

Algèbre

2^e Baccalauréat Sciences

Les Nombres Complexes

Yassine Aouami

version étudiant(e) 1.2

www.



/ X.maths01

CHAPITRE 1 Les nombres complexes Page 4

I	L'ensemble des nombre complexes	4
1.	L'ensemble $\mathbb{C}$	4
2.	Égalité de deux nombres complexes	5
3.	Opérations sur les nombres complexes	5
4.	Conjugué d'un complexe	6
II	Représentation géométrique d'un complexe	8
1.	Affixe d'un point	8
2.	Affixe d'un vecteur	9
III	Module et argument d'un complexe	10
1.	Module d'un nombre complexe	10
2.	Argument d'un nombre complexe	11
IV	Autres écritures d'un complexe	13
1.	Quelques formules trigonométriques	13
2.	Écriture trigonométrique	14
3.	Écriture exponentielle	15
V	Quelques propriétés géométriques	17
1.	Distance entre deux points	17
2.	Argument et angle de deux vecteurs	18
3.	Colinéarité et orthogonalité	19
4.	Quatre points cocycliques ou alignés	20
5.	Exemples d'ensembles de points du plan	22
VI	Écritures complexes de transformations usuelles	23
1.	Homothétie	23
2.	Translation	24
3.	Rotation	25
VII	Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	26
1.	Racines carrés d'un nombre réel	26

2. Équations du second degré à coefficients réels	26
---	----

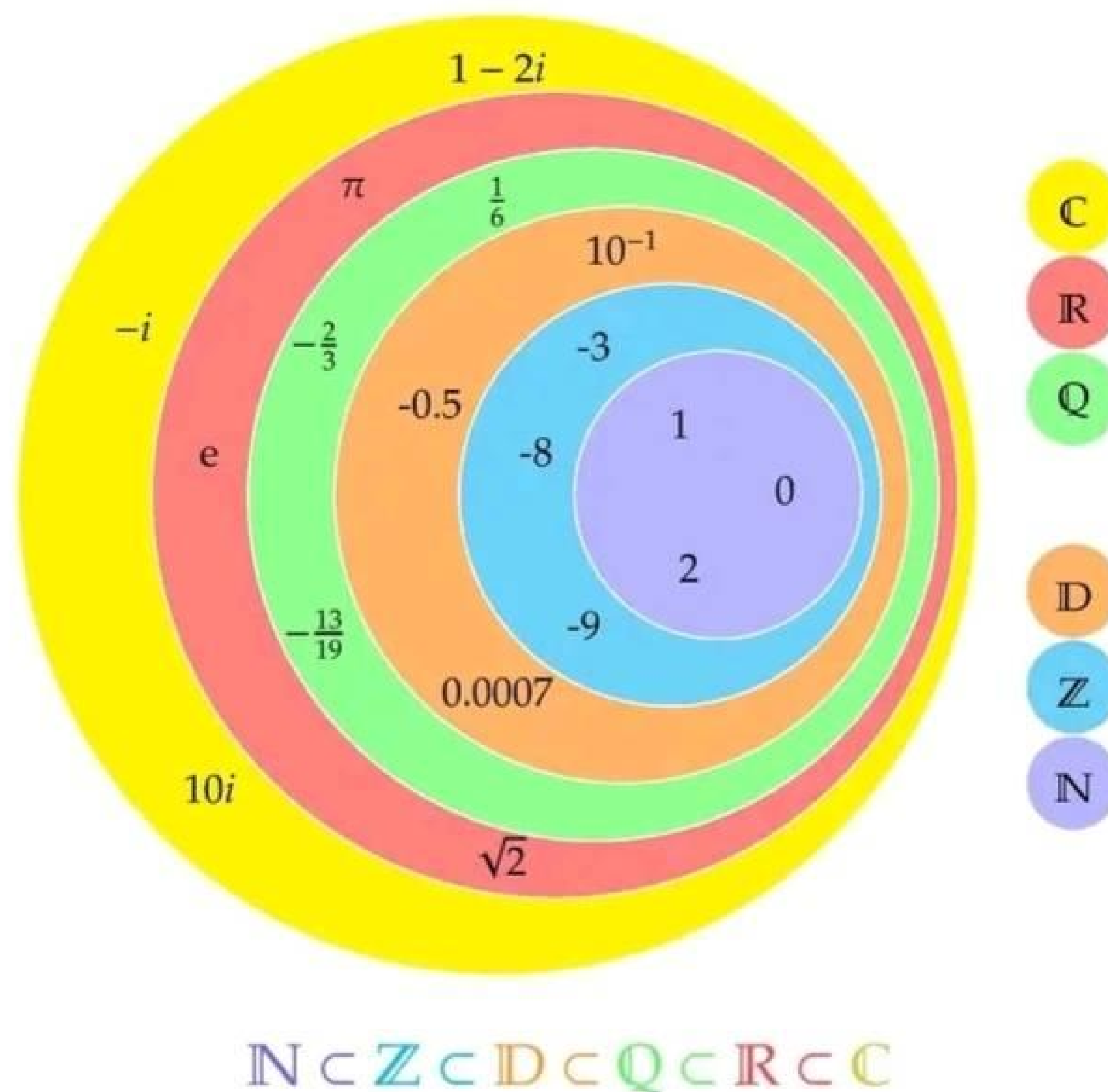
I L'ensemble des nombre complexes

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ **Définition**

Il existe un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ a les caractéristiques suivantes :

- 1 Il contient un élément i (non réel) vérifiant : $i^2 = -1$.
- 2 Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels.

$$\mathbb{C} = \{a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$$

**Vocabulaires et remarques**

- 1 L'écriture $z = a + ib$ est appelée **la forme algébrique** de z .
- 2 Le réel a est appelé **la partie réelle** de z , et on écrit : $Re(z) = a$.

Les nombres complexes

3 le réel b est appelé **la partie imaginaire**, et on écrit : $\text{Im}(z) = b$.

4 Si $b = 0$, on $z = a$, on dit que z est un **nombre réel** ($z \in \mathbb{R}$).

5 Si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un **imaginaire pur** ($z \in i\mathbb{R}$: L'ensemble des imaginaires purs).

2. Égalité de deux nombres complexes

Propriété

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombre complexes.

1 $z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$

2 $z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0.$

3. Opérations sur les nombres complexes

Toutes les propriétés de l'addition, la multiplication, la soustraction, la division, les puissances relatives, identités remarquables... définies sur les réels se prolongent aux nombres complexes

Propriété (1)

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombre complexes.

1 $z + z' = (a + a') + i(b + b') \text{ et } z - z' = (a - a') + i(b - b').$

2 $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$

3 $\alpha \times z = (\alpha a) + i(\alpha b)$, où α est un réel.

4 Si $z \neq 0$, alors : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$

5 Soit n et k deux entiers naturels, On a :

$$i^n = \begin{cases} 1 & , n = 4k \\ i & , n = 4k + 1 \\ -1 & , n = 4k + 2 \\ -i & , n = 4k + 3 \end{cases}$$

Propriété : Identités remarquables

Soit a, b, c et d quatre réels.

$$1 \quad (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + i(2ab).$$

$$2 \quad (a - ib)^2 = (a^2 - b^2) - i(2ab).$$

$$3 \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Exemple

1 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + 3i - (2 + 4i) \quad ; \quad z_2 = -\frac{1}{i} \quad ; \quad z_3 = (1 - 2i)^3$$

2 Trouver les nombres réels a et b tels que : $a(1 - i) + b(2 + 3i) = 2$.

3 Calculer et simplifier le nombre $\left(\frac{1+i}{100}\right)^{100}$.

4 Soit x en réel, on pose $Z = 1 - x + 2(1 - x^2)i$. Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :

- $Z \in \mathbb{R}$.

- $Z \in i\mathbb{R}$.

- $\operatorname{Re}(Z) = 4$.

- $\operatorname{Im}(Z) = 2$.

4. Conjugué d'un complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont des réels.

On appelle **conjugué** du nombre z , le nombre $(a - ib)$ et l'on note $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$$

Conséquences

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ son conjugué.

$$1 \quad z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Im}(z) = 0).$$

$$2 \quad z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R} \left(\operatorname{Re}(z) = 0 \right).$$

$$3 \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z).$$

$$4 \quad z \times \bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z).$$

Propriété

Soit z et z' deux complexes, α un réel.

$$1 \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}.$$

$$2 \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}.$$

$$3 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}.$$

$$4 \quad \text{Si } z' \neq 0, \text{ on a : } \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

$$5 \quad \text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

Exemple

1 Déterminer le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -(\sqrt{2} - i)(3 - i)^2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i(1 + 6i)}{(3 - i)^2}$$

2 Écrire sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (2 + i)(1 - i) \quad \text{et} \quad \left(\frac{3 - i}{1 + i}\right)$$

3 On pose $Z_1 = \frac{2 + i}{1 - i}$ et $Z_2 = \frac{2 - i}{1 + i}$. Montrer que :

$$(Z_1 + Z_2) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (Z_1 - Z_2) \in i\mathbb{R}$$

4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

$$\bullet \quad (1 - i)\bar{z} = 3 + i.$$

$$\bullet \quad \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i.$$

II Représentation géométrique d'un complexe

1. Affixe d'un point

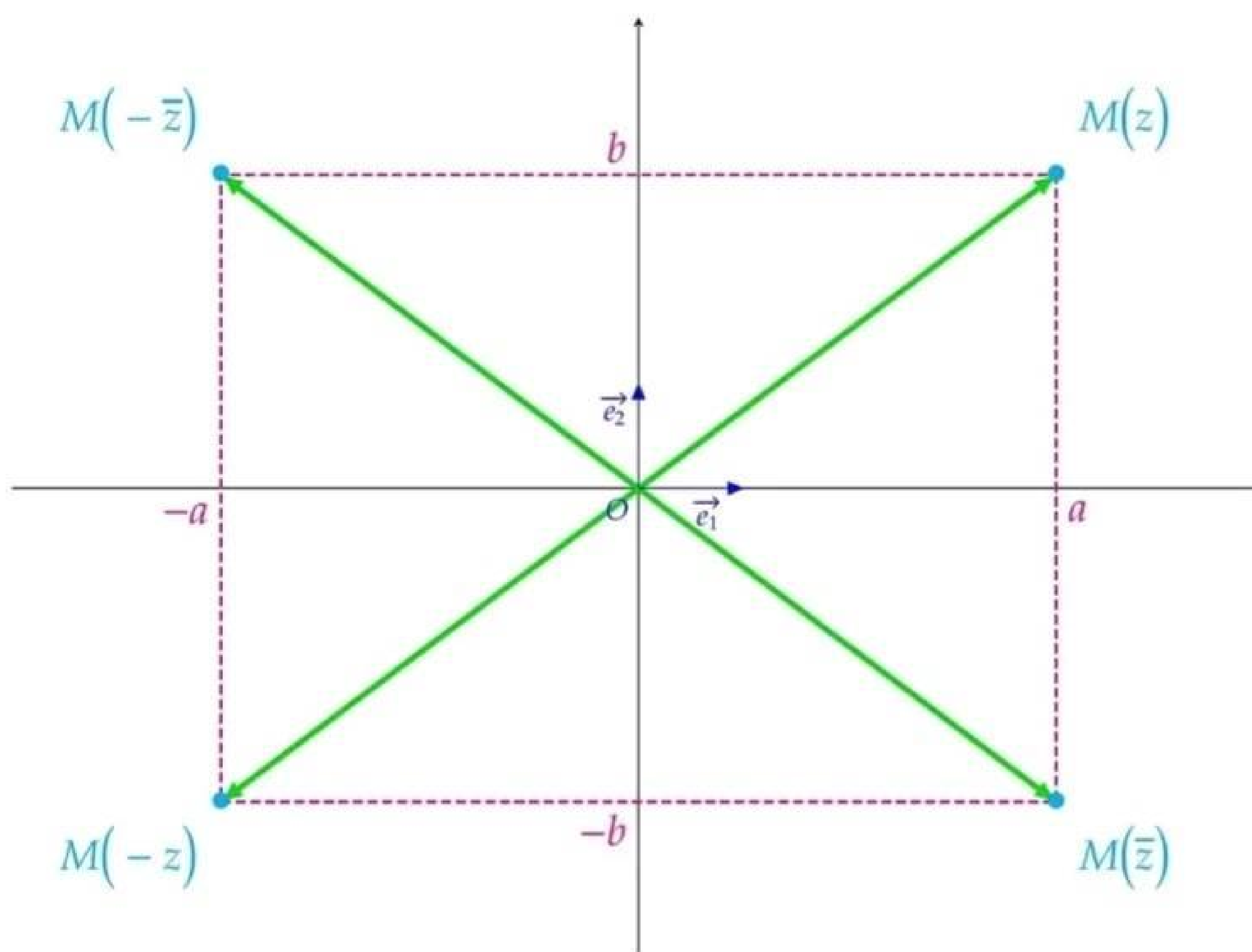
Définition

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

- 1 À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique point M de coordonnées $(a; b)$ appelé **l'image ponctuelle** du nombre z , on le note z_M .
- 2 À tout point $M(a; b)$, on peut associer un unique nombre $z = a + ib$ appelé **l'affixe** du point M , on le note $M(z)$

Alors :

- Le plan est appelé le **plan complexe**.
- L'axe des abscisses est appelé **axe des réels**.
- L'axe des ordonnées est appelé **axe des imaginaires purs**.



2. Affixe d'un vecteur

Définition

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

- 1 À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b)$ appelé **l'image vectorielle** du nombre z .
- 2 À tout vecteur $\vec{u}(a; b)$, on peut associer un unique nombre $z = a + ib$ appelé **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$.

Propriété

Soit $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs et $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe.

- 1 Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- 2 Le vecteur $k \times \vec{u}$ a pour affixe $k \times z$.
- 3 Le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- 4 Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Remarque

L'affixe du vecteur $\vec{BA}$ est $z_A - z_B$.

Exemple

Dans le plan complexe, on considère les points $A(2i)$, $B(1 - i)$ et $C(3)$.

- 1 Déterminer l'affixe des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ et $3\vec{AB} - \vec{BC}$.
- 2 Déterminer l'affixe du point D , sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

III Module et argument d'un complexe

1. Module d'un nombre complexe

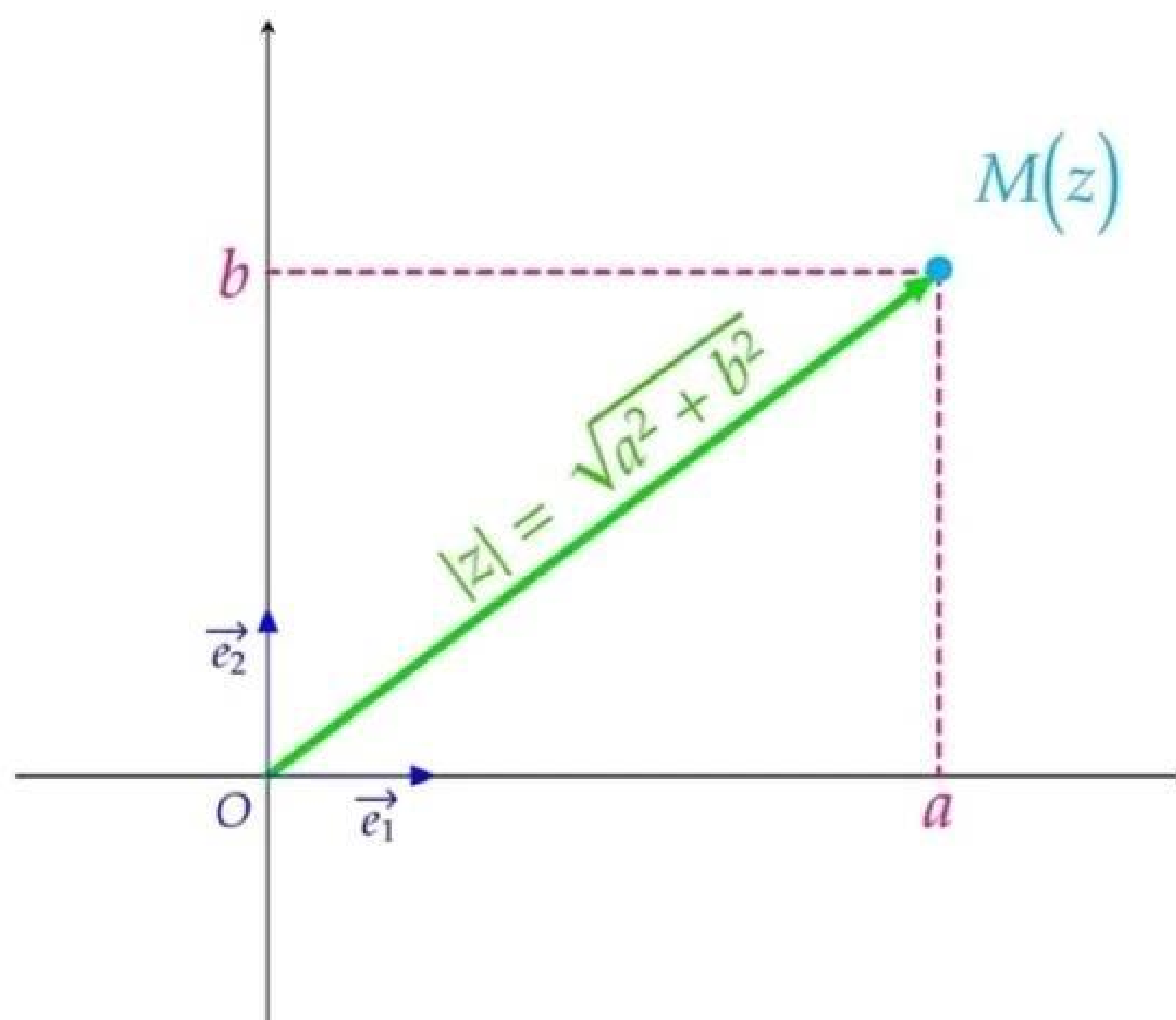
Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- 1 On appelle **module** du nombre z , le réel **positif** $\sqrt{a^2 + b^2}$ et on le note $|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- 2 Graphiquement, Si M est l'image de z , alors on a : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Remarque

- Si z est un réel, alors le module de z correspond à la valeur absolue de z .
- $|z| = 0 \iff z = 0 \iff O = M$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

- 1 $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
- 2 $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

3 Si $z' \neq 0$, alors : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

4 pour tout n de $\mathbb{N}$: $|z^n| = |z|^n$.

5 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. (Inégalité triangulaire)

6 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \iff |z|^2 = z\bar{z}$.



Exemple

Déterminer, dans chaque cas, le module du nombre complexes z ci-dessous :

1 $z = \sqrt{5} - i\sqrt{2}$.

2 $z = (3 + 2i)^3$.

3 $z = \frac{2 + 2i}{2 - 5i}$.

4 $z = \frac{(1 - i)(\sqrt{2} + i)}{(3 + i)^2}$.

2. Argument d'un nombre complexe

Définition

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. On considère un point M d'affixe z non nul.

On appelle **argument** du nombre z , toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1; \overrightarrow{OM})$, et on le note $\arg(z)$.

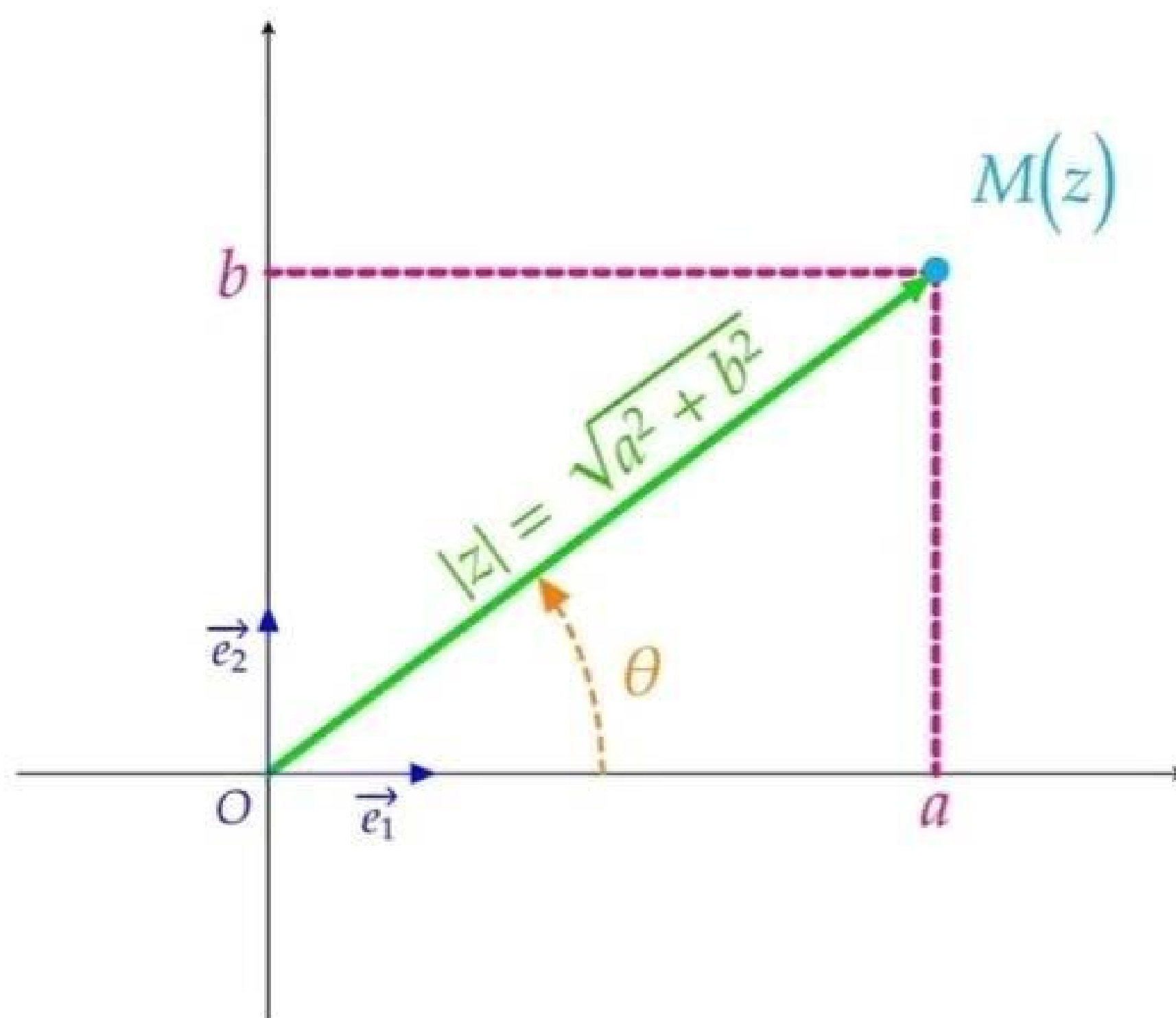
Si θ une mesure d'angle orienté $(\vec{e}_1; \overrightarrow{OM})$, on a :

$$\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$



Remarque

- Tout nombre sous la forme $\theta + 2k\pi$, où k un entier, est un argument du nombre z .
- Le réel θ vérifie : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$.



Exemple

Dans le plan complexe, on considère les points $A(2)$, $B(-3)$, $C(3i)$ et $D(1+i)$.

- 1 Placer les points A , B , C et D dans un repère orthonormé direct.
- 2 Déterminer l'argument de leurs affixes

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

- 1 $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.
- 2 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.
- 3 pour tout n de $\mathbb{N}$: $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$.
- 4 $\operatorname{Re}(z) = 0 \iff \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$.
- 5 $\operatorname{Im}(z) = 0 \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- 6 $z = z' \iff |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$.

Remarque

- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$.
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$.

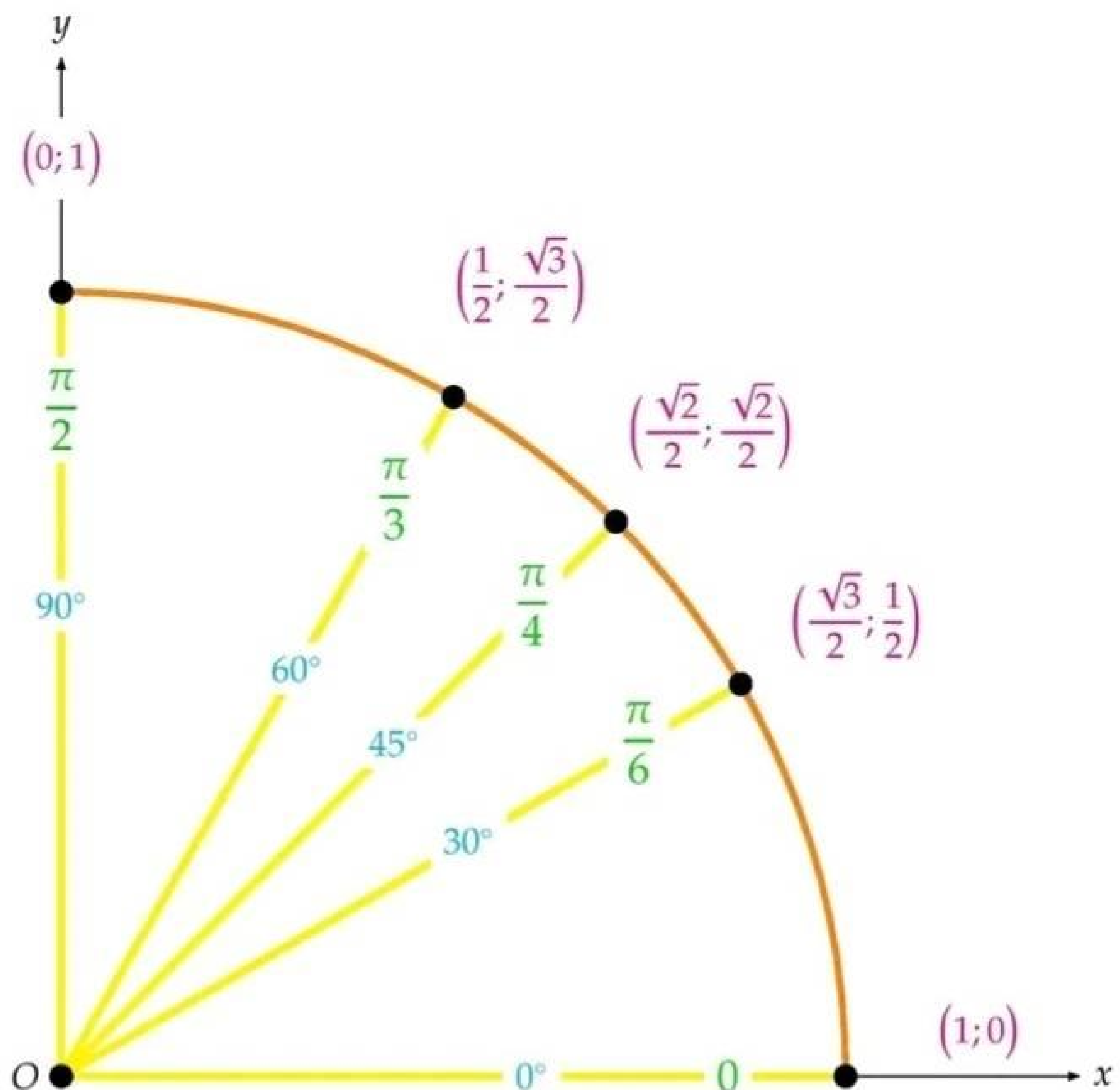
IV Autres écritures d'un complexe

1. Quelques formules trigonométriques

Propriété

Soit x un réel .

- $\cos(-x) = \cos(x)$.
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



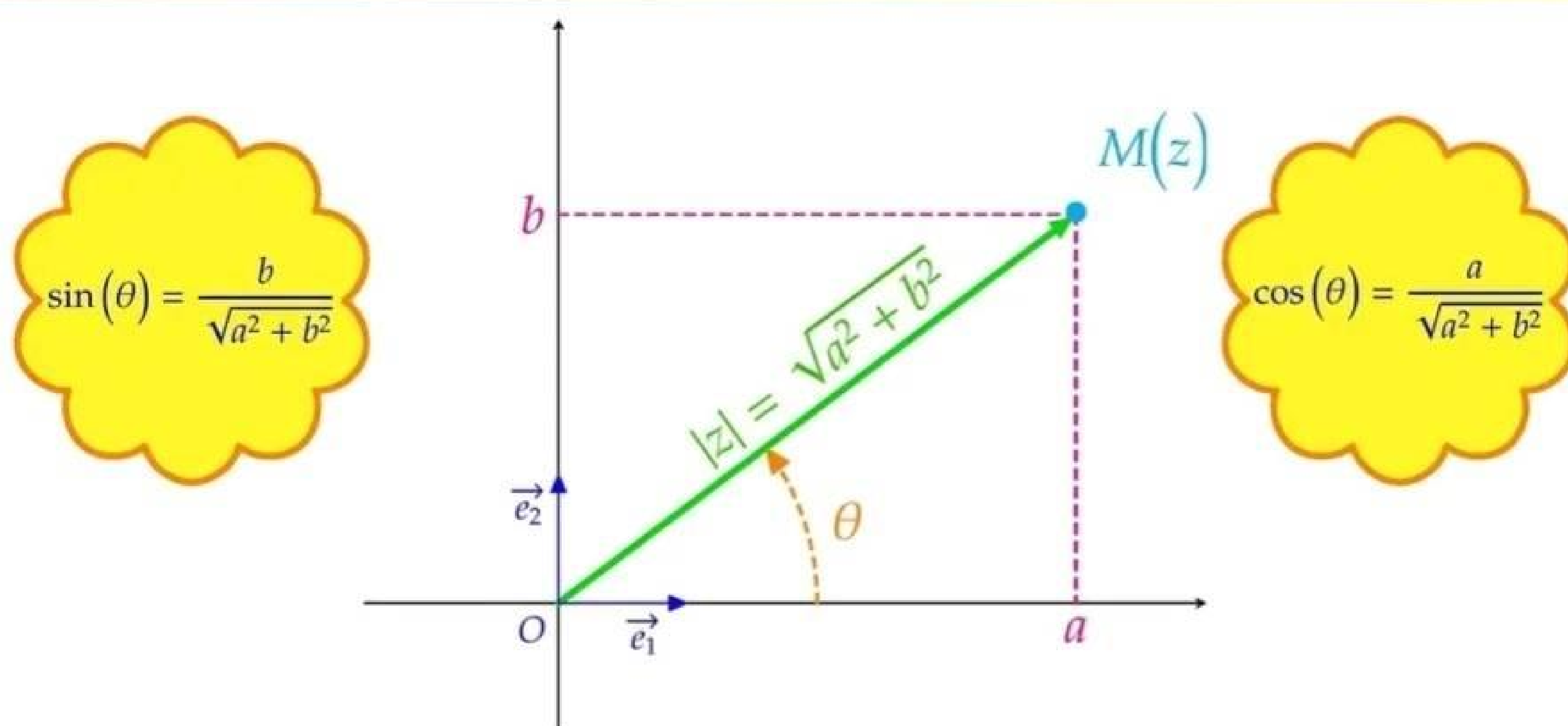
2. Écriture trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe z non nul s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)$$

où $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$. Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** de z .



Exemple

Écrire, dans chaque cas, le nombre z sous forme trigonométrique :

- $z = 1 + i$
- $z = 1 - i$
- $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
- $z = -2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$
- $z = -i$
- $z = 2i(1 + i)$
- $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$
- $z = - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$

Propriété : Formule de Moivre

Soit θ un réel et n un entier relatif.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Exemple

Soit θ un réel.

- 1 Développer $\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right)^2$.
- 2 En déduire l'expression de chacun des nombres $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- 3 Déterminer l'expression de chacun des nombres $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

3. Écriture exponentielle

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- 1 Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ se note $e^{i\theta}$.
- 2 Tout nombre complexe z non nul d'argument θ peut s'écrire sous forme $|z|e^{i\theta}$.

Cette écriture s'appelle **forme exponentielle** de z .



Remarque

On a : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta [2\pi]$.

Exemple

Compléter le tableau ci-dessous :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$-1 - i$		
	$5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	
		$\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Propriété

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.

$$1 \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}.$$

$$2 \quad \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}.$$

$$3 \quad \text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z} : (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

$$4 \quad \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout réel θ on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple

1 Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

$$Z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+i3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\bullet \quad 1 + e^{ix} = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

$$\bullet \quad 1 - e^{ix} = -i2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

3 Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler, Montrer que :

$$\bullet \quad \cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}.$$

$$\bullet \quad \sin^3(x) = -\frac{\sin(3x) + 3\sin(x)}{4}.$$

$$\bullet \quad \text{Linéariser chacune des expressions } \cos^4(x), \sin^4(x), \cos^5(x) \text{ et } \sin^5(x),$$

Linéariser une expression trigonométrique de la forme $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ revient à écrire cette expression en combinaison linéaire de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$, où p et q sont des entiers.

V Quelques propriétés géométriques

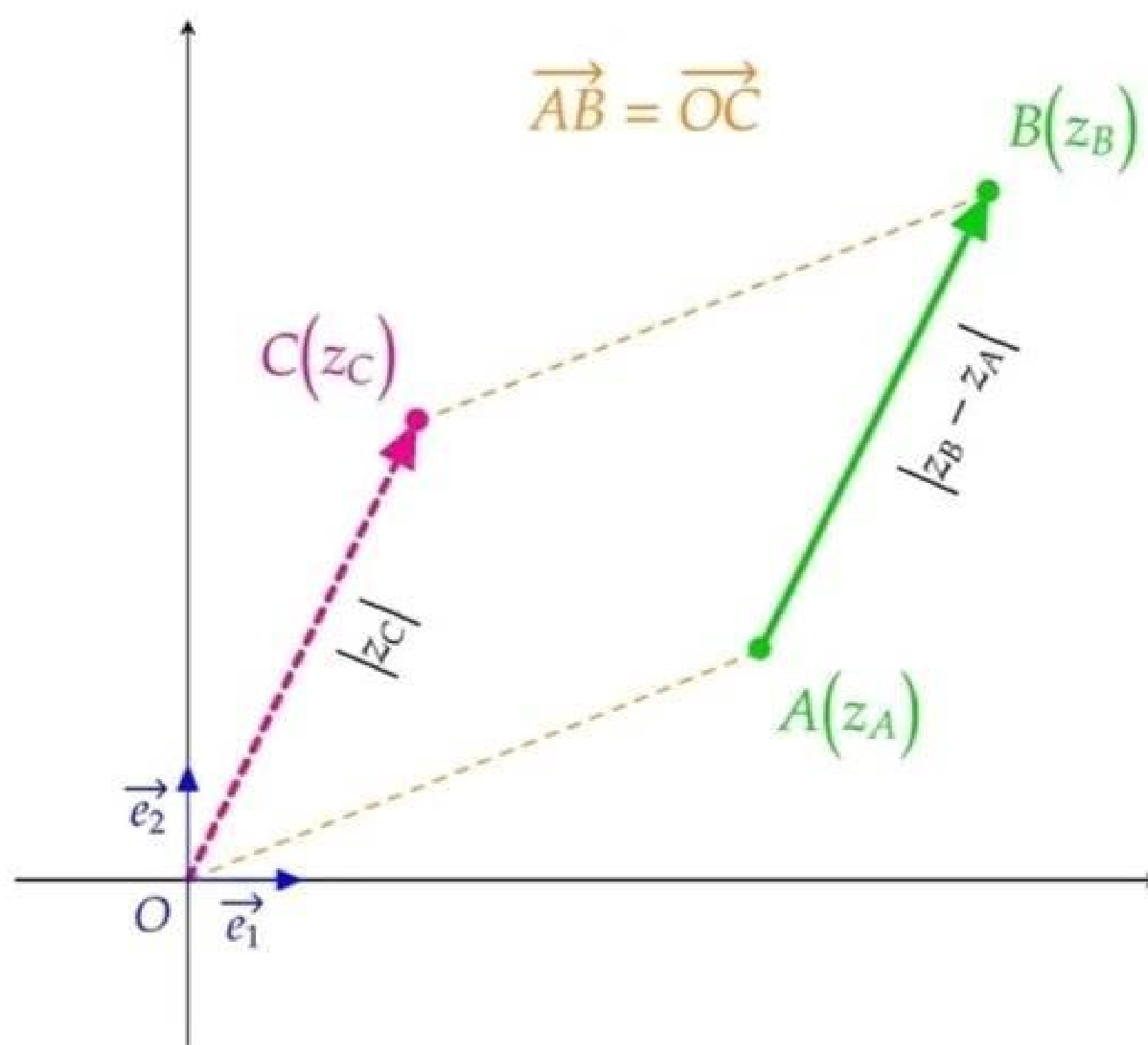
1. Distance entre deux points

Propriété

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe.

La **distance** entre les points A et B est le réel positif $|z_B - z_A|$ ou encore $|z_A - z_B|$.

$$AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$$



Exemple

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 3 + 2i$, $b = 4 + 3i$ et $c = 5 + i$.

- 1 Calculer les distances AB , AC et BC .
- 2 En déduire que le triangle ABC est isocèle.

2. Argument et angle de deux vecteurs

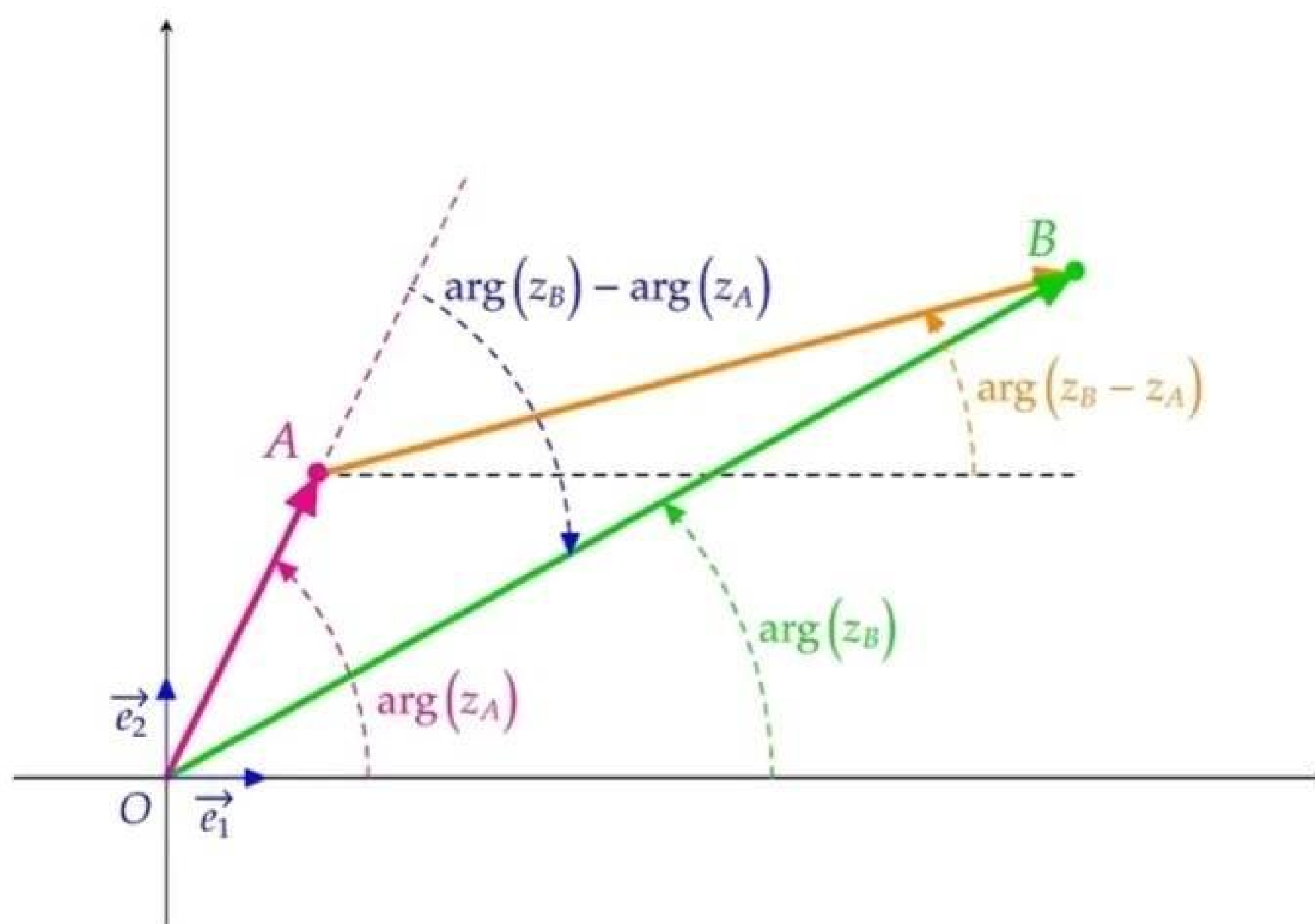
Propriété (1)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan complexe tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

$$1 \quad (\vec{e}_1; \vec{u}) \equiv \arg(z_{\vec{u}})[2\pi] \equiv \arg(z_A)[2\pi]. \quad (\text{d'après la définition})$$

$$2 \quad (\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_{\overrightarrow{AB}})[2\pi] \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi].$$

$$3 \quad (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}\right)[2\pi] \quad \text{ou encore} \quad (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)[2\pi].$$



Propriété (2)

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points tous distincts du plan complexe.

$$1 \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi].$$

$$2 \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi].$$

3. Colinéarité et orthogonalité

Propriété (1)

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

1 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$,
ou encore $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

2 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi]$,
ou encore $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Corollaire (1)

1 Les points A , B et C sont **alignés** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$, ou encore $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

2 Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi]$, ou encore $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Exemple

1 On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 6 - 2i$, $b = 2i$ et $c = 3$.

- Calculer le module et l'argument du nombre $\frac{c - b}{c - a}$.
- En déduire que les points A , B et C sont alignés.

2 On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = 2 + i2\sqrt{3}$, $b = 2 - i\sqrt{3}$, $c = -1 + i\sqrt{3}$ et $d = -1 + i$.

- Calculer le module du nombre $\frac{a - b}{c - d}$.
- Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires?

Propriété (2)

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- 1 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$,
ou encore $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.
- 2 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, ou encore $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Corollaire (2)

- 1 Les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** (**orthogonaux**) si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, ou encore $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.



Exemple

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = -2 + 3i$, $b = -4$ et $c = 1 + i$.

- 1 Calculer le module et l'argument du nombre $\frac{b - a}{c - a}$.
- 2 Le triangle ABC est-il rectangle? isocèle? équilatéral?

4. Quatre points cocycliques ou alignés

Propriété

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points tous distincts du plan complexe.

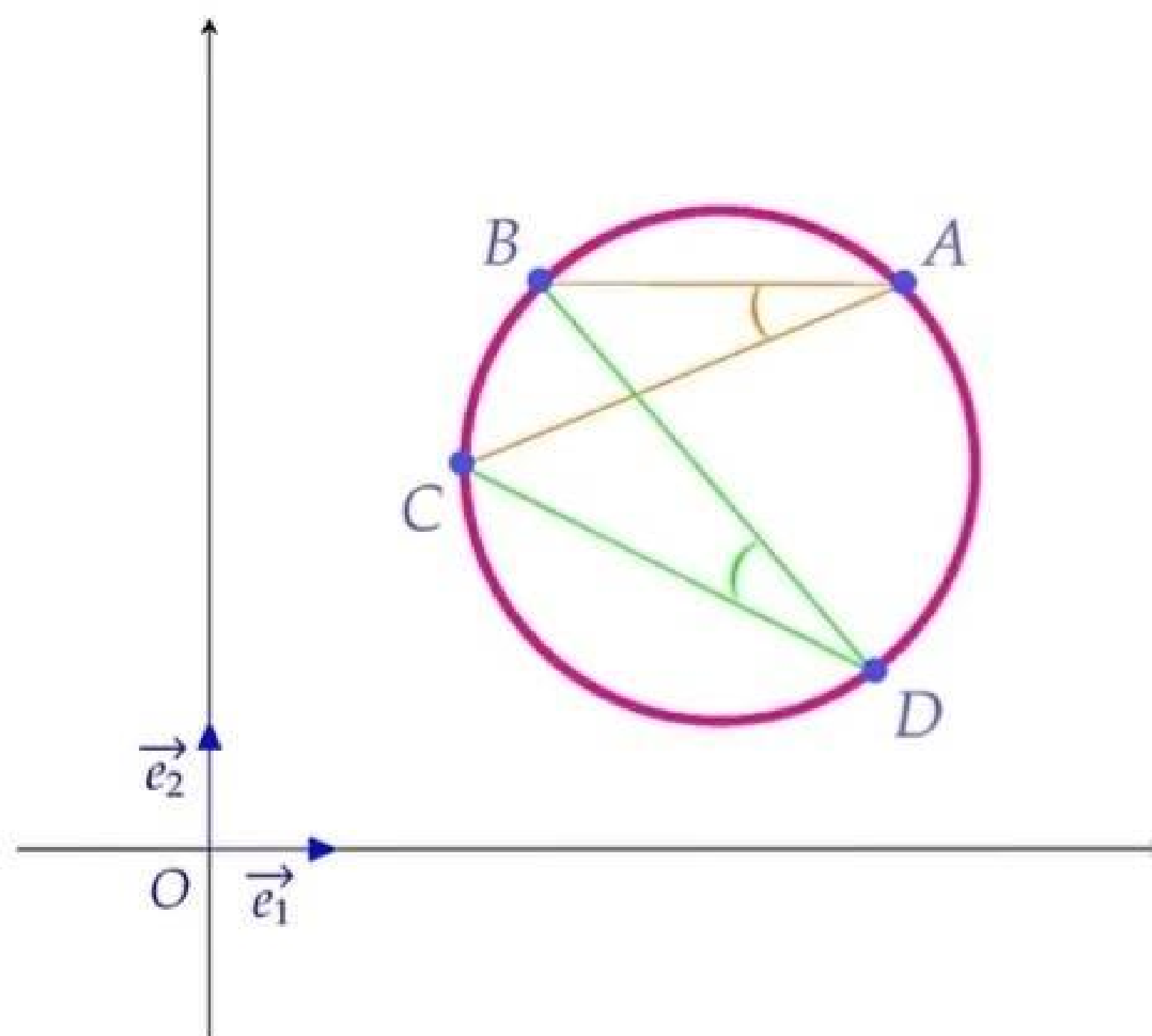
Les points A , B , C et D sont **cocycliques** ou **alignés** si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$.



Remarque

- Trois points non alignés sont toujours cocycliques *i.e* : Le cercle circonscrit au triangle ABC .
- Les points A , B , C et D sont cocycliques si et seulement si $\overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})} [2\pi]$.

- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ et $\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$, alors les points A, B, C et D sont alignés.



Les points A, B, C et D sont **cocycliques**.



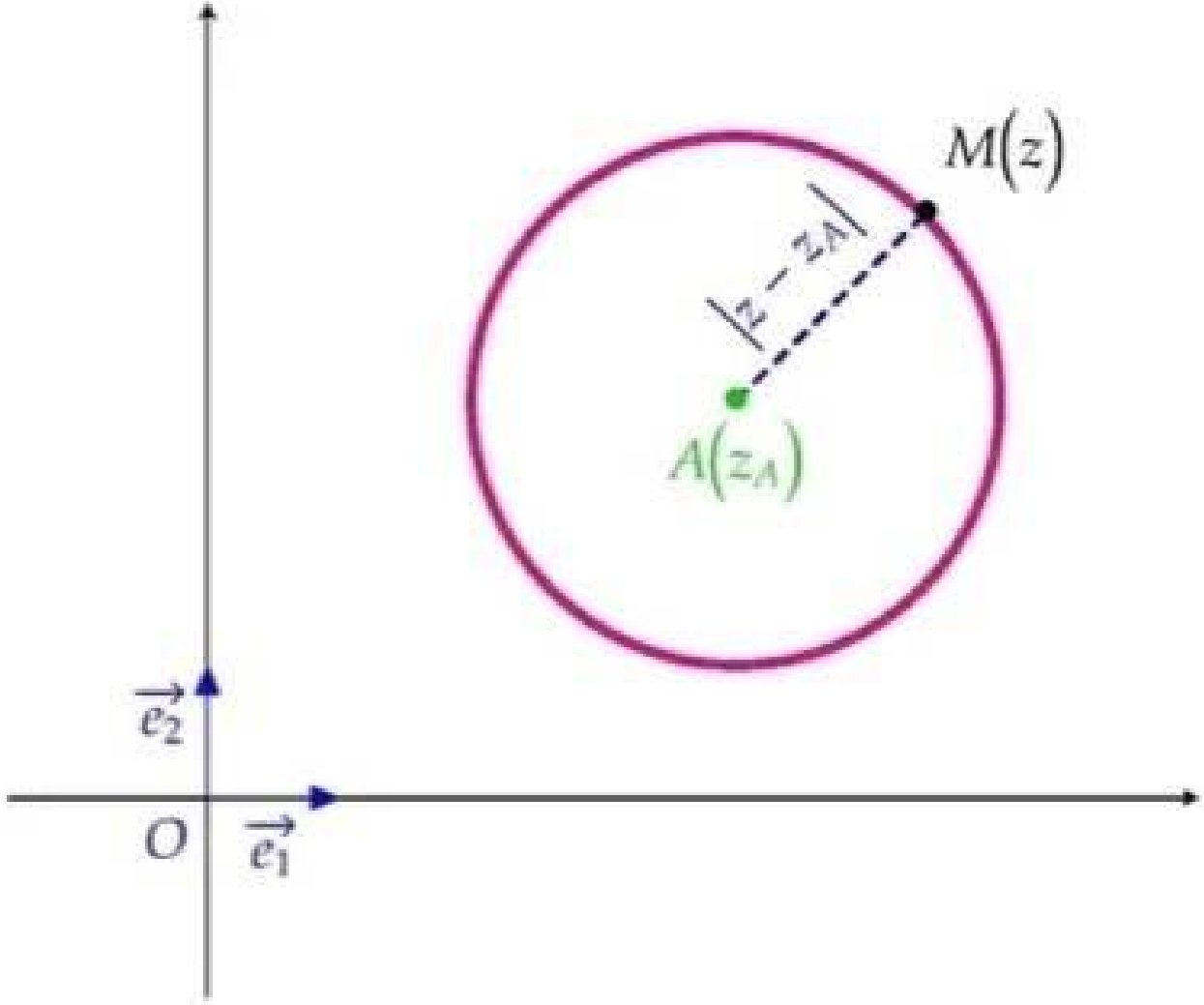
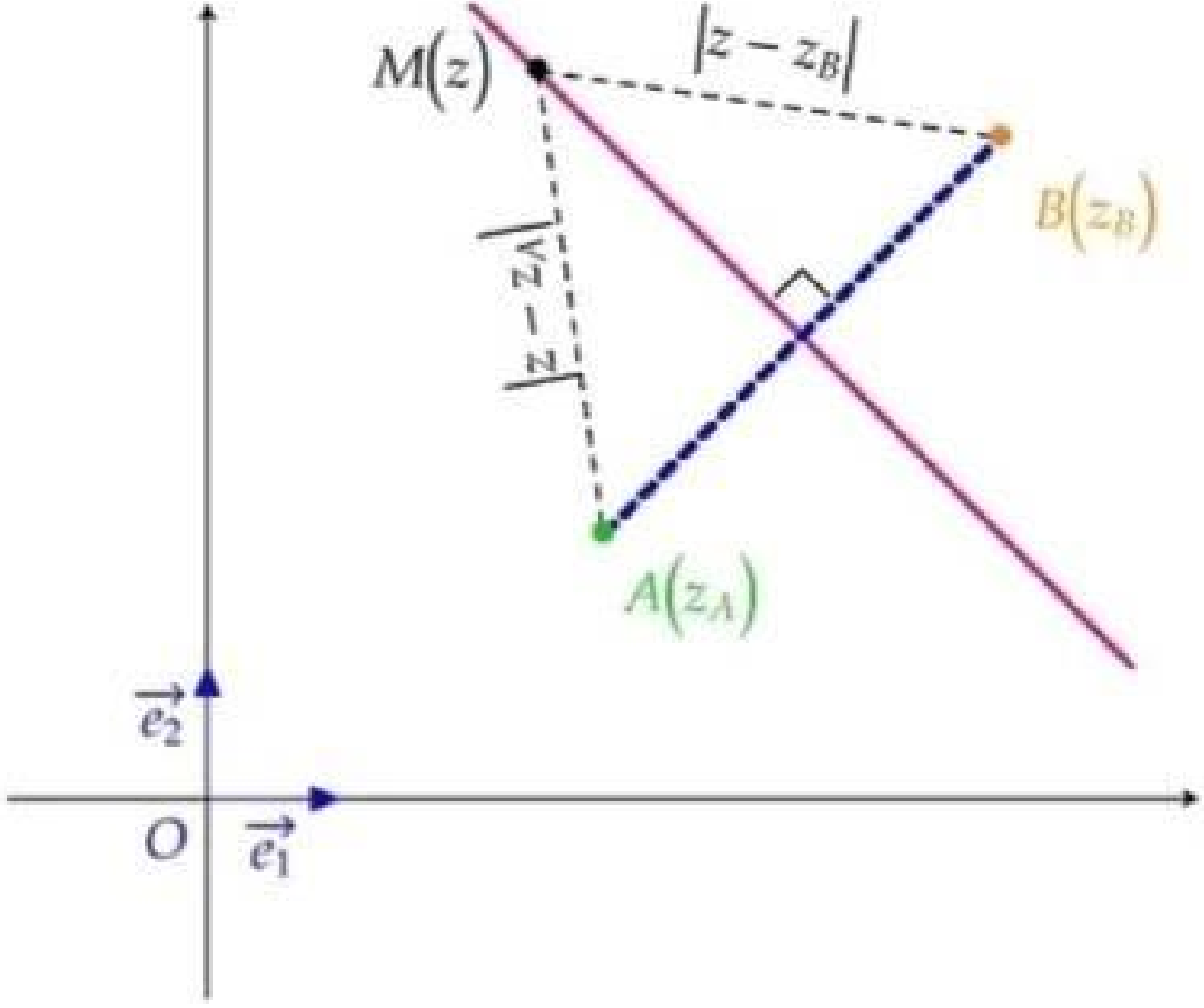
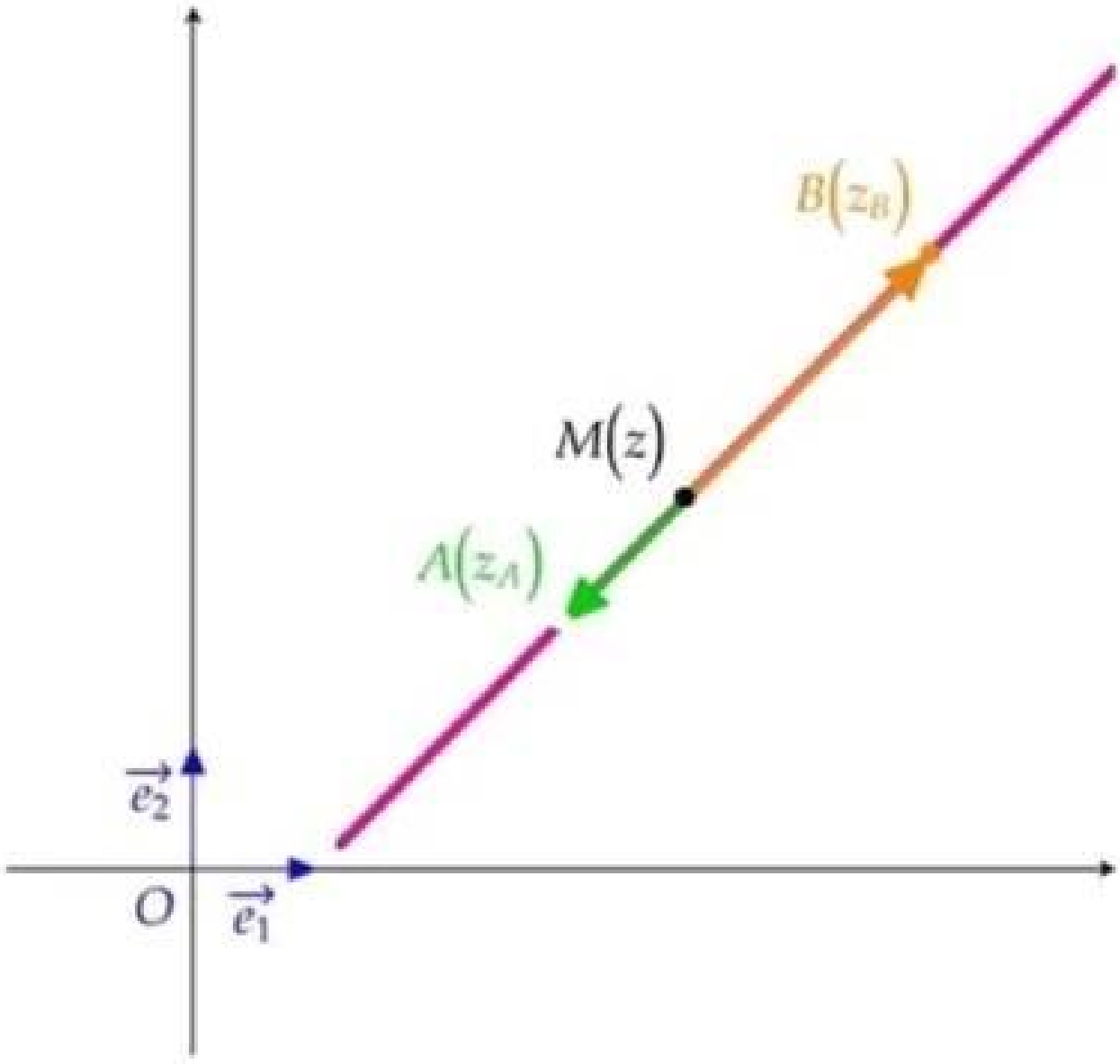
Exemple

Vérifier dans les deux cas suivants, si les points A, B, C et D sont cocycliques :

1 $a = -2 + 6i, b = 1 + 7i, c = 4 + 6i$ et $d = 6 + 2i$.

2 $a = 1 + i, b = \bar{a}, c = -2i$ et $d = \bar{c}$

5. Exemples d'ensembles de points du plan

L'ensemble de points $M(z)$ tels que $ z - z_A = R \quad (R > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon R.	
L'ensemble de points $M(z)$ tels que $ z - z_A = z - z_B $ est le médiatrice du segment $[AB]$.	
L'ensemble de points $M(z)$ tels que $\frac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) privée du point A.	



Exemple

Déterminer dans chacun des cas ci-dessous l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que :

1 $|z - 1 + 2i| = 2.$

2 $\left| \frac{z - 3i}{z + 5} \right| = 1.$

3 $|2z - i| = 2.$

4 $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi].$

VI Écritures complexes de transformations usuelles

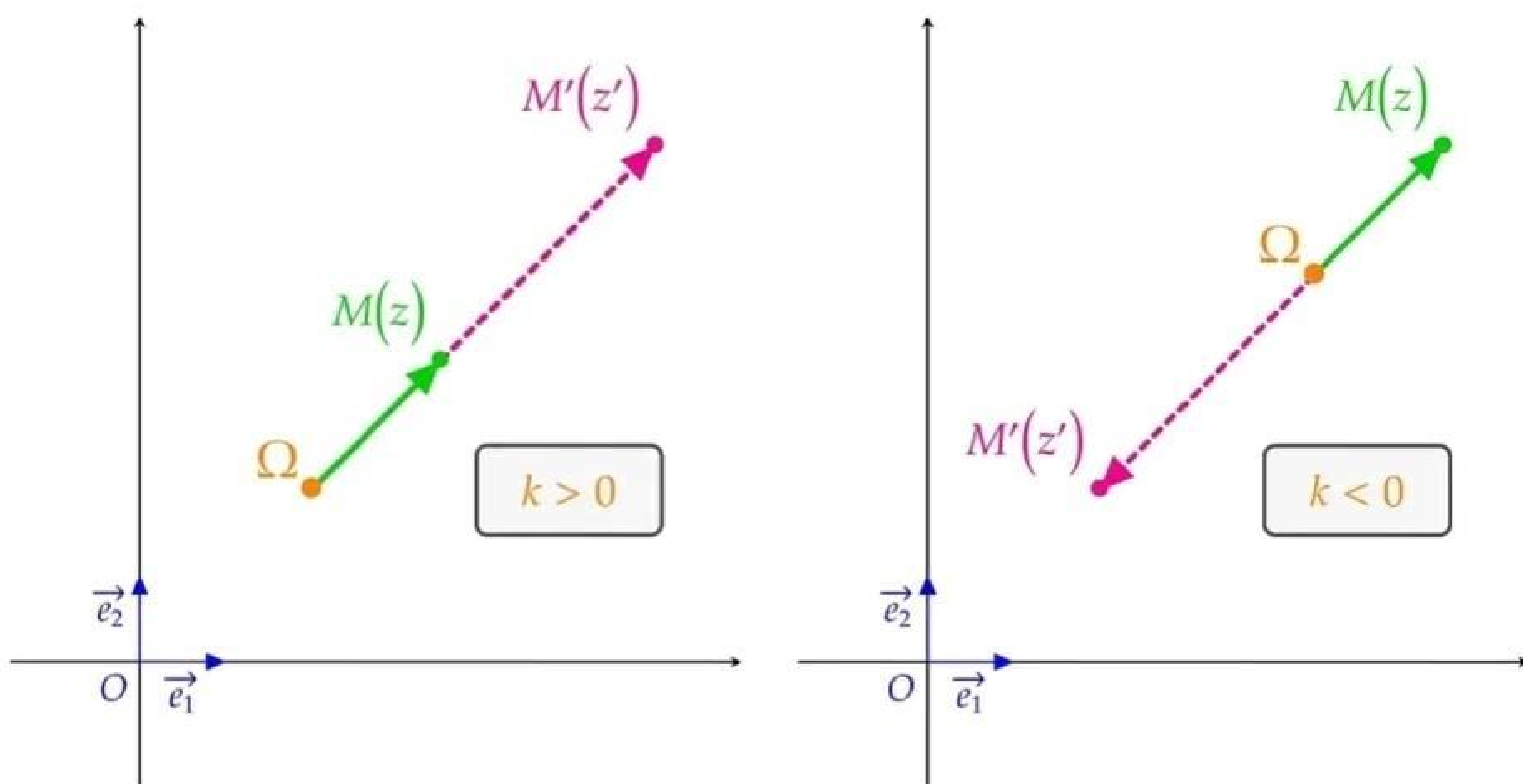
1. Homothétie

Propriété

Soit H une **homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k non nul, M un point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par l'homothétie H .

$$H(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \iff z' = \omega + k(z - \omega)$$

Cette relation est appelée **l'écriture complexe** de l'homothétie H .



Exemple

Donner l'écriture complexe de l'homothétie T de centre $\Omega(i)$ et de rapport $k = -\frac{1}{3}$.

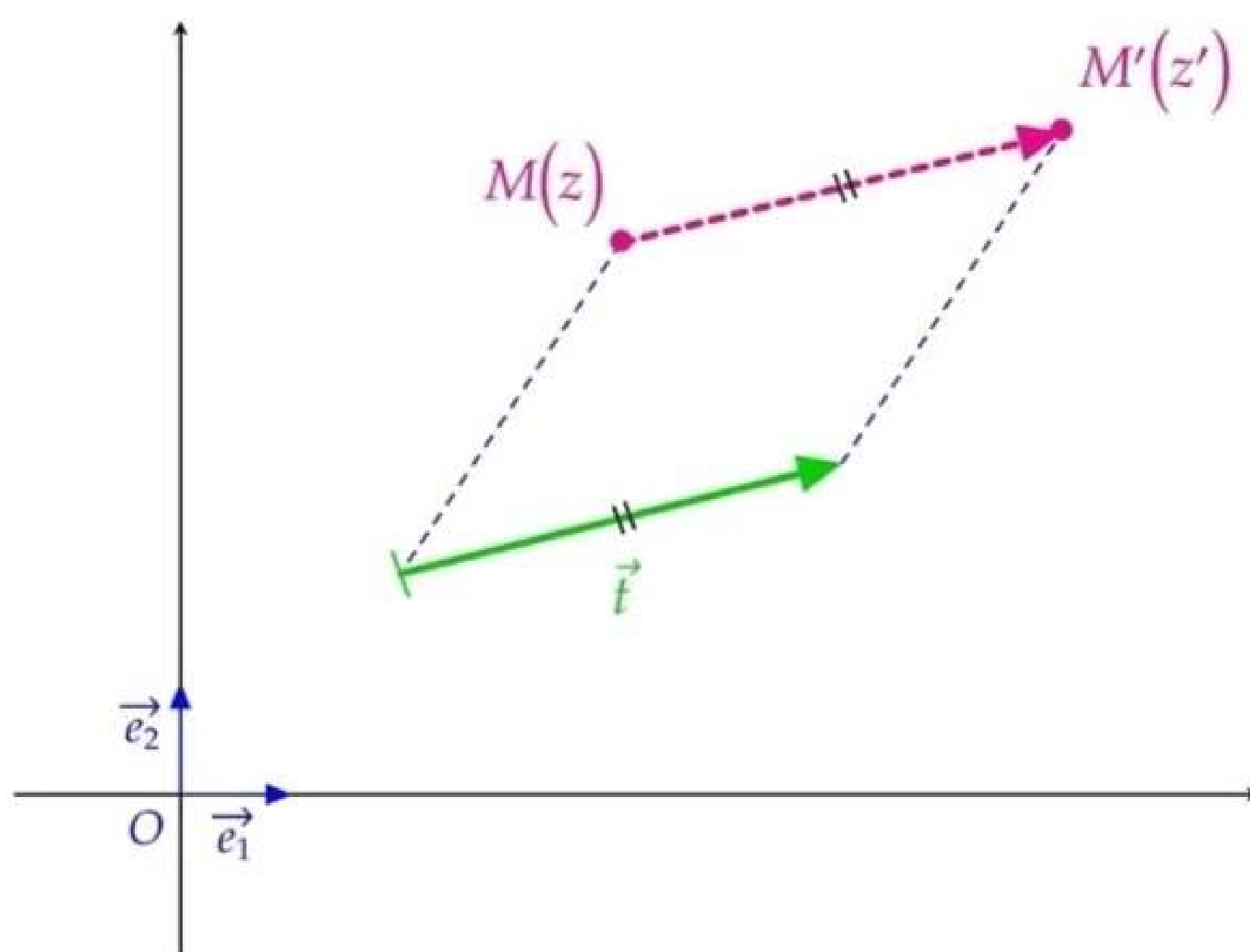
2. Translation

Propriété

Soit T une **translation** de vecteur $\vec{t}(t)$, M un point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par la translation T .

$$T(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{t} \iff z' = z + t$$

Cette relation est appelée l'écriture complexe de la translation T .



Exemple

1 Donner l'écriture complexe de la translation T de vecteur $\vec{t}(1 - i)$.

2 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = 3 - 5i$ et $c = 7 + 3i$. Soit T la translation de vecteur $\vec{t}(4 - 2i)$, et M un point d'affixe z et $M'(z')$ son image par T .

a. Montrer que $\frac{b - c}{a - c} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. En déduire la nature du triangle ABC .

b. Montrer que : $T(A) = C$.

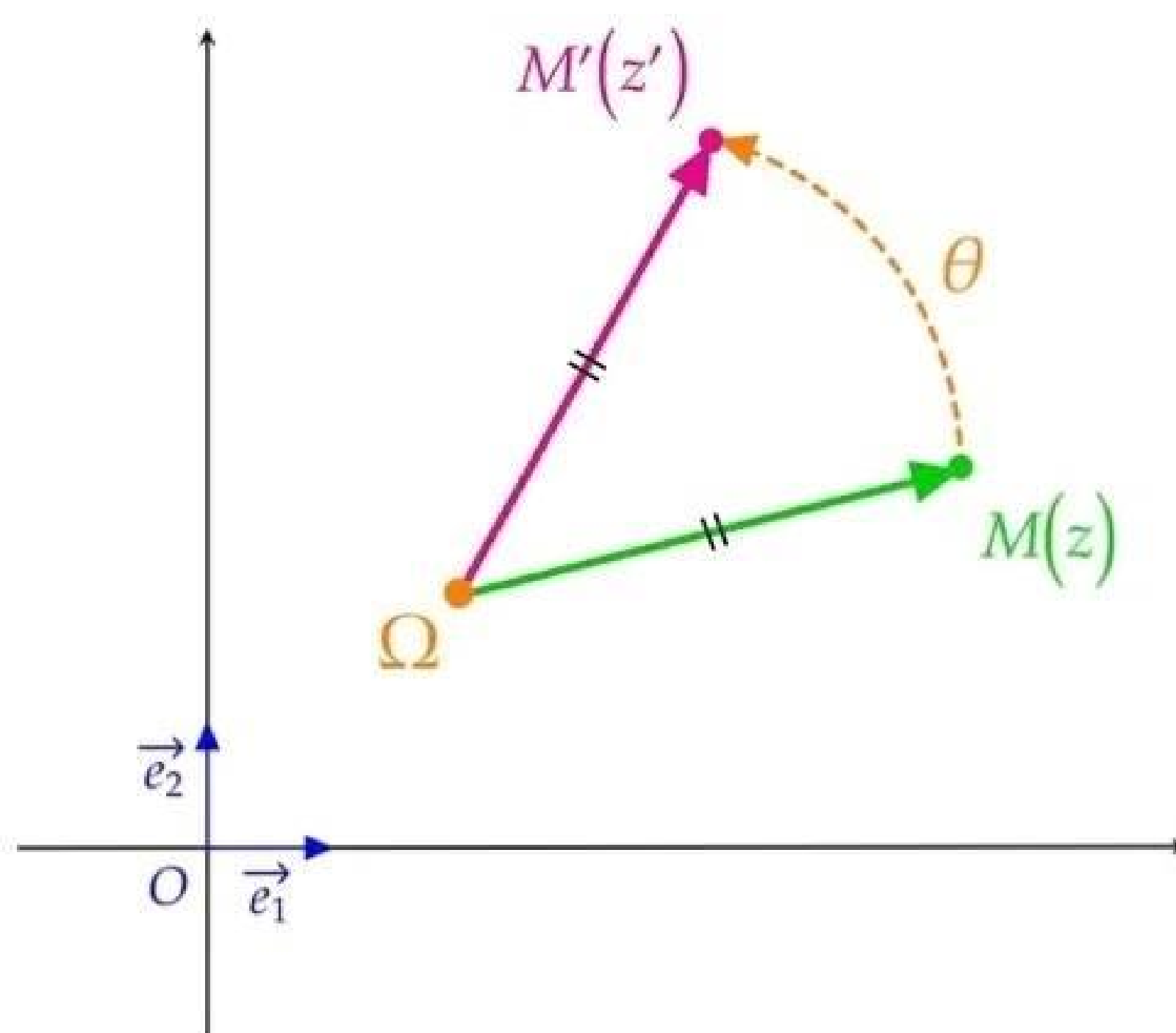
3. Rotation

Propriété

Soit R une **rotation** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , M un point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par la rotation R .

$$R(M) = M' \iff \begin{cases} \overline{\Omega M} = \overline{\Omega M'} \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \iff z' = \omega + (z - \omega)e^{i\theta}$$

Cette relation est appelée l'écriture complexe de la rotation R .



Exemple

1 Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

2 On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

a. Montrer que : $\frac{b}{a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

b. Montrer que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

VII Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Racines carrés d'un nombre réel

Définition

On appelle racine carré d'un nombre réel a , tout nombre complexe z vérifiant $z^2 = a$

Propriété

Tout nombre réel non nul a admet deux racines carrés opposés.

1. Si $a > 0$ alors le réel a possède deux racines réels : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
2. Si $a < 0$ alors le réel a possède deux racines complexes : $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.

Exemple

- 3 admet deux racines carrés réels : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- -9 admet deux racines carrés complexes : $3i$ et $-3i$.

2. Équations du second degré à coefficients réels

Propriété

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels tel que $a \neq 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- 1 Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) possède une solution double : $\frac{-b}{2a}$.
- 2 Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions réelles : $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- 3 Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions complexes : $\frac{-b + d}{2a}$ et $\frac{-b - d}{2a}$.

où d est une racine de Δ .

Remarque

Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions complexes conjuguées.



Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1 $(E_1) : 4z^2 - 8z + 1 = 0.$

2 $(E_1) : z^2 - z + 1 = 0.$

3 $(E_1) : -2z^2 + 2z - 3 = 0.$

Propriété

Soit a, b et c des réels tel que $a \neq 0$.

Les deux nombres complexes z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$

si et seulement si
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$