

**ECOLE POLYTECHNIQUE  
ECOLIS NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2024**

**LUNDI 15 AVRIL 2024**

**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1**

**MATHEMATIQUES A (XLSR)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

*Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.*

## Notations

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels non nuls.Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  et  $\varepsilon(\sigma)$  la signature d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on appelle *point fixe* de  $\sigma$  un élément  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\sigma(i) = i$ . On note  $\nu(\sigma)$  le nombre de points fixes de  $\sigma$ . On appelle *dérangement* une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  n'ayant aucun point fixe. On note  $\mathfrak{D}_n$  l'ensemble des dérangements de  $\mathfrak{S}_n$  et  $D_n$  son cardinal.Si  $k$  est un entier naturel tel que  $k \leq n$ , on note  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments. Par convention, on pose  $\binom{n}{k} = 0$  pour un entier naturel  $k > n$ .On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus  $n \geq 0$  est un entier naturel, on note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des éléments  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .Si  $n \geq 0$  et  $d \geq 1$  sont deux entiers naturels, on note  $d \mid n$  la relation «  $d$  divise  $n$  ».Si  $x$  est un réel, on note  $E(x)$  sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier  $E(x)$  tel que  $E(x) \leq x < E(x) + 1$ .Si  $p$  est un nombre premier et  $n$  un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels.Pour tout ensemble  $E$ , on note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .On note  $\ln_2$  la fonction de  $]1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$ .Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel  $\gamma$  tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

*Handwritten notes:*  
 $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $\sum_{i=1}^n \nu(\sigma) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $\sum_{i=1}^n \nu(\sigma) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $\sum_{i=1}^n \nu(\sigma) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

**Première partie**

Soit un entier naturel  $n \geq 2$ . Pour tout nombre réel  $x$ , on considère la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

1a. Montrer que la matrice  $-M_0$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

1b. En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

3. Établir que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

et en déduire la probabilité qu'une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite.

4. Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , préciser à quelle condition sur  $\nu(\sigma)$ , on a  $\sigma \in \mathfrak{D}_n$ . En déduire que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1} (n-1).$$

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

*Handwritten notes:*  
 $\binom{0}{0} = 1$   
 $\binom{1}{1} = 1$   
 $\binom{m-1}{m-1} = 1$   
 $\binom{m}{m} = 1$   
 $\binom{m}{0} = 1$   
 $\binom{m-1}{0} = 1$   
 $\binom{m-1}{m-1} = 1$   
 $\binom{m}{m} = 1$

5a. Justifier que les familles  $(1, X, \dots, X^m)$  et  $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$  sont des bases de  $\mathbb{R}_m[X]$ .

5b. Montrer que la transposée de  $M$  est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases  $(1, X, \dots, X^m)$  au départ et  $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$  à l'arrivée.

5c. Établir que  $M$  est inversible et expliciter son inverse.

5d. En déduire que pour tous  $(u_0, \dots, u_m), (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ,

$$\text{si } \forall k \leq m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors } \forall k \leq m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

6. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé  $(\mathfrak{D}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{D}_n))$  muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire  $Y_n$  par  $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ .

7a. Expliciter la loi de  $Y_n$ .

7b. Calculer, pour tout  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon)$ .

Pour  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé  $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$  muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire  $Z_n$  par  $Z_n(\sigma) = \nu(\sigma)$ .

8a. Expliciter la loi de  $Z_n$ .

8b. Calculer, pour tout entier naturel  $k \leq n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)$ .

8c. Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire ainsi que sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on rappelle qu'il existe, à l'ordre près, une unique décomposition  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_{\omega(\sigma)}$ , où  $\omega(\sigma) \in \mathbb{N}^*$  où  $c_1, \dots, c_{\omega(\sigma)}$  sont des cycles à supports disjoints de longueurs respectives  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_{\omega(\sigma)}$  et  $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{\omega(\sigma)} = n$ . En particulier, on prendra garde au fait que l'on prend ici en compte les cycles  $c_i$  de longueur 1, qui correspondent aux points fixes de  $\sigma$ , auquel cas  $c_i$  est l'identité.

Par exemple, si  $\sigma$  est la permutation identité de  $\{1, \dots, n\}$ , on a  $\omega(\sigma) = n$  et  $\ell_{\omega(\sigma)} = 1$ . Et si  $\sigma$  est la permutation  $(1, 2)$  de  $\{1, 2, 3\}$ , on a  $\sigma = c_1 \circ c_2$  où  $c_1$  est l'identité et  $c_2 = (1, 2)$  de sorte que  $\omega(\sigma) = 2$ .

On obtient ainsi une application  $\omega : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{N}$ . On se propose de montrer qu'en moyenne,  $\omega(\sigma)$  est de l'ordre de  $\ln(n)$  dans un sens que l'on précisera.

Pour un entier  $k$  inférieur ou égal à  $n$ , on note  $s(n, k)$  le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  telles que  $\omega(\sigma) = k$ . On considère alors, sur l'espace probabilisé  $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$  muni de la probabilité uniforme, la variable aléatoire  $X_n$  définie par  $X_n(\sigma) = \omega(\sigma)$ .

Handwritten notes:

$$c_1 \circ c_2$$

$$\sim c_3 / (2, 3)$$

$$(1, 2) \circ (1, 2, 3)$$

3

$$\sigma_1, (1, 2)$$

9. Calculer, pour  $n \in \{2, 3, 4\}$ , la quantité  $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)$ .

10. Préciser  $s(n, n)$  et  $s(n, 1)$  puis montrer que, pour  $2 \leq k \leq n-1$ , on a

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k).$$

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on pourra distinguer les cas  $\sigma(1) = 1$  et  $\sigma(1) \neq 1$ .

11. Établir que, pour tout réel  $x$ ,  $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \sum_{k=1}^n s(n, k)x^k$ .

12. Démontrer que  $\mathbb{E}[X_n] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

13a. Montrer que

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1)s(n, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

13b. En déduire que

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k^2 s(n, k) = \mathbb{E}[X_n] + \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right).$$

14a. Montrer que

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (2\gamma + 1) \ln(n) + c + \ln(n)^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

pour un réel  $c$  à préciser.

14b. Montrer que

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\omega(\sigma) - \ln(n))^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + c + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

15. Justifier qu'il existe un nombre réel  $C > 0$  tel que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$\mathbb{P}(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \ln(n)}.$$

### Deuxième partie

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose

$$\omega(n) = \text{Card}\{p \text{ premier} : p \mid n\} = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} 1.$$

Par exemple,  $\omega(6) = \omega(12) = 2$ .

16. Soit  $(a_n)_{n \geq 2}$  une suite de nombres réels. Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(t) = \sum_{2 \leq k \leq t} a_k$ . Soit  $b : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt.$$

17. L'objectif de cette question est de démontrer que si  $n$  est un entier naturel non nul, alors  $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$ .

17a. Traiter les cas  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

On suppose à présent  $n \geq 4$  et le résultat connu au rang  $k$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n - 1$ .

17b. Établir le résultat au rang  $n$  si  $n$  est pair.

17c. Soit  $n = 2m + 1$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$  divise  $\binom{2m+1}{m}$  et montrer que  $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ .

17d. Conclure.

18. Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $p$  un nombre premier. Justifier la formule  $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$  et montrer que

$$\frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

19a. Par comparaison avec une intégrale, établir que

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + O(\ln(n)).$$

19b. Justifier que  $n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$  et en déduire que

$$n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n \ln(4) < \ln(n!) \leq n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$

19c. Justifier que la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$  converge.

19d. Conclure que  $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + O(1)$ .

$\left(\frac{n}{p}\right)$

20a. On pose, pour tout réel  $t \geq 2$ ,

$$R(t) = \sum_{\substack{p \leq t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t).$$

Montrer, en utilisant le résultat de la question 16, que

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt.$$

20b. Justifier que la fonction  $t \mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$  est intégrable sur  $[2, +\infty[$ .

20c. Établir que  $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ , pour un réel  $c_1 \in \mathbb{R}$  à préciser.

21a. Soient  $x$  un réel positif supérieur ou égal à 1 et  $q \in \mathbb{N}^*$ . Justifier que la quantité

$$\text{Card} \{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 \pmod{q}\} - \frac{x}{q}$$

est bornée en valeur absolue par un réel indépendant de  $x$  et de  $q$ .

21b. Démontrer, à l'aide d'une interversion de sommes, que  $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(x) + O(1)$ .

22a. Montrer que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left( \sum_{n \leq x} \omega(n)^2 \right) - \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x)).$$

22b. Montrer que

$$\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 | n \text{ et } p_2 | n\}.$$

22c. Montrer que

$$\left( \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 | n \text{ et } p_2 | n\} \right) - x \ln_2(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x \ln_2(x)).$$

On pourra estimer le cardinal de l'ensemble des paires de nombres premiers  $(p_1, p_2)$  tels que  $p_1 p_2 \leq x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

22d. Conclure que  $\frac{1}{x} \left( \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(\ln_2(x))$ .

23. On pose  $\mathcal{S} = \left\{ n \geq 3 : \left| \frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}} \right| \geq (\ln_2(n))^{1/4} \right\}$ . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Card} \{ n \leq x : n \in \mathcal{S} \} = 0.$$

On pourra commencer par écrire  $\text{Card}(\mathcal{S} \cap [1, x]) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \text{Card}(\mathcal{S} \cap [\sqrt{x}, x]) + O(\sqrt{x})$  et remarquer que dans la somme du membre de droite, la différence  $|\ln_2(n) - \ln_2(x)|$  reste bornée.

On dit alors que l'ensemble  $\mathcal{S}$  a densité 0. De même que pour les permutations, on obtient que, en dehors d'un ensemble de densité nulle,  $\omega(n) = \ln(\ln(n))(1 + o(1))$ .