Analyse

2^e Baccalauréat Sciences

Calcul Intégral

Yassine Aouami

version étudiant(e) 2.0

www. f / X.maths01

Sommaire

I Intégrale d'une fonction un intervalle

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

On appelle **intégrale de** f **du** a **à** b, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre réel $F(b)-F(a)$, où F une fonction **primitive quelconque** de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Remarque

- On note aussi $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est muette, donc elle peut être remplacée par toute autre variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$$

- La notation dx, dy, $dt\ldots$, indique la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction.

Exemple

1 Calculons l'intégrale $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$:

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } [-2;2] \subset \mathbb{R} \\ \text{la fonction } x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$.

2 Calculons l'intégrale $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$:

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ est continue sur } [1;e] \\ \text{la fonction } x \longmapsto \ln(x) \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0;+\infty[\end{cases}$

Donc $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1.$

3 Calculons l'intégrale $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$:

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est continue sur } [0;+\infty[\\ \text{la fonction } x \longmapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ sur } [0;+\infty[\end{cases}$

Donc $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

2 Propriétés d'intégrales

Propriété (1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

1 $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2 $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx = b - a.$

3 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Propriété (2)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b et c trois éléments de I.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Propriété (3)

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$, et α un réel.

1. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
2. $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

Exemple

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x}\,dx$
2. $\int_0^1 3\sqrt{x} - \frac{7}{4}x^3\,dx$
3. $\int_1^3 \frac{1}{x}\left(x^2 - 4x\right)dx$
4. $\int_0^{\pi} \cos(3)\,dx$
5. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sin(x)\,dx$
6. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$
7. $\int_1^1 \tan(x)\,dx$
8. $\int_{\ln(2)}^{ln(2)} e^x\,dx$
9. $\int_{\ln(2)}^{ln(2)} e^x\left(e^{-x} - 1\right)dx$

Propriété (4)

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$.

1. Si la fonction f est **positive** sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
2. Si la fonction f est **négative** sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0.$.
3. Si la fonction f est **supérieure à** g $(f \geq g)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

Remarque

- Si la fonction f change son signe sur $[a;b]$, alors on ne peut pas conclure le signe de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Réciproquement, si on a $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors la fonction f n'est forcément positive sur $[a;b]$.

  i.e : on a $\int_0^3 2x-1\,dx = 6$, mais la fonction $x \longmapsto 2x-1$ change son signe sur l'intervalle $[0;3]$.

Corollaire

1 Si la fonction f est **positive** sur $[a;b]$, alors $\int_b^a f(x)\,dx \leq 0$.

2 Si la fonction f est **négative** sur $[a;b]$, alors $\int_b^a f(x)\,dx \geq 0$.

3 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

1 Montrer que pour tout x de $[0;1]$: $\dfrac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x^2$.

2 En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}\,dx$.

II Méthodes de calcul d'intégrales

1 Primitive d'une fonction

Expression de f	Expression de primitives	Définie sur
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N})$ x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N} - \{-1\})$ $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} - \{0\}$
$(r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$ x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} - \{0\}$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$	Tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	Tout intervalle où u est dérivable
$(r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$ $u'(x) \times u^r(x)$	$\frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + c$	Tout intervalle où u est dérivable et u^r est définie

Exemple

1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{-2x^2}{(x^3+3)}\,\mathrm{d}x$

3 $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$

4 $\displaystyle\int 1^2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(x^2)}\,\mathrm{d}x$

5 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

7 $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

8 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

9 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x-5)\,\mathrm{d}x$

10 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

11 $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)-\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

12 $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x).\sin(x)\,\mathrm{d}x$

2 Intégration par parties

Propriété

a et b étant deux réels d'un intervalle I.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur I tels que u' et v' sont continues sur I.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Calculer, en utilisant une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1 $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \sin(x) \\ v(x) = x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = -\cos(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

---

2 $\displaystyle I_2 = \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \dots \\ v(x) = \dots \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = \dots \\ v'(x) = \dots \end{cases}$

Donc $I_2 = \dots$

---

3 $I_3 = \displaystyle\int_1^2 (2-x)e^{-x}\,dx.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \dots \\ v(x) = \dots \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = \dots \\ v'(x) = \dots \end{cases}$

Donc $I_3 = \dots$

---

4 $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \dots \\ v(x) = \dots \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = \dots \\ v'(x) = \dots \end{cases}$

Donc $I_4 = \dots$

---

5 $I_5 = \displaystyle\int_2^{e} x\ln(x-1)\,dx.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \dots \\ v(x) = \dots \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = \dots \\ v'(x) = \dots \end{cases}$

Donc $I_5 = \dots$

III Interprétation géométrique d'intégrale

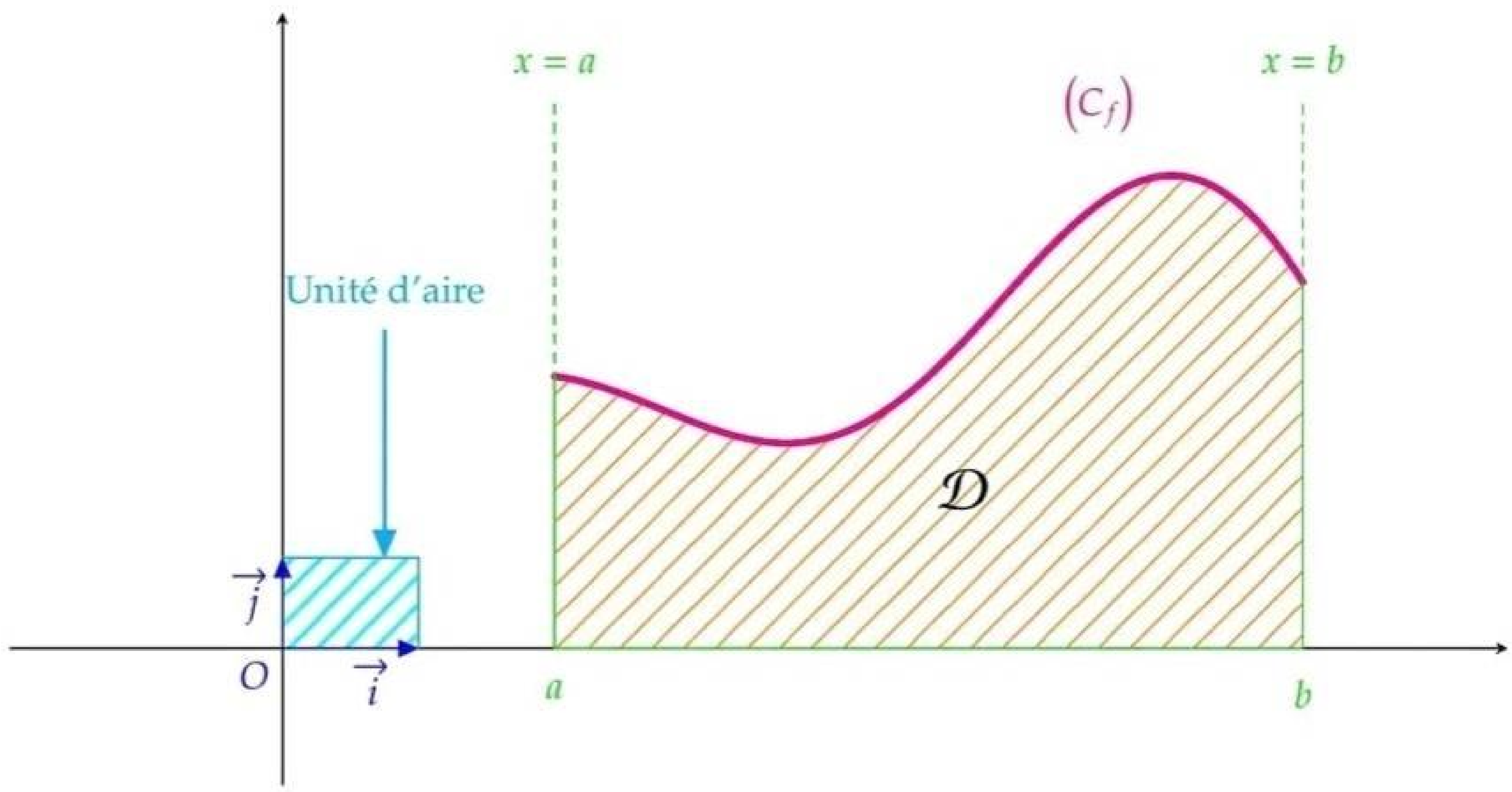
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 Cas d'une fonction positive

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Si f est une fonction **continue et positive** sur l'intervalle $[a;b]$, alors **l'aire du domaine** $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le **nombre positif** $\int_a^b f(x)\,dx$ exprimé en **unité d'aire**.

L'unité d'aire est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+6}{2}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1 Montrer que f est strictement positive sur $[-1;2]$.

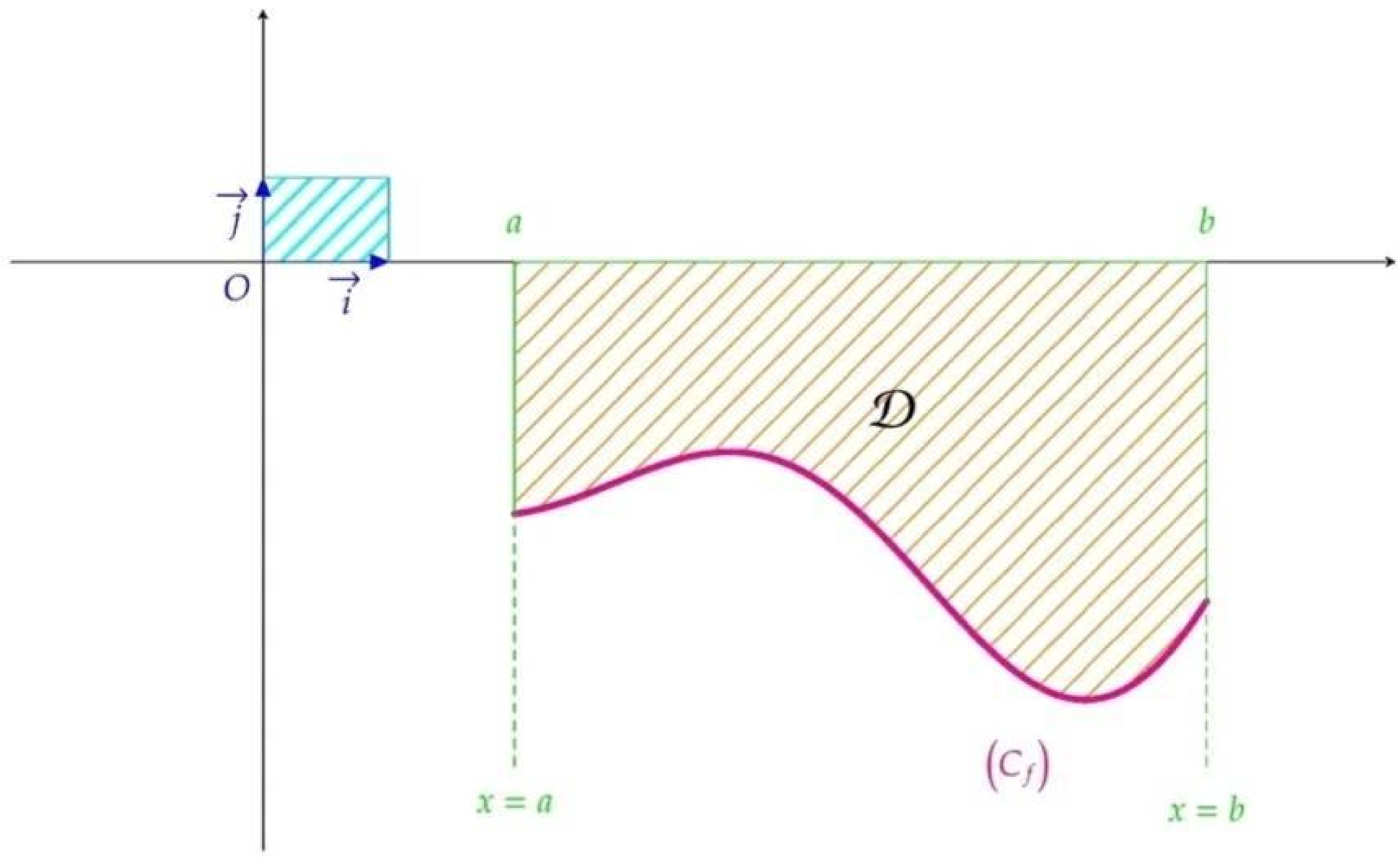
2 Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par (C_f),l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

2 Cas d'une fonction négative

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Si f est une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a;b]$, alors $-f$ est positive sur $[a;b]$.

Dans ce cas, **l'aire du domaine** $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le **nombre positif** $\int_a^b -f(x)\,dx$ exprimé en **unité d'aire**.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$
Et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1.5cm$ et $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 Montrer que f est strictement négative sur $[1;2]$.

2 Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par (C_f),l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

3 Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

Propriété

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$.

1. S'il existe deux réels M et m tels que pour tout x de $[a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$

   Alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

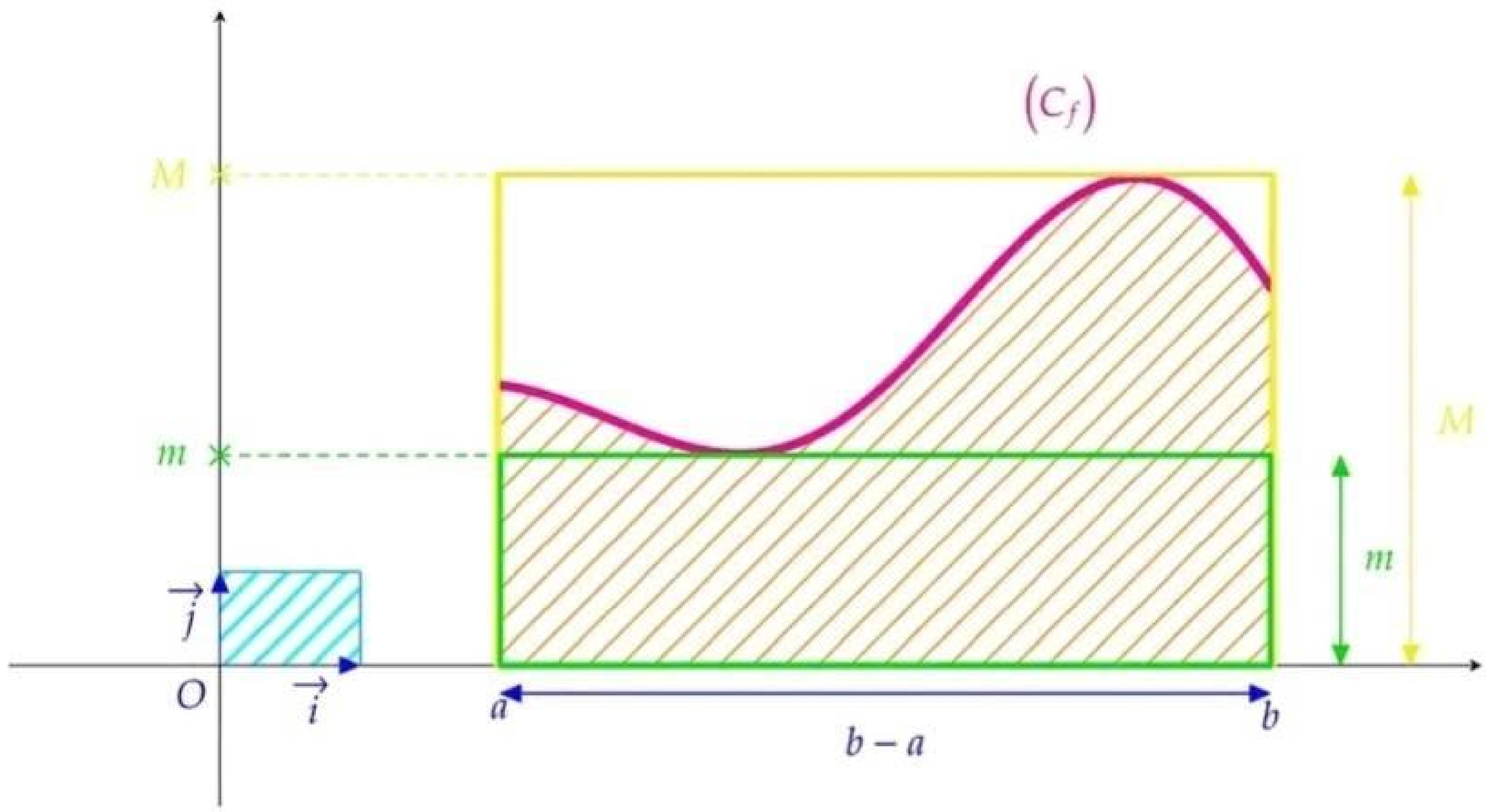
2. S'il existe un réel k tel que pour tout x de $[a;b]$: $|f(x)| \leq k$

   Alors $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq k|b-a|$.

Interprétation géométrique :

On suppose que f est continue et **positive** sur $[a;b]$ et que : $0 < m \leq f(x) \leq M$.

La première propriété nous dit que **l'aire du domaine** $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ **est comprise entre l'aire du rectangle** (vert) de côtés M et $(b-a)$ et **l'aire du rectangle** (jaune) de côtés m et $(b-a)$.



Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.

On appelle la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$, le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème

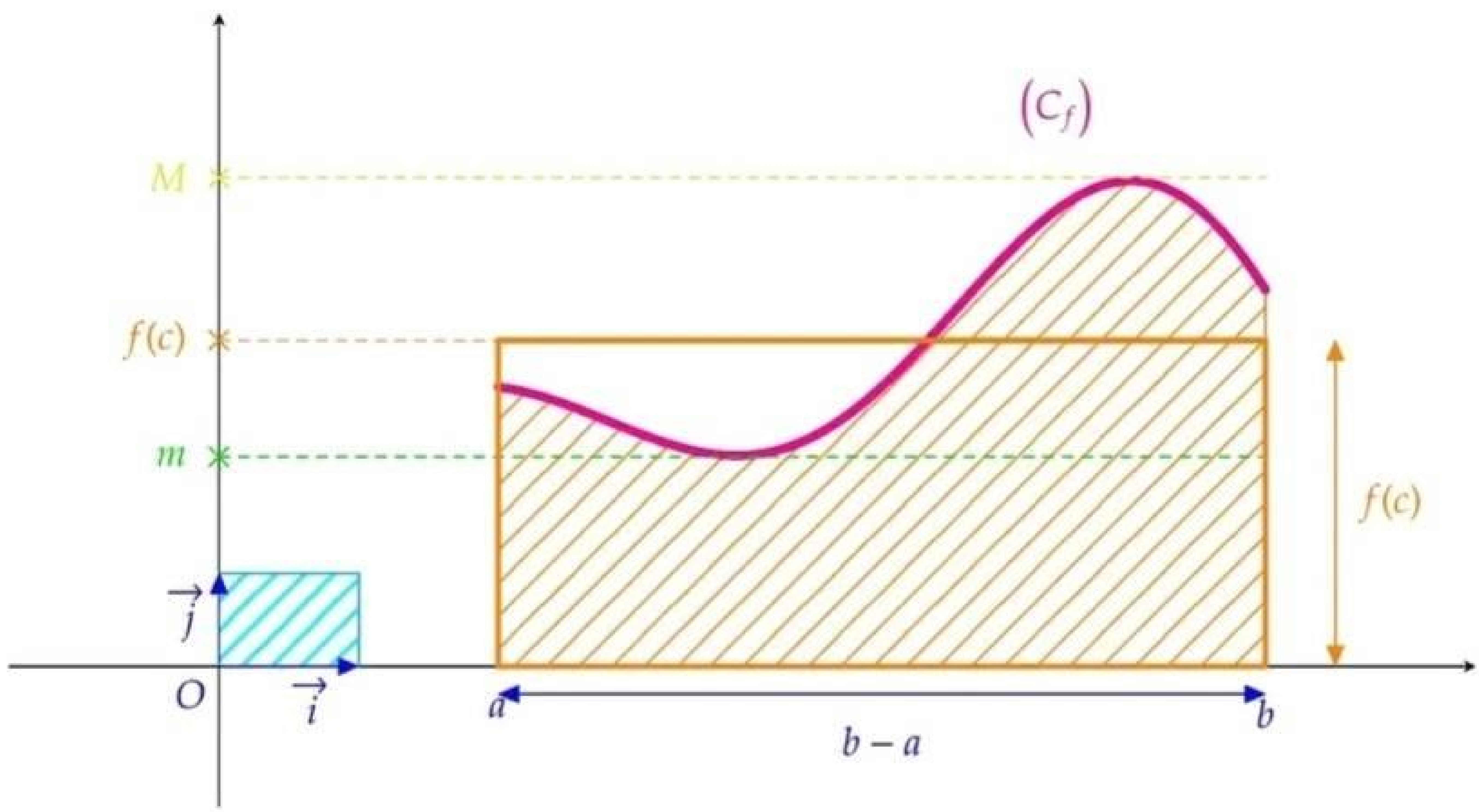
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.

Il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c) = \mu$, ou encore $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation géométrique :

On suppose que f est continue et **positive** sur $[a;b]$ et que : $0 < m \leq f(x) \leq M$.

L'aire du rectangle (orange) de côtés $f(c)$ et $(b-a)$ est **égale à l'aire du domaine** $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Autrement dit, la valeur moyenne μ de f correspond à la hauteur du rectangle (orange).



Exemple

Dans chaque cas ci-dessous, calculer la valeur moyenne mu de f sur l'intervalle I :

- $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$; $I = [-1;0]$.
- $f(x) = (x-1)e^x$; $I = [0;1]$.

IV Applications

1 Calcul d'aire

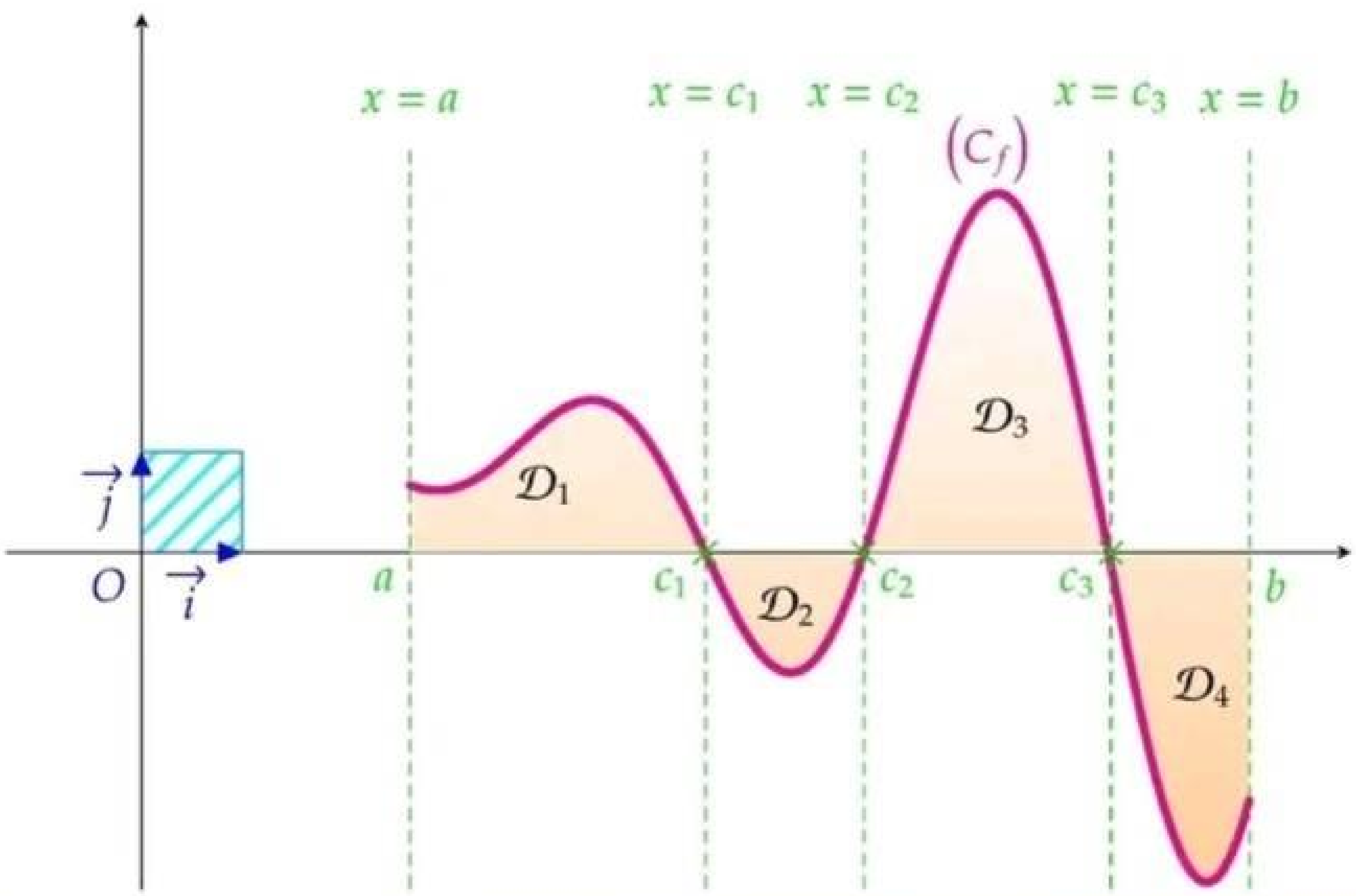
Propriété (1)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.
L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|\,dx$ exprimé en **unité d'aire**.

Explication :

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction de signe quelconque, il faut déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est positive et ceux sur lesquels elle est négative, puis on applique la relation de Chasles.
On suppose que la fonction f change son signe sur l'intervalle $[a;b]$, comme l'illustre le graphe ci-dessous. On a donc :

$$S_{\mathcal{D}} = \int_a^b |f(x)|\,dx = +\int_a^{c_1} f(x)\,dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx - \int_{c_3}^{b} f(x)\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|.$$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1.5cm$ et $\|\vec{i}\| = 2cm$

1 Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0;2]$.

2 Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par (C_f),l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Propriété (2)

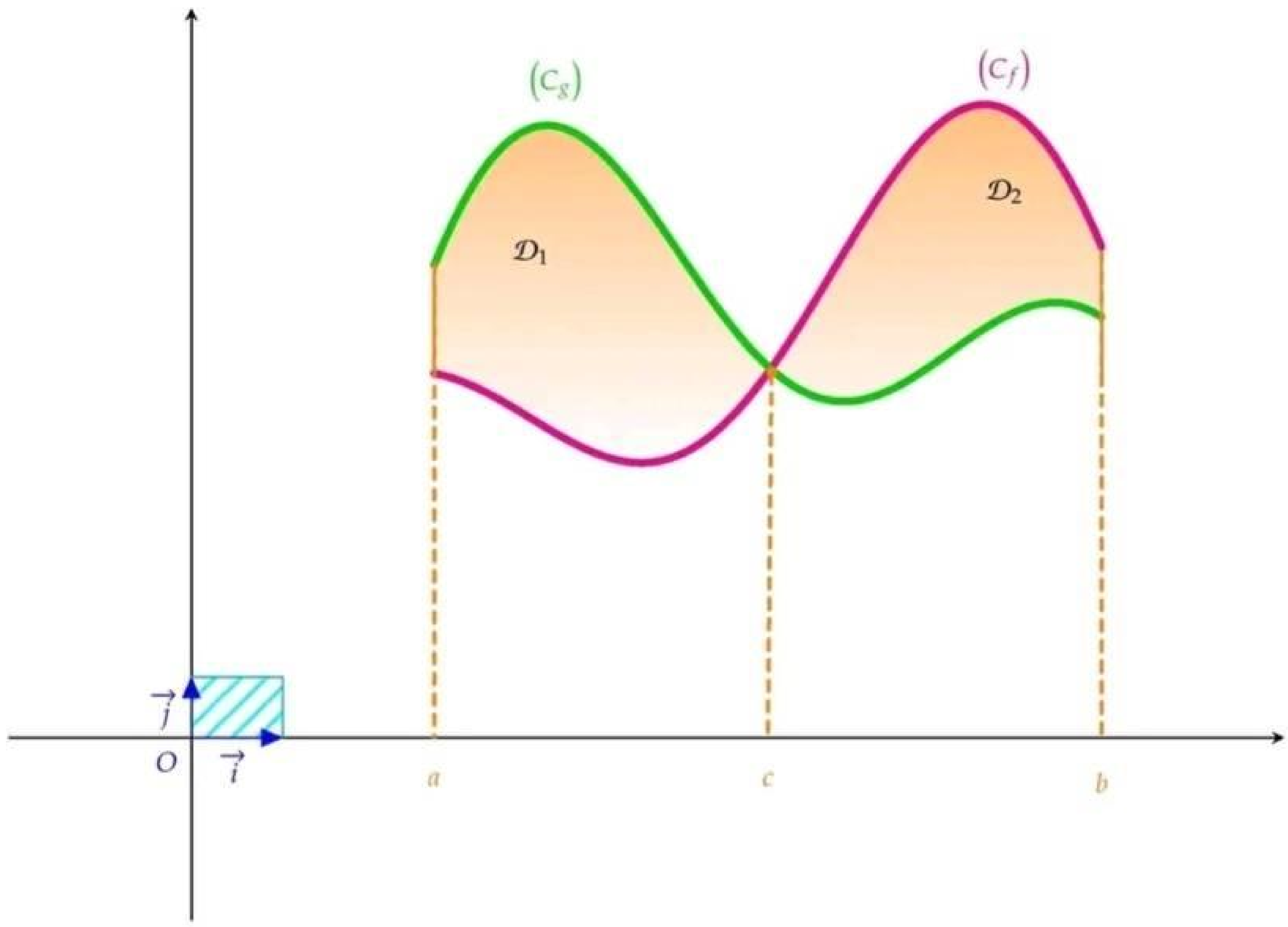
Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.
L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, la courbe représentative de g et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ exprimé en **unité d'aire**.

Explication :

On suppose, comme l'illustre le graphe ci-dessous, qu'il existe un réel c appartenant à $[a;b]$ tel que :

- La fonction f est **inférieure** à g sur l'intervalle $[a;c]$ *ie* : $\forall x \in [a;c] \quad f(x) \leq g(x)$.
- La fonction f est **supérieure** à g sur l'intervalle $[c;b]$ *ie* : $\forall x \in [a;c] \quad f(x) \geq g(x)$..

Donc, on a : $S_{\mathcal{D}} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = -\int_a^b f(x) - g(x)\,dx + \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



Exemple

On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $\|\vec{i}\| = 2cm$.
Soit f et g les fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

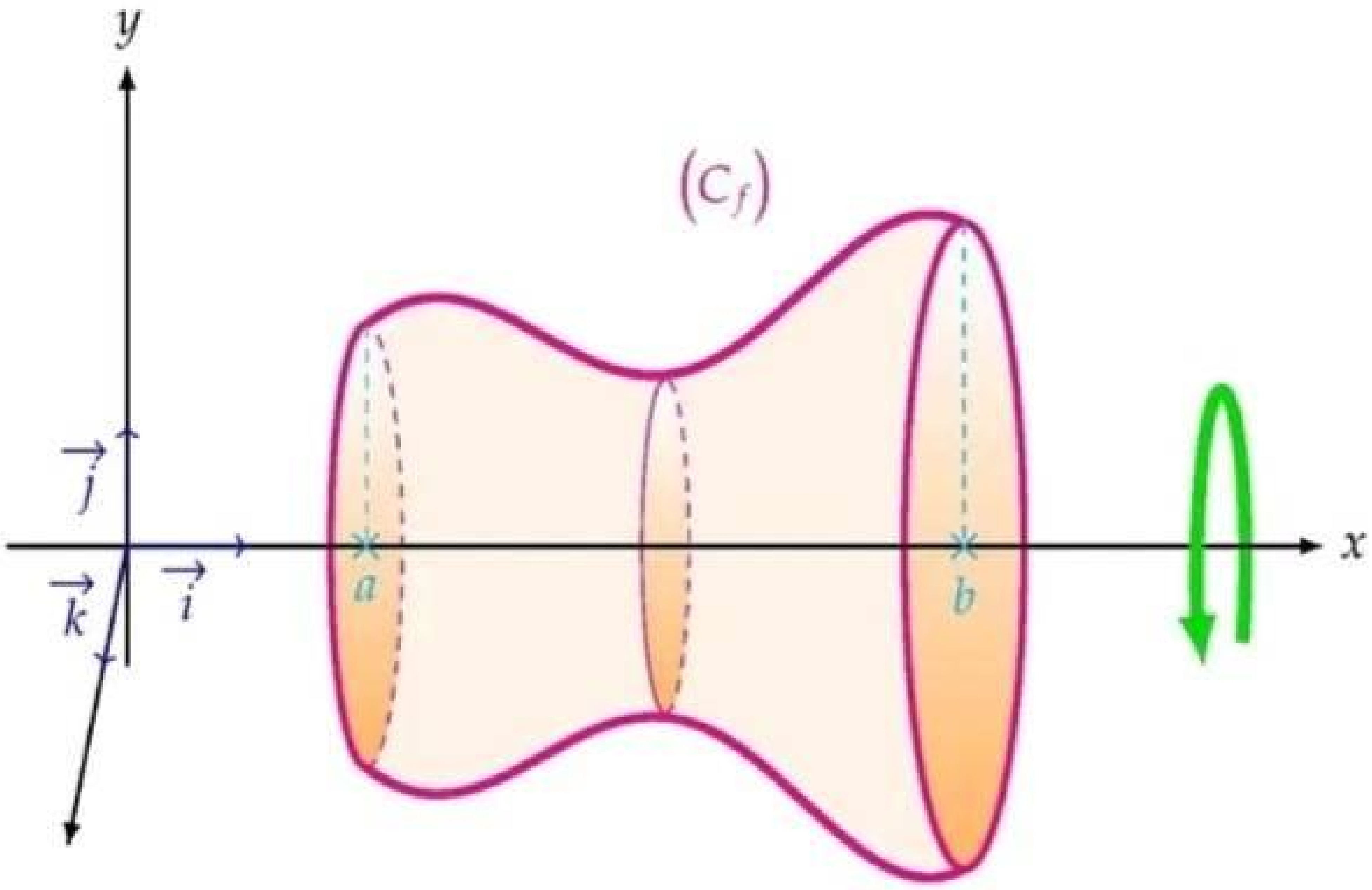
1. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Calculer, en cm², l'aire du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

2 Calcul de volume

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{D}$ la partie du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Le **volume** du **solide de révolution** engendré par la **rotation** de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses sur $[a;b]$, exprimé en **unité de volume**, est égale à $\mathcal{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.
L'unité de volume est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.



Exemple

On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace d'unité $\|\vec{i}\| = 1cm$.
Soit f la fonction définie sur $[\ln(2);\ln(3)]$ par : $f(x) = e^x$, et (C_f) sa courbe représentative

dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \ln(2)$ et $x = \ln(3)$

2. Calculer, en cm^3, le volume du solide de révolution engendré par la rotation $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.