f

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ $\Longrightarrow$ La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique (C) de f

3- a) Justifions que la droite $(\boldsymbol{D})$ est une asymptote à $(\boldsymbol{C})$ en $+\infty$

Pour que la droite (D) soit une asymptote à (C) en $+\infty$ il suffit de montrer que $\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - y] = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - y] &= \lim_{x \to +\infty} \left[2x - 1 - \frac{1}{x - 2} - (2x - 1) \right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x - 2} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - y] = 0$ alors la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$

b) Etudions la position relative de $(\boldsymbol{C})$ et $(\boldsymbol{D})$

$$\begin{aligned}f(x) - y &= 2x - 1 - \frac{1}{x - 2} - (2x - 1) \\ &= -\frac{1}{x - 2} \\ &= \frac{-1}{x - 2}\end{aligned}$$

Etudions le signe de $f(x) - y$ suivant les valeurs de x

x	0	2	$+\infty$
-1	$-$		$-$
$x-2$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$

Pour tout $\in [\,0\,;2\,[$, $f(x) - y > 0$
donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[\,0\,;2\,[$

Pour tout $\in\,]\,2\;+\infty[$, $f(x) - y < 0$
donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\,2\;+\infty[$

4- a) Démontrons que pour tout nombre réel x appartenant à $[\,\mathbf{0}\,;\mathbf{2}\,[\,\cup\,]\,\mathbf{2}\;+\infty[$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2 + \frac{1}{(x-2)^2}}$$

Pour tout $x \in [\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$, $f'(x) = \left(2x - 1 - \dfrac{1}{x-2}\right)'$

$$= (2x-1)' - \left(\frac{1}{x-2}\right)'$$

$$= 2 - \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) Démontrons que f est strictement croissante sur $[\,\mathbf{0}\,;\mathbf{2}\,[$ ***et sur*** $]\,\mathbf{2}\;+\infty[$

Pour tout $x \in [\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$,

Or pour tout $x \in [\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$; $2 > 0$ et $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$

Autrement dit pour tout $x \in [\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\;+\infty[$, $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[\,0\,;2\,[$ et sur $]\,2\;+\infty[$

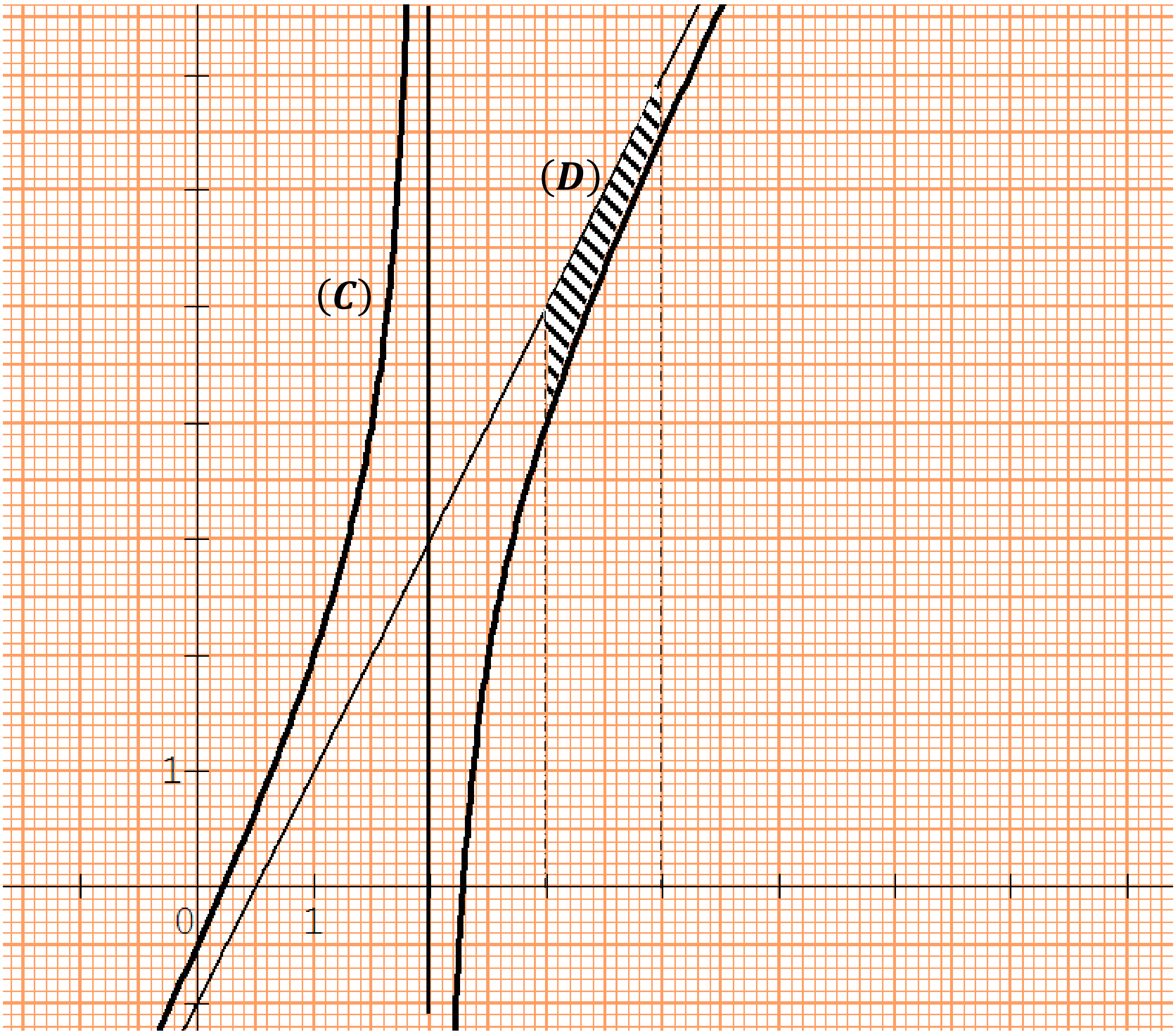
c) Dressons le tableau de variation de f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5- a) Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2,5	3	4
$f(x)$	$\mathbf{-0,5}$	$\mathbf{0,7}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{6,5}$

b) Traçons (C) et ses asymptotes.



6- a) Voir la courbe

b) La partie hachurée $\mathcal{A}$ est délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 4$; elle est donc définie par :

$$\mathcal{A} = \int_3^4 \left(y - f(x)\right) dx \times ua$$

avec $y = 2x - 1$ et $ua = OI \times OJ\ cm^2 = 4\ cm^2$

Remarque

L'expression $y - f(x)$ est due au fait que sur l'intervalle $[\,3\,;4\,]$ la droite (D) est au dessus de la courbe (C)

$$y - f(x) = 2x - 1 - \left(2x - 1 - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$= 2x - 1 - 2x + 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x-2}$$

Une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x-2}$ est $\ln(x-2)$

$$\mathcal{A} = \int_3^4 \left(y - f(x)\right) dx \times ua$$

$$= \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx \times 4\ cm^2$$

$$= \left[\ln(x-2)\ \right]_3^4 \times 4\ cm^2$$

$$= [\ln(4-2) - \ln(3-2)] \times 4\ cm^2$$

$$= [\ln 2 - \ln 1] \times 4\ cm^2 \quad ; \quad \text{or} \quad \ln 1 = 0$$

$$= 4 \ln 2\ \ cm^2$$

$$= 2{,}77\ cm^2$$

Problème 02 *(BAC A 2005)*

Partie A

1- Résolvons l'équation : $P(x) = 0$

Cette équation est une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 4^2 - 4 \times 1 \times 3\\ &= 16 - 12\\ &= 4\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 2}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2}{2}$$

$$x_1 = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = -1$$

On en déduit que $S_{\mathbb{R}} = \{-3\, ;\, -1\}$

2- Justifions que :

$\forall\, x \in \,]-\infty\, ;\, -3\,[\, \cup \,]-1\, ; +\infty[\ ,\ P(x) > 0$

$\forall\, x \in \,]-3\, ;\, -1\,[\ ,\ P(x) < 0$

On déduit de la question 1) la factorisation de $P(x)$: $P(x) = (x + 3)(x + 1)$

Dressons le tableau de signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau de signe de $P(x)$ que :
$\forall\, x \in]-\infty\,;\, -3\,[\, \cup\,]-1\,;+\infty[\;,\;\; P(x) > 0$
$\forall\, x \in]-3\,;\, -1\,[\;,\;\; P(x) < 0$

Partie B

1- Donnons l'ensemble de définition D_f de la fonction f

$$x \in D_f \iff 2x + 4 \neq 0$$
$$\iff 2x \neq -4$$
$$\iff x \neq \frac{-4}{2}$$
$$\iff x \neq -2$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2- a) Calculons la limite de $f(x)$ à gauche en -2

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{2x^2+3x}{2x+4}$$
$$= \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \left[(2x^2+3x) \times \frac{1}{2x+4} \right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} (2x^2+3x) \times \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \left(\frac{1}{2x+4}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} (2x^2+3x) \times \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \left(\frac{1}{2(x+2)}\right)$$
$$= \lim_{x\to -2} (2x^2+3x) \times \lim_{x\to -2} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} (2x^2+3x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) = -\infty \end{cases}$

Calculons la limite de $f(x)$ à droite en -2

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{2x^2+3x}{2x+4}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left[(2x^2+3x) \times \frac{1}{2x+4} \right]$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} (2x^2+3x) \times \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} (2x^2+3x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{1}{x+2}\right) = +\infty \end{cases}$

b) Justifions que la droite (Δ) déquation $x = -2$ est une asymptote à (C)

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$ alors la droite (Δ) déquation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C)

Remarque

On pouvait aussi dire que :

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$ alors la droite (Δ) déquation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C)

3- a) Démontrons que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}$

Remarque

Pour répondre à cette question , on dispose de deux méthodes

1ère méthode : la division euclidienne

2ème méthode : rendre $x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}$ au même dénominateur et obtenir $f(x)$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} = \frac{x \times \mathbf{2(x+2)}}{\mathbf{2(x+2)}} - \frac{1 \times (\boldsymbol{x+2})}{2 \times (\boldsymbol{x+2})} + \frac{1 \times \mathbf{2}}{(x+2) \times \mathbf{2}}$$

$$= \frac{2x^2+4x}{2x+4} - \frac{x+2}{2x+4} + \frac{2}{2x+4}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - (x+2) + 2}{2x+4}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - x - 2 + 2}{2x+4}$$

$$= \frac{2x^2 + 3x}{2x+4}$$

$$= f(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}$

b) Justifions que la droite (D)d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C)

Remarque

Comme aucune précision n'est faite , à savoir en $-\infty$ ou en $+\infty$, alors on calcule la limite de $(f(x) - y)$ en $-\infty$ et $+\infty$

En $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} - x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= 0$$

En $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} - x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= 0$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

On conclut donc que la droite (D)d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

c) Démontrons que le point $\boldsymbol{\Omega\left(-2\,;-\frac{5}{2}\right)}$ est un centre de symétrie de la courbe $(\boldsymbol{C})$

Il suffit de montrer que $\dfrac{f(-2+x)+f(-2-x)}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{x}+2} \implies f(-\boldsymbol{2}+\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{2}+\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{(-\boldsymbol{2}+\boldsymbol{x})+2}$$

$$\implies f(-2+x) = -2+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{-2+x+2}$$

$$\implies f(-2+x) = -2+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{x}+2} \implies f(-\boldsymbol{2}-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{2}-\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{(-\boldsymbol{2}-\boldsymbol{x})+2}$$

$$\implies f(-2-x) = -2-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{-2-x+2}$$

$$\implies f(-2-x) = -2-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{-x}$$

$$\implies f(-2-x) = -2-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$$

$$\frac{f(-2+x)+f(-2-x)}{2} = \frac{\left(-2+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(-2-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)}{2}$$

$$= \frac{-2+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x} \pm 2 - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}}{2}$$

$$= \frac{-2-\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{-5}{2}$$

On en déduit que le point $\Omega\left(-2\,;-\dfrac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C)

4- a) Justifions que $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \setminus \{-\mathbf{2}\}\ ,\ \boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{(x+2)^2}}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\ ,\ f'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}\right)'$$

$$= (x)' - \left(\frac{1}{2}\right)' + \left(\frac{1}{x+2}\right)'$$

$$= 1 - 0 + \frac{-(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= 1 + \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} \quad ; \quad \text{or} \quad P(x) = x^2 + 4x + 3$$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\ ,\ f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$

b) Utilisons les questions 4-a) et A-2 pour dresser le tableau de variation de f

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, (x+2)^2 > 0$; d'après la question 4-a) le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $P(x)$
Or d'après la question A-2 , on a :
$\forall\, x \in]-\infty\,;\ -3\,[\, \cup\,]-1\,;+\infty[\ ,\ P(x) > 0$
$\forall\, x \in]-3\,;\ -1\,[\ ,\ P(x) < 0$

On en déduit que :
$\forall\, x \in]-\infty\,;\ -3\,[\, \cup\,]-1\,;+\infty[\ ,\ f'(x) > 0$
$\forall\, x \in]-3\,;\ -2\,[\, \cup\,]-2\,;-1\,[\ ,\ f'(x) < 0$

(on remplace simplement $P(x)$ par $f'(x)$ en tenant compte que $-2 \notin D_f$)

Par conséquent f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-3\,[$ et sur $]-1\,;+\infty[$

f est strictement décroissante sur $]-3\,;\,-2\,[$ et sur $]-2\,;\,-1\,[$

Calculons les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$

En $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x}{2x+4}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x$$

$$= -\infty$$

En $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x}{2x+4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x$$

$$= +\infty$$

Dressons le tableau de variation de f

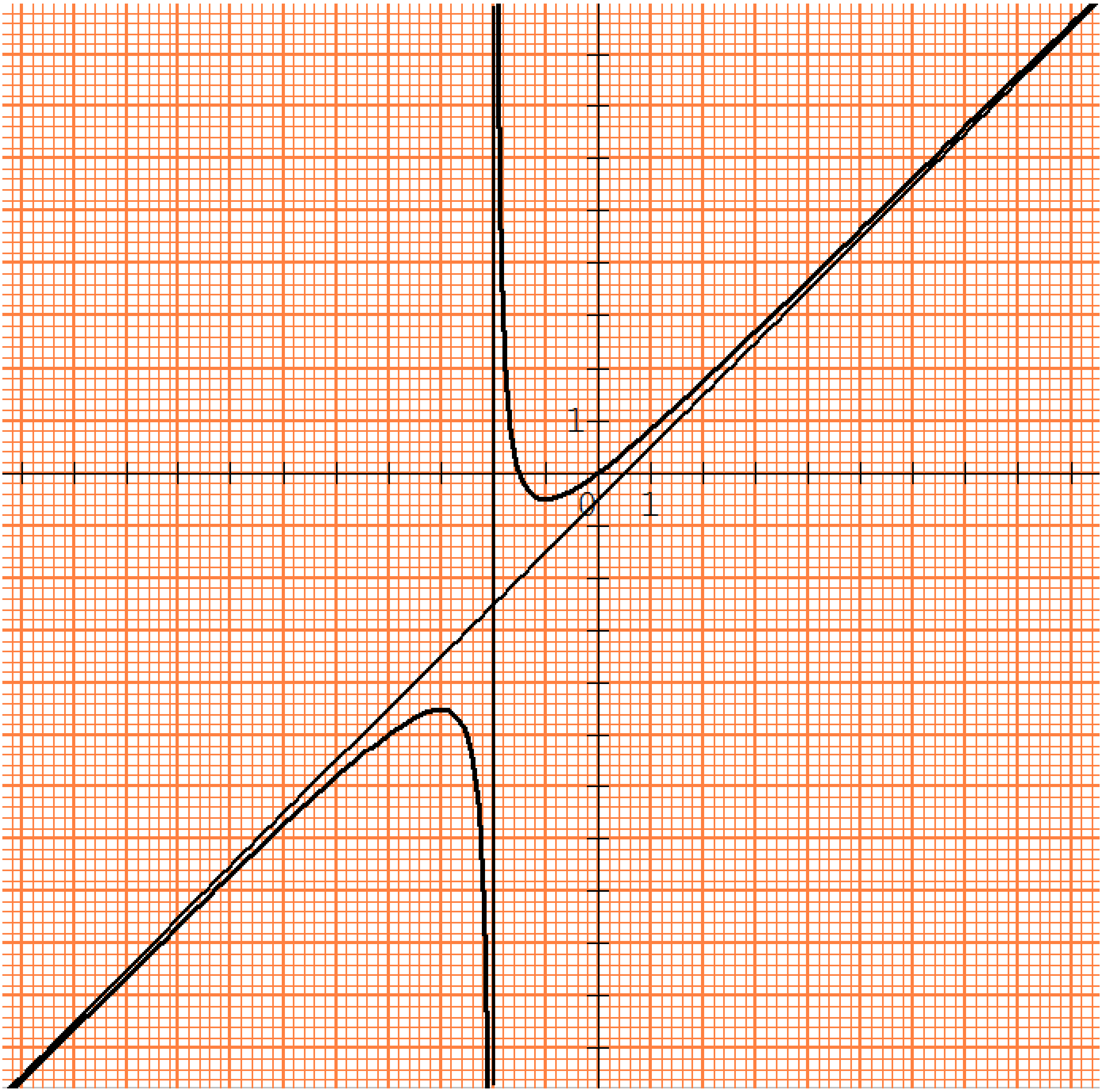
x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{9}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

5- a) Complétons le tableau de valeurs

x	$-1{,}75$	$-1{,}5$	0	2	4	5
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	1,8	**0**	**0**	**1,8**	**3,7**	**4,6**

b) Traçons les droites (Δ) et (D) dans le repère (O, I, J)

c) Construisons la courbe (C)



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Partie C

1- ***Démontrons que G est une primitive sur*** $]-\mathbf{2}\,;+\infty[$ ***de la fonction*** $\boldsymbol{x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}}$

Pour tout $x \in \,]-2\,;+\infty[$, $G'(x) = (\ln(x+2)-1)'$

$$= (\ln(x+2))' - (1)'$$

$$= \frac{(x+2)'}{x+2} - 0$$

$$= \frac{1}{x+2}$$

On en déduit que G est une primitive sur $]-2\,;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$

2- ***Déduisons des questions C-1 et B-3-a , une primitive F de la fonction*** $\boldsymbol{f}$ ***sur*** $]-\mathbf{2}\,;+\infty[$

De la question C-1 , on sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$ est la fonction $G(x) = \ln(x+2) - 1$

De la question B-3-a , on sait que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x+2}$

Or une primitive de la fonction $x \longmapsto x - \dfrac{1}{2}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x$

On déduit donc des questions C-1 et B-3-a , qu'une primitive de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ est la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \ln(x+2) - 1$$

3- ***Calculons l'aire*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ***en*** $\mathbf{cm^2}$ ***de la portion du plan limitée par*** $(\boldsymbol{OI})$, $(\boldsymbol{C})$ ***et les droites d'équations respectives*** $\boldsymbol{x=0}$ ***et*** $\boldsymbol{x=2}$

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx \times ua$$

$$= \big[F(x)\big]_0^2 \times 1\,cm^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \ln(x+2) - 1\right]_0^2 \times 1\ cm^2$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 + \ln(2+2) - 1\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{2} \times 0 + \ln(0+2) - 1\right)\right] \times 1\ cm^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} \times 4 - 1 + \ln(4) - 1\right) - (\ln(2) - 1)\right] \times 1\ cm^2$$

$$= [(2 - 1 + \ln(4) - 1) - \ln(2) + 1] \times 1\ cm^2$$

$$= (\ln(4) - \ln(2) + 1) \times 1\ cm^2$$

$$= 1{,}69\ cm^2$$

Problème 03

1ère partie	x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		5		$+\infty$
2ème partie	$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	$0{,}5$	$-$	0	$+$		$+$	
3ème partie	$f(x)$	2	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	$-0{,}5$	↗	0

1) Donnons l'ensemble D_f de définition de f .

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction dont on connait le tableau de variation, on tient compte de deux parties du tableau de variation :

La 1ère partie et la 3ème partie

- La 1ère partie donne l'ensemble de départ : $]-\infty\,;+\infty[\; = \mathbb{R}$
- Dans la 3ème partie, on vérifie s'il y a des nombres ou non sous lesquels il y une double barre ou une barre hachurée : Dans notre cas ici c'est le nombre -1

Ce nombre-là doit être ôté de l'ensemble de départ pour obtenir l'ensemble de définition.

On conclut donc que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) Donnons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Les bornes de l'ensemble de définition sont :

$-\infty$; à gauche de -1 ; à droite de -1 et $+\infty$

Limite de f en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Limite de f à gauche en -1 : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = -\infty$

Limite de f à droite en -1 : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = +\infty$

Limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3) *Donnons une équation des asymptotes à la courbe représentative* (C_f) *de* f *.*

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$

$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = -\infty \Rightarrow$ La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f)

Remarque

Pour l'asymptote verticale, on peut aussi utiliser $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$

4) *Ecrivons une équation de la tangente* (T) *à* (C_f) *au point d'abscisse* 1

Une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 est définie par :

(T) : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$; or $f'(1) = 0{,}5$ et $f(1) = 0$

$y = 0{,}5 \times (x-1) + 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}5x - 0{,}5$

Une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 est : $y = 0{,}5x - 0{,}5$

5) *Traçons* (T) *, puis construisons à main levée une esquisse de la courbe* (C_f) *dans le plan muni d'un repère orthonormé* (O, I, J) *.* (Unité : $1cm$).

6) Justifions que l'équation $x \in D_f$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-3\,;-1\,[$

7) Résolvons l'inéquation $x \in D_f$, $f(x) < 0$

Problème 04

1- a) *Résolvons l'équation* $f(x) = 0$

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ revient à déterminer l'abscisse ou les abscisses des points où la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses.

Or la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en trois points : $M(-\sqrt{3}\,;0)$; $O(0\,;0)$ et $P(\sqrt{3}\,;0)$

Donc les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : $-\sqrt{3}$; 0 ; $\sqrt{3}$

***b) Résolvons l'équation* $f(x) = g(x)$**

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer l'abscisse ou les abscisses des points où les courbes (C_f) et (C_g) se coupent .

Or les courbes (C_f) et (C_g) se coupent en trois points : $A\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{9}{8}\right)$; $O(0\,;0)$ et $B(2\,;2)$

Donc les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont : $-\frac{3}{2}$; 0 ; 2

***c) Résolvons l'inéquation* $f(x) > 0$**

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$ revient à déterminer sur l'axe des abscisses l'intervalle ou la réunion des intervalles où la courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses.

La solution de l'inéquation $f(x) > 0$: $]-2\,;0\,[\, \cup \,]\sqrt{3}\,;+\infty[$

***d) Résolvons l'inéquation* $f(x) > g(x)$**

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à déterminer sur l'axe des abscisses l'intervalle ou la réunion des intervalles où la courbe (C_f) est au-dessus de la courbe (C_g)

La solution de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est : $\left]-\frac{3}{2};0\right[\cup \,]2\,;+\infty[$

2- *Donnons les variations de g sur* $[-2\,;+\infty[$

Graphiquement la courbe (C_g) décroit sur $[-2\,;0\,[$ et croit sur $]-0\,;+\infty[$; on en déduit que g est strictement décroissante sur $[-2\,;0\,[$ et strictement croissante sur $]-0\,;+\infty[$

3- *a) Résolvons dans* $[-2\,;+\infty[$ *l'équation* $f'(x)=0$

La solution de l'équation $f'(x)=0$ est l'abscisse ou les abscisses des points où la courbe (C_f) admet une tangente horizontale ($\longleftrightarrow$)

Or les points où la courbe (C_f) admet une tangente horizontale sont : $F(-1;2)$ et $G(\,1\,;-2)$

Donc les solutions de l'équation $f'(x)=0$ dans $[-2\,;+\infty[$ sont : -1 et 1

***b) Résolvons dans* $[-2\,;+\infty[$ *l'inéquation* $f'(x)<0$**

La solution de l'inéquation $f'(x)<0$ est l'intervalle ou la réunion des intervalles où la courbe (C_f) est décroissante.

La solution de l'inéquation $f'(x)<0$ dans $[-2\,;+\infty[$ est : $]-1\,;1[$

4- *Dressons le tableau de variation de f*

x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Problème 05

1- a) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f

$x \in D_f \iff x > 0$

Donc $D_f =]0; +\infty[$

b) Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x + 1 - \ln(x))$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

Interprétons graphiquement le résultat obtenu

Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2- a) Montrons que pour tout x élément de D_f , $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

Pour tout x élément de D_f , $f(x) = x + 1 - \ln(x)$

$$= x\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

b) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$

3- a) Montrons que pour tout x élément de D_f , $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

Pour tout x élément de D_f , $f(x) = (x + 1 - \ln(x))$

$$= (x)' + (1)' - (\ln(x))'$$

$$= 1 + 0 - \frac{1}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x-1}{x}$$

b) Etudions le signe de $f'(x)$ sur $]\,0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur $]\,0\,;+\infty[$

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $x > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x - 1$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc pour tout $x \in]\,0\,;1[$; $f'(x) < 0$

pour tout $x \in]\,1\,;+\infty[$; $f'(x) > 0$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]\,0\,;1[$ et strictement croissante sur $]\,1\,;+\infty[$

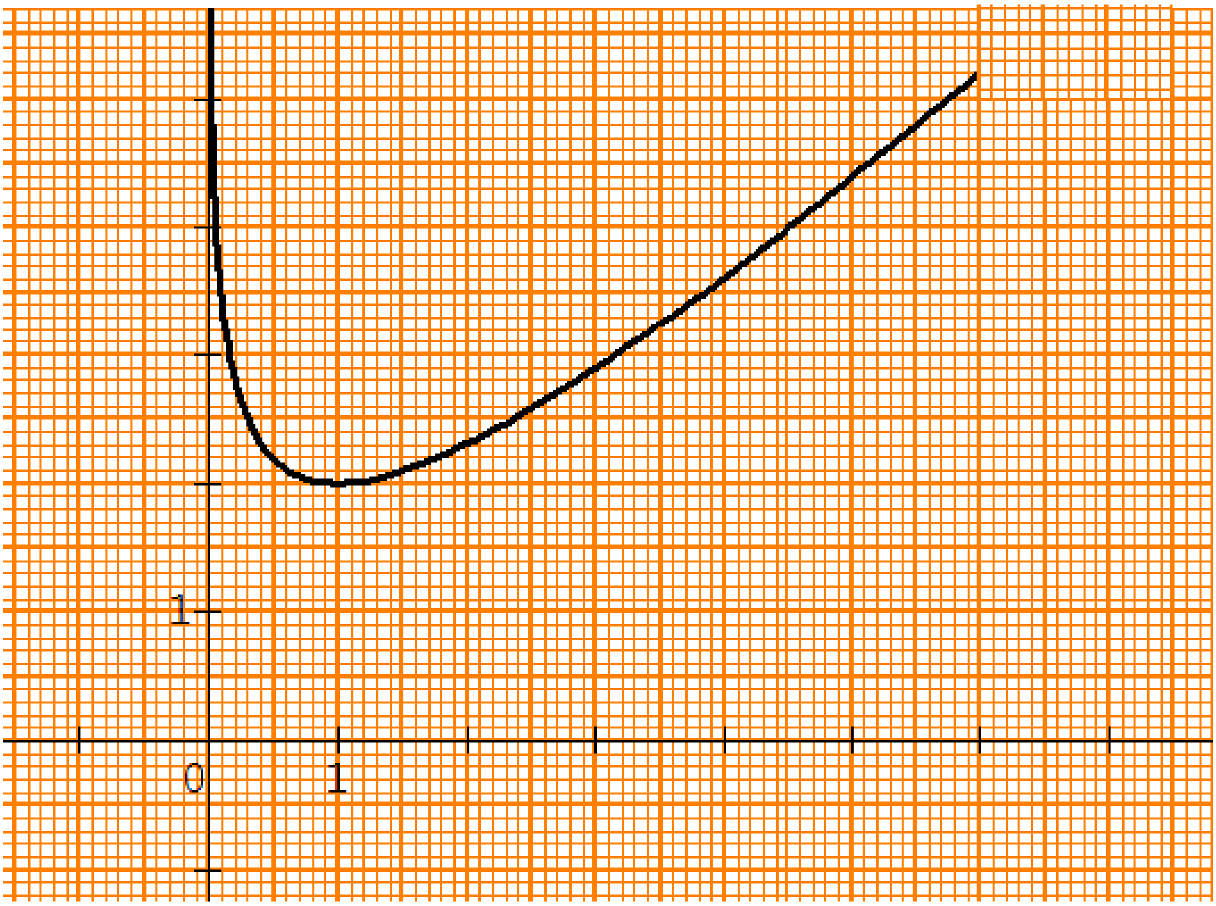
Dressons le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4- a) complétons le tableau suivant

x	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\mathbf{2,2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2,3}$	$\mathbf{2,9}$	$\mathbf{3,61}$	$\mathbf{4,39}$	$\mathbf{5,21}$

b) Construisons (C_f) ***sur*** $]\,\mathbf{0}\,;\mathbf{6}\,]$



5- a) Démontrons que pour tout x de l'intervalle $]\,\mathbf{0}\,;+\infty[$ ***,*** $f(x) \geq 2$

On déduit de la question 3-b) que 2 est le minimum absolu de f sur $]\,0\,;+\infty[$, donc pour tout x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$, $f(x) \geq 2$

b) Déduisons de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ ***sur*** $]\,\mathbf{0}\,;+\infty[$

Dans la question précédente on a montré que pour tout x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$, $f(x) \geq 2$; alors qu'un nombre réel supérieur à 2 ne peut être égal à 0 donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]\,0\,;+\infty[$

6- a) Calculons $h'(x)$

Pour tout $x \in]\,0;+\infty[$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - x\ln x\right)'$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (2x)' - (x\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x + 2 - ((x)' \times \ln x \; + \; (\ln x)' \times x)$$

$$= x + 2 - \left(1 \times \ln x \; + \; \frac{1}{x} \times x\right)$$

$$= x + 2 - \left(\ln x \; + \; \frac{x}{x}\right)$$

$$= x + 2 - (\ln x \; + \; 1)$$

$$= x + 2 - \ln x - \; 1$$

$$= x + 1 - \ln x$$

On remarque pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $h'(x) = f(x)$
Donc la fonction h est une primitive de la fonction f

b) Calculons l'aire en $\mathbf{cm^2}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

La partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$, est définie par

$$\mathcal{A} = \int_1^3 f(x)\,dx \times ua \quad ; \quad avec \quad ua = OI \times OJ\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \int_1^3 f(x)\,dx \times ua$$

$$= [h(x)\,]_1^3 \times 4\ cm^2$$

$$= \big(h(3) - h(1)\big) \times 4\ cm^2$$

$$= \left[\left(\frac{21}{2} - 3\ln 3\right) - \left(\frac{5}{2}\right)\right] \times 4\ cm^2$$

$$= \left(\frac{21}{2} - \frac{5}{2} - 3\ln 3\right) \times 4\ cm^2$$

$$= (8 - 3\ln 3) \times 4\ cm^2$$

$$= 18\,,82\ cm^2$$

Problème 06

1- ***a) Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f***

$$x \in D_f \iff x \neq 0 \quad \text{et} \quad x > 0$$
$$\iff \quad x > 0$$

Donc $D_f =]\,0; +\infty[$

b) Justifions que $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}(\,1 - x + 2x\ln x\,)}$

$$\frac{1}{x}(\,1 - x + 2x\ln x\,) = \frac{1}{x} \times 1 - \frac{1}{x} \times x + \frac{1}{x} \times 2x\ln x$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{x} + \frac{2x\ln x}{x}$$
$$= \frac{1}{x} - 1 + 2\ln x$$
$$= f(x)$$

Donc $f(x) = \frac{1}{x}(\,1 - x + 2x\ln x\,)$

a) Montrons que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\, \frac{1}{x}(\,1 - x + 2x\ln x\,) \right]$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\,1 - x + 2x\ln x\,) = 1 \end{cases}$

b) Calculons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln x\right)$$

$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2- a) Justifions que pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1 + 2\ln x\right)'$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)' - (1)' + (2\ln x)'$$

$$= \frac{-1}{x^2} - 0 + 2\times\frac{1}{x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{2x}{x^2}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2}$$

b) Etudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2x-1$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Donc pour tout $x \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) < 0$

pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) > 0$

c) Déduisons de ce qui précède les variations de f

On déduit du signe de $f'(x)$ que :
f est strictement décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

3- a) Montrons que le point $A(\,1\,;0\,)$ appartient à la courbe (C_f)

Le point $A(\,1\,;0\,)$ appartient à la courbe (C_f) si et seulement si :
$1 \in D_f$ et $f(1) = 0$

- $D_f =]\,0;+\infty[$ donc $1 \in D_f$
- $f(1) = \frac{1}{1} - 1 + 2\ln(1) = 1 - 1 = 0$; car $\ln(1) = 0$

On conclut donc que le point $A(\,1\,;0\,)$ appartient à la courbe (C_f)

b) Calculons les valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(0,2)$ et $f(0,3)$

$$f(0{,}2) = \frac{1}{0{,}2} - 1 + 2\ln(0{,}2) \approx 0{,}781$$

$$f(0{,}2) = \frac{1}{0{,}3} - 1 + 2\ln(0{,}3) \approx -0{,}075$$

Déduisons de ce qui précède que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse α compris entre 0,2 et 0,3

La fonction f est strictement décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$; or $]0{,}2\,;0{,}3[\, \subset \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

Donc f est aussi strictement décroissante sur]0,2 ; 0,3[, de plus $f(0{,}2) > 0$ et $f(0{,}3) < 0$; on en déduit que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse α compris entre 0,2 et 0,3 .

Remarque

la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse α signifie que $f(\alpha) = 0$

c) Dressons le tableau de variation de f

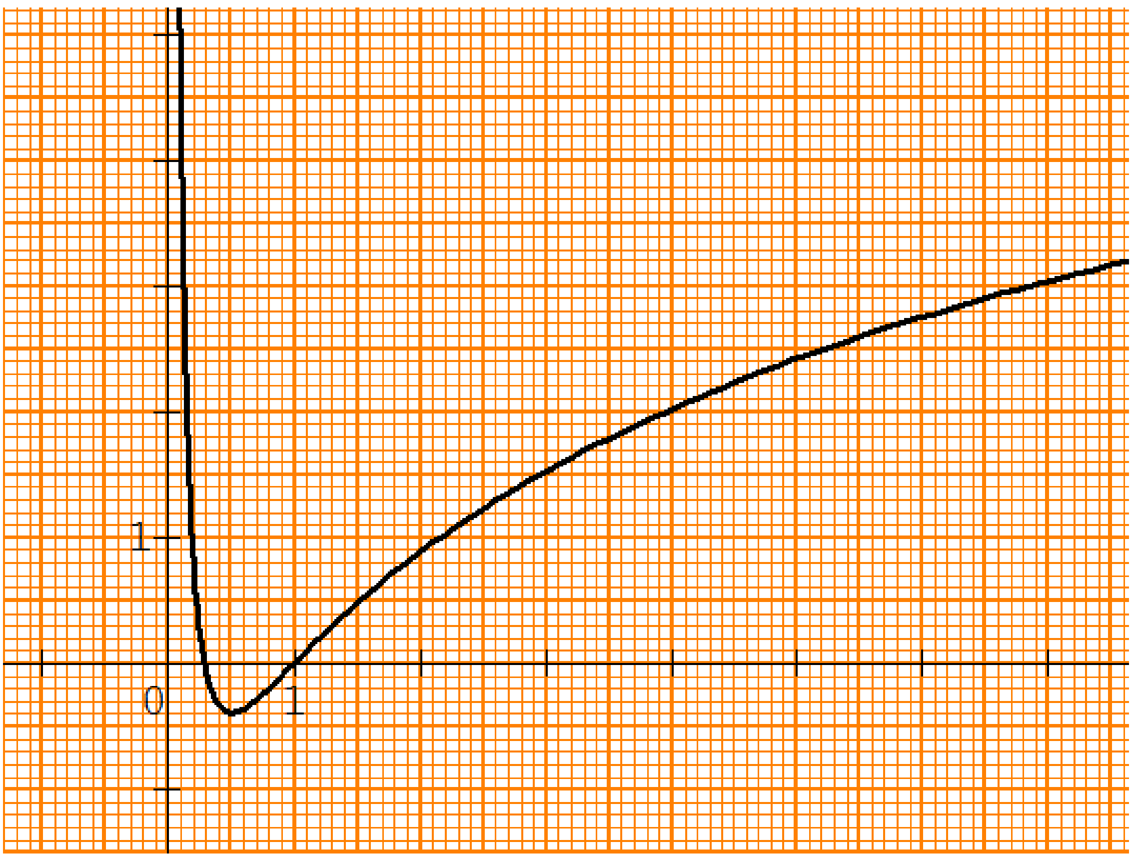
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-0,386$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0,5) = \frac{1}{0,5} - 1 + 2\ln(0,5) \approx -0,386$$

4- a) Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$	**0, 5**	**0, 9**	**1, 5**	**2**	**2, 4**	**2, 8**

b) Construisons la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J)



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

5- a) Déterminons l'ensemble de définition D_F de la fonction F

$x \in D_F \iff x > 0$

Donc $D_F =]\,0; +\infty[$

b) Montrons que pour tout réel x de D_F on a : $F'(x) = f(x)$

Pour tout $x \in]\,0\,; +\infty[$, $F'(x) = \big((2x+1)\ln x - 3x\big)'$

$$= \big((2x+1)\ln x\big)' - (3x)'$$

$$= [(2x+1)' \times \ln x + (\ln x)' \times (2x+1)] - 3$$

$$= \left[2 \times \ln x + \frac{1}{x} \times (2x+1)\right] - 3$$

$$= 2\ln x + \frac{2x+1}{x} - 3$$

$$= 2\ln x + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - 3$$

$$= 2\ln x + 2 + \frac{1}{x} - 3$$

$$= \frac{1}{x} - 3 + 2 + 2\ln x$$

$$= \frac{1}{x} - 1 + 2\ln x$$

$$= f'(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f

c) Calculons l'aire en $\mathbf{cm^2}$ de la partie du plan délimitée par l'axe (OI) , les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ et la courbe (C_f)

La partie du plan délimitée par l'axe (OI) , les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ et la courbe (C_f), est définie par

$$\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)\,dx \times ua \quad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)\,dx \times ua$$
$$= \left[F(x)\right]_1^4 \times 4\ cm^2$$
$$= \left(F(4) - F(1)\right) \times 4\ cm^2$$
$$= [\ (9\ln 4 - 12) - (-3)] \times 4\ cm^2$$
$$= (9\ln 4 - 12 + 3) \times 4\ cm^2$$
$$= (9\ln 4 - 9) \times 4\ cm^2$$
$$= 13\,,91\ cm^2$$

Problème 07 (Bac 2017)

1- a) Justifions que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x+2)e^x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-xe^x + 2e^x)$$

$$= 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

b) Interprétons graphiquement le résultat de la question précédente.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \implies$ La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

2- Justifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x+2)e^x$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+2) = -\infty \end{cases}$

3- a) Démontrons que , pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x+1)e^x$

pour tout nombre réel x , $f'(x) = \left((-x+2)e^x\right)'$

$$= (-x+2)' \times e^x + (e^x)' \times (-x+2)$$

$$= -1 \times e^x + e^x \times (-x+2)$$

$$= \left(-1 + (-x+2)\right)e^x$$

$$= (-x+1)e^x$$

b) Vérifions que $f'(1) = 0$

$f'(1) = (-1+1)e^1$

$= 0 \times e$

$= 0$

c) Justifions que f est croissante sur $]-\infty;\mathbf{1}[$ ***et décroissante sur*** $]\mathbf{1};+\infty[$

Etudions d'abord le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-x+1)$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc pour tout $x \in]-\infty;1[$, $f'(x) > 0$

pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) < 0$

On conclut donc que f est croissante sur $]-\infty;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$

d) Dressons le tableau de variation de f

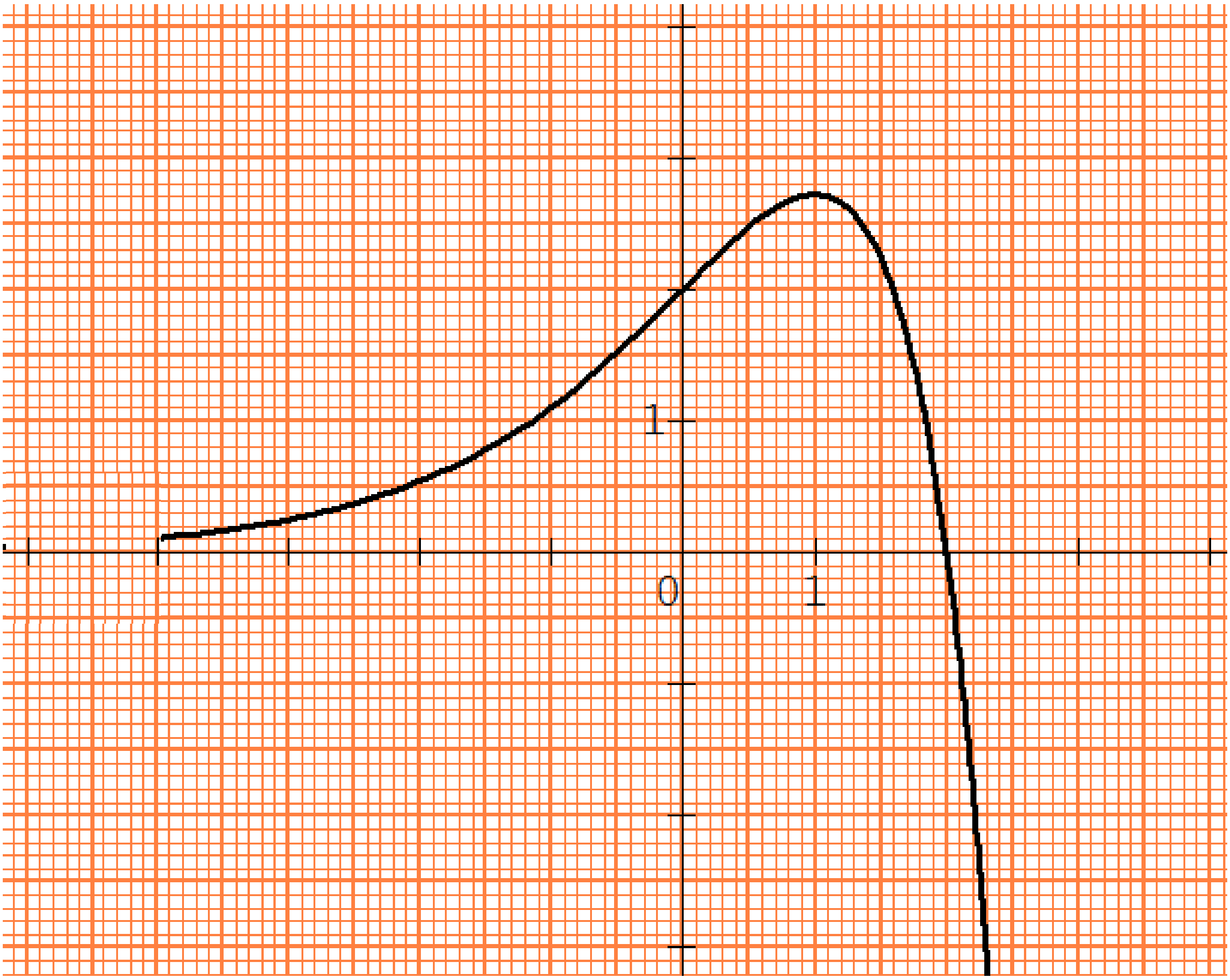
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = (-x+2)e^x = (-1+2)e^1 = e$

4- a) complétons le tableau ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$2,5$
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,1	$\mathbf{0,2}$	0,5	$\mathbf{1,1}$	$\mathbf{2}$	2,7	$\mathbf{0}$	$-6,1$

b) Traçons la courbe (C) ***sur l'intervalle*** $[-4\,;2,5]$



5- a) Justifions que , pour tout $x \in]-\infty\,;2]$, $f(x) \geq 0$

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

pour tout $x \in]-\infty\,;2]$, $x \leq 2 \implies -x \geq -2$

$\implies -x + 2 \geq -2 + 2$

$\implies -x + 2 \geq 0$

$\implies (-x + 2) \times e^x \geq 0 \times e^x$

$\implies f(x) \geq 0$

b) Justifions que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \big((-x+3)e^x\big)'$

$$= (-x+3)' \times e^x \ + \ (e^x)' \times (-x+3)$$

$$= -1 \times e^x \ + \ e^x \times (-x+3)$$

$$= \big(-1 + (-x+3)\big)e^x$$

$$= (-x+2)e^x$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

c) Calculons , en $\mathbf{cm^2}$, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\boldsymbol{C})$, la droite $(\boldsymbol{OI})$ et les droites d'équation $\boldsymbol{x = -2}$ et $\boldsymbol{x = 2}$

L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OI) et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$, est définie par :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \times ua \qquad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \times ua$$

$$= \big[F(x)\,\big]_{-2}^{2} \times 4\ cm^2$$

$$= \big(F(2) - F(-2)\big) \times 4\ cm^2$$

$$= [\ e - (-5e^{-2})] \times 4\ cm^2$$

$$= (\ e + 5e^{-2}) \times 4\ cm^2$$

$$= 13\ ,58\ cm^2$$

Problème 08

1- a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - 1 + e^{-x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$

b) Vérifions que pour x différent de 0, on a : $f(x) = -x\left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$

pour x différent de 0 , $f(x) = x - 1 + e^{-x}$

$$= -x\left(\frac{x}{-x} - \frac{1}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right)$$

$$= -x\left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{xe^x}\right) = +\infty \end{cases}$

Remarque

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, comme $x \to -\infty$ alors $x < 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^x} = -\infty$

2- a) Pour tout *x* appartenant de $\mathbb{R}$, calculons $f'(x)$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - 1 + e^{-x})'$$
$$= (x)' - (1)' + (e^{-x})'$$
$$= 1 - 0 + (-x)' \times e^{-x}$$
$$= 1 + (-1) \times e^{-x}$$
$$= 1 - e^{-x}$$

b) Justifions que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \mathbf{0}[$ ***et strictement croissante sur*** $]\mathbf{0}; +\infty[$

Etudions d'abord le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^{-x}$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Donc pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) < 0$

pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$

On conclut donc que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

3- a) Justifions que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

Calculons $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}[x - 1 + e^{-x} - (x - 1)]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x - 1 + e^{-x} - x + 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$$
$$= 0$$

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Etudions les positions relatives de (C) et (D)

Les positions relatives de (C) et (D) dépendent du signe de $(f(x) - y)$

Or $f(x) - y = e^{-x} > 0$

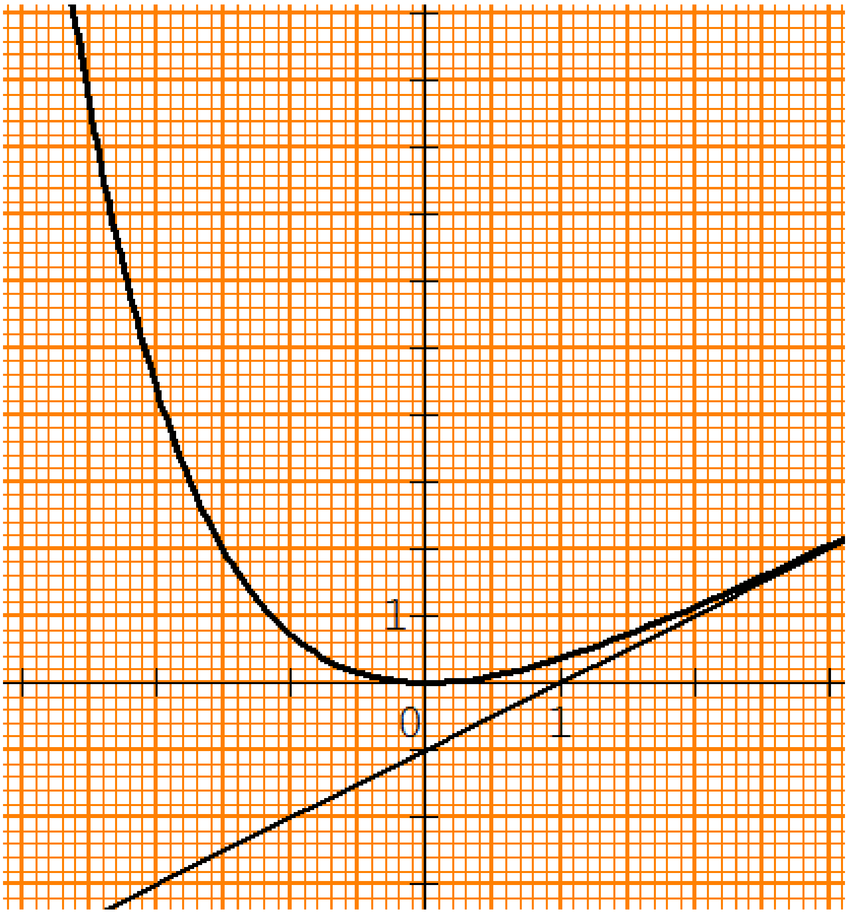
Donc la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $\mathbb{R}$

4- a) Complétons le tableau suivant

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	**16**	**4,4**	**0,7**	**0**	**0,4**	**1,1**	**2**

b) Traçons (D) (voir la courbe)

c) Construisons (C) sur l'intervalle $[-3\,;3\,]$



5- a) Justifions que F est une primitive de f

$$Pour\ tout\ x \in \mathbb{R},\ \ F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - e^{-x} + 1\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (x)' - (e^{-x})' + (1)'$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x - 1 - (-e^{-x}) + 0$$

$$= x - 1 + e^{-x}$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f

b) Calculons le nombre réel : $\boldsymbol{I = F(3) - F(1)}$

$$I = F(3) - F(1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3^2 - 3 - e^{-3} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 - 1 - e^{-1} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 9 - 3 - e^{-3} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1 - 1 - e^{-1} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} - 2 - e^{-3}\right) - \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{9}{2} - 2 - e^{-3} - \frac{1}{2} + e^{-1}$$

$$= 2 - e^{-3} + e^{-1}$$

$$= 2\,,32$$

Problème 09 (BAC 2009)

Partie A

1- a) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x - 3 + e^x)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x - 3 + e^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$

2- a) Calculer $g'(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (-2x - 3 + e^x)'$

$$= (-2x)' - (3)' + (e^x)'$$

$$= -2 - 0 + e^x$$

$$= e^x - 2$$

b) Justifier que g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\boldsymbol{\ln 2}\,[$ ***et strictement croissante sur*** $]\,\boldsymbol{\ln 2}\,;\,+\infty[$

Etudions d'abord le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

Tableau de signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc pour tout $x \in]-\infty\,;\ln 2\,[$, $g'(x) < 0$

pour tout $x \in]\ln 2\,;\,+\infty[$, $g'(x) > 0$

On conclut donc que g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2\,[$ et strictement croissante sur $]\ln 2\,;\,+\infty[$

c) Dressons le tableau de variation de g

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\ln 2 - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(\ln 2) = -2 \times \ln 2 - 3 + e^{\ln 2} = -2\ln 2 - 3 + 2 = -2\ln 2 - 1$

3- *a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur* $\mathbb{R}$ **.**

g est dérivable et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2\,[$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $g(\ln 2)$ sont de signes contraires alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty\,;\ln 2\,[$.

g est dérivable et strictement croissante sur $]\ln 2\,;+\infty\,[$

Comme $g(\ln 2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ sont de signes contraires alors l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\ln 2\,;+\infty[$.

On conclut donc que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

b) Justifier que $1,9 < \beta < 2$

1,9 et 2 appartiennent à l'intervalle $]\ln 2\,;+\infty[$

Calculons $g(1,9)$ et $g(2)$

$g(1,9) = -2 \times 1,9 - 3 + e^{1,9} = -6,8 + e^{1,9} = -0,11$

$g(2) = -2 \times 2 - 3 + e^{2} = -7 + e^{2} = 0,39$

Comme $g(1,9)$ et $g(2)$ sont de signes contraires alors $1,9 < \beta < 2$

c) Etudier le signe de g suivant les valeurs de x .

Tableau de variation de g avec α et β

x	$-\infty$		α		$\ln 2$		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2[$ *et* $g(\alpha) = 0$ donc :

Pour tout $x \in]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) > 0$

Pour tout $x \in]\alpha\,;\ln 2[$, $g(x) < 0$

g est strictement croissante sur $]\ln 2\,;+\infty[$ *et* $g(\beta) = 0$ donc :

Pour tout $x \in]\ln 2\,;\beta[$, $g(x) < 0$

Pour tout $x \in]\beta\,;+\infty[$, $g(x) > 0$

On conclut donc que

Pour tout $x \in]-\infty\,;\alpha[\, \cup\,]\beta\,;+\infty[$, $g(x) > 0$

Pour tout $x \in]\alpha\,;\beta[$, $g < 0$

4- a) Justifions que la droite $(\boldsymbol{D})$ d'équation $\boldsymbol{y = -2x - 3}$ est une asymptote à $(\boldsymbol{C})$ en $-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - y)$

$$\lim_{x \to -\infty} (g(x) - y) = \lim_{x \to -\infty} [-2x - 3 + e^x - (-2x - 3)]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} (-2x - 3 + e^x + 2x + 3)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} e^x$$
$$= 0$$

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = -2x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier les positions relatives de $(\boldsymbol{D})$ et $(\boldsymbol{C})$

Les positions relatives de (C) et (D) dépendent du signe de $(f(x) - y)$

Or $f(x) - y = e^x > 0$

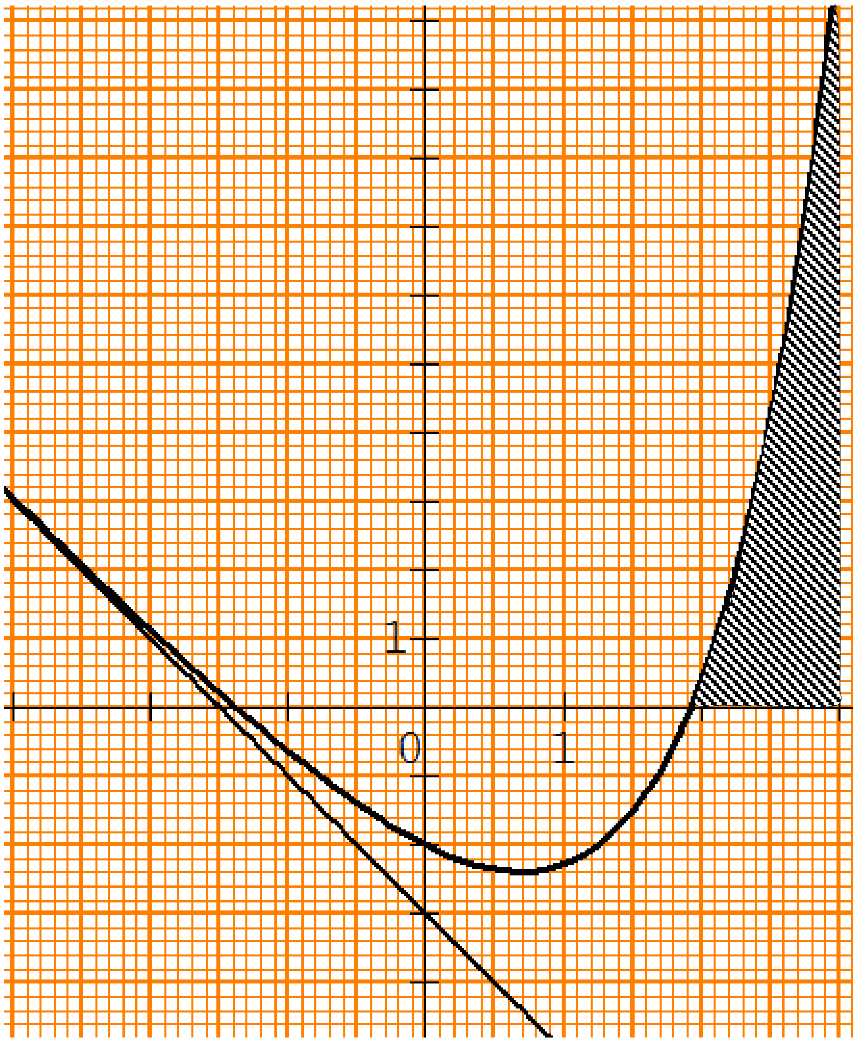
Donc la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $\mathbb{R}$

5- a) complétons le tableau des valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	2	3
Arrondi d'ordre 1 de $g(x)$	**3**	**1,1**	**0,4**	**11,1**

b) Traçons $(\boldsymbol{D})$ (voir la courbe)

c) Construire (C) sur l'intervalle $[-3\,;3\,]$. On prendra $\ln 2 = 0,69$



Partie B

1- a) Déterminons une primitive G de g sur $[-3\,;3\,]$

Une primitive de $-2x - 3$ sur $[-3\,;3\,]$ est $-x^2 - 3x + c$; avec $c \in \mathbb{R}$
Une primitive de e^x sur $[-3\,;3\,]$ est $e^x + c$; avec $c \in \mathbb{R}$
On en déduit qu'une primitive G de g sur $[-3\,;3\,]$ est $-x^2 - 3x + e^x + c$; avec $c \in \mathbb{R}$

b) Calculer $I = \int_2^3 g(x)\,dx$

$$I = \int_2^3 g(x)\,dx$$
$$= \left[G(x)\right]_2^3$$
$$= G(3) - G(2)$$
$$= \left(-3^2 - 3 \times 3 + e^3\right) - \left(-2^2 - 3 \times 2 + e^2\right)$$
$$= \left(-9 - 9 + e^3\right) - \left(-4 - 6 + e^2\right)$$
$$= \left(-18 + e^3\right) - \left(-10 + e^2\right)$$
$$= -18 + e^3 + 10 - e^2$$
$$= e^3 - e^2 - 8$$
$$\approx 4{,}696$$

2- a) Hachurons la région du plan délimitée par (C) , (OI) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$

(Voir la courbe)

b) Vérifions que l'arrondi d'ordre 2 de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie hachurée est égale à $9,39\ cm^2$.

L'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie hachurée est définie par : $\mathcal{A} = \int_2^3 g(x)\,dx \times ua$; avec $ua = OI \times OJ\ cm^2 = 2\ cm^2$

$$\mathcal{A} = I \times ua$$
$$= 4{,}696 \times 2\ cm^2$$
$$= 9{,}392\ cm^2$$
$$= 9{,}39\ cm^2$$

Problème 10 (Bac Blanc 2012 Lycée Classique d'Abidjan)

Partie A

1- Justifions que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(e^x \times \frac{1}{x+1}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \end{cases}$

Justifions que : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{e^x}{x+1} \\ &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(e^x \times \frac{1}{x+1}\right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} e^x = e^{-1} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \end{cases}$

Justifions que : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{e^x}{x+1} \\ &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(e^x \times \frac{1}{x+1}\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} e^x = e^{-1} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \end{cases}$

Justifions que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$$

2- Vérifions que , pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-\mathbf{1}\}$, $\boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\boldsymbol{xe^x}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)'$

$$= \frac{(e^x)' \times (x+1) - (x+1)' \times e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x \times (x+1) - 1 \times e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

3- Etudions le sens de variation de *f*

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{e^x}{(x+1)^2} > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de x

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Donc pour tout $x \in]-\infty\,;-1\,[\, \cup\,]-1\,;0[$, $f'(x) < 0$

pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$

On conclut donc que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1\,[$ et sur $]-1\,;0[$ et f strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty[$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$0 \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4- Justifions que la droite (T) : $y = \dfrac{e}{4}x + \dfrac{e}{4}$, est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1

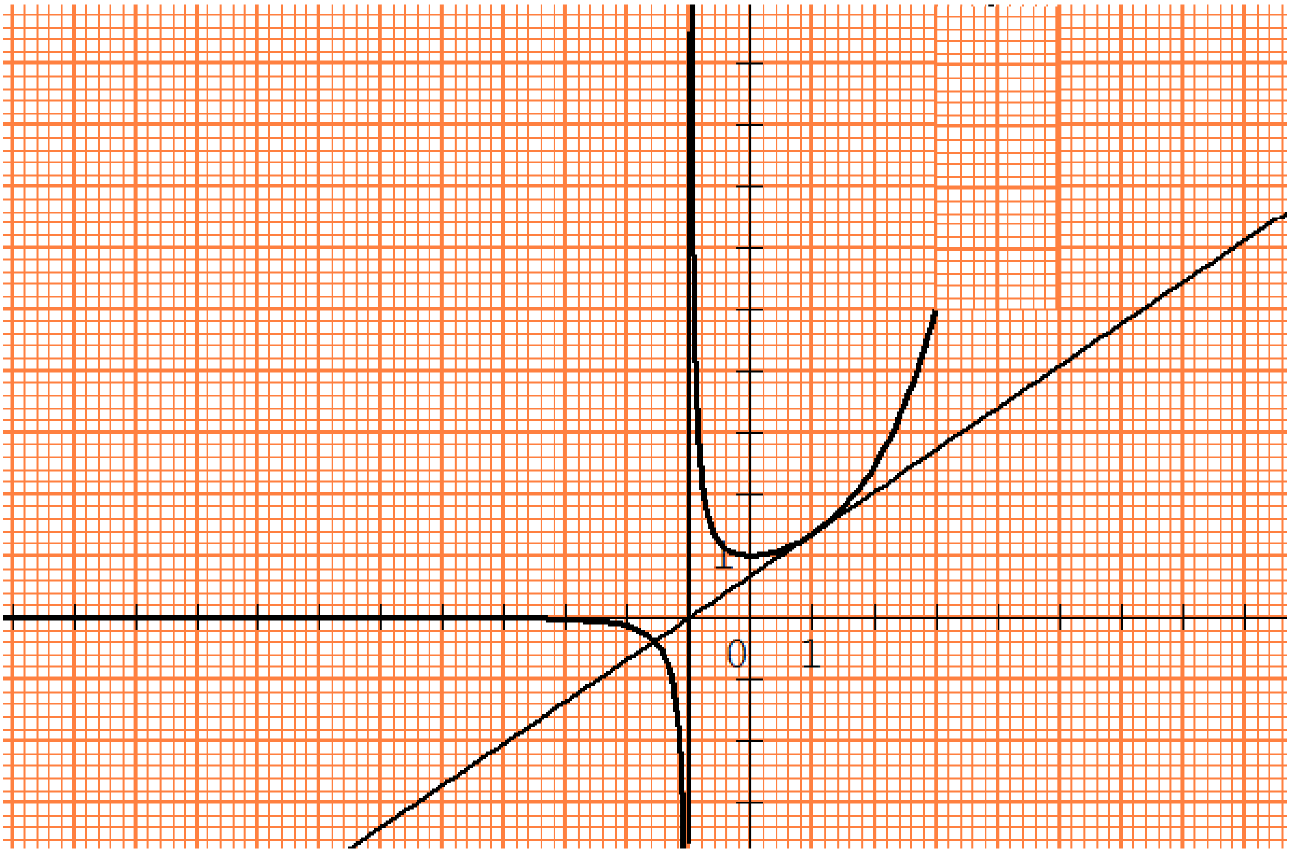
(T) : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$; *or* $f'(1) = \dfrac{e}{4}$ *et* $f(1) = \dfrac{e}{2}$

$$= \frac{e}{4} \times (x-1) + \frac{e}{2}$$

$$= \frac{e}{4}x - \frac{e}{4} + \frac{e}{2}$$

$$= \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$$

5- Traçons la droite (T) puis construire les parties de la courbe (C) relatives à $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;3\right]$



Partie B

1- a) Démontrer que : $\forall\, x \in [\,0\,;1\,]\ ;\ \dfrac{e^x}{2} \leq \dfrac{e^x}{x+1} \leq e^x$

$$\forall\, x \in [\,0\,;1\,]\ ;\ 0 \leq x \leq 1 \implies 0+1 \leq x+1 \leq 1+1$$

$$\implies 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1}$$

$$\implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\implies \frac{1}{2}\times e^x \leq \frac{1}{x+1}\times e^x \leq 1\times e^x$$

$$\implies \frac{e^x}{2} \leq \frac{e^x}{x+1} \leq e^x$$

b) Déduisons de ce qui précède un encadrement de K

$$\forall\, x \in [\,0\,;1\,]\ ;\ \frac{e^x}{2} \leq \frac{e^x}{x+1} \leq e^x \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx \leq K \leq \int_0^1 e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^1 \leq K \leq \left[e^x\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) \leq K \leq \left(e^1 - e^0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(e-1) \leq K \leq (e-1)$$

2- *Interprétons géométriquement l'intégrale K .*

K est l'aire du domaine du plan compris entre (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Déduisons un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2 , du domaine du plan compris entre (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

$$\frac{1}{2}(e-1) \leq K \leq (e-1) \Rightarrow \frac{1}{2}(e-1)\times ua \leq K \times ua \leq (e-1)\times ua$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(e-1)\times 1\,cm^2 \leq \mathcal{A} \leq (e-1)\times 1\,cm^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(e-1)\,cm^2 \leq \mathcal{A} \leq (e-1)\,cm^2$$

$$\Rightarrow 0{,}86\,cm^2 \leq \mathcal{A} \leq 1{,}72\,cm^2$$

Problème 11 (Bac Blanc 2012 Lycée Sainte Marie de Cocody)

Partie A

1- ***Précisons la limite de f en 0***

Par lecture graphique $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2- ***Calculons la valeur du coefficient directeur de la droite (T)***

Soit a le coefficient directeur de la droite (T)

Comme la droite (T) passe par les points A et B alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$a = \frac{2 - 0{,}5}{(4 - \ln 2) - (2{,}5 - \ln 2)}$$

$$= \frac{1{,}5}{4 - \ln 2 - 2{,}5 + \ln 2}$$

$$= \frac{1{,}5}{1{,}5}$$

$$= 1$$

On en déduit que le coefficient directeur de la droite (T) est 1

Remarque

Pour le calcul de la valeur du coefficient directeur de la droite (T) qui passe par les points A et B , on pouvait aussi utiliser la formule $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

3- ***Précisons le signe de la fonction dérivée f' de f sur les intervalles $]\,0\,;0{,}5\,]$ et $[\,2\,;5\,]$***

Sur] 0 ; 0,5] la courbe (C) est croissante donc pour tout $x \in]\,0\,;0{,}5\,]$, $f'(x) > 0$

Sur [2 ; 5] la courbe (C) est décroissante donc pour tout $x \in [\,2\,;5\,]$, $f'(x) < 0$

4- ***Donnons la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum puis précisons ce maximum***

La fonction f atteint son maximum au point de coordonnées (1 ; 2)

Donc la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum est $x = 1$ et ce maximum est 2

5- *Déterminons le nombre de solutions de l'équation* $f(x) = 0$

La courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

Partie B

1- *Calculons la limite de* f *en* 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(3 - x + \ln x)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (3 - x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

***Calculons la limite de* f *en* $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(3 - x + \ln x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x} - 1 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -1 \end{cases}$

2- Calculons $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]\,0\,;+\infty[$

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f(x) = (3 - x + \ln x)'$

$$= (3)' - (x)' + (\ln x)'$$

$$= 0 - 1 + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-x+1}{x}$$

3- a) Calculer

b) Ecrivons une équation de la droite (T)

Une équation de la droite (T) est de la forme $y = ax + b$

Où a est le coefficient directeur de (T) ; de plus d'après la question A-2 , on a : $a = 1$

La droite (T) passe par le point $A(\,0{,}5\ ;\ 2{,}5 - \ln 2\,)$ donc $y_A = ax_A + b$

Déterminons la valeur de b

$$y_A = ax_A + b \implies b = y_A - ax_A$$
$$\implies b = 2{,}5 - \ln 2 - 1 \times 0{,}5$$
$$\implies b = 2{,}5 - \ln 2 - 0{,}5$$
$$\implies b = 2{,}5 - 0{,}5 - \ln 2$$
$$\implies b = 2 - \ln 2$$

On déduit qu'une équation de la droite (T) est : $y = x + 2 - \ln 2$

4- a) Justifier que f est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty[$

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{-x+1}{x}$

Or pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $x > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x+1$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	0	1	$+\infty$
$-x+1$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

Donc pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, $f'(x) > 0$

pour tout $x \in]\,1\,;\,+\infty[$, $f'(x) < 0$

On conclut donc que f est strictement croissant sur $]\,0\,;1\,[$ et strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty[$

b) Dressons le tableau de variation de f sur $]\,\mathbf{0}\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

5- *Justifions que pour tout nombre réel x appartenant à* $]\,\mathbf{0}\,;+\infty[$ ***;*** $\boldsymbol{f(x) \leq 2}$

A l'aide du tableau de variation de , on constate que 2 est le maximum de f sur $]\,0\,;+\infty[$:

On en déduit que pour tout nombre réel x appartenant à $]\,0\,;+\infty[$; $f(x) \leq 2$

6- *a) Justifions que l'équation* $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ***admet une solution*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***comprise entre*** $\mathbf{4}$ ***et*** $\mathbf{5}$

Calculons $f(4)$ et $f(5)$

$f(4) = 3 - 4 + \ln 4 = -1 + \ln 4 \approx 0{,}39$

$f(5) = 3 - 5 + \ln 5 = -2 + \ln 4 \approx -0{,}39$

f est continue et strictement décroissante sur $]\,4\,;5\,[$; de plus $f(4)$ et $f(5)$ sont de signes contraires donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α comprise entre 4 et 5

b) Donnons l'arrondi de α au centième près à l'aide de ce tableau

x	4,500	4,501	4,502	4,503	4,504	**4,505**	**4,506**	4,507	4,508	4,509	4,510
Signe de $f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

On constate dans le tableau ci-dessus que le signe de $\boldsymbol{f(x)}$ change de signe entre $\mathbf{4,505}$ et $\mathbf{4,506}$; on en déduit donc que l'arrondi de $\boldsymbol{\alpha}$ au centième près est $\mathbf{4,51}$

Partie C

1- Traçons sur le graphique la droite (D') d'équation $y = 3 - x$
(Voir la courbe)

2- Etudions la position de (C) par rapport à (D')

La position de (C) par rapport à (D') dépend du signe de $f(x) - y$

Or $f(x) - y = 3 - x + \ln x - (3 - x)$
$= \ln x$

Alors que : pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, $\ln x < 0$
pour tout $x \in]\,1\,;+\infty\,[$, $\ln x > 0$

On conclut donc que la courbe (C)est en dessous de (D') sur $]\,0\,;1\,[$ et au-dessus de (D') sur $]\,1\,;+\infty\,[$

3- Hachurons le domaine délimité par la courbe (C) , la droite (D') et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

(Voir la courbe)

4- a) Justifions que g est une primitive de la fonction $\ln x$.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $g(x) = (-x + x\ln x)'$

$$= (-x)' + (x\ln x)'$$

$$= -1 + [(x)' \times \ln x + (\ln x)' \times x]$$

$$= -1 + \left(1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x\right)$$

$$= -1 + \left(\ln x + \frac{x}{x}\right)$$

$$= -1 + \ln x + 1$$

$$= \ln x$$

Donc g est une primitive de la fonction $\ln x$.

b) En déduire en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré à la question 3 de la partie C

L'aire du domaine hachuré à la question 3 de la partie C est définie par :

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - y)\, dx \times ua \quad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - y)\, dx \times 4\ cm^2$$

$$= \int_1^3 \ln x\, dx \times 4\ cm^2$$

$$= [g(x)]_1^3 \times 4\ cm^2$$

$$= (g(3) - g(1)) \times 4\ cm^2$$

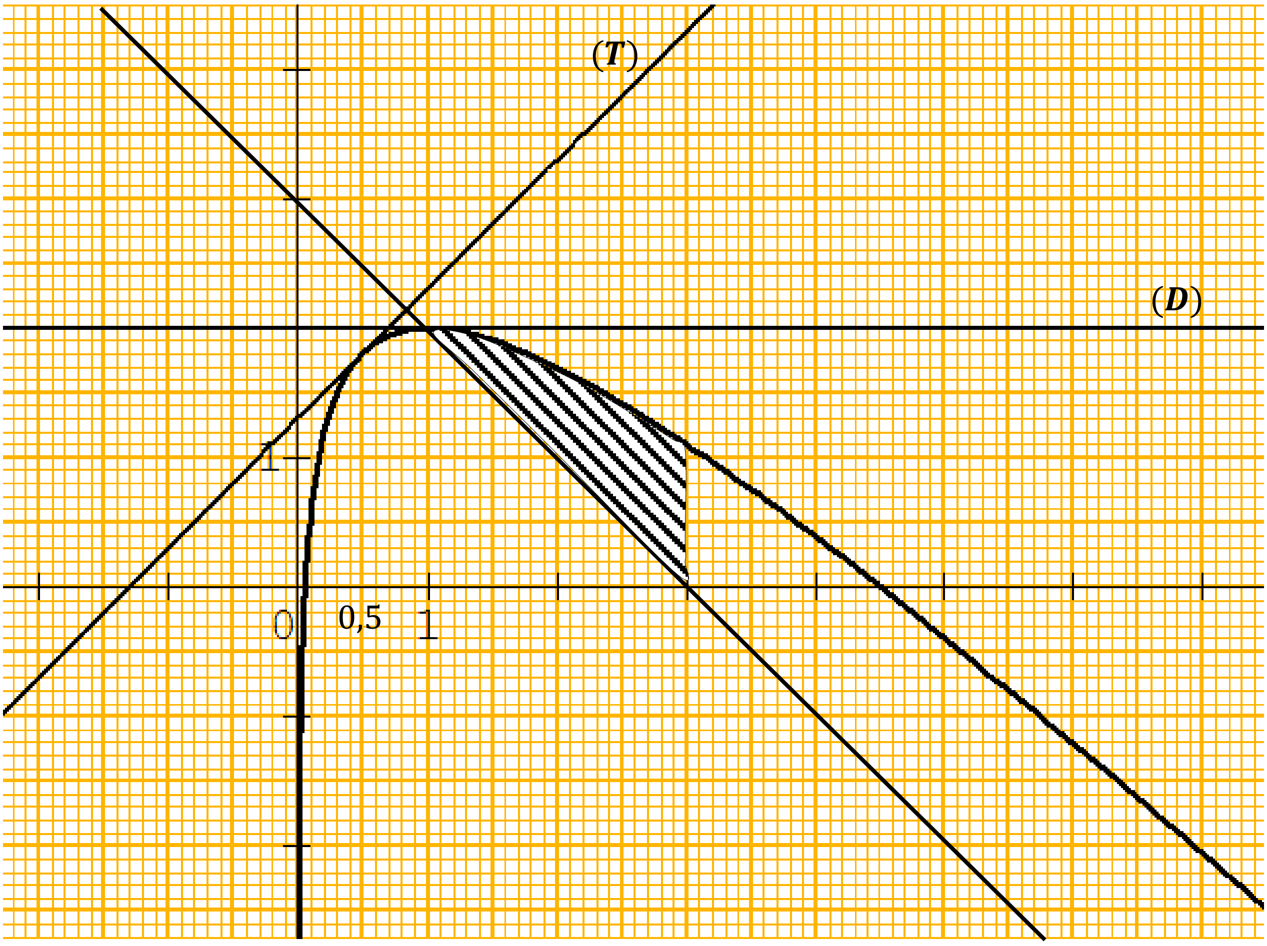
$$= (-3 + 3\ln 3 - (-1 + 1 \times \ln 1)) \times 4\ cm^2$$

$$= (-3 + 3\ln 3 - (-1)) \times 4\ cm^2$$

$$= (-3 + 3\ln 3 + 1) \times 4\ cm^2$$

$$= (-2 + 3\ln 3) \times 4\ cm^2$$

$$= 5,19\ cm^2$$


(T)
(D)
1
0
0,5
1

Problème 12

Partie A

1) ***Justifions que*** $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)=0}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-2x+3)e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(-2xe^x+3e^x)$$
$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

Interprétons graphiquement le résultat obtenu

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \implies$ La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

2) ***a- Vérifions que pour tout x élément de*** $]-\infty;\mathbf{2}]$ **,** $\boldsymbol{f'(x)=(-2x+1)e^x}$

Pour tout x élément de $]-\infty;2]$, $f'(x) = ((-2x+3)e^x)'$

$$= (-2x+3)'\times e^x + (e^x)'\times(-2x+3)$$
$$= -2\times e^x + e^x\times(-2x+3)$$
$$= \big(-2+(-2x+3)\big)e^x$$
$$= (-2x+1)e^x$$

b- Etudions le signe de la dérivée $\boldsymbol{f'(x)}$ ***sur*** $]-\infty;\mathbf{2}]$ **.**

Pour tout $x\in]-\infty;2]$, $e^x>0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-2x+1$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$

pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;2\right[$, $f'(x) < 0$

Déduisons de ce qui précède les variations de f sur $]-\infty;\mathbf{2}\,]$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;2\right[$

c- Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	e

3) Déterminons les coordonnées du point A

Comme le point A est le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses alors $y_A = 0$ et x_A est solution de l'équation $f(x) = 0$

Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \implies (-2x+3)e^x = 0$$

$$\implies -2x+3 = 0 \quad ; \quad car\ \ e^x \neq 0$$

$$\implies -2x = -3$$

$$\implies x = \frac{-3}{-2}$$

$$\implies x = \frac{3}{2}$$

On en déduit que les coordonnées du point A sont $\left(\frac{3}{2}\,;\,0\right)$

Déterminons les coordonnées du point B

Comme le point B est le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées alors $x_B = 0$ et $y_B = f(0)$

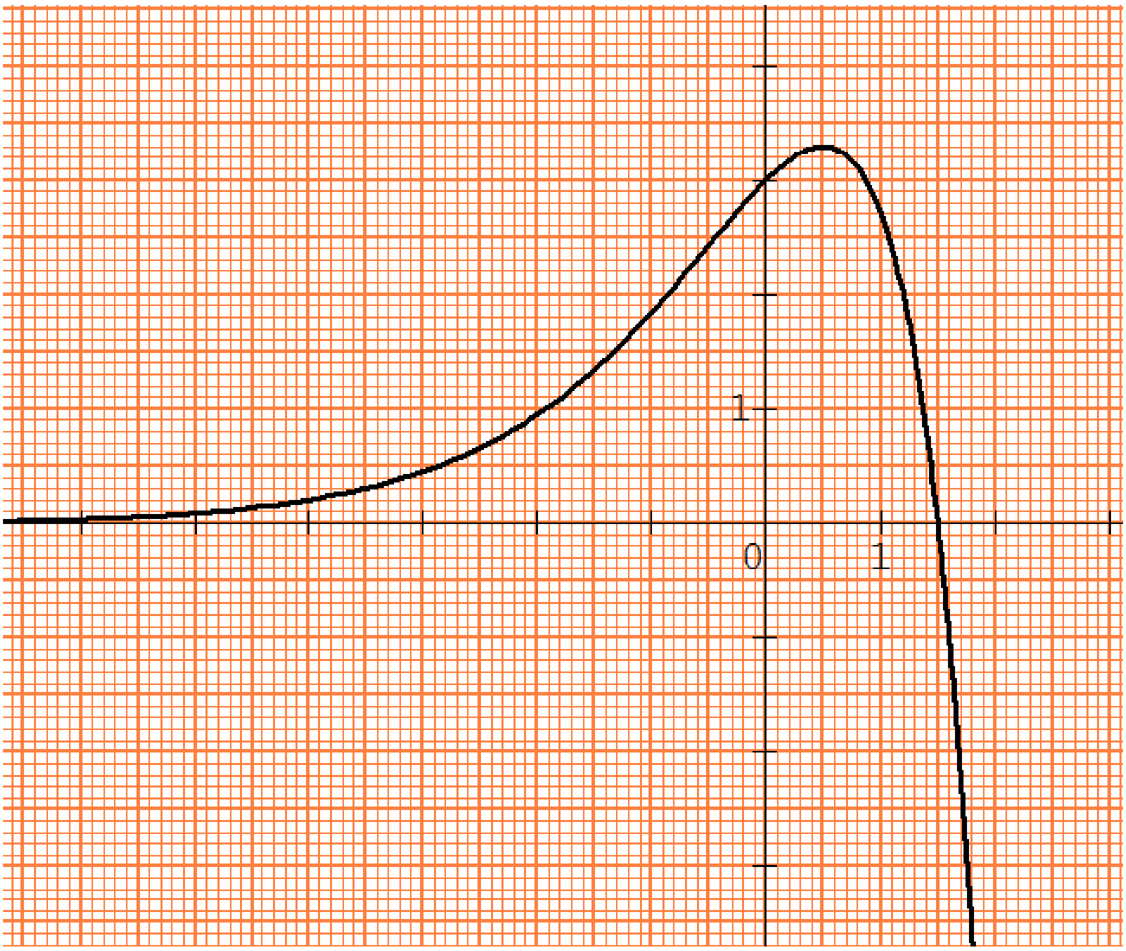
$$f(0) = (-2 \times 0 + 3)e^0$$
$$= 3 \quad ; \quad \text{car} \quad e^0 = 1$$

On en déduit que les coordonnées du point B sont (0 ; 3)

4) ***complétons le tableau des valeurs ci-dessous.***

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4	**0, 9**	1,8	**3**	3,3	**2, 7**	**0**	$-7{,}4$

1) Construisons (C) sur l'intervalle $]-\infty; \mathbf{2}]$



Partie B

1) ***Vérifions que F est une primitive de f sur*** $]-\infty; \mathbf{2}]$

Pour tout $x \in]-\infty; 2]$, $F'(x) = ((-2x+5)e^x)'$

$$= (-2x+5)' \times e^x + (e^x)' \times (-2x+5)$$

$$= -2 \times e^x + e^x \times (-2x+5)$$

$$= \big(-2 + (-2x+5)\big)e^x$$

$$= (-2x+3)e^x$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $]-\infty; 2]$

2) ***a- Calculons l'intégrale*** $\boldsymbol{M = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx}$

$$M = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$$

$$= [F(x)]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= F\left(\frac{3}{2}\right) - F(0)$$

$$= 2e^{\frac{3}{2}} - 5$$

$$= 3,96$$

b- Donnons une interprétation graphique du nombre réel $\boldsymbol{M}$ **.**

M est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OI) et les droites d'équation $x = \frac{3}{2}$ et $x = 0$.

3) ***a- Vérifions que l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du triangle OAB est*** $\mathbf{2,25}$ **.**

Le triangle OAB est rectangle en O donc $\mathcal{A} = \dfrac{OA \times OB}{2} \times ua$ avec $ua = 1\ cm^2$

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} \times 1\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{9}{2}}{2}\ cm^2$$

$$= \frac{9}{4}\ cm^2$$

$$= 2{,}25\ cm^2$$

b- Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\boldsymbol{C})$ et le segment $[\boldsymbol{AB}]$.

L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et le segment $[AB]$ est égal à l'aire du triangle OAB ; donc cette aire est égal à $2{,}25\ cm^2$

Problème 13 (Bac 2013)

Partie A

1- a) Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + e^x)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

b) Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + e^x)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

2- a) Justifions que pour tout nombre réel x : $f'(x) = 1 + e^x$

Pour tout nombre réel x : $f'(x) = (x + e^x)'$

$$= (x)' + (e^x)'$$

$$= 1 + e^x$$

b) Etudions les variations de f

Pour tout nombre réel x : $e^x > 0$

Donc pour tout nombre réel x : $f'(x) = 1 + e^x > 0$

Par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Dressons son tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3- *a) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$*

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ sont de signes contraires donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

b) Justifions que : $-0,6 < \alpha < -0,5$

4- *a) Justifions que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$*

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}(x + e^x - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x$$

$$= 0$$

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b) Etudions les positions relatives de (D) et (C)

Les positions relatives de (D) et (C) dépendent du signe de $f(x) - y$

Or pour tout nombre réel x : $f(x) - y = e^x > 0$

Donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur $\mathbb{R}$

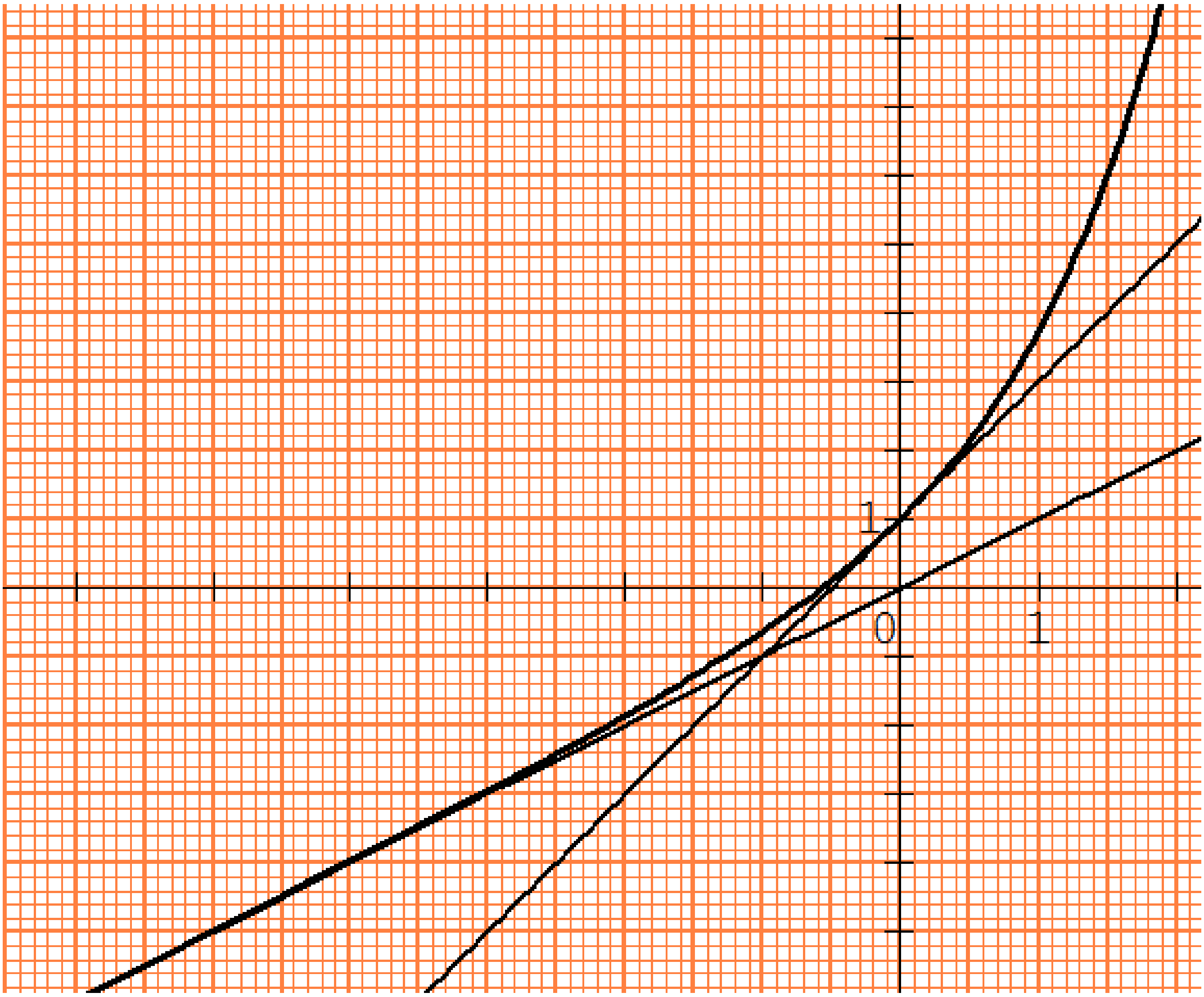
5- *Justifions qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :* $y = 2x + 1$

$$\begin{aligned}(T):\ y &= f'(0)\times(x-0)+f(0) \quad ; \quad f'(0)=2 \quad \text{et} \quad f(0)=1\\ &= 2\times(x-0)+1\\ &= 2x-2\times 0+1\\ &= 2x+1\end{aligned}$$

6- *a) Complétons le tableau de valeurs ci-dessous :*

x	$-2{,}5$	-2	-1	0	1	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	$\mathbf{-2,4}$	$\mathbf{-1,9}$	$\mathbf{-0,6}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3,7}$	$\mathbf{9,4}$

b) Traçons (D), (T) et (C) sur $]-\infty\,;2]$.



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Partie B

1- Justifions que $e^{\alpha} = -\alpha$

$$f(\alpha) = 0 \implies \alpha + e^{\alpha} = 0$$
$$\implies e^{\alpha} = -\alpha$$

2- a) Justifions que $I = -\left(\alpha + \frac{1}{e}\right)$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{\alpha} e^x \, dx$$
$$= [e^x]_{-1}^{\alpha}$$
$$= e^{\alpha} - e^{-1}$$
$$= e^{\alpha} - \frac{1}{e} \quad ; \quad or \ e^{\alpha} = -\alpha$$
$$= -\alpha - \frac{1}{e}$$
$$= -\left(\alpha + \frac{1}{e}\right)$$

b) Hachurons la région du plan délimitée par (C) , (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \alpha$

(Voir la courbe)

c) Calculons l'aire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région hachurée

L'aire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région hachurée est définie par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{\alpha} (f(x) - y) \, dx \times ua \quad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ \ cm^2 = 2 \ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{\alpha} (f(x) - y) \, dx \times ua$$
$$= \int_{-1}^{\alpha} e^x \, dx \times 2 \ cm^2 \quad ; \quad or \quad \int_{-1}^{\alpha} e^x \, dx = -\left(\alpha + \frac{1}{e}\right)$$
$$= -\left(\alpha + \frac{1}{e}\right) \times 2 \ cm^2$$
$$= 0,5 \ cm^2 \quad ; \quad \alpha = -0,6$$