Analyse

2e Baccalauréat Sciences

Fonctions Logarithmes

Yassine Aouami

version étudiant(e) 1.1

Scanned by TapScanner

Sommaire

Chapitre 1 **Fonctions Logarithmes** Page 3

I. Fonction logarithme népérien 3

1. Définition de la fonction ln 3

2. Propriétés algébriques 4

II. Étude et représentation graphique de la fonction ln 4

1. Limites de référence 4

2. Le nombre d'Euler 5

3. Tableau de variations et courbe représentative de la fonction ln 6

4. Dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ 7

III. Autres Fonctions logarithmes 8

1. Fonction logarithme de base a 8

2. Fonction logarithme décimal 9

Scanned by TapScanner

I. Fonction logarithme népérien

1. Définition de la fonction ln

Définition

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée ln, la **primitive** de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, qui **s'annule en** 1, et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

Conséquences

1. La fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :
   - $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
   - $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
   - $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.
   - $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 0$.
3. Soit u une fonction définie sur un ensemble E. La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est **définie** si et seulement si : $\forall x \in E,\ u(x) > 0$.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous :

1. $\ln(x^2) = 0$.
2. $\ln(x+1) = \ln(2x+2)$.
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x+5)$.
4. $\ln(x-1) < 0$.
5. $\ln(2x-1) \leq \ln(x)$.
6. $\ln(x^2-x) \geq \ln(2x)$.

Scanned by TapScanner

2. Propriétés algébriques

Propriété

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
5. Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

Exemple

1. Exprimer, en fonction des réels $\ln(3)$ et $\ln(2)$, chacun des nombres suivants :
   $\ln\left(\sqrt[3]{6}\right)$, $\ln\left(\frac{32}{81}\right)$ et $\ln\left(\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{9}}\right)$.
2. Simplifier le nombre $A = \ln\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)$.
3. Les fonctions $f : x \longmapsto \ln\left(x^4\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(x) + \ln\left(x^3\right)$ sont-elles égaux ?
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 2020$.

II. Étude et représentation graphique de la fonction ln

1. Limites de référence

Théorème (1)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Scanned by TapScanner

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x} + 2\ln(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-4x+1}{\ln(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2-1)\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Théorème (2)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
5. Pour tout entier naturel n non nul ($n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} x^n\ln(x) = 0$$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^5)}{x^7}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln\left(x^4\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to0} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Le nombre d'Euler

Propriété

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;+\infty[$, appelée **nombre d'Euler** et on la **note** e : $\ln(e) = 1$.
Une valeur approchée du réel e est : 2.718281828....

Scanned by TapScanner

3. Tableau de variations et courbe représentative de la fonction ln

On note $(C_{\ln})$ la courbe représentative de la fonction ln.

- On résume les variations et les limites de la fonction ln dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

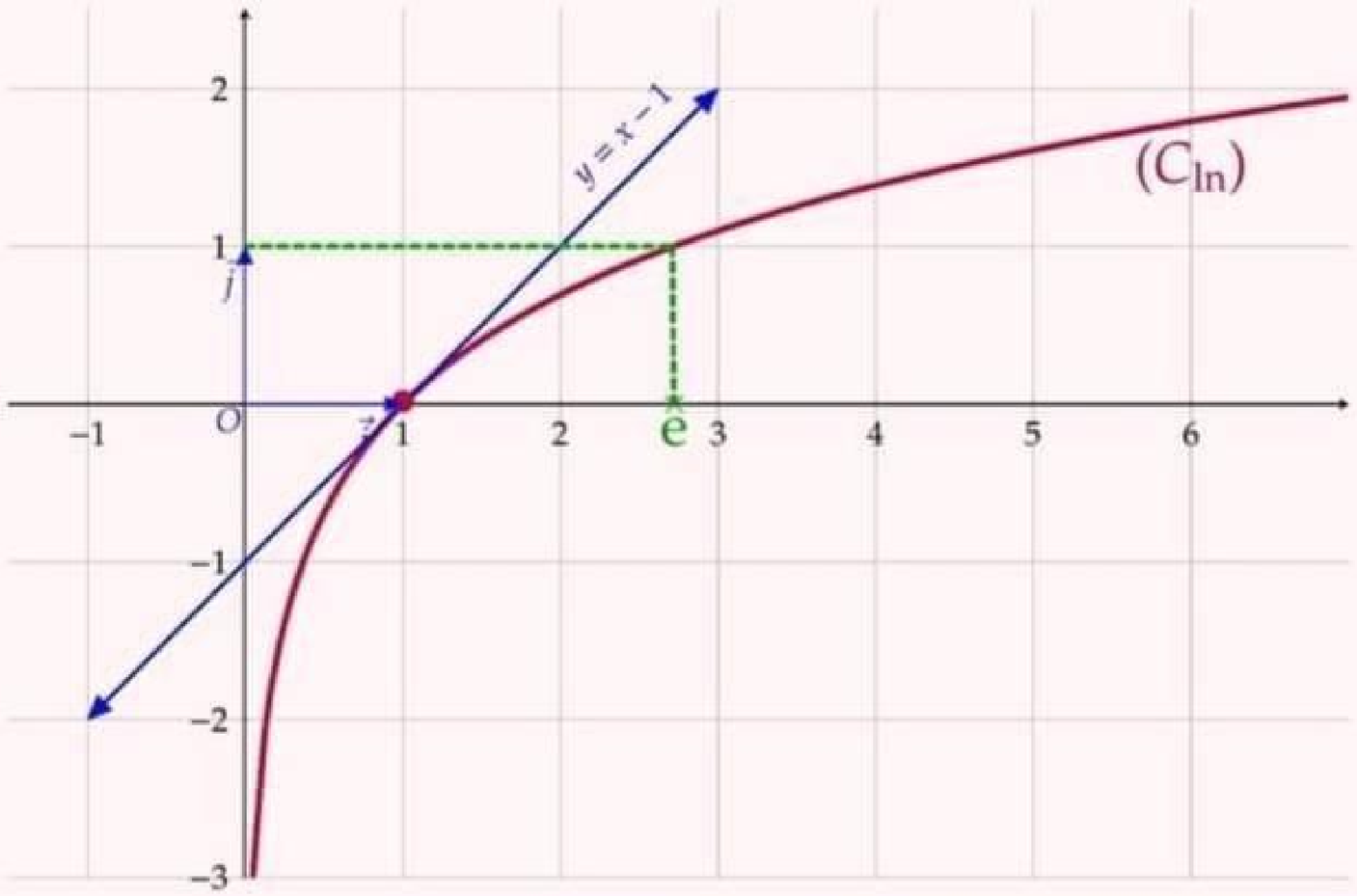
- Une équation de la tangente à la courbe $(C_{\ln})$ au point $A(1;0)$ est $y = x-1$ (car $\ln'(1) = 1$ et $\ln(1) = 0$).

- L'axe des ordonnées est une asymptote de La courbe $(C_{\ln})$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty\right)$.

- La courbe $(C_{\ln})$ présente une branche parabolique de direction l'axes des abscisses au voisinage de $+\infty$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0\right)$.

- La courbe $(C_{\ln})$ est convexe $\left(\text{car } \forall x > 0,\ (\ln)''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0\right)$.

- On a alors la courbe représentative de la fonction ln ci-dessous :



Scanned by TapScanner

4. Dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$

Théorème (1)

Soit u une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) > 0)$.
La fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Théorème (2)

Soit u une fonction **dérivable** et **ne s'annule pas** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) \neq 0)$.
La fonction $f : x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple

Établir le tableau de variations de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
2. $g(x) = \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x})$.
3. $h(x) = \ln(|x^3|)$.

Corollaire

Soit u une fonction **dérivable** et **ne s'annule pas** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) \neq 0)$.
Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur l'intervalle I sont les fonctions $x \longmapsto \ln|u(x)| + \lambda$, où λ est une constante réelle.

Exemple

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ et $I =]\pi; 0[$.

Scanned by TapScanner

3. $f(x) = \dfrac{3}{2x-6}$ et $I =]-\infty;3[$.

III. Autres Fonctions logarithmes

1. Fonction logarithme de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
On appelle la **fonction logarithme de base** a , la fonction, notée $\log_a$, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque

1. $\log_a(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$.

2. Si $a = e$ alors $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$, on obtient la fonction logarithme népérien.

3. pour tout a de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $\log_a(a) = 1$ et $(\forall r \in \mathbb{Q})$, $\log_a(a^r) = r$.

Propriété

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$. Pour tous réels strictement positifs x et y, on a :

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

3. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

Scanned by TapScanner

2. Fonction logarithme décimal

Définition

On appelle la **fonction logarithme décimal** , la fonction logarithme de base 10, notée log, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Remarque

1. $\log(10) = 1$.
2. $\forall r \in \mathbb{Q},\ \log(10^r) = r$.

Exemple

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation ci-dessous :
   - $\log(x-5) + \log(x+2) = 1$.
   - $\log(x^2+1) > 5$.
2. En chimie, l'acidité d'une solution est mesurée par son **pH** : $\mathbf{pH} = -\log[H^+]$.
   Sachant que la concentration en H^+, dans le sang d'humain, est comprise entre $10^{-7.3}$ et $10^{-7.4}$, montrer que le sang est basique.

Scanned by TapScanner