LE GENIE

ANNALES CORRIGEES DU BAC

MATHEMATIQUES

Classe : Terminales

Série D

- **Baccalauréat - Togo**
- **Baccalauréat - Bénin**

Corrigés entièrement rédigés

Collection dirigée

par

A. T. Gérard

Tél.: (00228) 91 70 43 70 / 98 00 34 77 Lomé - TOGO

Annales corrigées du BAC

Classe : Terminale

2006 - 2021

MATHEMATIQUES

SERIE D

Baccalauréat - TOGO (2006 – 2021)
Des corrigés entièrement rédigés

Collection dirigée par A.T. Gérard
Tel : 91 70 43 70 / 98 00 34 77
Lomé-Togo

Sommaire

AVANT- PROPOS

Ces annales que vous avez sous les mains sont un ensemble de sujets proposés aux examens du baccalauréat série D au Togo depuis 2006.

Ce faisant, non seulement une consultation du corrigé est rendue possible afin d'aider les candidats à comprendre mieux les épreuves, mais également, ils ont la possibilité de s'initier à travers ces différents corrigés, à la précision, à la concision des réponses, à la rigueur du raisonnement, bref ils peuvent ainsi acquérir les compétences que l'on recherche à évaluer dans les sujets d'examen.

Traitant une gamme très variée de sujets, ce document permettra à ses lecteurs de se familiariser avec les sujets déjà donnés aux sessions de baccalauréat première partie passés, mais aussi de traiter de nouveaux sujets conçus dans le style et dans les règles conformes aux structures des sujets officiels.

Cet ouvrage sera donc, nous l'espérons, un outil précieux et efficace au service des futurs bacheliers.

Les auteurs acceptent critiques et suggestions de la part des lecteurs et les en remercient par avance.

Nous vous donnons par la même occasion l'assurance que vos suggestions et apports seront judicieusement exploités en vue d'améliorer les éditions futures.

Les auteurs

ENONCÉS

BACCALAUREAT 2006- TOGO

Enoncé

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$. A est le point d'affixe 2i et P* le plan privé de A.

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1) Montrer que pour tout point M de P*, le point M' est distinct de A.

2) Démontrer que T est une bijection de P* sur lui-même. Déterminer sa réciproque T^{-1}.

3)a- Montrer qu'un point M de P* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation $z^2 - 4iz + 5 = 0$

b- Trouver le réel α tel que $z^2 - 4iz + 5 = (z - 2i)^2 + \alpha$

c- Montrer alors que T admet deux points invariants B et C.

4) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D*) la droite (D) privée de A. Montrer que (D*) est globalement invariante par T.

5)a- Montrer que pour $z \neq 2i$, $|z' - 2i|.|z - 2i| = 9$.

b- Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3.

Montrer que (Γ) est globalement invariant par T.

Exercice 2

1- Soit f, g et h les fonctions numériques de la variable réelle définies sur [0 ; 1] par

$f(x) = xe^{x^2}, g(x) = x.e - \frac{1}{2};\ h(x) = xe^{2x}$. (où e est la base du logarithme népérien).

Monter que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{2};\ \int_0^1 g(x)dx = \frac{e-1}{2}$; $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$

2- On joue avec deux dés, un blanc et un rouge, cubiques et non truqués. Les faces du dé blanc sont marquées f, f, g, g, h et h ; celles du dé rouge f, f, g, g, g et h.

On lance le dé blanc et on appelle k la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé. Puis on lance le dé rouge et on note l la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque événement (k, l) on associe le réel $\int_0^1 [k(x) + l(x)]dx$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

<u>Problème</u>

A – <u>Préliminaire</u>

Démonter que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$

En déduire le signe de $\sqrt{x^2+3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2+3} - x$ sur IR

B- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I , J).

1-a) Monter que f est continue en $x_0 = 1$.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

c) Etudier le sens de variation de f sur]-∞ ; 1[et sur]1 ; +∞ [. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

d) Compléter l'étude des variations de f.

e) Préciser le comportement de la courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire (C).

2- Soit g la restriction de f à l'intervalle]-∞ ; 1].

a) Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1}

b) Définir explicitement g^{-1}.

c) Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que (C).

d) Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$.

e) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = -1$ et $x = 1$.

Calculer A en utilisant la courbe (Γ).

C / On désigne par I l'intervalle [1 ; 2].

On définie la suite (u_n) $n \in IN$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1-a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I.

b) Démontrer que pour x de I on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d) En déduire que pour tout x de I on a : $|f'(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

2-a) Démontrer que : $\forall n \in IN$, $u_n \in I$

b) Démontrer que : $\forall n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) Etablir que $\forall n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de 2-c que la suite (u_n) $n \in IN$ est convergente et préciser sa limite.

BACCALAUREAT 2007- TOGO

Enoncé

Exercice 1

I Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{e^{x-1}}$ où y est une fonction de la variable réelle x, dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

1- Résoudre l'équation différentielle sans second membre associé à (E).

2-a) L'on s'intéresse aux solutions particulières φ de (E) de la forme

$\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$ où h est une fonction dérivable sur$]0\,;+\infty[$. Sachant que φ est une solution de (E), déterminer h.

b) En déduire la solution générale de (E).

c) Parmi les solutions de (E) déterminer la solution f qui vérifie la condition $f(\ln 2) = 0$

II- Soit la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$.

Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 2$. On pose $I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln\alpha} f(x)dx$

1-a) Déterminer une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$

b) En déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$ On remarquera que $\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$

2- En utilisant le fait que f est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouver que $I(\alpha) = -f(\ln\alpha) + \ln(\alpha-1) - \ln\alpha + \ln 2$.

3- En déduire que $I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha} + \ln(1-\frac{1}{\alpha}) + \ln 2$.

4- Calculer $\lim_{x\to+\infty} I(\alpha)$

Exercice 2

1- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2- Soient K, L, M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$; $z_L = 1 - i$; $z_M = -i\sqrt{3}$.

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; e_1 ; e_2)$. Unité graphique 2cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3-a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation du centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A.

Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

c) La translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i transforme le point M en le point D et le point N en le point B.

Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.

4-a) Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].

b) Montrer que : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Problème

A- Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur IR par :

$f(x) = (2 - x)e^x - k$ où k est un réel fixe qui vérifie : $0 < k < e$.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2- Calculer f '(x). En déduire le tableau de variation de f. Calculer f(1).

3-a) Etablir que l'équation f(0) = 0 admet deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty ; 1[$ et l'autre notée $\beta_k \in]1 ; +\infty[$.

b) Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$. On admettra que β_k vérifie la même relation c'est-à-dire $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.

4- Préciser le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

B-1) Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur IR par : $u(x) = e^x - kx$.

a) Etudier le sens de variation de u.

b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante :

Pour tout $x \in$ IR, $e^x - kx > 0$

2- Soit g_k la fonction définie sur IR par $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$. (C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Prouver que $g'_k(x) = \frac{k.f(x)}{(e^x - kx)^2}$

c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.

d) On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisses respectives α_k et β_k

3-a) En utilisant la question 3.b) de A, monter que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$

b) Trouver une expression analogue pour $g(\beta_k)$

c) Déduire de la question précédente que, lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont on donnera une équation.

4-a) Déterminer la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

b) Prouver que $\alpha_2 = 0$

c) En prenant comme unité 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes (C_1), (C_2) et (H) sur le même graphique. (On prendra $\alpha_1 = 1,1$ et $\alpha_2 = 1,6$).

5- Calculer l'aire délimitée par la courbe C_1 et les droites d'équation $x = -3$; $x = 0$ et $y = 0$.

BACCALAUREAT 2008- TOGO

Enoncé

Exercice 1

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$; $Z_D = 2 + 4i$

1- Soit S la similitude plane directe qui à tout point M d'affixe Z, fait correspondre le point M d'affixe $Z' = 3iZ + 13 - 9i$

a) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

b) Quelle est l'image par S du point C ? Du point D ?

c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2- Soit R la similitude plane directe qui transforme B en C et D en A.

a) Trouver la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image R(M).

b) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c) Que représente le point D pour le triangle ABC ?

3- Montrer que J est un point de la droite (AB). Donner une mesure (en radian) de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 2

Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 179. Chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 59. Ces boules sont indiscernables au toucher.

1- Trouver le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).

2- On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :

- Si elle est noire, on lui donne 500F et la partie est terminée.
- si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
- Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300F et la partie est terminée.
- si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième et dernier tirage.
- si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100F
- si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité P pour que X soit positif.

c) Peut-on espérer gagner à ce jeu ?

d) Un joueur fait cinq parties successives. Quelle est la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors de ces cinq parties ?

Problème

Partie A

Soit u la fonction de la variable réelle x définie par : $u(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$

1- Résoudre dans IR l'équation $u(x) = 0$.

2- Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

$g(x) = x - 2\sqrt{1 + x^2}$

1-a) Justifier que g est dérivable sur IR.

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c) en déduire le signe de g'(x).

2) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D, dresser le tableau de variation de g.

3-a) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C) de g.

b) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à ses asymptotes.

4- construire la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique 2cm)

Partie C

1- Déterminer la fonction numérique h telle que pour tout réel x, $h(-x) + g(x) = 0$

2- Soit (Γ) la courbe représentative de h. Montrer que (C) ∪ (Γ) est la courbe d'équation : $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$.

3- En déduire que le point O est un centre de symétrie de la courbe (C) ∪ (Γ)

4- Construire alors (Γ) dans le repère précédent.

Partie D

Soit la fonction numérique f définie sur IR par :

$f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1-a) Déterminer que pour tout réel x, $\sqrt{1+x^2} > |x|$

b) En déduire l'ensemble de définition de f

2- Calculer la dérivée f ' de f puis en déduire une primitive de la fonction g sur IR.

3- Calculer en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points M(x,y) du plan qui vérifient les inégalités $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) \leq y \leq -x$.

BACCALAUREAT 2009- TOGO

Enoncé

Exercice 1

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise exprimé en millions de francs, pendant huit années consécutives.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Numéro de l'année (xi)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (yi)	41	67	55	80	95	104	100	122

1-a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (xi, yi) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1cm pour une année en abscisse et 1cm pour vingt millions de francs en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G et le représenter sur la figure précédente.

2-a) Calculer à 10^{-3} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (xi, yi). Un ajustement affine serait-il justifié ?

b) Ecrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés. (On donnera les coefficients à 10^{-3} près par excès).

c) Tracer cette droite dans le même repère que le nuage des points.

3- En supposant que la tendance constatée se maintienne, estimer :

a) Le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2015.

b) Déterminer l'année où le chiffre d'affaires de cette entreprise dépassera 300 millions de francs

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). On considère les points : A d'affixe $a = -4$; B d'affixe $b = 4$; E d'affixe $e = 4i$; C d'affixe c et D d'affixe d tells que les quadrilatères AOEC et BOED soient carrés.

1- Placer les points précédents dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et donner les affixes des ponts C et D.

2- Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Préciser les points $f(A)$ et $f(O)$. Peut-on prévoir ces résultats ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose M un point quelconque du plan distinct du point C.

c) Exprimer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de l'affixe z de M.

d) Déduire que MM' = MC

e) Calculer $\frac{z-c}{z-z'}$ et montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$

f) Quelle est la nature du triangle MM'C ?

Problème

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthogonal (O ; I, J). L'unité graphique est de 2cm.

Partie A

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty]$ par : $g(x) = x\ln x - x + 1$ et C sa représentation graphique dans le repère (O ; I, J).

1- Etudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de cette fonction. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2- On note C' la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère (O ; I, J). Montrer que C et C' sont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1; e]$, on a :

$$x\ln x - x + 1 \leq \ln x.$$

On ne demande pas de représenter C et C'.

3-a)Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_1^e (x-1)\ln x dx$$

b) Soit Δ la partie du plan définie par :

$$\Delta = \{M(x\,;\,y); 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$$

Déterminer, en cm², l'aire de Δ.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$

1- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.

2- Déterminer le tableau de variation de f. (On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).

3- Tracer la courbe représentative de f dans le repère (O ; I, J)

Partie C

1- Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution, notée α,

et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

2- Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$

b) Etudier le sens de variation de h.

c) On pose $I = [3; 4]$. Montrer que, pour tout x élément de I, on a : $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

3- On définit la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout n de IN, $U_{n+1} = h(U_n)$.

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

b) Pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) La suite (U_n) converge vers α.

4- Trouver un entier naturel p tel que des majorations précédentes on puisse déduire que U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

BACCALAUREAT 2010- TOGO

Enoncé

Exercice 1

On considère un groupe de 16 personnes parmi lesquelles 4 ont une caractéristique C. ces 4 personnes sont dites de « type C ». On prend simultanément et au hasard 5 personnes dans ce groupe.

1- Calculer la probabilité de chacun des événements :

A « n'avoir, parmi ces 5 personnes, aucune du « type C ».

B « avoir exactement une personne de ce type ».

C « avoir au moins deux personnes de ce type ».

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

2- On constate après enquête, que, dans la population entière, la répartition des personnes du « type C » est de 1 sur 4. On estime la population suffisamment nombreuse pour que le tirage de n personnes soit assimilable à n tirages successifs indépendants avec remise.

On prend au hasard n personnes ($n \geq 2$) et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de celle du type C.

a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ en fonction de n.

c) En déduire la probabilité P_n d'avoir au moins deux personnes du type C.

d) Démontrer que $P_n \geq 0{,}9$ si et seulement si $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1$.

e) On pose $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)$.

Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1. Quel est le sens de variation de (U_n) ?

Exercice 2

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; U, V). on désigne par T l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$.

1- Montrer que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif dont on donnera les éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par T. donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'})$ en supposant que $M \neq \Omega$.

2-a) Construire M' image de M par T où M est un point donné distinct de Ω.

b) Déterminer l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$. Construire (D').

3-a) Montrer qu'il existe un point B de (P) distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' (où B' est l'image de B par T) soient liés par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Placer les points B et B' dans le repère (O ; U, V).

b) Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O. Montrer que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques.

Déterminer l'affixe du centre G du cercle (Γ) passant par Ω', Ω, B et B'.

PROBLEME

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$.

1- Etudier les variations de la fonction f.

2- Déduire de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule notée α. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3- Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (l'unité graphique choisie est 2cm). Préciser, s'il y a lieu, des tangentes horizontales.

4-a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$.

b) Soit λ un réel positif. Montrer que $0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$

Partie B

1- Vérifier que pour tout réel x,

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$ où f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f.

2- On note F la primitive de f sur IR qui s'annule pour x = 0. Donner la valeur explicite de F(x) pour tout réel x.

3-a) Calculer l'aire A(λ) en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations y = 1 ; x = 0 ; x = λ où λ est réel positif.

b) déterminer la limite de A(λ) lorsque λ tend vers +∞.

Partie C

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre, de fonction inconnue y : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -2e^{-x} + 1$. (E_1)

La fonction f est la solution de (E1) d'après la question B-1.

1- Résoudre l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ (E_2)

2- La fonction g étant une solution définie sur IR de l'équation (E_2). Démontrer que g + f est une solution de (E_1). Réciproquement, soit h une solution de (E_1). Démontrer que h – f est une solution de (E_2). En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

3-Déterminer la solution φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

Partie D

Étant donné un réel a, on note g_a la fonction définie sur IR par $g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$

1- Montrer que les courbes (C_a) représentatives des fonctions g_a passent toutes par un même point fixe I.

2- On suppose $a \neq -2$. Démontrer que la fonction g_a admet deux extrémums dont l'un est obtenu pour $x = 0$.

3-On note M_a le point d'abscisse $a + 2$ sur la courbe (C_a). Lorsque a varie, M_a décrit une courbe Γ ; Donner une équation cartésienne de Γ

BACCALAUREAT 2011- TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est 9/10.

1) On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\overline{F}$ l'événement contraire de F.

Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F}$.

2) On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $1/11$.

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

a- Montrer que la probabilité de l'événement T et F noté $T \cap F$ est égale à $9/10$.

b- Calculer la probabilité de $T \cap \bar{F}$.

c- En déduire la probabilité de l'événement T.

d- Calculer la probabilité de F sachant T (probabilité conditionnelle de F par rapport à T).

Exercice 2

Soit $P(Z) = Z^3 + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma$ un polynôme complexe de degré 3 où α, β et γ sont des nombres complexes donnés.

1) a- Démontrer que si le polynôme $P(Z)$ admet trois racines a, b et c alors on a simultanément $a + b + c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$.

b- Former alors le polynôme $P(Z)$ lorsque ses racines sont :

$a = 1 + 3i\sqrt{3}$; $b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$.

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c dans le plan complexe muni d'un repère$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a- Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b- Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$

c- En déduire la valeur de $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté$\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}\right)$.

3) a- Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre A, qui transforme B en C.

b- Déterminer l'affixe Z_1 du point B_1 qui a pour image B par s.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Calculer les limites de g en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.

4) Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à $]0; \alpha[$ et à $]\alpha; +\infty[$ (La représentation graphique de g n'est pas demandée).

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x)-1}{x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité = 2cm.

1) a- Calculer $f'(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$ où g est la fonction définie à la partie A.

b- Déterminer le sens de variation de f.

c- Calculer les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

2) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C).

b- Etudier la position de (C) par rapport à (D).

c- Préciser les coordonnées du point a intersection de (C) et (D).

3) a- Montrer que $\ln(\alpha) = \frac{6 - \alpha^2}{4}$ et que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$ où α est le nombre réel défini à la partie A- question 3.

b- Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = -x + 3 + \frac{2}{x}$.

b1- Etudier le sens de variation de h.

b2 – En déduire un encadrement de f(α).

On rappelle que $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.

4) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$; f(1). Que peut-on conclure pour la courbe (C) ?

c- Construire (D), (C) puis placer le point A.

Partie C

Soit k la fonction définie sur par $k(x) = h(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$.

1) En remarquant que $k(x) = 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ calculer l'intégrale $I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} k(x)dx$.

2) Donner une interprétation géométrique de I_0.

3) On considère la suite numérique (a_n) définie sur IN par $a_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

a- Calculer en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} k(x)dx$.

b- Montrer que (I_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

BACCALAUREAT 2012- TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar ($) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix derniers années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en $ (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1) a- Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_1, y_1) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée.
b- Calculer les coordonnées du point moyen G.
2) a- Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_1, y_1). En déduire qu'un ajustement affine est justifié.
b- Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès).
c- Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points.
3) En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :
a- Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016.
b- En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 $?

Exercice 2

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$$

1) a- Vérifier que i est solution de (E).
b- déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
c- En déduire les solutions de (E).
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A, B et C les points d'affixes $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$, $z_C = 2 - 3i$
Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r.

b- Calculer $\frac{z_A - z_A}{z_A - z_A}$ En déduire l'existence d'une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport.

3) On considère la transformation plane S définie par : S = hor.

a- Quelle est l'image de a par S ?

b- Préciser la nature et les éléments géométriques de S.

PROBLEME

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k définie sur IR par $f_k(x) = x^k\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right)$. On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans un plan rapporté à un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

Partie A

1) a- Etudier la limite de f_k en $-\infty$.

b- Etudier, suivant la parité de k, la limite de f_k en $-\infty$.

2) Calculer la fonction dérivée de f_k, puis montrer que pour tout x réel, $f_k'(x) = x^{k-1}g_k(x)$ où $g_k(x) = (k - x)e^{-x} - \frac{k}{2}$.

3) a- Etudier les variations de g_k.

b- En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans IR et que α_k est strictement positif.

c- Déterminer le signe de g_k dur IR.

En déduire le signe de f_k' sur IR (distinguer k pair et k impair)

d- Dresser le tableau de variation de f_k.

Partie B

Dans cette partie, on prend k = 1. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (x - 1)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1) a- Montrer que $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

b- En utilisant g_1, montrer que $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1 - \alpha_1)}$.

En déduire l'expression de $gf_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$.

c- Déduire de A/3-d/ le tableau de variation de f_1.

2) montrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation.

3) Soit la fonction φ définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = 1-\frac{e^x}{2}$.

a- Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation (x) = x.

b- Démontrer que pour tout x élément de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

c- b- Démontrer que pour tout x élément de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

4) On définit la suite numérique (U_n) par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.

a- Démontrer que (U_n) est une suite d'éléments de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

b- Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$ $\leq |U_n - \alpha_1|$

c- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$. En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

5) a- Etudier le signe f1 sur IR.

b- On donne $\alpha_1 \approx 0,315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6) a- Déterminer les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur IR par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \longmapsto xe^{-x}$

b- Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 2.

BACCALAUREAT 2013-TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

Soit α un nombre complexe.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(1+i)z^2 - 2i(\alpha+1)z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$

2) Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de α.

3) Caractériser la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2.

4) On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$

a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

Exercice 2

On considère les équations différentielles suivantes :

(E) : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x$

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$; dans lesquelles m est un paramètre réel.

1) Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation (E').

2) Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E).

3) Dans cette question, on donne m = 2.

a- Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur IR.

a_1 - Montrer que si φ est une solution de (E) alors (φ – h) est une solution de (E').

a_2 - Montrer que si (φ – h) est une solution de (E') alors φ est une solution de (E).

b- Déduire de 1-, la résolution de (E') ; puis résoudre (E).

c- Déterminer la fonction f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point

$\Omega(0;-1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (x^2-2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur IR de la fonction $x \mapsto 2(1-2x)e^x$.

a- Sachant que g est une solution de (E), montrer que la fonction G définie sur IR par : $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$est une primitive de g sur IR.

b-Déterminer une expression de U(x) de la forme : $U(x) = (ax+b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

c- En déduire G(x).

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

A/

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = x+2-e^x$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en $+\infty$.

2) a- Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0;+\infty[$.

On note α cette solution.

b- Prouver que : $1{,}14 < \alpha \leq 1{,}15$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B/

1) a- Montrer que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b- En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2) a- Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

b- En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) a- Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

b- En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/2, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5) a- Etablir que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$,

$f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b- Etudier le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$.

En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$.

c- Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

d- Tracer (C) et (T).

C/

1) Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de f(x) établie en B/2-.

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation x = 0 et x = 1.

2) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D.

3) Pour tout entier naturel k, on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$.

a- Calculer V_0 , V_1 et V_2 .

b- Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$

c- Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$

BACCALAUREAT 2014 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

Soit l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^n = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$, $n \in IN*$

1) Déterminer les solutions Z_k de (E).

2) On pose $n = 5$.

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points-images des solutions Z_k de (E).

3) On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a- Soit $J = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimer α en fonction de J.

b- Monter que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$

4) Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' tels que : $z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a- Ecrire la formule algébrique du nombre complexe $W = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$

b- Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 80 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : «Le personnel interrogé est un agent de maintenance»
- O l'événement : «Le personnel interrogé est un opérateurs de production »
- I l'événement : «Le personnel interrogé est un ingénieur »
- F l'événement : «Le personnel interrogé est une femme »

1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2) Calculer la probabilité d'interroger :

a- Un agent de maintenance.

b- Une femme agent de maintenance.

c- Une femme.

3) Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études on montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement « l'alarme se déclenche »
- B l'événement « une panne se produit ».

a- Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

b- Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

c- Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

PROBLEME

A/ On considère la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \quad si\, x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 \quad si\, x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) a- Etudier la continuité de f en 0.

b- Montrer que pour tout réel non nul u on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$$

c- a- Calculer

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) + 2}{x} \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) + 2}{x}$$

Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.

2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles $\alpha < 0 < \beta < 1$.

b- vérifier que $-2{,}75 < \alpha < -2{,}74$.

B/ On pose $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et $I = [0; 1]$.

1) Montrer que β est l'unique solution de l'équation $x > 0, g(x) = x$.

2) Montrer que pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3) Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que pour tout x de I on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4) On définie la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I.

b- En appliquant les inégalités des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\,|U_n - \beta|$ puis que $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

d- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n_0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

e- Calculer la valeur correspondante de U_{n_0}.

C/

1) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

b- Etudier l'autre branche infinie de (C).

2) Construire avec soin (Δ) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\alpha \approx -2{,}7$ et $\beta \approx 0{,}8$).

3) a- Par des intégrations par parties, calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x)dx$.

b-Exprimer l'aire $A(\alpha, \beta)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ en fonction de α et β seulement.

BACCALAUREAT 2015 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

Le tableau suivant donne l'évolution de l'indice annuel des dépenses, exprimé en milliards de francs CFA, d'une compagnie multinationale pendant ces dernières années.

année	2006	2007	2008	2009	2010
N° de l'année (xi)	1	2	3	4	5
Indice des dépenses (yi)	36	45	40	58	70

2011	2012	2013	2014	2015
6	7	8	9	10
64	80	95	100	108

1) a- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (xi, yi) dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité graphique est 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 10 milliards de francs CFA en ordonnée.

b- Calculer les coordonnées du point G puis le construire sur la figure précédente.

2) a- Calculer à 10^{-3} près, le coefficient de corrélation linéaire de la série (xi, yi).

Un ajustement linéaire peut-il être envisagé ? Justifier la réponse.

b- Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite (D) de régression linéaire de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-3} près).

Représenter la droite (D) dans le repère précédent.

3) On suppose que l'évolution de l'indice se poursuit de la même façon dans les années à venir.

a- Donner une estimation en milliards de francs CFA de l'indice annuel des dépenses de la compagnie en 2030.

b- En quelle année l'indice annuel des dépenses de cette compagnie dépassera-t-il 300 milliards de francs CFA ?

Exercice 2 :

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : (E) : $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^4 + (-5+3i)Z^3 + (8-9i)Z^2 + (-14+6i)Z + 10 = 0$$

a- Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E)

b- Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, $1-3i$ et $3-i$.

a- Placer les points dans repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b- Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

b1 – Déterminer l'écriture complexe de S.

b2- Donner les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport k et angle α).

3) On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n ($n \in IN$) avec $Z_0 = i$ et $Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.

a- Calculer $\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S.

En déduire la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$

b- Démontrer que la suite $(U_n)n \in IN$ définie par la relation : $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et raison.

c- Exprimer en fonction de n la longueur $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$, $(n \geq 2)$

Problème

I/. On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par $g_k(x) = -2x + 1 + 2x\ln(kx)$, k étant un paramètre réel non nul.

1) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble de définition E_k de g_k.

2) Calculer les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$.

3) Calculer la dérivée g'_k de g_k.

4) Etablir le tableau de variation de g_k pour chaque cas.

5) a- Montrer que pour $k > 0$ et pour $x \in]0; +\infty[$, $gk(x) > 0$

b- Montrer que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution négative unique α_0 élément de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{k}\right[$.

c- Montrer que pour $0 < k < 2$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives α_1 et α_2.

d- Etudier le signe de $g_2(x)$.

II/ Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x, définie par : $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln(kx)}{2x-1}$, k étant un paramètre réel supérieur ou égal à 2 ; on désigne par (Ck), la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Unité graphique : 1 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dk de la fonction f_k.

2) a- Montrer que la fonction f_2 admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$.

On rappelle que: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(h+1)}{h} = 1$

b- Calculer aux bornes de Dk les limites de f_k.

3) a- Calculer la fonction dérivée f'_k de f_k et établir une relation entre $f'_k(x)$ et $g_k(x)$ pour tout x de Dk.

b- Etudier le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation pour $k = 2$ et pour $k \neq 2$

4) Représenter (C2) et (C4) dans le même repère ; (préciser les asymptotes à chacune de ces courbes).

III/

1) a- A l'aide de f_2, montrer que :

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, 0 < lin2x < 2x - 1$

b- En déduire que : $\int_1^2 ln2xdx < 2$

2) A l'aide du graphique de la partie II, montrer que $\frac{ln6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x)dx < \frac{2ln2}{3}$

(Utiliser la méthode des rectangles, on choisit 2 rectangles convenables)

BACCALAUREAT 2016 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right) dx$

1) Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

a- Montrer que f est une primitive de la fonction, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0; 1]$.

b- En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

2) a- Sans calculer explicitement J et K, montrer que $K = J + 2I$.

b- A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - I$.

3) Déduire des questions précédentes, les valeurs exactes de J et K.

Exercice 2 :

Pour analyser le fonctionnement d'une machine, on note mois par mois, ses pannes et on remarque que :

- Sur un mois, la machine tombe au plus une fois en panne ;
- Si pendant le mois m la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant $m + 1$ est 0,24 ;
- Si la machine tombe en panne le mois m (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant $m + 1$ est 0,04 ;
- La probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « la machine tombe en panne le n-ième mois suivant sa mise en service ».

Si A est un événement, $\overline{A}$ représentera son contraire.

On note P_n la probabilité de E_n (on a ainsi $P_1 = 0,1$).

1) a- Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant E_n » et de « E_{n+1} sachant $\overline{E}_n$ ».

b- Exprimer les probabilités de E_{n+1} et E_n » et de « E_{n+1} et $\overline{E}_n$ » en fonction de P_n.

c- Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :$P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P$.

2) a- Résoudre l'équation :$P = 0{,}24 - 0{,}2P$.

b- Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = P_n - P$. Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.

En déduire les expressions de U_n et de P_n en fonction de n.

c- Montrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

Problème :

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k\ln x}{x}$.

La représentation graphique de f_k dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal est notée (C_k). (unité graphique 2 cm).

Partie A

1) Soit pour tout entier naturel k, la fonction g_k définie par $g_k(x) = x^2 - k + k\ln x$.

a- Etablir le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b- Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée α_k et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

2) Etablir que, pour x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Etudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

3) a- Etablir les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b- Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k).

c- Etudier la position de (C_k) par rapport à (D_k).

partie B :

Etude des cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$.

1) - α_k étant le nombre défini en A-1, montrer que $\alpha_1 = 1$ et que $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$.

2) a- Montrer que $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$.

b- Utiliser l'encadrement de α_2 pour donner un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

3) Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2.

4) Représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2).

5) Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C :

1) Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0; +\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a- Etablir le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b- Déduire que $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0; 1[$.

c - Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$

3) a- A l'aide des résultats obtenus dans les questions 1 et 2 de cette partie C, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

b- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et de (C_k) .

BACCALAUREAT 2017 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

1) On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout couple (x , y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y, en convenant que 2 cm représente 5 sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble G des points M(x, y)satisfaisant aux inéquations (Σ) :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées.

2) Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.

Une deuxième entreprise vent pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.

a- Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots de A et y lots de B.

Exprimer en fonction de x et y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots de A et y lots de B.

b- Justifier que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge.

c- Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5.000 F ? On justifiera la réponse.

d- Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale ? Quelle est cette dépense minimale ?

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2,\ b - 3 + i\sqrt{3}\ et\ c = 2i\sqrt{3}$.

1) a- Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle.

b- Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2) On note $(z_n)_{n \in IN}$, la suite de nombres complexes de premier terme $z_0 = 0$ et A_n, le point d'affixe z_n telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$$

a- Déterminer les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

b- Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$,$[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c- Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)\ où\ \omega = 1 + i\sqrt{3}$$

d- En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e- Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminer l'affixe du point A_{2017}.

3) a- Démontrer que , pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b- Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Problème :

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + lnx$.

1) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2) a- Montrer qu'il existe un nombre réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,65<\alpha<0,66$.

b- En déduire selon les valeurs de α, le signe de $g(x)$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+lnx}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1)a – Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis en donner une interprétation graphique.

b- Calculer la limite de f $en +\infty$.

c- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation ; (on pourra utiliser la fonction g définie dans la partie A).

3) a- Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b- Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

c- En déduire que $f(\alpha) < h(0,65)$.

d- Montrer que $f(\alpha) > f(0,65)$.

e- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 2.10^{-2} près.

4) Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donner une équation de cette tangente (T).

5) Tracer (D), (T) et (C).

6) Soit k la restriction de f sur $]\alpha, +\infty[$.

a- Montrer que k définit une bijection de $]\alpha, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

b- Préciser l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1}. Justifier.

c- Donner le sens de variation de k^{-1} puis dresser son tableau de variation.

d- Calculer le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$.

e- Tracer la courbe $C_{k^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

BACCALAUREAT 2018 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 + 2Z + 2 = 0$.

On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et par z_2 l'autre solution.

b- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $z_3 = \sqrt{3} - 1$.

Placer les points A, B et C.

c- Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

d- En déduire la nature du triangle ABC.

2) Trouver les fonctions numériques f, deux fois dérivables telles que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ $où\, f'et\, f''$ sont des dérivées premiere et seconde de f .

3) On considère l'équation différentielle :

$ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des entiers naturels appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On dispose de trois urnes contenant chacune 6 boules identiques numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de chaque urne et on note le numéro de la boule tirée. La première urne donne la valeur de a, la deuxième celle de b et la troisième urne la valeur de c.

a- On suppose que $b = c = 2a$. Soient les fonctions F : $x \mapsto (Acosx + Bsinx)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels. Justifier que les fonctions F sont solution de l'équation (I).

b- Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) pour que F soient solutions de (I).

c- Montrer que la probabilité pour qu'on ait le triplet (1, 2, 2) est égale à $\frac{1}{216}$.

4) Déterminer la probabilité pour que F soient solutions de (I).

Exercice 2 :

Soit $(I_n)_{n\in IN}$ la suitre définie par $I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}du.$

1) a- Démontrer que $\forall\, n \in IN,\ I_n \geq 0.$

b- Démontrer que $\forall\, n \in IN,\ I_{n+1} - I_n = \int_1^0 (1-u)^n\, u^{3/2} du$ et en déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in IN}$.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est convergente.

3) a- Vérifier que la dérivée de la fonction $u \longmapsto u^{3/2}$ sur $[0; 1]$ est la fonction $u \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{u}.$

b- Calculer I_0 et I_1.

c- En utilisant la question 1-b), démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \frac{2n+5}{2n+2}\ I_{n+1}$

4) a- En déduire l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n.

b- Calculer I_4.

Problème :

Partie A

On considère une fonction g définie et dérivable sur IR par $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 1$.

1) a- Justifier que la limite de g en $-\infty$ est -1.

b- Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) a- Démontrer que, pour tout $x \in IR$, on a $g'(x) = xe^{x-1}$.

b- Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left]\frac{3}{2}; 2\right[$.

b- Vérifier que $\alpha \in]1,56; 1,57[$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur IR par $f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a- Démontrer que f est une primitive de g sur IR.

b- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

b- Etudier les positions relatives de (C) et (D).

4) Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

6) Démontrer que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha - 1}$

7) Montrer que $f(\alpha)$ est négatif.

8) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives.

9) Tracer (D), (T) et (C).

10) Soit λ un élément de $]-\infty, 2[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $x = \lambda$ et $x = 2$.

a- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.

b- Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ \alpha[$.

1) Démontrer que h est une bijection sur un intervalle J à préciser.

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

a- Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}, puis dresser son tableau de variation.

b- Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C)

BACCALAUREAT 2019 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 (3 points)

Soit les deux intégrales définies par :

$I = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx.$

1- Calculer I + J.

2-a/ Montrer que $J - I = \int_{\pi}^{0} e^x cosaxdx$ où a est un réel à déterminer.

b/A l'aide d'une double Intégration par parties, démontrer que $J - I = \frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$.

3- Déterminer les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 2 (6 points)

I/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = -i$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = -1 + 2i$; $Z_D = -2$

1- Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2- a/ Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_D} = Z$

b/Calculer le nombre complexe Z.

3- Déterminer le module et l'argument de Z puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

II/ Soit λ un nombre complexe de module 1 différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n la suite (Z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe Z_n.

1-a/ Calculer $Z_1, Z_2,$ et Z_3.

b/ Démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \ldots\ldots + \lambda + 1)i$.

c/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$

2. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$

Démontrer que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$

3- Etude du cas $\lambda = i$.

a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = Z_{4n+k}$

b/Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle.

c/ Déterminer les images de A. B, C, et D par φ et placer dans le repère précédent ces images.

d/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{4n+1} = -i$

PROBLEME (11 points)

Partie A

1- Résoudre l'équation différentielle (E): $2y' - y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR.

2- On considère l'équation différentielle (E') : $2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$.

a/ Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$ soit solution de (E').

b/ Soit g une fonction définie et dérivable sur IR.

b1/ Montrer que g est solution de (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E).

b2 /Résoudre équation (E').

3) Déterminer la solution g_0 de (E') dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0.\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point A(1.0).

Partie B

Soit h la fonction definie sur IR par: $h(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0.\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique: 1 cm.

1- Déterminer les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- Etudier la dérivabilité de h sur IR, et déterminer la fonction dérivé h' de h.

3-Etudier le sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation.

4- Soit φ la fonction definie sur IR par $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ et par (Γ) sa courbe représentative.

a/ Etudier les positions relatives de (C) et (Γ).

b/Construire les courbes (C) et (Γ) dans le repere $(0.\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5-a/ Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $H: x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$ soit une primitive de h sur IR.

b/ Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), (Γ) et les droites d'équations $x = -1 \; et \; x = 3$.

Partie C

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par: $U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt$.

1- Interpréter géométriquement U_0

2-a/ Démontrer que pour tout entier nature n, $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$.

b/En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

3- La suite (U_n) est-elle convergente?

BACCALAUREAT 2020 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 :

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, quatre boules bleues et trois boules rouge. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) Quelle est la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur ?

2) X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

a- Déterminer la loi de probabilité de X et son écart type.

b- Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.

3) pour gagner, il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur quatre est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à 1/3.

On note : T l'événement « être tricheur » et G l'événement « gagner au jeu ».

a- Définir l'événement contraire de T puis calculer la probabilité $P(G/\overline{T})$.

En déduire la probabilité de l'événement $G \cap \overline{T}$.

b- Calculer $P(G \cap T)$.

c- Démontrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{53}{240}$.

d- Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit tricheur.

Exercice 2 :

f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (2+4i)z + 2 - 4i$.

1) a- Vérifier que $f(i) = 0$

b- Déterminer les nombres complexes α et β tels que : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2) On considère l'application g du plan dans le plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 1 + 2i$

a- Soit A le point d'affixe $1 + 3i$. Déterminer l'affixe de A' image de A par g.

b- On note z_A l'affixe du point A et $z_{A'}$ l'affixe du point A'. Pour tout z différent de A, déterminer le nombre complexe $\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A}$.

c- Pour tout point M distinct de A, déterminer $mes\left(\widehat{\overline{AM}; \overline{A'M'}}\right)$ puis $\frac{A'M'}{AM}$.

d- En déduire les éléments caractéristiques de g.

Montrer que pour tout M différent de A, le triangle AMM' est rectangle isocèle en M'.

PROBLEME :

PARTIE A

Soit la fonction numérique de variable réelle x définie par $g(x) = x^2 - 2ln|x|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de g.

2) Etudier la parité de g.

3) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

4) Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.

5) a- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b- Montrer que pour tout x de D, $g(x) > 0$.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur IR* par $f(x) = -x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$d'unité graphique 1 cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis les limites à gauche et à droite en 0 de f.

2) a- Calculer la fonction dérivée f' de f. Vérifier que pour tout réel x de IR*, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

b- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3) Calculer $f(1)$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont une négative notée α. Vérifier que $-0{,}25 < \alpha < -0{,}24$.

4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3 - x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

b- Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).

5) a- Pour quelles valeurs x_0 la courbe $(\mathcal{C})$ admet-elle au point d'abscisse x_0, une tangente parallèle à (Δ) ?

b- Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = -1$.

6) Construire la droite (Δ),la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T).

PARTIE C

Soit h la fonction définie par $h(x) = -2\,ln(-x) - (ln\,(-x))^2$.

1) Montrer que h est une primitive sur $]-\infty, 0[$ de la fonction $x \longmapsto -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$.

2) a- Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $]-\infty, \alpha[$ est une bijection sur un intervalle I à préciser.

b- φ^{-1} est la bijection réciproque de φ. Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de φ^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

3) Calculer l'air du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}')$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.

BACCALAUREAT 2021 - TOGO

Enoncé

Exercice 1 : (1,5 points)

Choisir la bonne réponse à chaque question parmi les quatre propositions suivantes sans justifier. (Exemple : 4-d).

1- Soit le nombre complexe $\alpha = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}$. Le nombre $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ est égal à :

a-) $1 + cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{8\pi}{3}$; b-) 0 ; c-) 1 ; d-) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2- Soit A, B et C trios points du plan complexe d'affixes respectives : $1 + 5i$; $-1 - i$ et $2 - 2i$. Le triangle ABC est :

a-) Rectangle isocèle ; b-) Isocèle ; c-) Rectangle ; d-) Equilatéral.

3- Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $1 + i$ et 4. Soit C l'image de B par la rotation du centre A et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

L'affixe du point C est :

a-) $Z_C = 4i$; b-) $Z_C = 2 - 4i$; c-) $Z_C = -1 - i$; d-) $Z_C = -2i$.

Exercice 2 : (2,5 points)

1- Déterminer les nombres réels $a, b \; et \; c$ tels que :

$\forall \, t \in IR, \; \frac{1}{(1+e^{1-2t})^2} = a + \frac{be^{1-2t}}{1+e^{1-2t}} + \frac{ce^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^2}$

2- Calculer alors l'intégral $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1+e^{1-2t})^2}$.

3- On pose $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{te^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^3} dt$.

a-) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.

b-) En déduire la valeur exacte de I.

Exercice 3 : (4,5 points)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher marquées 1, 2, 3, 4. Une épreuve consiste à prélever une première boule de l'urne dont le numéro sera noté a puis, sans la remettre dans l'urne, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Au résultat $(a; b)$ d'une épreuve, on associe l'application f du plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, dans lui-même qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{b\pi}{4} + i\sin\frac{b\pi}{4}\right) z$.

1- Donner tous les résultats $(a; b)$.

Caractériser géométriquement les applications correspondantes qui ne sont pas isométries.

2- Soit A le point d'affixe $z_0 = 2i$ et A' son image par f d'affixe z_0'.

Calculer le module et l'argument de z_0 et ceux de z_0' suivant les valeurs de $(a; b)$, où b est impair.

3- Calculer la probabilité de l'événement E : "les droites (OA) et (OA') sont perpendiculaires".

4- Quelle est la loi de la probabilité de la variable aléatoire X qui au résultat $(a; b)$ d'une épreuve associe le module z_0' ? Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4 : (4 points)

Soit n un entier naturel non nul.

1- Résoudre l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{n+1}y = 0$ (1)

2- On considère l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{n+1}y = \frac{x+1}{(n+1)^2}$ (2)

Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur IR par : $g(x) = ax + b$ soit une solution de (2).

3- a) Montrer qu'une fonction h dérivable sur IR est solution de (2) si et seulement si $h - g$ est solution de (1).

b-) En déduire toutes les solutions de (2).

c-) Parmi ces solutions, déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$

4- a) On considère la fonction f_n définie sur IR par :

$f_n(x) = \frac{x-n}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{\left(\frac{-x}{n+1}\right)}$.

Etudier le signe de $f_n'(x)$. En déduire le tableau de variation de f_n. utiliser $f_n(0)$ pour montrer que f_n admet un minimum m strictement négatif que l'on calculera.

Exercice 5 : (7,5 points)

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en 0. Que peut-on dire de (C) au point d'abscisse 0 ?

2- a) Déterminer l'ensemble de définition D de f puis calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f.

b) Etudier le sens de variation de f'. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$ puis en déduire que f' est positive sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]0; +\infty[$.

3- Déterminer les limites de f aux bornes de D, puis dresser le tableau de variation de f.

4- a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + \frac{x}{2}$ est asymptote à (C).

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (Δ), la première bissectrice et la courbe (C). (Unité graphique : 1cm).

5- Soit g la fonction définie sur $[3; 5]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Utiliser le sens de variation de f' pour montrer que $\forall\, x \in [3; 5], 0 < f'(x) \leq \frac{2}{3}$ puis $g'(x) < 0$.

b) Utiliser le sens de variation de g pour montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) Utiliser les inégalités des accroissements finis pour montrer que $\forall\, x \in [3;5], |f(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

d) On définit la suite $(U_n)\, n \in IN$ par $U_0 = 3$ et $\forall\, n \in IN$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

i) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ii) En déduire la limite de $(U_n)\, n \in IN$ puis une valeur approchée de cette limite à 0,2 près.

CORRIGES

BACCALAUREAT 2006 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé$(O\,;\,\vec{u}\,;\vec{v})$.

$A(2i)$ et P^* le plan privé de A.

Soit $T : P^* \longrightarrow P$

$M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1) Montrer que $\forall\, M \in P^*$, le point $M' \neq A$:

Posons $M' = A \Longrightarrow z' = 2i \Longrightarrow 2i = \frac{2iz-5}{z-2i} \Longrightarrow 2iz + 4 = 2iz - 5$

$\Longrightarrow 4 = -5$ impossible, donc $M' \neq A$.

2) Démontrons que T est une bijection de P* sur lui-même :

Résolvons l'équation $z' = b$.

$$z' = b \Longrightarrow \frac{2iz-5}{z-2i} = b \Longrightarrow bz - 2ib = 2iz - 5$$

$$\Longrightarrow z(b-2i) = -5 + 2ib \Longrightarrow z = \frac{2ib-5}{b-2i} \quad si\; b \neq 2i$$

L'équation $z' = b$ admet une solution unique z. Donc (T) est une bijection de P* sur lui-même.

Déterminons sa réciproque T^{-1} :

$z = \frac{2ib-5}{b-2i} \Longrightarrow T^{-1}\colon P^* \longrightarrow P^*$

$$M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$$

3) a- Montrons qu'un point M de P* sur lui-même est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation $z^2 - 4iz + 5 = 0$

M est invariant par T si et seulement si $z' = z$.

$z' = z \Leftrightarrow z = \frac{2iz-5}{z-2i} \Longrightarrow z^2 - 2iz = 2iz - 5 \Longrightarrow \mathbf{z^2 - 4iz + 5 = 0}$

d'où la relation.

b- Trouvons le réel α tel que $z^2 - 4iz + 5 = (z-2i)^2 + \alpha$

$(z-2i)^2 + \alpha = z^2 - 4iz - 4 + \alpha$

$\Longrightarrow 4 + \alpha = 5$ par identification $\alpha = 5 + 4 \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 9}$

D'où $z^2 - 4iz + 5 = (z - 2i)^2 + 9$

c- Montrons alors que T admet deux points invariants B et C :

Points invariants $\Rightarrow z^2 - 4iz + 5 = 0 \Rightarrow (z - 2i)^2 + 9 = 0$

$\Rightarrow (z - 2i)^2 - (3i)^2 = 0 \Rightarrow (z - 2i - 3i)(z - 2i + 3i) = 0$

$\Rightarrow (z - 5i)(z + i) = 0$; donc $z = 5i$ *ou* $z = -i$

D'où $B(5i)$ et $C(-i)$

4 - (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D*) la droite (D) privée de A. Montrons que (D*) est globalement invariante par T :

(D*) passe par O et dirigée par $\vec{v}$, donc (D*)= (Oy) − {A}

Or C et B ∈ (Oy) ⟹ (Oy) = (BC).

B et C sont les points invariants ⟹ T(BC) = (BC)=(Oy)=(D)

⟹ T(D*) = (D*), donc (D*) est globalement invariante par T.

5) a- Montrons que pour $z \neq 2i$, $|z' - 2i|.|z - 2i| = 9$.

On a : $z' = \frac{2iz-5}{z-2i} \Rightarrow z' - 2i = \frac{2iz-5}{z-2i} - 2i = \frac{2iz-5-2iz-4}{z-2i}$

$$z' - 2i = \frac{-9}{z - 2i} \Rightarrow |z' - 2i| = \frac{|-9|}{|z - 2i|} \Rightarrow |z' - 2i| = \frac{9}{|z - 2i|}$$

D'où $|z' - 2i|.|z - 2i| = 9$

b- Soit $(\Gamma) = \mathcal{C}(A; r = 3)$

Montrons que (Γ) est globalement invariant par T :

* $M \in \mathcal{C}(A; r = 3) \Rightarrow AM = |z - 2i| = 3$

Or $|z' - 2i|.|z - 2i| = 9$

$$\Rightarrow AM' \text{ x } AM = 9 \Rightarrow AM' = \frac{9}{AM} = \frac{9}{3} \Rightarrow AM' = 3$$

$M' \in \mathcal{C}(A; r = 3)$

Conclusion : AM' = AM donc M et M' appartiennent à un même cercle (T). D'où T(Γ) = (Γ).

Exercice 2

1-) $f(x) = xe^{x^2}$; $g(x) = x.e - \frac{1}{2}$; $h(x) = xe^{2x}$

Montrons que :

* $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{2}$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$

d'où $\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{2}}$

* $\int_0^1 g(x)dx = \frac{e^2-1}{2}$

$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{ex^2}{2} - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

d'où $\boldsymbol{\int_0^1 g(x)dx = \frac{e-1}{2}}$

* $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$

$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 x.e^{2x}dx$ Par intégration par partie, posons :

$U(x) = x \quad \to U'(x) = 1 \qquad V(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \to V'(x) = e^{2x}$

$\int_0^1 h(x)dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

d'où $\boldsymbol{\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^2+1}{4}}$

2) valeurs de X

L\k	f	f	g	g	h	h
f	A	A	A	A	B	B
f	A	A	A	A	B	B
g	A	A	A	A	B	B
g	A	A	A	A	B	B
g	A	A	A	A	B	B
h	B	B	B	B	C	C

a- Les valeurs prises par X :

$X(\Omega) = \left\{e-1;\ \frac{e^2+2e-1}{4};\ \frac{e^2+1}{2}\right\}$

b- Loi de probabilité de X

$P(X = e-1) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$; $P(X = \frac{e^2+2e-1}{4}) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$; $P(X = \frac{e^2+1}{2})$
$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c- Espérance mathématique :

$E(X) = (e-1)\ P(X = e-1) + P(X = \frac{e^2+2e-1}{4}) + P(X = \frac{e^2+1}{2}) =$

$E(X) = \frac{5}{9}(e-1) + \frac{7}{18}(\frac{e^2+2e-1}{4}) + \frac{1}{18}(\frac{e^2+1}{2})$ **$E(X) = 2{,}33$**

PROBLEME

Démontrons que $\forall\, x \in IR$, on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$

$\forall\, x \in IR$, on a : $0 \leq x^2 < x^2 + 3$

$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+3}$; $|x| < \sqrt{x^2+3}$ **d'où $\forall\, x \in IR$, $\sqrt{x^2+3} >$ $|x|$**

Déduisons : $\forall\, x > 0$,

$|x| = x$; $\sqrt{x^2+3} - |x| > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} - x > 0$ si $x \geq 0$ et
$\sqrt{x^2+3} + x > 0$ si $x \leq 0$

d'où $\forall\, x \in IR$, $\sqrt{x^2+3} + x > 0$ et $\sqrt{x^2+3} - x > 0$.

B/ $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$

1)a- Montrons que f est continue en $x_0 = 1$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{x^2+3} - x + 1 = 2$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{x^2+3} + x - 1 = 2$

$f(1) = \sqrt{1^2+3} - |1-1| = 2 - 0 = 2$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = f(1) = 2$ alors f est continue en $x_0 = 1$

b) Dérivabilité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{[\sqrt{x^2+3} - (x+1)][\sqrt{x^2+3} + (x+1)]}{(x-1)[\sqrt{x^2+3} + (x+1)]} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{\sqrt{x^2+3}+\ x-3}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{\left[\sqrt{x^2+3}-(x+\ 3)\right]\left[\sqrt{x^2+3}-(x-3)\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x^2+3}-(x-3)\right]}=\frac{3}{2}$$

$\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$

c- Etude de sens de variation de f sur $]-\infty;\ 1[$

Sur $]-\infty;\ 1[$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}+x-1$

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}+1=\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}$

D'après A/ $\sqrt{x^2+3}+\ x>0$ *donc* $f'(x)>0$ d'où f est strictement croissante sur $]-\infty;\ 1[$

Sur $]1;\ +\infty[$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x+1$

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}-1=\frac{-(\sqrt{x^2+3}-x)}{\sqrt{x^2+3}}$

D'après A/ $\sqrt{x^2+3}-\ x>0$ *donc* $f'(x)<0$ d'où f est strictement décroissante sur $]1;\ +\infty[$.

d- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+3}+(x-\ 1)\right]\left[\sqrt{x^2+3}-(x-\ 1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+3}-(x-1)\right]}=-\frac{2}{2}=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+3}-(x-\ 1)\right]\left[\sqrt{x^2+3}+(x-1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+3}+(x-\ 1)\right]}=\frac{2}{2}=1$$

Donc les droites d'équation $y=-1$ et $y=1$ sont asymptotes horizontales en $\pm\infty$

Tableau de variation

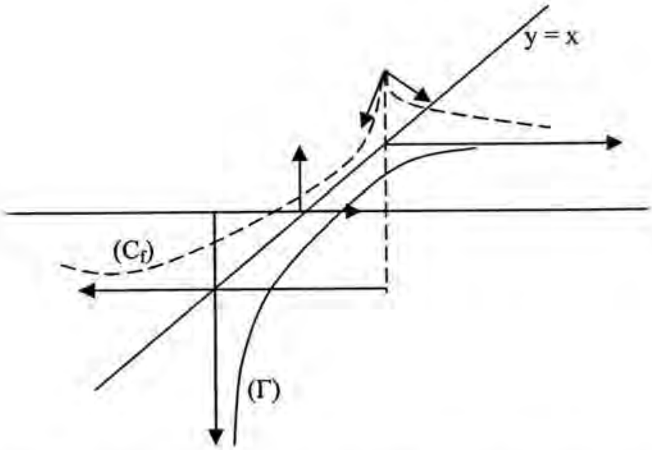
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(x)	+	$\frac{3}{2}$	‖	$\frac{1}{2}$	−
f (x)	-1 ↗		2		↘ 1

e- La courbe (C) admet deux demi-tangentes en $x_0 = 1$ d'équations respectives :

(T_1): $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

(T_2): $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{2}x + 1$

Le point d'abscisse $x_0 = 1$ est un point anguleux.



2-a) Montrons que g admet une application réciproque.

$g(x) = f(x)$ sur $]-\infty; 1]$. $f(x)$ est continue sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante donc monotone sur $]-\infty; 1]$. elle réalise donc une bijection de $]-\infty; 1]$ sur $f(]-\infty; 1]) =]-\infty; 2]$ d'où g admet une application réciproque g^{-1}.

b- En posant $g(x) = y \Rightarrow y = \sqrt{x^2+3} + x - 1$

$y + 1 = \sqrt{x^2+3} + x$; $[(y-1) - x]^2 = x^2 + 3$

$(y+1)^2 - 2x(y+1) + x^2 - x^2 - 3 = 0$;

$2x((y+1) = (y+1)^2 - 3$

$\Rightarrow x = \frac{(y-1)^2 - 3}{2(y+1)}$ **d'où g^{-1} : $]-1; 2] \rightarrow]-\infty; 1]$**

$$x \longmapsto \frac{(x+1)^2 - 3}{2(x+1)}$$

c- Construction de (Γ) (*Se conférer au graphique)* : (C_f) *et* (Γ) sont symétriques par rapport à (Δ) : y = x.

d- Par division euclidienne, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x-2}$

g^{-1} étant continue sur $]-\infty; 2]$ alors G existe.

$G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}ln|2x-2| + C$;

$G(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|2x-2|) + C$

$G(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}ln|2x-2| + C = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{2}ln2$

d'où $G(x) = G(x) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|2x-2|) + \frac{3}{2}ln2}$

e- calculons A : $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$; $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$

$A = \int_{f(-1)}^{f(1)} g^{-1}(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}ln|2x-2| + \frac{3}{2}ln2\right]_0^2$ **A = 2**

C/ I = [1; 2], $\mathbf{U_n}\begin{cases}\mathbf{U_0 = 1}\\ \mathbf{U_{n+1} = f(U_n)}\end{cases}$

1-a) $f(x) = x \longrightarrow \alpha / x \in I \Rightarrow f(x) - x = 0$ c'est-à-dire

$\sqrt{x^2+3} - 2x + 1 = 0$

Posons $k(x) = \sqrt{x^2+3} - 2x + 1 = 0$ alors $k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} - 2 < 0$

$\Rightarrow$ k est monotone donc réalise une bijection de $[-1; +\infty[$. or $0 \in [-1\,; 2]$ donc l'équation f(x) = x admet une solution unique α.

$k(1) \times k(2) < 0$ alors $\alpha \in I$.

$x \in I \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 4 \leq x^2 + 3 \leq 7 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x2+3} \leq \sqrt{7}$

$4 \leq 2\sqrt{x2+3} \leq 2\sqrt{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{7}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x2+3}} \leq \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2\sqrt{7}} - 1 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4} - 1$

$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq -\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4} \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Par le théorème de l'inégalité des accroissements finis et par majoration, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d) D'après la question précédente, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ or $f(\alpha) = \alpha$, donc par théorème précédemment énoncé, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.|x - \alpha|$

D'où $\mathbf{|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.|x - \alpha|}$

2-a) Démontrons par récurrence :

* $k = 0$ $U_0 = 1 \Rightarrow U_0 \in I$ * $k = n$: supposons la propriété vraie $\Rightarrow U_n \in I$

* Démontrons au rang $(n + 1)$.

$U_{n+1} = f(U_n)$. En posant $U_n = x \Rightarrow U_{n+1} = f(x)$ Et d'après 1-b), $U_{n+1} \in I$ d'où $|1 - \alpha|$, $U_n \in I$ b) D'après 1-d), $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.|x - \alpha|$ d'où $\forall n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$

c) $n = 0$: $|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}.|U_0 - \alpha|$;

$n = 1$: $|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}.|U_1 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n+1$: $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}.|U_{n-1} - \alpha|$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.|U_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^n.|1 - \alpha|$$

on a : $-1 \leq 1-\alpha \leq 0 \Rightarrow |1 - \alpha| \leq 1$ d'où $\forall n \in IN$ $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha \Rightarrow$ U est convergente.

BACCALAUREAT 2007 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

I/ (E) : $y' + y = \frac{1}{e^{x-1}}$;

1) Résolution de $y' + y = 0$; $r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

$S = \{y / y = Ae^{-x}\}$ avec $A \in IR$

2) a- $\varphi'(x) = \frac{h(x)}{e^x}$ φ solution de (E) $\Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{e^x-1}$

$\varphi'(x) = \frac{e^x h'(x) - e^x h(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{h'(x)-h(x)}{e^x}$

$\frac{h'(x)-h(x)}{e^x} + \frac{h(x)}{e^x} = \frac{h'(x)}{e^x} = \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$

$h(x) = \ln(e^x - 1) + k$ avec $k \in IR$

b- Déduisons la solution générale de (E)

$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{e^x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{\ln(e^x-1)+k}{e^x}$

La solution générale de (C) est de la forme :

$g(x) = Ae^{-x} + \frac{\ln(e^x-1)+k}{e^x}$

Posons $B = A + k$. $g(x) = Be^{-x} + \frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$

c- La solution générale de (E) vérifiant $f(\ln 2) = 0$.

$Be^{-\ln 2} + \frac{\ln(e^x-1)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B = 0$; $B = 0$ $f(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$

II/ $f(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$, $\alpha > 2$; $I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln\alpha} f(x)dx$

1) a- Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$ est la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = \ln(e^x - 1)$

b- Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$ est la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \ln(e^x - 1) - x$

2- f solution de (E) $f'(x) + f(x) = \frac{1}{e^x-1}$ (E)

donc $f(x) = -f'(x) + \frac{1}{e^x-1}$

$I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln\alpha} f(x)dx \Rightarrow I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln\alpha} \left[f'(x) + \frac{1}{e^x-1}\right]dx$

$= [-f(x) + \ln(e^x - 1) - x]_{\ln 2}^{\ln\alpha}$

$= -f(\ln\alpha) + f(\ln 2) + \ln(e^{\ln\alpha} - 1) - \ln\alpha - \ln(e^{\ln 2} - 1) + \ln 2$

$I(\alpha) = -f(\ln\alpha) + + \ln(\alpha - 1) - \ln\alpha + \ln 2$

3) $I(\alpha) = -\frac{\ln(e^{\ln\alpha}-1)}{e^{\ln\alpha}} + \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \ln 2$ $\quad \mathbf{I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha} + \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \ln 2}$

4) $-\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[-\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha} + \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \ln 2\right]$ $\quad \mathbf{\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \ln 2}$

car $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha-1} \times \frac{(\alpha-1)}{\alpha} = 0$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} \mathbf{\ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} = 0$

Exercice 2

1- Résolution de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$; $\Delta' = 1-2 = -1 = i^2$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = i$

alors $z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$; donc $\mathbf{S = \{1 + i \,;\, 1 - i\}}$

2) $z_K = 1 + i$; $z_L = 1 - i$; $z_M = -i\sqrt{3}$.

3) a- Vérification de z_N

$z_L = \frac{z_M + z_N}{2} \Rightarrow z_N = 2z_L - z_M \Rightarrow z_N = 2 - 2i + i\sqrt{3}$

$\Rightarrow z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b- $\Gamma_{(0,\pi/2)}(N) = C$; $\Gamma_{(0,\pi/2)}(M) = A$

$\Rightarrow Z_C = e^{\frac{i\pi}{2}} Z_N$ et $Z_A = e^{\frac{i\pi}{2}} Z_M$

$Z_C = i[2 + i(\sqrt{3} - 2)] = -\sqrt{3} + 2 + 2i$

$Z_A = iZ_M = i(-i\sqrt{3})$ $\quad \mathbf{Z_A = \sqrt{3}}$

c- $\vec{U}(2i)$, $t_{\vec{U}}(M) = D$, $t_{\vec{U}}(N) = B$

$Z_D - Z_M = 2i \Leftrightarrow Z_D = Z_M + 2i$; donc $\mathbf{Z_D = i(2 - \sqrt{3})}$

$Z_B = Z_N + 2i \Leftrightarrow Z_B = 2 + i(\sqrt{3} - 2) + 2i$ donc $\mathbf{Z_B = i\sqrt{3} + 2}$

4)a- Montrons que K est milieu de [DB] et [AC]

$\frac{Z_D + Z_B}{2} = \frac{i(2-\sqrt{3}) + 2 + 2i}{2} = 1 + i = Z_K$ donc K est milieu de [DB]

$\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2i + 2 - \sqrt{3}}{2} = 1 + i = Z_K$ donc K est milieu de [AC]

b) Montrons que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$

$\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = \frac{-1-i+2i+2-\sqrt{3}}{-1-i+2-i\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})+i}{i(\sqrt{3}-1)+1} = \frac{i[i(\sqrt{3}-1)+1]}{i(\sqrt{3}-1)+1} = i$

c) Nature de ABCD : Les angles AC et BD ont même milieu K, donc ABCD est un parallélogramme. De plus $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$, donc BCK est rectangle et isocèle en K. par conséquent **ABCD est un carré.**

PROBLEME

A/ $f(x) = (2 - x)e^x - k$ où $0 < k < e$

1- Limites de f(x) en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}(2e^x - xe^x - k) = -\mathbf{k}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(2e^x - xe^x - k) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(2 - x - \frac{k}{e^x}\right) = -\infty$$

$$car \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; et \lim_{x \to +\infty} \left(2 - x - \frac{k}{e^x}\right) = -\infty$$

2- Calculons la dérivée f '(x) :

f est dérivable sur IR, $\forall x \in IR$, $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x$,

$f'(x) = (1 - x)e^x$

Tableau de variation

$\forall x \in IR$, le signe de f '(x) est celui de $(1 - x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	$-$	
f (x)	$-k$	$\nearrow$	$e - k$	$\searrow$	$-\infty$

3)a- La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et $f(]-\infty; 1[) =]-k; e - k[$ or $0 \in]-k; e - k[$. Puisque $0 < k < e$ donc il existe un unique réel noté α_k de $]-\infty; 1[$ tel que $f(\alpha_k) = 0$.

De même f est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) =]-\infty ; e - k[$ or $0 \in]-\infty ; e - k[$, donc il existe un unique réel noté β_k de $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\beta_k) = 0$. **D'où l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_k \in]-\infty; 1[$ et $\beta_k \in]1\ ;\ +\infty[$**

b- Montrons que $e^{\alpha_k} - k\,\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)\ (\alpha_k - 1)$:

$f(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha_k)e^{\alpha_k} - k = 0 \Leftrightarrow k = (2 - \alpha_k)e^{\alpha_k}$ donc

$(e^{\alpha_k} - k)(\alpha k - 1) = [e^{\alpha_k} - (2 - \alpha_k)e^{\alpha_k}]\ (\alpha_k - 1)$

$$\Leftrightarrow (e^{\alpha_k} - \alpha_k)\ (\alpha_k - 1) = e^{\alpha_k}(\alpha_k - 1)^2$$

$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = e^{\alpha_k} - [(2 - \alpha_k)e^{\alpha_k}]\alpha_k \Leftrightarrow e^{\alpha_k} - k\alpha_k = e^{\alpha_k}(\alpha_k - 1)^2$

d'où **$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)\ (\alpha_k - 1)$**

4- D'après tout ce qui précède, on déduit que :

$\forall\, x \in]-\infty\ ; \alpha_k[\cup]\beta_k\ ; +\infty[$, $f(x) < 0$ et $\forall\, x \in [\alpha_k; \beta_k]$, $f(x) \geq 0$

B.1) $U(x) = e^x - kx \quad \forall\, x \in IR$.

b) Sens de variation de U

$DU = IR$; U est dérivable sur IR et $\forall\, x \in IR$, $U'(x) = e^x - k$

$U'(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - k \geq 0 \Rightarrow x \geq \ln k$

x	$-\infty$		$\ln k$		$+\infty$
$U(x)$		$-$	0	$+$	
$U(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$U(\ln k)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall\, x \in]-\infty; \ln k]$, $U(x) < 0 \Rightarrow$ U est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln k]$

$\forall\, x \in [\ln k; +\infty[$, $U(x) > 0 \Rightarrow$ U est strictement croissante sur $[\ln k; +\infty[$

b- $0 < k < e$. d'apres 1-a), $U(\ln k) = k(1 - \ln k)$ est le minimum absolu de U; $k(1 - \ln k) > 0$ car $0 < k < e$ donc $\forall\, x \in IR$, $U(x) > 0$ c'est-à-dire $e^x - kx > 0$

D'où $\forall\, x \in IR$, $e^x - kx > 0$ $\left(u_{(x)} > 0\ \forall\, x \in IR\right)$

2) g_k définie sur IR par $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$

a- Limites de gk

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - k = -k$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - kx) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{k}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{kx}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{k}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{kx}{e^x}\right)} = 1 \quad \text{car}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

b- $g'_k(x) = \frac{e^x(e^x-kx)-(e^x-k)^2}{(e^x-kx)^2} = \frac{e^{2x}-kx\,e^x-e^{2x}+2k\,e^x-k^2}{(e^x-kx)^2}$

$= \frac{k(2-x)e^x-k^2}{(e^x-kx)^2} = \frac{k[(2-x)e^x-k]}{(e^x-kx)^2} = \frac{k(fx)}{(e^x-kx)^2}$ d'où $\mathbf{g'_k(x) = \frac{k(fx)}{(e^x-kx)^2}}$

Comme $k > 0$ et $(e^x - kx)^2 > 0, \forall\, x \in IR$, le signe de g'_k est celui de f.

Tableau de variation

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$g'_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\searrow$	$g_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$g_k(\beta_k)$	$\searrow$	1

$g_k(1) = \frac{e-k}{e-k} = 1$ car $e = k$

3) a- $g_k(\alpha_k) = \frac{e^{\alpha_k}-k}{e^{\alpha_k}-k\alpha_k}$ or $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$

Donc $g_k(\alpha_k) = \frac{e^{\alpha_k}-k}{(e^{\alpha_k}-k)(\alpha_k-1)}$, $\mathbf{g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k-1}}$

b- De la même façon, $\mathbf{g_k(\beta_k) = \frac{1}{\beta_k-1}}$

c- $M_k\left(\alpha_k; \frac{1}{\alpha_k-1}\right), \alpha_k \in]-\infty\,; 1[$, $N_k\left(\beta_k; \frac{1}{\beta_k-1}\right), \beta_k \in]1; +\infty[$

Posons $\alpha_k = x$ et $\frac{1}{\alpha} = y$, nous avons $y = \frac{1}{x-1}$ pour $x \in]-\infty\,; 1[$

De même $\beta_k = x$ et $\frac{1}{\beta_k-1} = y$, nous avons $y = \frac{1}{x-1}$ pour $x \in]1; +\infty[$

Donc lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur la courbe (H) d'équation $y = \frac{1}{x-1}, \forall\, x \in IR-\{1\}$

4)a- Soit $x \in IR$, $g_1(x) - g_2(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x} - \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

$= \frac{(e^x - 1)(e^x - 2x) - (e^x - x)(e^x - 2)}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$

$= \frac{(1 - x)\, e^x}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(e^x - x)(e^x - 2x) > 0$

Donc le signe de $(g_1 - g_2)$ est celui de $x \mapsto 1 - x$

$\forall\ x \in]-\infty\,; 1[$, $(g_1 - g_2)(x) > 0$ donc (C_1) est au-dessus de (C_2) sur $]-\infty\,; 1[$

$\forall\ x \in]1; +\infty[$, $(g_1 - g_2)(x) < 0$ donc (C_1) est en-dessous de (C_2) sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		+	0	−	

(C_1) et (C_2) sont sécantes au point d'abscisse 1

b- $k = 2 \Rightarrow f(x) = (2 - x)\, e^x - 2$

Remarquons que $f(x) = 0$ et $0 \in]-\infty\,; 1[$ et comme α_2 est l'unique réel de $]-\infty\,; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$ donc $\alpha_2 = 0$

c) Représentation graphique : $(C_1) : g_1(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$;

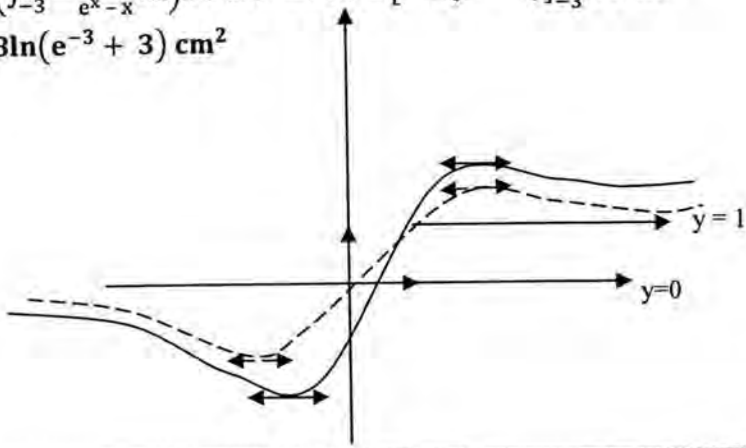
$(C_2) : g_2(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$

5- Calculons l'aire. Soit $\mathcal{A}$ cette aire.

$\mathcal{A} = \left(\int_{-3}^{0} (-g_k(x))\ dx\right) x\ 8\ \text{cm}^2$ puis que $g(x) < 0$ pour $x \in [-3; 0]$

$\mathcal{A} = \left(\int_{-3}^{0} -\frac{e^x - 1}{e^x - x} dx\right) x\ 8\ \text{cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A} = \left[-\ln(e^x - x)\right]_{-3}^{0} x\ 8\ \text{cm}^2$

$\mathbf{\mathcal{A} = 8\ln(e^{-3} + 3)\ cm^2}$



BACCALAUREAT 2008 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

$Z_A = -2 + 6i$; $Z_C = 5 + 5i$

$Z_B = 1 - 3i$; $Z_D = 2 + 4i$

a- Eléments caractéristiques de S :

Angle et rapport

$3i = 3e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $|3i| = 3$ d'où S a pour rapport 3 et pour angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

Calcul du centre Ω de S : Soit ω l'affixe du centre de S ainsi :

$\omega = \frac{13-9i}{1-3i} = \frac{(13-9i)(1+3i)}{10} = \frac{13+27+i(39-9)}{10}$ $\omega = 4 + 3\,i$

S(Ω(4,3) ; k= 3 ; $\frac{\pi}{2}$)

b- S(C) et S(D) :

$Z_{C'} = 3iZ_C + 13 - 9i = 3i(5 + 5i) + 13 - 9i = -15 + 15i - 13 - 9$

$Z_{C'} = -2 + 6i = Z_A$; S(C) = A

$Z_{D'} = 3i(2 + 4i) + 13 - 9i = -12 + 6i + 13 - 9i$

$Z_{D'} = 1 - 3i = Z_B$; S(D) = B

c- Montrons que $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{S(C)S(D)}$

S est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{S(C)S(D)}$

Une autre méthode :

$$Z_{CD} = Z_D - Z_C = 2 + 4i - (5 + 5i) = -3 - i$$

$$Z_{S(C)S(D)} = Z_{S(D)} - Z_{S(C)} = (1 - 3i) - (-2 + 6i) - 3 -- 9i$$

$\frac{zS(C)S(D)}{zCD} = \frac{3 - 9i}{-3 - i} = 3\,i \in \mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{S(C)S(D)}$

Autre méthode

$\overrightarrow{CD}(-3;\,-1)$; $\overrightarrow{S(C)S(D)}(3;\,-9)$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{S(C)S(D)} = -9 + 9 = 0$; donc $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{S(C)S(D)}$

2)a- $Z' = az + b$. Ecriture complexe de IR :

$Z_C = az_B + b \quad a(1-3i) + b = 5 + 5i$

$Z_A = az_D + b \quad a(2+4i) + b = -2 + 6i$

$a(-1-7i) = 7 - i$

$a = \frac{7-i}{-1-7i} = \frac{i(-1-7i)}{-1-7i} = i$

$b = 5+5i - a(1-3i) = 5 + 5i - i(1-3i) b = 2 + 4i$;

$Z' = iz + 2 + 4i$

b- Eléments caractéristiques de R

Angle et rapport

$a = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ donc R a pour rapport 1 et pour angle orienté $\frac{\pi}{2}$

Affixe du centre J

$Z_J = \frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} \qquad \boldsymbol{Z_J = -1 + 3i}$

Montrons que $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{CA}$: R est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{CA}$ car R(B) = C et R(D) = A

c- DBCA et CDAB implique que D est orthocentre du triangle ABC

3) Montrons que J∈(AB)

$z_{\overrightarrow{AB}} = (1-3i) - (-2+6i) = 3 - 9i$

$z_{\overrightarrow{AJ}} = (-1+3i) + (-2+6i) = 1 - 3i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = 3z_{\overrightarrow{AJ}}$, donc J∈(AB)

Autre méthode :

Cherchons l'équation de la droite (AB) ; $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,-9)$ soit le point $M(x, y) \in (AB)$. Dét$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$

$$-9(x+2) - 3(y-6) = 0$$

$3x+y = 0$ ou $y = -3x \qquad J(-1\,;3)$ donc J∈(AB)

$$\begin{vmatrix} x+2\,;\,3 \\ y-6\,;\,-9 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{-z_A - z_B}{z_C - z_3}\right) + 2k\pi, k\in Z.$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3+9i}{5+5i-(1-3i)} = \frac{-3+9i}{4+8i}$

$= \frac{3}{4} . \frac{-1+3i)}{1+2i} = \frac{3}{4} = \frac{(1-2i)(-1+3i)}{5} = \frac{3}{4} . \frac{5+5i}{5} = \frac{3}{4}(1+i)$

Donc $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in Z$

Une mesure en radian de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$est $\frac{\pi}{4}$

Autre méthode :

$R(B) = C$ donc $\text{mes}(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}) = \frac{\pi}{2}$ et $JB = JC$, donc le triangle JBC est isocèle rectangle en J. alors $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BJ}) = \frac{\pi}{4}$

or JBA donc $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

1) Nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne :

- nombre de boules noires :

Les multiples de 179 constituent une suite arithmétique (U_n) de raison 179 et du premier terme $U_1 = 179$

Nous avons :$U_n = 179 + (n-1)179n$; $179 \leq n < 1000$

$<=> 179 \leq 179n < 1000$

$1 \leq n < \frac{1000}{179} <=> 1 \leq n < 5{,}58$. **Le nombre maximal de boules noires est :$n_1 = 5$**

- nombre de boules rouges :

Les multiples de 3 chiffres de 59 constituent une suite arithmétique (V_n) de raison 59 et du premier terme $V_1 = 118$.

Nous avons donc

$V_n = 118 + (n-1)59$; $V_n = 59 + 59n$ or $118 \leq V_n < 1000$

$\Leftrightarrow$ $118 \leq 59n < 1000$

$1 \leq n < \frac{1000-59}{59}$ $\Leftrightarrow 1 \leq n < 15{,}94$. **Le nombre maximal de boules rouges est : $n_2 = 15$**

2) a- La loi de probabilité de X. Les valeurs prises par la variable X appartiennent à $X(\Omega) = \{300, 100, -100, -200\}$

$P(x = 300) = \frac{5}{20}$; $P(x = 300) = \frac{1}{4}$

$P(x = 100) = \frac{15}{20} \times \frac{5}{20}$; $P(x = 100) = \frac{3}{16}$

$P(x = -100) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{20}$; $P(x = -100) = \frac{9}{64}$

$P(x = -200) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}$; $P(x = -200) = \frac{27}{64}$

Xi	-200	-100	100	300
P(X= xi)	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

b- Probabilité pour que X soit positif :

$p = p(x = 100) + P(x = 300) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ $\quad$ $p = \frac{7}{16}$

c- Esperance mathématique :

$E(x) = -200 \times \frac{27}{64} - 100 \times \frac{9}{64} + 100 \times \frac{3}{16} + 300 \times \frac{1}{4}$ $\quad$ $E(x) = -\frac{75}{16}$

$E(x) < 0$ alors le jeux n'est pas avantageux d'où on ne peut espérer gagner à ce jeu.

d- Probabilité d'avoir exactement trois fois un gain positif sur les cinq parties :

soit p' cette probabilité, nous avons :

$p' = C_5^3 p^3 \times (1-p)^2 = 10\left(\frac{7}{16}\right)^3\left(\frac{9}{16}\right)^2$ $\quad$ $p' = 0{,}265$

PROBLEME

Partie A

1- Résolvons u(x) = 0

U(x) = 0 <=> $\sqrt{1+x^2} = 2x$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x^2 = (2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Conclusion : la solution de U(x) = 0 est $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Déterminons le signe de u(x) suivant x.

Posons : u(x) > 0. $u(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1+x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 2x$

$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + x^2 < 4x^2 \\ 1 + x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 3x^2 \end{cases}$ $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$

Conclusion :

U(x) > 0 si $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$; U(x) < 0 si $x \in \left]-\infty ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$;

U(x) = 0 si $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Autre méthode :

Comme u(x) = 0 a une solution unique sur IR, or u est continue sur IR. Calculons :

U(0) = −1 ; $u(1) = 2-\sqrt{2}$;   u(1)>0

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
U(x)	−	0	+

Partie B

1) a- x→g(x) est dérivable sur IR.

$X \to \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur IR car $1+x^2 > 0$, quel que soit $x \in$ IR. D'où g est dérivable sur IR comme étant la somme algébrique de deux fonctions dérivables sur IR.

Quel que soit $x \in$ IR ; $g'(x) = 1-2\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$; $g'(x) = 1-\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{-U(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

c- Signe de g'(x) :

g'(x) a le signe de $(-u)$; comme $\sqrt{1+x^2}>0$, quel que soit $x \in IR$, on déduit que :

si $x \in \left]-\infty\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $g'(x)>0$; si $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$[, $g'(x)<0$;

pour $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $g'(x)=0$.

2) Limites de g

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-2\sqrt{1+x^2})$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ car $\sqrt{1+x^2}\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2\sqrt{1+x^2}) = -\infty$

Tableau de variation.

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
g'(x)	+	0	−
g(x)	$-\infty$ ↗	$-\sqrt{3}$	↘ $-\infty$

$g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\sqrt{3}$

3)a- Equation des asymptotes à (C)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{2\sqrt{1+x^2}}{x}\right] \qquad \mathbf{\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-3x] = \lim_{x\to-\infty}(-2x-2\sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to-\infty} -2\left(\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-3x]=0$$

On conclut que $(\Delta_1) : y = 3x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{2\sqrt{1+x^2}}{x}\right] = 1 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 2$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) + x] = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 2\sqrt{1 + x^2}) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2(\frac{-1}{x + \sqrt{1 + x^2}}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) + x] = 0$

On conclut que (Δ_2) : $y = -x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Position de (Δ_1) et (Δ_2) par rapport à (C) :

Posons : $p_1(x) = g(x) - 3x$ $p_1(x) = -2x - 2\sqrt{1 + x^2}$

En posant $-2x - 2\sqrt{1 + x^2} \geq 0$ nous avons : $\sqrt{1 + x^2} \leq -x$

$x \leq 0$ (1) l'équation (3) donne $1 \leq 0$ ce qui est impossible

$1 + x^2 \geq 0$ (2) donc $P_1(x) < 0$.

$1 + x^2 \leq x^2$ (3) On conclut que (C) est en-dessous de (Δ_1)

Posons : $p_2(x) = g(x) - (-x)$ $p_2(x) = g(x) + x$

$P_2(x) = 2x - 2\sqrt{1 + x^2}$ supposons $2x - 2\sqrt{1 + x^2} \geq 0$, nous avons : $\sqrt{1 + x^2} \leq x$

$x \geq 0$ (a) l'équation (c) donne $1 \leq 0$ ce qui est impossible.

$1 + x^2 \geq 0$ (b) donc $P_2(x) < 0$.

$1 + x^2 \leq x^2$ (c) On conclut que (C) est en-dessous de (Δ_2).

Intersection avec (Oy)

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

x	-1	1
y	$-1-2\sqrt{2}$	$1-2\sqrt{2}$

On se servira toujours du tableau de variation pour le tracé des courbes représentatives.

Partie C

1. Déterminons h.

Quel que soit $x \in IR$; $h(-x) + g(x) = 0$

Quel que soit $x \in IR$; $h(-x) = - g(x)$; $h(-x) = -x + 2\sqrt{1+x^2}$

$h(x) = x + 2\sqrt{1+x^2}$

2. expression analytique de (C)∪(Γ)

$M\binom{x}{y} \in (C \cup \Gamma)$ implique que :

$y = x - 2\sqrt{1+x^2}$ ou $y = x + 2\sqrt{1+x^2}$

$(x-y)^2 = -4(1+x^2) = 0 \quad y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$

$\forall x \in IR,\ h(-x) = -g(x)$; $\quad h(x) = -g(x)$

Donc O est un centre de symétrie de (C∪Γ).

Construction de (Γ) :

Le point $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \sqrt{3}\right) \in (M)$, $Y'(0 ; 2) \in (\Gamma)$

Partie D

1) a- $\forall x \in IR, 1 + x^2 > x^2$; $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$,
$\forall x \in IR, \sqrt{1+x^2} > |x|$

b- $Df = \{x \in IR / x + \sqrt{1+x^2} > 0\}$

Comme $\forall x \in IR, \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$

donc $\forall x \in IR, \sqrt{1+x^2} > x^2$.

$\forall x \in IR, \sqrt{1+x^2} + x > 0$. **Df = IR**

2) $\forall x \in IR, f'(x) = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2}$

Soit G une primitive de g. comme $g(x) = x - f'(x)$ donc

$\forall x \in IR, G(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$

$\forall x \in IR, G(x) = \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

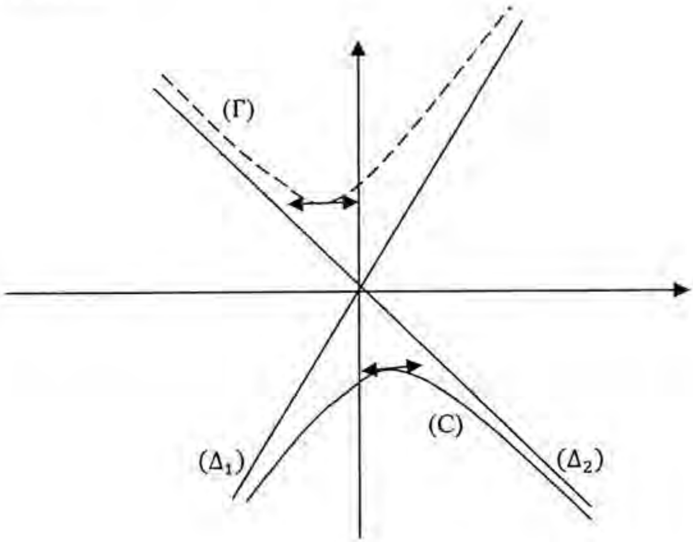
3- Calculons l'aire du domaine en cm^2

$(D)\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) \leq y \leq -x \end{cases}$

$A = \int_0^1 [-x - g(x)]\, dx \times 4 \text{ cm}^2$

$A = \left(-4 + 4\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) \text{cm}^2$

$A = 5{,}18 \text{ cm}^2$

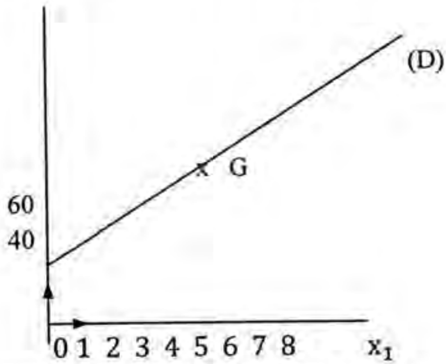


BACCALAUREAT 2009 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

1-a) Nuage de points associé à $(x_i\,, y_i)$



b) Coordonnées de G point moyen.

$G(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} x_i n_i \\ \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} y_i n_i \end{cases}$ avec $N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} n_i$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8) \\ \bar{y} = \frac{1}{8}(41+67+55+80+95+104+100+122) \end{cases}$$

$\bar{x} = 4{,}5$ et $\bar{y} = 83$; $\mathbf{G(4{,}5\,;\,83)}$

2-a) Coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} par excès.

Soit r ce coefficient.

$r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}$, Calculons Cov(x, y)

$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} n_i x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$

$\text{Cov}(x,y) =$

$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1\text{x}41 + 2\text{x}67 + 3\text{x}55 + 4\text{x}80 + 5\text{x}95 + 6\text{x}104 + 7\text{x}100 \\ +8\text{ x }122 \end{pmatrix} - (4{,}5 \text{ x } 83)$

Cov(x,y) = 55,875

Ecart-type de X, $\sigma(x)$

$[\sigma(x)]^2 = V(x) \Longrightarrow \sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

$\mathbf{V(X)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} \mathbf{n_i} x_i^2 \quad - (\bar{X})^2$ ou $\mathbf{V(X)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} \mathbf{n_i(x_i - \bar{x})^2}$

$V(X) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} (4-4{,}5)^2 + (2-4{,}5)^2 + (3-4{,}5)^2 + (4-4{,}5)^2 \\ +(5-4{,}5)^2 + (6-4{,}5)^2 + (7-4{,}5)^2 + (8-4{,}5)^2 \end{pmatrix}$

$V(X) = 5{,}25$; $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{5,25}}$

Ecart-type de Y, $\sigma(Y)$

$[\sigma(\mathbf{Y})]^2 = V(Y)$; $V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} n_i(y_i - \bar{y})^2$

$V(Y) = \frac{1}{8}$

$\begin{pmatrix} (41-83)^2 + (67-83)^2 + (55-83)^2 + (80-83)^2 \\ +(95-83)^2 + (104-83)^2 + (100-83)^2 + (122-83)^2 \end{pmatrix}$

$V(Y) = 651$; $\quad \sigma(Y) = \sqrt{\mathbf{651}}$

$\Gamma = \frac{55{,}875}{\sqrt{5{,}25} \times \sqrt{651}}$; $\quad \mathbf{\Gamma = 0{,}956}$

$\Gamma > 0{,}95$: un ajustement affine est justifiée, vu qu'il y a une forte corrélation $(0{,}87 < \Gamma < 1)$

b) Equation de la droite de régression (D) de Y en X.

(D) : $y = ax + b$ où $a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

$a = \frac{55{,}875}{5{,}25} = 10{,}643$; $\quad b = 83 - \frac{55{,}875}{5{,}25}(4{,}5) = 35{,}108$

D'où (D) : $\mathbf{y = 10{,}643x + 35{,}108}$

<u>Autre méthode</u> :

$y - \bar{y} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}(\bar{x} - x)$

c) Tracé de (D)

3-a) Chiffre d'affaires en 2015.

(D) : $y = 10{,}643x + 35{,}108$

En 2015, nous avons $x = 14$.

$y = 10{,}643.(14) + 35{,}108$ **$y = 184{,}11$ millions de francs.**

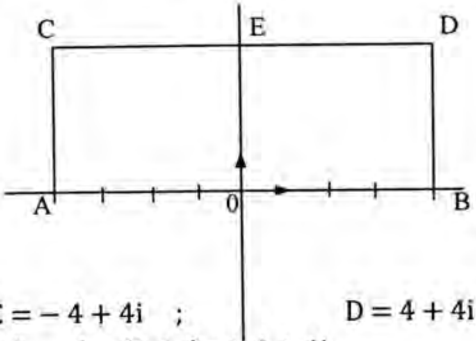
b) Année où $y > 300$.

Valeur de x : $10{,}643x + 35{,}108 > 300 \Longrightarrow x > 24{,}889$ **donc $x = 25$**

En 2026, le chiffre d'affaires de cette entreprise dépassera 300 millions de francs.

Exercice 2

1- $A(-4)$; $B(4)$, $E(4i)$



$C = -4 + 4i$; $D = 4 + 4i$

2-) $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$

a- Nature et éléments caractéristiques de f.

L'écriture complexe de f est de la forme : $z' = \alpha z + \beta$. $\alpha \in \mathbb{C}^*$ donc f est une similitude directe.

<u>Rapport</u> : Soit k le rapport : $k = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2}$; $k = \sqrt{2}$,

<u>Angle</u> : $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ (2π) ; l'angle est $\frac{\pi}{4}$

<u>Centre</u> : Soit ω l'affixe du centre. $\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{4+4i}{1-(1+i)} = \frac{4+4i}{-i} = -4 + 4i = z_C$

Conclusion : f est une similitude directe de centre C d'affixe $-4 + 4i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b-Précisons f(A) et f(O)

$f(A) = (1 + i)a + 4 + 4i$

$z'_A = -4 - 4i + 4 + 4i$; $z_A = 0$ donc **f(A) = O**

$z_O' = (1 + i)(0) + 4 + 4i = 4 + 4i = z_D$ donc **f(O) = D**

<u>Justification :</u>

$\begin{cases} \mathrm{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{4} \\ \frac{CO}{CA} = \sqrt{2} \end{cases}$ donc **f(A) = O** ; $\begin{cases} \mathrm{Mes}(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{4} \\ \frac{CD}{CO} = \sqrt{2} \end{cases}$ donc **f(O) = D**

On peut prévoir ces résultats

c- Expression de l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$.

$z_{MM'} = z_{M'} - z_M = (1+i)z + 4 + 4i - z$

$z_{MM'} = iz + 4 + 4i$

$z_{MC} = -z - 4 + 4i = i(iz + 4 + 4i)\ car\ -1 = i^2$

d- Comparons MM' et MC.

$MM' = |z_{MM'}| = |iz + 4 + 4i|$

$= |i\,(z + 4 - 4i)| = |z + 4 - 4i|$

$MC = |z_{MC}| = |-z - 4 + 4i|$

$= |-(z + 4 - 4i)| = |z + 4 - 4i|$

MC = MM'

e) Calcul de $\frac{z - C}{z - z'}$

$\frac{z - C}{z - z'} = \frac{-(z + 4 - 4i)}{z + 4 - 4} = \frac{-1}{i}$; $\frac{z - C}{z - z'} = \mathbf{i}$

$Mes(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}) = Arg\left(\frac{z_C - z}{z - z'}\right)$

$Mes(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}) = Arg\left(\frac{z - C}{z - z'}\right) = \frac{\pi}{2}$

f) Nature du triangle MM'C.

$MM' = MC$ et $Mes(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$, donc le triangle MM'C est isocèle et rectangle en M.

<u>Problème</u>

A : $g :]0;\ +\infty[\ \longrightarrow IR$

$x \longmapsto x\ln x - x + 1$

1- Etude du sens de variation de g

$Dg =]0;\ +\infty[$

Etudions la dérivabilité de g : g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[$, $g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x) - 1$; $\boldsymbol{g'(x) = \ln x}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1$

$\forall\, x \in]0;\ 1[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\Big]]0;\ 1[\Big]$;

$\forall x \in]1; +\infty[$, g'$(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur []1; $+\infty$[[.

Limites et tableau de variation.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} [xlnx - x + 1] = 1$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (xlnx) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x(lnx - 1) + 1] = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	$-$	0	$+$	
g(x)	‖	1 $\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Signe de g(x) :

L'étude des variations de g montre que $\forall x \in]0; +\infty[$, g$(x) \geq 0$

2- Montrons que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives -1 et e.

g(1) = 0 et ln1 = 0 donc C et C' se coupent au point d'abscisse 1.

g(e) = elne $-$e + 1 = 1 et lne = 1 donc C et C' se coupent au point d'abscisse e.

Conclusion :

C et C' se coupent aux points d'abscisses 1 et e.

Montrons que : $\forall x \in [1; e]$, $xlnx - x + 1 \leq lnx$

Posons $d(x) = xlnx - x + 1 - lnx$

$d(x) = x(lnx - 1) + 1 - lnx$

$d(x) = (1 - lnx)(1 - x)$

Tableau de signe

$1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		e		$+\infty$
$1-x$		$+$		$-$		$-$	
$1-lnx$		$+$		$+$		$-$	
$d(x)$		$+$		$-$		$+$	

$\forall\, x \in [1;\, e], d(x) \leq 0 \Rightarrow \forall\, x \in [1;\, e], xlnx - x + 1 - lnx \leq 0$

$d'o$ù $\forall\, x \in [1;\, e], xlnx - x + 1 \leq lnx$

3) a- Calcul de J avec $\mathrm{J} = \int_1^e (\mathrm{x}-1)ln x \mathrm{dx}$

Posons

$U'(x) = x - 1 \Rightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

$V(x) = lnx \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{1}{x}$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) lnx\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) lnx\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx$$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) lnx\right]_1^e - \left[\left(\frac{1}{4}x^2 - x\right)\right]_1^e$$

$\Rightarrow J = \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\left(\frac{1}{4}e^2 - e\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\right] \qquad J = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

b- $\Delta = \begin{cases} M(x,y): 1 \leq x \leq e \\ g(x) \leq y \leq lnx \end{cases}$ et

$$A(\Delta) = \int_1^e [lnx - g(x)]\,dx.uA. = \int_1^e (x-1)(1 - lnx)dx.uA$$

$A\,(\Delta) = -\int_1^e (x-1)\, lnxdx + \int_1^e (x-1)dx$

$= \left[-\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e\right] x\, 4\, cm^2$

$A\,(\Delta) = \left(-\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 1\right) 4\, cm^2$

$\Rightarrow \mathbf{A\,(\Delta) = \left(e^2 - 4e + 3\right)\ cm^2}$

Partie B.

$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$

1- Limites de f en $+\infty$ et 1.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}\right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0} \ car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

2- Tableau de variation de f.

Df =]1; $+\infty$[

Dérivabilité : f est dérivable sur]1; $+\infty$[car elle est le quotient de deux fonctions dérivables.

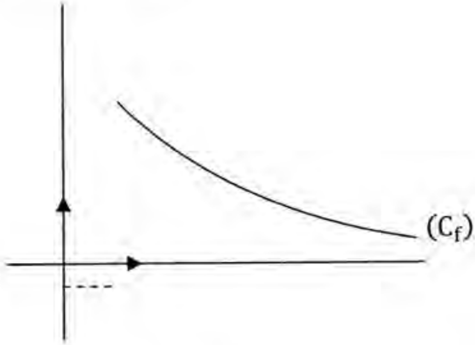
$\forall\, x \in]1; +\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$

Le signe de f '(x) est celui de –g(x).

Tableau de variation.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ 1	↘	0

2) Courbe représentative de f :



Partie C

1- Montrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]1;\ +\infty[$ et $f(]1;\ +\infty[) = \ ]0;\ 1[$. Or $\frac{1}{2} \in \ ]0;\ 1[$ donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]1;\ +\infty[$.

$f(3,5) = \frac{\ln(3,5)}{2,5} = 0,501$; $f(3,6) = \frac{\ln(3,6)}{2,6} = 0,492$

$\frac{1}{2} \in]f(3,6);\ f(3,5)[$ **d'où** $3,5 < \alpha < 3,6$

2) a- Montrons que α est solution de l'équation $h(x) = x$

$(h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$

$$f(\alpha) = ln\,\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} ,$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ln\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1}{2} ;\ ln\alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$$

donc $h(\alpha) = \alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha$; d'où α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b- Etude du sens de variation de h.

Dérivabilité : h est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et $\forall\, x \in \ ]1;\ +\infty[$,

$h'((x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

Sens de variation de h.

$\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

c) $I = [3; 4]$ Montrons que $\forall x \in I, h(x) \in I$.

h est continue et croissante sur $[3; 4]$ donc

$h([3; 4]) = [h(3); h(4)]$.

$h(3) = 2 + \ln 3 = 3{,}0986 > 3$; $h(4) = \frac{5}{2} + \ln 4 = 3{,}886 < 4$; donc

$h([3; 4]) \subset [3; 4]$ d'où $\forall x \in I, h(x) \in I$.

Montrons que $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

$\forall x \in [3; 4]$, $|h'(x)| = h'(x)$. La fonction $h'(x)$ est décroissante sur $[3; 4]$. Donc $\forall x \in [3; 4], h'(x) \leq h'(3)$; $\forall x \in [3; 4]$,

$|h'(x)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ d'où $\forall x \in [3; 4], |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

3) a- Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

$\forall n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n \in I$.

Par récurrence : $U_0 = 3 \in I$. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $U_k \in I$,

$U_{k+1} = h(U_k) \in I$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

h est dérivable sur I et $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$; $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et $\alpha \in I$ donc d'après les inégalités des accroissements finis,

$|h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$.

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_{n-1} - \alpha|$

$|U_{n-1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_{n-2} - \alpha|$

. .

. .

$|U_1 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_0 - \alpha|$

Apres multiplication membre à membre et simplification des inégalités nous avons :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha|$. Or U_o et α sont éléments de I donc $|U_0 - \alpha| \leq 1$ car l'amplitude de I est 1. **D'où $\forall$ n $\in$ IN, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$**.

c) Montrons que (U_n) converge vers α.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ car $\frac{5}{6} < 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$ d'où (U_n) converge vers α.

4) $\left(\frac{5}{6}\right)^P \leq 10^{-3} \quad => |U_P - \alpha| \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 10^{-3} <=> \log\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq -3$

$n\log\left(\frac{5}{6}\right) \leq -3 => n \geq \frac{-3}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$; $n \geq 37{,}88$

On peut prendre P = 38 ; donc U_{38} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

BACCALAUREAT 2010 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

1) Calculons la probabilité de chacun des événements :

$P(A) = \frac{C_{12}^5}{C_{16}^5} = \frac{782}{4368} = \frac{33}{182}$

$P(B) = \frac{C_4^1 . C_{12}^4}{C_{16}^5} = \frac{782}{4368} = \frac{165}{364}$

$P(C) = 1 - \big(P(A) + P(B)\big) = 1 - \left(\frac{33}{182} + \frac{165}{364}\right) = \frac{133}{364} = \frac{19}{52}$

En définitive on a : **$P(A) = \frac{33}{182}$; $P(B) = \frac{165}{364}$; $P(C) = \frac{19}{52}$**

2) a- Montrons que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres :
Notons " S" tirer une personne de " type C". Comme le tirage de n personne est assimilable à n tirages successifs indépendants avec remise alors on a une suite de n épreuves indépendantes à deux issues S et $\overline{S}$.
En définitive, X suit une loi binomiale de paramètres n et p avec $p = \frac{1}{4}$.

b- Calculons $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ en fonction de n.
$P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^n$; $\mathbf{P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$
$P(X = 1) = C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1}$; $\mathbf{P(X = 1) = \frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$

c- Déduisons la probabilité P_n :
$P_n = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$P_n = 1 - \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$; $\mathbf{P_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)}$
d- Démontrons que $P_n \geq 0{,}9$ si et seulement si $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1$.
$P_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1$
$P_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1$
Donc $\mathbf{P_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1}$

e- On pose $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)$.
Comparons $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1 :
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{4+n}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)} = \frac{3}{4}\left(\frac{4+n}{3+n}\right)$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = -\frac{n}{4(3+n)}$ $\forall n \geq 2, -\frac{n}{4(3+n)} < 0$ Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

Sens de variation de (U_n) :

$\forall$ **n** $\geq$ **2** , $U_n > 0$ donc $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ d'où (U_n) est une suite strictement décroissante.

Exercice 2

$z' = (1 + i)z - i$.

1) Montrons que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie :

z' est sous la forme z' = az + b avec a∈ ℂ*-{1}. Donc T est une similitude plane directe (non réduite à une translation ; par conséquent T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif.

Éléments caractéristiques :

Rapport $k = |1 + i| = \sqrt{-z}$; Mesure de l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$; Centre $z_\Omega = \frac{-i}{1-(1+i)}$

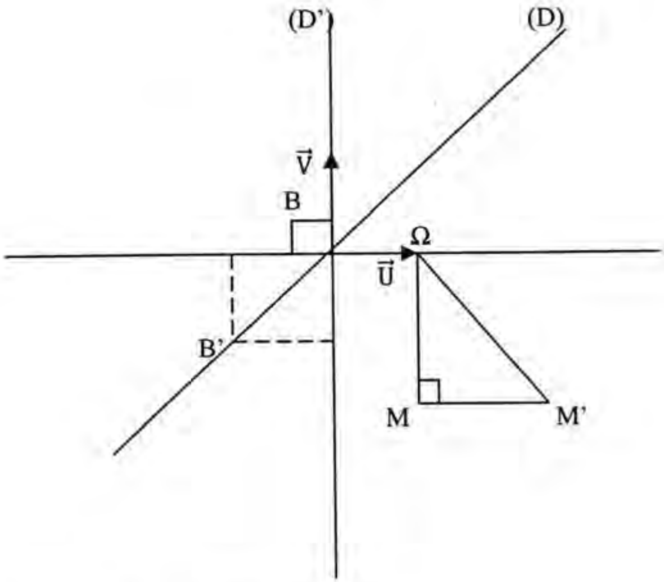
mes $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}) = \text{Arg}\left(\frac{z'-z}{z-z_\Omega}\right)$

$\frac{z'-z}{z-z_\Omega} = \frac{(1+i)z-1-z}{z-1} = \frac{i(z-1)}{z-1} = i$ d'où mes $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2}$.

2) a- Construisons M' :

$$M' = T(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \sqrt{2}\Omega M \\ \text{mes}\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ et mes } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en M



b- Déterminons l'image (D')

(D') = T(D) soit M ∈ (D) on a : $z_M = x + ix = (1+i)x$

$$z_{M'} = (1+i)z_M - i = (1+i)^2 x - i$$

$$z_{M'} = (2x-1)i$$

Ainsi (D') est la droite d'équation x = 0 ; (D') est donc l'axe des ordonnées.

On peut également utiliser l'expression analytique ou utiliser l'angle de la similitude et de l'image d'un point de (D).

3) a- Montrons qu'il existe un point B :

$z_0 z_{0'} = 1 \iff z_0[(1+i)z_0 - i] = 1$

$\iff (1+i)z_0^2 - iz_0 - 1 = 0$

$\Delta = 3 + 4i$ soit $S \in \mathbb{C}$ tel que $S^2 = \Delta$. On choisit $\boldsymbol{S = 2 + i}$

Autre méthode :

$\Delta = i^2 + 4i + 4 \Longrightarrow \Delta = (i+2)^2$

$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z_0 = 1$ or $B \neq \Omega$ donc $\boldsymbol{z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

Autre détermination de $\mathbf{z_0}$:

$(1+i) - i - 1 = 0$ donc 1 est solution de $(1+i)z_0^2 - iz_0 - 1 = 0$

Cherchons alors l'autre solution en faisant la somme et le produit ou division euclidienne par $(z_0 - 1)$.

Plaçons B et B' :

$z_{B'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = -1 - i$

b) Montrons que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques :

ΩB B' est rectangle en B ; donc Ω, B et B' ∈ du cercle de diamètre [ΩB']

Vérifions que Ω Ω'B est rectangle en Ω' :

$z_{\overrightarrow{\Omega'B'}} = -1 - i + 1 = -i$; $\overrightarrow{\Omega'B'} \perp \overrightarrow{\Omega\Omega'}$; Ω, B et Ω'∈ du cercle de diamètre [ΩB'] . On conclut que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques

Ω', Ω, B et B' sont cocycliques

Déterminons l'affixe du centre G du cercle (Γ) :

G est le milieu de [ΩB']. Donc $\mathbf{z_G = -\frac{1}{2}i}$

PROBLEME

Partie A

$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$$

1- Etudions les variations de la fonction f :

Déterminons le domaine de définition : $D_f = IR$

Calculons les limites aux bornes de Df :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = -\infty \ car \ \lim_{x\to-\infty} (-x^2 e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = 1 \ car \ \lim_{x\to+\infty} (-x^2 e^{-x}) = 0$$

$$\boldsymbol{Donc: \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Calculons la fonction dérivée :

f est dérivable sur IR comme somme de deux fonctions dérivables :

$$f'(x) = x(x-2)e^{-x}$$

<u>Signe de f'(x) :</u>

$\forall\ x \in IR,\ e^{-x} > 0$; le signe de f '(x) dépend alors de celui de $x(x-2)$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	

$\forall\ x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[,\ f'(x) > 0$

$\forall\ x \in]0; 2[,\ f'(x) < 0$

Pour $x \in \{0; 2\}$ $f'(x) = 0$

<u>Sens de variation :</u>

* f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$,

* f est strictement décroissante sur $]0; 2[$.

<u>Tableau de variation de f :</u>

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$1-4e^{-2}$	↗	1

2) Déduisons que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule notée α :

$\forall\ x \in]0; +\infty[,\ f(x) \geq f(2) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$.

Sur $]-\infty; 0[$, f est continue et strictement croissante ; de plus $f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 1[$ qui contient 0 , par conséquent l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty; 0[$.

Donnons une valeur approchée à 10^{-2} près de α :

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \; f(0) > 0$;

$f(-1) = 1 - e \;\Rightarrow\; f(-1) < 0$

donc $-1 < \alpha < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

$f(-0{,}71) < 0$, $f(-0{,}70) > 0 \Rightarrow -0{,}71 < \alpha < -0{,}70$

Une valeur approchée à 10^{-2} près de α est : - 0,71

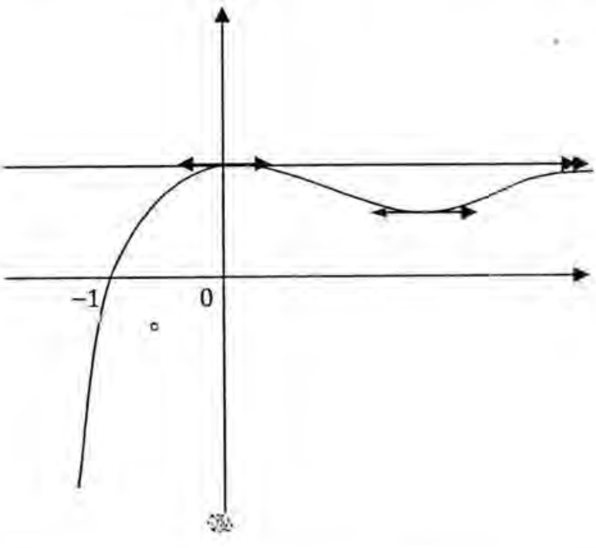
3- Traçons la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé Cherchons les asymptotes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

Branche infinie à $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - xe^{-x}\right) = +\infty \; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = -\infty \end{cases}$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy).



4) a- Montrons que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$.

$\mathbf{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 = 1}$ **donc** $\mathbf{\forall\, x \geq 0,\ e^x \geq 1}$

b- Montrons que $0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$

$0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$ on sait que : $0 \leq x \Rightarrow 1 \leq e^x \Rightarrow e^{-x} \leq 1$

et on sait aussi que $e^{-x} > 0, \forall\, x \in IR$

$0 < e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 e^{-x} \leq x^2$ car $x^2 \geq 0$

$0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \int_0^\lambda x^2\, dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{3}$

Donc $\mathbf{0 \leq \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx \leq \frac{\lambda^3}{3}}$

Partie B

1) Vérifions que pour tout réel x, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$

$f(x) = 1 - x^2\, e^{-x}$; $f'(x) = x(x - 2)e^{-x}$;

$f''(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$

$f''(x) + 2f'(x) + f(x)$

$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 2)e^{-x} + 2\,(x^2 - 2x)e^{-x} + 1 - x^2\, e^{-x}$

$= 1 + (-x^2 + 4x - 2 + 2x^2 - 4x - x^2 - x^2)e^{-x} = 1 + (-2)e^{-x}$

Donc $\mathbf{f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1}$

2- Déterminons F(x) :

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 - 2e^{-x}$

$f(x) = 1 - 2e^{-x} - f''(x) - 2f'(x)$

$F(x) = x + 2e^{-x} - f'(x) - 2f(x) + k$

$F(0) = 0 \Rightarrow 2 - f'(0) - 2f(0) + k = 0 \Rightarrow k = 0$

Donc $\mathbf{F(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + x - 2}$

3-a) Calculons l'aire A(λ) en cm² :

$A(\lambda) = \left(\int_0^\lambda (1 - f(x))\, dx\right)$ UA avec $1UA = 4cm^2$

$A(\lambda) = \left([x - F(x)]_0^\lambda\right) \times 4\ cm^2$

$\mathbf{A(\lambda) = \left[4(-\lambda^2 - 2\lambda - 2)e^{-\lambda} + 8\right] cm^2}$

b- Déterminons la limite de A(λ) lorsque λ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{x\to+\infty}\left[4(-\lambda^2-2\lambda-2)e^{-\lambda}+8\right]cm^2 = 8\ cm^2$$

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = 8\ cm^2}$$

Partie C

1) Résolvons l'équation $y'' + 2y' + y = 0$:

L'équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$

$$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$$

La solution générale est $P : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ où $a \in IR$ et $b \in IR$.

$$\mathbf{P(x) = (ax+b)e^{-x} \quad a \in IR, b \in IR}$$

2) Démontrons que g + f est une solution de (E_1) :

g solution de (E) $\Leftrightarrow g''(x) + g'(x) + g(x) = 0$

Soit $x \in IR$, $(g+f)''(x) + 2(g+f)'(x) + (g+f)(x) =$

$(g''(x) + 2g'(x) + g(x)) + (f''(x) + 2f'(x) + f(x))$

$= f''(x) + 2f'(x) + f(x)$ car $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$

$= 1 - 2e^{-x}$ d'après 1) de B précédemment trouvé.

D'où (g + f) est une solution de (E_1).

Démontrons que h – f est une solution de (E_2).

Soit $x \in IR$, $(h-f)''(x) + 2(h-f)'(x) + (h-f)(x) =$

$(h''(x) + 2h'(x) + h(x)) - (f''(x) + 2f'(x) + f(x))$

$= (1-2e^{-x}) - (1-2e^{-x}) = 0$

D'où (h − f) est une solution de (E_2).

Déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) :

Posons h = g + f avec g = P :

L'ensemble solution est : $h : x \mapsto (ax+b)e^{-x} + 1 - x^2e^{-x}$

$$\mathbf{h(x) = \left(-x^2 + ax + b\right)e^{-x} + 1 \text{ avec } a \in IR,\ b \in IR.}$$

3) Déterminons la solution φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$:

$\varphi(x) = (-x^2 + ax + b)e^{-x} + 1$

$\varphi'(x) = (-2x + a + x^2 - ax - b)e^{-x}$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = -1$

On a en fin : $\boldsymbol{\varphi(x) = \left(-x^2 - x - 1\right)e^{-x} + 1}$

Partie D

$$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$$

1- Montrons que les courbes (C_a) passent par un même point fixe I :

Pour a = 1, $g_1(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x} + 1$

Pour a = 0, $g_0(x) = -x^2e^{-x} + 1$

$g_1(x) = g_0(x) \Leftrightarrow (-x^2 + x + 1)e^{-x} + 1 = -x^2e^{-x} + 1$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$g_a(-1) = 1 - e$ d'où $I(-1; 1 - e)$ donc les courbes (C_a) passent toutes par un même point fixe I .

2- On suppose $a \neq -2$. Démontrons que la fonction g_a admet deux extrémums dont l'un est obtenu pour x = 0 :

$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{1}$

$g'_a(x) = (-2x + a + x^2 - ax - a)\mathbf{e}^{-x}$

$\quad = (x^2 - (a + 2)x)\mathbf{e}^{-x}$

Le signe de $g'_0(x)$ dépend de celui de $x^2 - (a + 2)x$ car $e^{-x} > 0$

Or pour $a \neq -2$, $x \mapsto x(x - (a + 2))$ s'annule en 0 et en $(a + 2)$ en changeant de signe. Par conséquent $g_a(x)$ et $g_a(a + 2)$ sont des extrémums de g_a.

3) Donnons une équation cartésienne de Γ :

$Ma(a + 2; g_a(a + 2))$

Posons $x = a + 2$ et $y = g_a\,(a + 2)$

$y = [-(a + 2)^2 + a(a + 2) + a]\mathbf{e}^{-(a+2)}$

$y = 1-(4 + a)e^{-x} + 1$ d'où (**Γ**): $\mathbf{y = 1-(x + 2)e^{-x} + 1}$ car $a = x + 2$

BACCALAUREAT 2011 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

1) Soit l'événement F « l'appareil fonctionne parfaitement »

$P(F) = \frac{9}{10}$ Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F}$:

On sait que $P(F) + P(\bar{F}) = 1$, donc $\mathbf{P(\bar{F}) = 1 - P(F) = \frac{1}{10}}$

2) a- Montrons que la probabilité de l'événement $T \cap F = \frac{9}{10}$:

T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

$P_F(T) = 1$ et $P_F(T) = \frac{1}{11}$

$P(T \cap F) = P_F(T) \times P(F)$ donc $P(T \cap F) = P_F(T) \times \frac{9}{10} = 1 \times \frac{9}{10}$

D'où $(T \cap F) = \frac{9}{10}$

b- Calculons la probabilité de $T \cap \bar{F}$:

$P(T \cap \bar{F}) = P_F(T) \times P(\bar{F}) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{10}$ **d'où $(T \cap \bar{F}) = \frac{1}{110}$**

c- La probabilité de l'événement T.

$T = (T \cap F) \cup (T \cap \bar{F})$ et $(T \cap F) \cup (T \cap \bar{F}) \neq \emptyset$

Par conséquent $P(T) = (T \cap F) + (T \cap \bar{F}) = \frac{9}{10} + \frac{1}{110}$ $\mathbf{P(T) = \frac{10}{11}}$

d- Calculons la probabilité de F sachant T :

Nous avons : $P_T(F) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{10}}$ $\mathbf{P_T(F) = \frac{99}{100}}$

Exercice 2

$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$

1) a- Démontrons que si le polynôme P(z) admet trois racines a, b et c alors on a : $a + b + c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$

$P(a) = 0$; $P(b) = 0$ et $P(c) = 0$

$P(z) = (z - a)(z - b)(z - c) = (z^2 - bz - az + ab)(z - c)$

$P(z) = z^3 - cz^2 - bz^2 - az^2 + bcz + acz + abz - abc$

$P(z) = z^3 - (a + b + c)z^2 + (ab + bc + ac)z - abc$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -(a+b+c) = \alpha \\ (ab+bc+ac) = \beta \\ -abc \quad = \gamma \end{cases} \quad \text{on a :} \begin{cases} \mathbf{a+b+c = -\alpha} \\ \mathbf{ab+bc+ac = \beta} \\ \mathbf{abc \quad = -\gamma} \end{cases}$$

b- Former alors le polynôme P(z) lorsque ses racines sont :

$a = 1 + 3i\sqrt{3}$; $b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$:

$* \alpha = -(a+b+c)$

$\alpha = -(1 + 3i\sqrt{3} - 2 + i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3})$

$\alpha = -(3 + 2i\sqrt{3})$ donc $\boldsymbol{\alpha = -3 - 2i\sqrt{3}}$

$* \beta = ab + bc + ac$

$(1+3i\sqrt{3})(-2+i\sqrt{3}) + (-2+i\sqrt{3})(4-2i\sqrt{3}) + (1+3i\sqrt{3})(4-2i\sqrt{3})$

$\beta = -2 + i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} - 9 - 8 + 4i\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} + 6 + 4 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 18$

$\boldsymbol{\beta = 9 + 13i\sqrt{3}}$

$* -\gamma = abc$

$-\gamma = (1 + 3i\sqrt{3})(-2 + i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3})$

$-\gamma = (-2 + i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} - 9)(4 - 2i\sqrt{3})$

$-\gamma = (-11 - 5i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3}) = -44 - 30 - 20i\sqrt{3} + 22i\sqrt{3}$

$= -74 + 2i\sqrt{3}$ d'où $\boldsymbol{\gamma = 74 - 2i\sqrt{3}}$

$\mathbf{P(z) = z^3 + (-3 - 2i\sqrt{3})z^2 + (9 + 13i\sqrt{3})z + 74 - 2i\sqrt{3}}$

<u>Autre méthode :</u>

$P(z) = (z - 1 - 3i\sqrt{3})(z + 2 - i\sqrt{3})(z - 4 + 2i\sqrt{3})$

On développe, réduit et ordonne suivant les puissances décroissantes de z et on retrouve le résultat.

2) a- Montrons que le triangle ABC est rectangle en B :

$z_A = 1 + 3i\sqrt{3}$; $z_B = -2 + i\sqrt{3}$; $z_C = 4 - 2i\sqrt{3}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-2 + i\sqrt{3} - 1 - 3i\sqrt{3}}{-2 + i\sqrt{3} - 4 + 2i\sqrt{3}} = \frac{-3 - 2i\sqrt{3}}{-6 + 3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 + 2i\sqrt{3})(6 - 3i\sqrt{3})}{36 + 27}$$

D'où $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ Comme $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = i\mathbb{R}^*$ alors le triangle ABC est rectangle en B

(On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore ou le produit scalaire)

b- Ecrivons sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4 - 2i\sqrt{3} - 1 - 3i\sqrt{3}}{-2 + i\sqrt{3} - 1 - 3i\sqrt{3}} = \frac{3 - 5i\sqrt{3}}{-3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(3 - 5i\sqrt{3})(-3 + 2i\sqrt{3})}{21}$$

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{21 + 21i\sqrt{3}}{21} = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad \frac{c-a}{b-a} = \mathbf{1 + i\sqrt{3}}$

$|1 + i\sqrt{3}| = 2$; soit $\theta = \operatorname{Arg}(1 + i\sqrt{3})$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ d'où $\frac{c-a}{b-a} = \mathbf{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathit{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

c- Déduisons la valeur de $\frac{AC}{AB}$:

$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ donc $\mathbf{\frac{AC}{AB} = 2}$

Mesure principale de l'angle orienté$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

$\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$, or $= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}$; donc $\mathbf{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}}\right) = \frac{\pi}{3}$

3) a- Donnons l'écriture complexe de la similitude directe de centre A, qui transforme B en C :

$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases}$; Soit $z' = uz + v$ l'écriturecomplexe de S

On a : $\begin{cases} S(A) = A \Leftrightarrow z_A = uz_A + v \\ S(B) = C \Leftrightarrow z_C = uz_B + v \end{cases}$ soit $\begin{cases} 1 + 3i\sqrt{3} = u(1 + 3i\sqrt{3}) + v \\ 4 - 2i\sqrt{3} = u(-2 + i\sqrt{3}) + v \end{cases}$

$$-3 + 5i\sqrt{3} = u(3 + 2i\sqrt{3})$$

$u = \frac{-3 + 5i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3}} \Rightarrow u = 1 + i\sqrt{3}$ On déduit donc que

$\mathbf{z' = (1 + \mathit{i}\sqrt{3})z + 9 - \mathit{i}\sqrt{3}}$

b- Déterminons l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par S.

$z_B = (\mathbf{1} + i\sqrt{3})z_{B_1} + 9 - i\sqrt{3}$

$$\mathbf{z_{B_1}} = \frac{z_B - 9 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-2 + i\sqrt{3} - 9 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-11 + 2i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\,。$$

$$z_{B_1} = -\frac{5}{4} + 13i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

PROBLEME

Partie A

$g(x) = -x^2 + 6 - 4lnx$

1) Etudions le sens de variation de g :

Cherchons le domaine de définition Dg : Dg = $]0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Calculons la fonction dérivée g'(x) : $\forall\, x \in$ Dg, $g'(x) = -2x - \frac{4}{x}$

$g'(x) = -2\left(x + \frac{2}{x}\right)$

puisque $\forall\, x \in]0; +\infty[$, alors $x + \frac{2}{x} > 0$ et sur Dg, $g'(x) < 0$

g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2) Calculons les limites de g :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-x^2 + 6 - 4lnx) = +\infty \ car \begin{cases} lnx \to -\infty \\ -x^2 + 6 \to 6 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 6 - 4lnx) = -\infty \text{ car } \begin{cases} -x^2 + 6 \to -\infty \\ -4\ln x \to -\infty \end{cases}$$

Dressons le tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$+\infty \searrow$	$-\infty$

3) Montrons que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$:

g est continue et strictement décroissante et $g(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ et puisque $0 \in$ IR on conclut que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$:

Montrons que $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$.

$1,86\ ;\ 1,87 \in]0;\ +\infty[$ et de plus $g(1,86) = 0,058$;

$g(1,87) = -0,0006$

Ainsi $g(1,86) \times g(1,87) < 0$, on déduit que $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$.

4) Donnons alors le signe de g(x) suivant les valeurs de $x \in]0;\ \alpha[$ et à $]\alpha;\ +\infty[$

g étant strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, on déduit que

$\forall x \in]0;\ \alpha[,\ g(x) > 0$ aussi $\forall x \in]\alpha;\ +\infty[\ g(x) < 0$

Partie

$$f :]0;\ +\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2ln(x)-1}{x}.$$

1) a- Calculons f '(x) :

$$\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{2}{x} - x\right) - (2\ln x - 1)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2 - 2\ln x + 1}{x^2}$$

$$\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3 - 2\ln x}{x^2}}$$

Exprimons f '(x) à l'aide de g(x) :

$$\forall x \in]0;\ +\infty[,\ \mathbf{f'(x) = \frac{-x^2 + 6 - 4lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}}$$

b- Déterminons le sens de variation de f :

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[,\ 2x^2 > 0$, donc f'(x) a le même signe que g(x) d'après partie A/4. On a :

$\forall x \in]0;\ \alpha[,\ f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $]0;\ \alpha[$.

$\forall x \in]\alpha;\ +\infty[,\ f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $]\alpha;\ +\infty[$.

c- Calculons les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2lnx - 1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}(2lnx - 1)\right] = -\infty \; car \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 \to 3 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \\ 2lnx - 1 \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 \to -\infty \\ \frac{\ln x}{x} \to 0 \\ \frac{1}{x} \to -\infty \end{cases}$$

2) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2lnx - 1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b- Etudions la position de (C) par rapport à (D) :

Soit $u(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$, $u(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}$

Etudions le signe de u(x) :

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de u(x) dépende de celui de $2\ln x - 1$

Posons alors $2\ln x - 1 \geq 0$; on a : $x \geq \sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
u(x)	‖	−	0	+	

$\forall\, x \in]0; \sqrt{e}[$, $u(x) < 0$; donc (C) est en dessous de (D).

$\forall\, x \in]\sqrt{e}; +\infty[$, $u(x) > 0$; donc (C) est au dessus de (D).

Pour $x = \sqrt{e}$, $u(x) = 0$ donc (C) et (D) se coupent.

c- Précisons les coordonnées du point A intersection de (C) et (D).

Pour $x = \sqrt{e}$, $y = f(\sqrt{e}) = -\frac{\sqrt{e}}{2} + 3$ donc $\mathbf{A\left(\sqrt{e}; -\frac{\sqrt{e}}{2} + 3\right)}$

3) a- Montrer que $\ln(\alpha) = \frac{6-\alpha^2}{4}$:

On a : $g(\alpha) = 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 6 - 4\ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = \frac{6-\alpha^2}{4}$ d'où $\mathbf{\ln(\alpha) = \frac{6-\alpha^2}{4}}$

Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$:

On a : $f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{2\ln\alpha - 1}{\alpha} = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{2\left(\frac{6-\alpha^2}{4}\right)-1}{\alpha}$

$f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{6-\alpha^2-2}{2\alpha} = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{4-\alpha^2}{2\alpha} = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}$

D'où $\mathbf{f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}}$

b- $h(x) = -x + 3 + \frac{2}{x}$.

b_1- Etudions le sens de variation de h.

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme étant la somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.. on a : $\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = -1 - \frac{2}{x^2}$

$$= -\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = -\frac{x^2+2}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$ donc $h'(x) < 0$, alors h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b_2 – Encadrons $f(\alpha)$:

h est décroissante sur $]0; +\infty[$ et $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$

alors $h(1{,}87) \leq \alpha \leq h(1{,}86)$ or $h(1{,}87) \approx 2{,}199$ et

$h(1{,}86) \approx 2{,}216$

Donc on a : $\mathbf{2{,}199 \leq h(\alpha) \leq 2{,}216}$

4) a- Dressons le tableau de variation de f.

x	0		α	+∞
f'(x)	‖	+	0	−
f(x)	‖	−∞ ↗	f(α)	↘ −∞

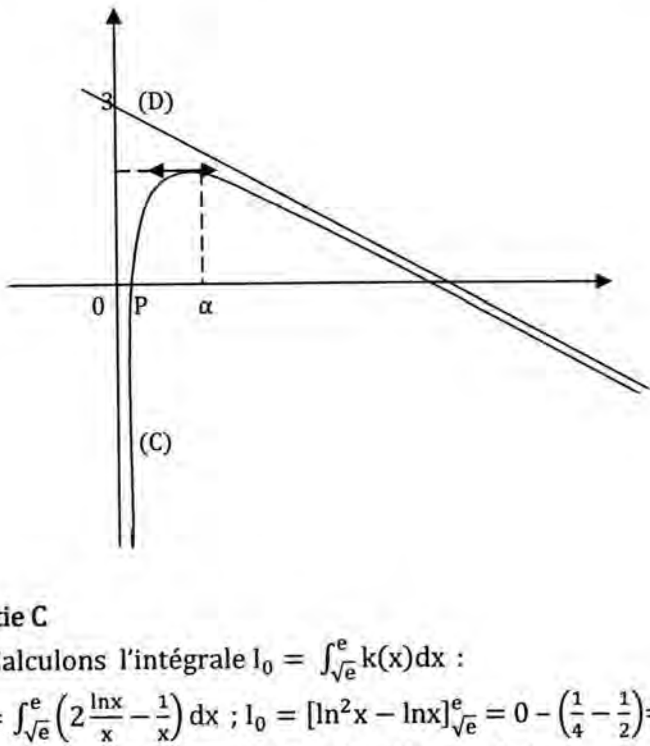
b- Calculons $f\left(\frac{1}{e}\right)$: $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e} + 3 - 3e$

$f(1) = \frac{3}{2}$.

On a $f\left(\frac{1}{e}\right) \times f(1) < 0$ et $1 < \alpha$, donc (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $\beta \in \left]\frac{1}{e}; 1\right[$

c- Construisons (D), (C) puis plaçons le point A :

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)



Partie C

1) Calculons l'intégrale $I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} k(x)dx$:

$I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx$; $I_0 = [\ln^2 x - \ln x]_{\sqrt{e}}^{e} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow I_0 = \frac{1}{4}$

2) Donner une interprétation géométrique de I_0.

I_0 est la valeur en U.a de l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = \sqrt{e}$ et $x = e$

3) Soit $a_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

a- Calculons en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} k(x)dx$.

$I_n = \left[\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 - \frac{n+2}{2}\right] - \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{n+1}{2}\right]$

$= \left(\frac{n^2+4n+4}{4} - \frac{n+2}{2}\right) - \left(\frac{n^2+2n+1}{4} - \frac{n+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{n^2+2n}{4}\right) - \left(\frac{n^2-1}{4}\right) \Rightarrow \mathbf{I_n = \frac{2n+1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n}$

b- Montrons que (I_n) est une suite arithmétique :

(I_n) est une suite arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in IN, \quad I_{n+1} - I_n = r$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{2n+3}{4} - \frac{2n+1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc (I_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $I_0 = \frac{1}{4}$

BACCALAUREAT 2013 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

Soit α un nombre complexe.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(1+i)z^2 - 2i(\alpha+1)z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$

$\Delta = [-2i(\alpha+1)]^2 - 4\,(1+i)(i-1)(\alpha^2+1)$

$= -4(\alpha+1)^2 + 8(\alpha^2+1) = -4\alpha^2 - 8\alpha - 4 + 8\alpha^2 + 8$

$= 4\alpha^2 - 8\alpha + 4$

$\Delta = (2\alpha-2)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\alpha - 2$

$$z_1 = \frac{2i(\alpha+1) - (2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{(\alpha+1)i - (\alpha-1)}{1+i}$$

$$= \frac{[(\alpha+1)i - (\alpha-1)](1-i)}{2} = \frac{2+2\alpha i}{2}$$

$$z_1 = 1 + i\alpha$$

$$z_2 = \frac{2i(\alpha+1)+(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{(\alpha+1)i+(\alpha-1)}{1+i}$$
$$= \frac{[(\alpha+1)i+(\alpha-1)](1-i)}{2} = \frac{2\alpha+2i}{2}$$
$$z_2 = \alpha + i$$

D'où $\mathbf{S = \{1 + i\alpha;\ \alpha + i\}}$

2) Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

Trouvons entre z_1 et z_2 une relation indépendante de α:

*
$$z_1 = 1 + i\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{z_1 - 1}{i} \Rightarrow \alpha = -i(z_1 - 1)$$

*
$$z_2 = \alpha + i \Rightarrow z_2 = -i(z_1 - 1) + i \Rightarrow z_2 = -iz_1 + i + i$$

$\Rightarrow \mathbf{z_2 + iz_1 - 2i = 0}$

<u>Autre méthode :</u>

On peut aussi utiliser la somme $S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et le produit $P = \frac{c}{a}$. Tirons α dans S et remplaçons dans P.

Ici $a = 1 + i$; $b = -2i(\alpha + 1)$ et $c = (i - 1)(\alpha^2 + 1)$

3) Caractérisons f : $M_1(z_1) \longrightarrow M_2(z_2)$:

$$z_2 + iz_1 - 2i = 0 \Rightarrow \mathbf{z_2 = -iz_1 + 2i}$$
$$|-i| = 1 \text{ et } \mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

Soit Ω le centre.

$$z_\Omega = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = 1 + i$$

Donc f est la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$

a- Exprimons x' et y' en fonction de x et y :

$$z_2 = -iz_1 + 2i \Rightarrow x' + iy' = -i(x + iy) + 2i$$
$$= -ix + y + 2i$$

Par identification :

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

b- Déterminons l'image par f de la droite (D) : $x + 2y - 1 = 0$:

(D) : $x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-x+1}{2}$

Or $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-x+1}{2} \\ y' = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' = -x + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

Eliminons x.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x' = -x + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$$
$$y' - 2x' = 1$$
$$\Rightarrow y' - 2x' - 1 = 0$$

D'où f (D) = $(\mathbf{D'}) : \boldsymbol{y - 2x - 1 = 0}$

Exercice 2

On considère les équations différentielles suivantes :

(E) : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$

1) Résolvons, suivant les valeurs de m, l'équation (E') :

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$

Son équation caractéristique est : $r^2 - 2mr + 3 = 0$

$\Delta = (-2m)^2 - 4(1)(3) = 4m^2 - 12 = 4(m^2 - 3)$

$\Delta = 0 \Rightarrow m = \sqrt{3}$ ou $m = -\sqrt{3}$

m	$-\infty$ $-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Δ	+	−	+

* $\forall\, m \in \left]-\infty; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[\Delta > 0$,

$$r_1 = \frac{2m - 2\sqrt{m^2 - 3}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 3}$$

$$r_2 = \frac{2m + 2\sqrt{m^2 - 3}}{2} = m + \sqrt{m^2 - 3}$$

$$S = \{Ae^{r_1 x} + Be^{r_1 x};\ (A; B) \in IR^2\}$$

* $\forall$ m $\in \left]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right[$ $\Delta < 0$, pas de valeur de r, donc $S = \emptyset$.
* $\forall$ m $\in \{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$ $\Delta = 0$; $r_0 = \frac{2m}{2} = m$

$$S = \{\ (A + B)e^{mx};\ (A; B)\ \in IR^2\}$$

2) Déterminons la valeur de m pour laquelle, $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E) :

h est solution ssi $h''(x) - 2mh'(x) + 3h(x) = 2(1 - 2x)e^x$.

$$*\ h'(x) = 2xe^x + e^xx^2 = (x^2 + 2x)e^x$$

$$*\ h''(x) = (2x + 2 + x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

$\Rightarrow (x^2 + 4x + 2)e^x - 2m(x^2 + 2x)e^x + 3x^2e^x = 2(1 - 2x)e^x$

$\Rightarrow (x^2 + 4x + 2 - 2mx^2 - 4mx + 3x^2)e^x = 2(1 - 2x)e^x$

$\Rightarrow (4 - 2m)x^2 + (4 - 4m)x + 2 = -4x + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2m = 0 \\ 4 - 4m = -4 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{m = 2}$

3) On donne m = 2.

a- Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur IR.

a_1 - Montrons que si φ est une solution de (E) ssi $(\varphi - h)$ est une solution de (E') :

On a : (E) : $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$

$M = 2 \Rightarrow$ h solution de (E)

φ solution de (E) ssi $\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x) = 2(1 - 2x)e^x$

Or $h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1 - 2x)e^x$.

$\Rightarrow \varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x) = h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)$

$\Rightarrow (\varphi'' - h'')(x) - 4(\varphi' - h')(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$

$\Rightarrow (\varphi - h)''(x) - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$

D'où $(\boldsymbol{\varphi - h})$ solution de (E').

a_2 - Montrons que $(\varphi - h)$ est une solution de (E') ssi φ est une solution de (E) :

$(\varphi - h)$ est une solution de (E') $\Leftrightarrow$

$$(\varphi - \mathrm{h})''^{(x)} - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$$

$\Rightarrow \varphi''(x) - 4\varphi'(\mathrm{x}) + 3\varphi(x) = h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)$

Or $h''(x) - 4h'(\mathrm{x}) + 3h(x) = 2(1 - 2x)e^x$

$\Rightarrow \varphi''(x) - 4\varphi'(\mathrm{x}) + 3\varphi(x) = 2(1 - 2x)e^x$

D'où φ solution de (E)

b- Déduisons de 1-, la résolution de (E') :

$\mathrm{m} = 2 \Rightarrow \mathrm{m} \left]\sqrt{3};\ +\infty\right[\quad (\Delta > 0)$

$$\text{Donc } \quad \mathrm{r}_1 = \mathrm{m} - \sqrt{\mathrm{m}^2 - 3} = 2 - 1 = 1$$

$$\mathrm{r}_2 = \mathrm{m} + \sqrt{\mathrm{m}^2 - 3} = 2 + 1 = 3$$

D'où $\mathbf{S} = \left\{\mathbf{A}\mathbf{e}^x + \mathbf{B}\mathbf{e}^{3x};\ (\mathbf{A};\mathbf{B}) \in \mathbf{IR}^2\right\}$

Résolvons (E) :

$(\varphi - h)$ est solution de (E')

$\Rightarrow \varphi - h = \mathrm{A}\mathrm{e}^x + \mathrm{B}\mathrm{e}^{3x}$

$\Rightarrow \varphi = h + \mathrm{A}\mathrm{e}^x + \mathrm{B}\mathrm{e}^{3x}$

D'où $\varphi = x^2\mathrm{e}^x + \mathrm{A}\mathrm{e}^x + \mathrm{B}\mathrm{e}^{3x}$

$\mathbf{S} = \left\{(\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{A})\mathbf{e}^x + \mathbf{B}\mathbf{e}^{3x};\ (\mathbf{A};\mathbf{B}) \in \mathbf{IR}^2\right\}$

c- La solution f de (E) telle que (Cf) passe $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'0) = -1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = -1 \\ \mathrm{A} + 3\mathrm{B} = 1 \end{cases}$$

$$2\mathrm{B} = 2 \Rightarrow \mathrm{B} = 1$$

$\mathrm{B} = 1 \Rightarrow \mathrm{A} = -2$

D'où $\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{2})\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{3x}$

4) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur IR de la fonction $x \longmapsto 2(1 - 2\mathrm{x})e^x$.

a- Sachant que g est une solution de (E), montrons que la fonction G définie sur IR par : $\mathrm{G(x)} = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$est une primitive de g sur IR :

* g solution de (E) $\Leftrightarrow g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 2(1 - 2x)e^x$

$\Rightarrow 3g(x) = 2(1-2x)e^x - g''(x) + 4g'(x)$

$\Rightarrow 3\int g(x)dx = \int[2(1-2x)e^x - g''(x) + 4g'(x)]\,dx$

$\Rightarrow \boldsymbol{G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]}$

b-Déterminons une expression de U(x) de la forme : $U(x) = (ax+b)e^x$:

$U'(x) = 2(1-2x)e^x$

Or $U'(x) = (ax+a+b)e^x$

$\Rightarrow ax + a + b = -4x + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a + b = 2 \end{cases}$ donc $a = -4$ et $b = 6$

D'où $\mathbf{U(x) = (-4x+6)e^x}$

c- Déduisons G(x) :

$G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$

$= [(-4x+6)e^x - ((x^2+2x-2)e^x + 3e^{3x}) + (x^2-2)e^x + e^{3x}]$

$$\boldsymbol{G(x) = \frac{1}{3}[(3x^2 - 6x)e^x + e^{3x}]}$$

Problème

$(f(x)) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ sur $[0; +\infty[$

L'unité graphique est 2 cm.

A/

$g(x) = x + 2 - e^x$ sur $[0; +\infty[$

1) Etudions le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$:

g est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$\boldsymbol{g'(x) = 1 - e^x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow x = ln(1) = 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	

$\forall x \in [0; +\infty[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Limite de g en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2 - e^x = +\infty - \infty$

(forme indéterminée)

$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \; car \; \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2) a- Montrons que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0; +\infty[$:

g est continue et décroissante sur $[0; +\infty[$ et sur $g([0; +\infty]) = [-\infty; 1[$ contenant 0 c'est-à-dire $0 \in = [-\infty; 1[$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0; +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$.

b- Prouvons que : $1{,}14 < \alpha \leq 1{,}15$:

$$g(1{,}14) = 0{,}013 > 0$$
$$g(1{,}15) = 0{,}0081 < 0$$

On a : $g(1{,}14) \times g(1{,}15) < 0$ donc $1{,}14<\alpha<1{,}15$

3) Déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :

On a le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

$* \forall x \in [0; \alpha[,\; g(x) \in]0; 1] \Rightarrow g(x) > 0$

$* \forall x \in]\alpha; +\infty[,\; g(x) \in]-\infty; 0[\Rightarrow g(x) < 0$

$* x = \alpha \Rightarrow g(x) = 0$

B/

1) a- Montrons que, $\forall x \in [0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

$[0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$:

$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1)-(x+1)e^x(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^{2x}+e^x-xe^{2x}-e^{2x}+xe^x+e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{(x+2)e^x-e^{2x}}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2} \qquad \boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}}$$

b- Sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$:

Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ car $e^x > 0$ et $(xe^x+1)^2 > 0$.

* $\forall\ x \in [0; \alpha[$, $g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) >$ donc f est strictement croissante sur $[0; \alpha[$.

* $\forall\ x \in [\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) <$ donc f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

2) a- Montrons que $\forall\ x \geq 0, f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$f(\mathrm{x}) = \frac{e^x-1}{xe^x+1} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})}$; $\boldsymbol{f(\mathrm{x}) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}}$

b- Déduisons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons graphiquement le résultat trouvé :

$$\lim_{x\to+\infty} f(\mathrm{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{xe^x+1} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\ et\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc la droite des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe (C).

3) a- Etablissons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$:

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

Or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Rightarrow \boldsymbol{e^\alpha = \alpha + 2}$

$$donc\ f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{(\alpha+1)}$$

$$\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}}$$

b- Encadrement de α à 10^{-2} :

$1{,}44 < \alpha < 1{,}15$

$\Rightarrow 2{,}44 < \alpha+1 < 2{,}15$

$\Rightarrow \frac{1}{2{,}15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2{,}14}$

$\Rightarrow \mathbf{0,46} < f(\alpha) < 0{,}47$

4) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 :

(T) : y = $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(0) = 1$ *et* $f(0) = 0$ donc **(T) : y =** $\boldsymbol{x}$

5) a- Etablissons que, $\forall \in [0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{(1 - x^2)e^x - x - 1}{xe^x + 1} = \frac{(1 - x)(1 + x)e^x - (x + 1)}{xe^x + 1}$$

$$f(x) - x = \frac{(x + 1)[(1 - x)e^x - 1]}{xe^x + 1}$$

D'où $\boldsymbol{\varphi(x) = (1 - x)e^x - 1 = e^x - xe^x - 1}$

b- Etudions le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$:

φ est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$$\varphi'(x) = e^x + (-x - 1)e^x = e^x(1 - x - 1) = -xe^x$$

$\boldsymbol{\varphi'(x) = -xe^x} \Rightarrow \varphi'(x) < 0, \forall\, x \in [0; +\infty[$

Donc φ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Déduisons le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	
$\varphi(x)$	0 ↘	$-\infty$

$\forall\, x \in [0; +\infty[$; $\varphi(x) \in]-\infty; 0]$ donc $\varphi(x) < 0$

c- Déduisons des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) :

(T) : y = x

Position relative de la courbe (C) et de la droite (T) $\Leftrightarrow$ signe de $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$.

Or $\forall\, x \in [0;\, +\infty[\, ; (x+1) > 0\ et\ xe^x + 1 > 0$

Donc le signe de $[f(x) - x]$ dépend de celui de $\varphi(x)$.

Or $\varphi(x) < 0\ \ \forall\, x \in [0;\, +\infty[$

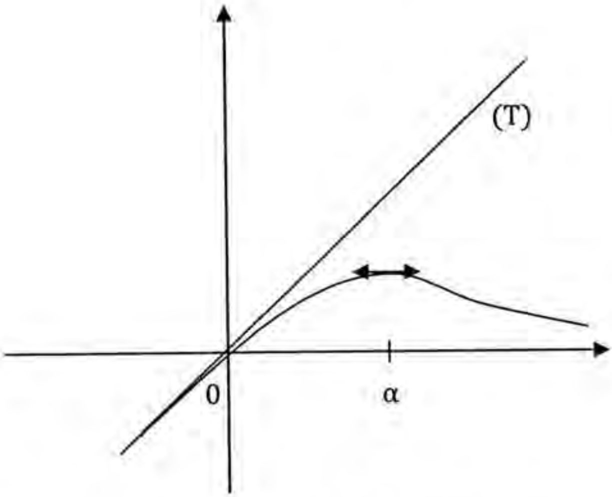
$\Rightarrow f(x) - x < 0$ donc (C) est en dessous de (T) sur $[0;\, +\infty[$.

d- Traçons (C) et (T) :

Tableau de variation de f:

x	0		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{1+\alpha}$	$\searrow$	$-\infty$

$1{,}44 < \alpha < 1{,}15$ et $0{,}46 < f(\alpha) < 0{,}47$



C/

1) Déterminons une primitive F de f sur $[0;\, +\infty[$:

$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{U'(x)}{U(x)}$ avec $U(x) = x + e^{-x}$

$\Rightarrow F(x) = ln|U(x)|$ or $x + e^{-x} > 0$

Donc $\mathbf{F(x) = ln(x + e^{-x})}$

On note D le domaine du plan limité par (C), (T) et $x = 0; x = 1$

2) Calculons en cm^2 l'aire A de ce domaine D :
(T) est au dessus de (C)

$\Rightarrow A = \int_0^1 (x - f(x))dx \text{ x } U.a.\ Ici\ U.a. = 4\ cm^2$

$\Rightarrow A = \left[\frac{1}{2}x^2 - F(x)\right]_0^1 \text{ x } 4\ cm^2$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - ln(x + e^{-x})\right]_0^1 \text{ x } 4\ cm^2$

$\mathbf{A = \left[\frac{1}{2} - ln(1 + e^{-1})\right] x\ 4\ cm^2}$

3) On pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$; $k \in \mathbb{N}$.

a- Calculons V_0, V_1 et V_2 :

$$V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx = [ln(x + e^{-x})]_k^{k+1}$$

$$= ln(k + 1 + e^{-k-1}) - ln(k + e^{-k}) = ln\left(\frac{k + 1 + e^{-k-1}}{k + e^{-k}}\right)$$

$$\mathbf{V_k = ln\left(\frac{(k+1)\,e^k + e^{-1}}{ke^k + 1}\right)}$$

* $V_0 = ln(1 + e^{-1})$
* $V_1 = ln\left(\frac{2e + e^{-1}}{e + 1}\right)$
* $V_2 = ln\left(\frac{3e^2 + e^{-1}}{2e^2 + 1}\right)$

b- Démontrons que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k + 1) \leq V_K \leq f(k)$:

$V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$. D'après le théorème de l'inégalité traduisant la valeur approchée des intégrales,

$\frac{f(k+1)}{(k+1)-k} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{f(k)}{(k+1)-k} \Rightarrow \boldsymbol{f(k+1) \leq V_k \leq f(k)}$

c- Déduisons la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$:

$f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$

$$f(k+1) = \frac{1-e^{-(k+1)}}{k+1+e^{-(k+1)}} \; et \; f(k) = \frac{1-e^{-k}}{k+e^{-k}}$$

$$\lim_{k\to+\infty} f(k+1) = 0 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} f(k) = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boldsymbol{\lim_{k\to+\infty} V_k = 0}$$

BACCALAUREAT 2014 - TOGO

CORRIGE

Exercice 1 :

Soit l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^n = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$, $n \in IN*$

1) Déterminons les solutions Z_k de (E) :

$$\left|\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right| = \frac{\sqrt{(-9\sqrt{3}) + 27^2}}{2} = \frac{\sqrt{972}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$\text{Arg}\left(\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ car $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-9\sqrt{3}}{2 \times 9\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{27}{2 \times 9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

$\Rightarrow \begin{cases} r^n = 9\sqrt{3} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \{0;\ 1; 2; \ldots;\ (n-1)\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Donc $\mathbf{z_k} = \sqrt[n]{\mathbf{9\sqrt{3}}}\ e^{i\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

2) On pose n = 5.

Représentation des points-images des solutions Z_k de (E) :

$n = 5 \Rightarrow z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}\ e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$ $k \in \{0;\ 1; 2; 3; 4\}$ et $\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$* \ k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{2\pi}{15}}$

$* \ k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{8\pi}{15}}$

$* \ k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{14\pi}{15}}$

$* \ k = 3 \Rightarrow z_3 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$* \ k = 4 \Rightarrow z_4 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{26\pi}{15}}$

$S = \left\{\sqrt{3}\, e^{i\frac{2\pi}{15}};\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{8\pi}{15}};\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{14\pi}{15}};\ -\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}};\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{26\pi}{15}}\right\}$

Tous ces points images appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{3}$ (ils sont cocycliques)

3) On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a- Soit $J = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimons α en fonction de J :

$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *or* $J = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \sqrt{3}\, J}$

b- Montons que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$:

$\alpha^5 = (\sqrt{3}\, J)^5 = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\boldsymbol{\alpha^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}}$$

D'où α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$.

Autre méthode :

$\alpha^5 = \left(\sqrt{3}\,J\right)^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \text{ x } (J)^5$ $\; or \; J = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$= 9\sqrt{3} \text{ x } \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 9\sqrt{3}\, e^{-i\frac{10\pi}{3}}$ or $\frac{10\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 3\pi$

$= 9\sqrt{3} \text{ x}\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\boldsymbol{\alpha^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}}$$

D'où α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$

4) Soit T : $\quad P \to P$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)z + \frac{5+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

a- La forme algébrique du nombre complexe $W = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$:

$W = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i) = 2+\sqrt{3}+3i-2i-i\sqrt{3}+3$

$\mathbf{W = 5+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})}\boldsymbol{i}$

b- Donnons la nature et les éléments caractéristiques de (T):

$\mathbf{z' = \alpha z + \frac{1}{2}W}$ car $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ et $\frac{1}{2}W = \frac{5+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

$$|\alpha| = \left|\sqrt{3}\,J\right| = \sqrt{3}$$

$\text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(\sqrt{3}\,J\right) = -\text{Arg}(J) = -\frac{2\pi}{3}$

Soit Ω le centre

$$z_\Omega = \frac{\frac{1}{2}W}{1-\alpha} = \frac{\frac{5+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)} = \frac{5+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2+\sqrt{3}+3i}$$

$$\frac{(1-i)\left(2+\sqrt{3}+3i\right)}{2+\sqrt{3}+3i} = 1-i$$

$$\mathbf{z_\Omega = 1-}\boldsymbol{i}$$

Donc (T) est une similitude directe de centre $\Omega(1-i)$, de rapport $k = \sqrt{3}$ et d'angle $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

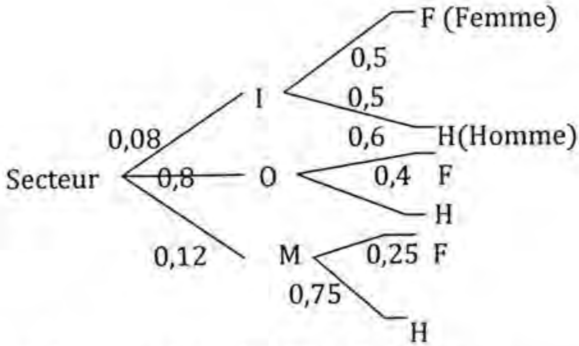
Exercice 2

8 % d'ingénieurs $\Rightarrow$ P(I)= $\frac{8}{100}$ = 0,08

80 % d'opérateurs de production$\Rightarrow$P(O)= $\frac{80}{100}$ = 0,8

Agents de maintenance $\Rightarrow$ P(M).

1) Construction d'un arbre pondéré correspondant aux données:



2) Calculons la probabilité d'interroger :

a- Un agent de maintenance.

P(M) = 1 – [P(I) + P(O)] = 1 – [0,08 + 0,8] **P(M) = 0,12**

b- Une femme agent de maintenance.

P(F∩M) = P(F/M) x P(M) = 0,25 x 0,12 **P(F∩M) = 0,03**

c- Une femme.

P(F) = P(F∩M) + P(F∩I) + P(F∩O)

= 0,03 + 0,6 x 0,8 + 0,5 x 0,08 P(F) = 0,55.

3) Entretien de machines par le service de maintenance.

A « l'alarme se déclenche »

B « une panne se produit ».

On a :

* $P(A/\overline{B}) = 0{,}002$
* $P(\overline{A}/B) = 0{,}003$

* P(B) = 0,04

a- Démontrons que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037 :

$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$ or $P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B) = 0{,}997$

$P(A \cap B) = 0{,}997 \times 0{,}04$ $\quad\quad$ $\mathbf{P(A \cap B) = 0{,}037}$

b- Calculons la probabilité que l'alarme se déclenche :

$P(A) = P(A \cap B) + P(A/\overline{B}) \times P(\overline{B})$ (ici $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$= 0{,}037 + 0{,}002 \times (1 - 0{,}04)$ $\quad\quad$ $\mathbf{P(A) = 0,0389}$

c- Calculons la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche :

$P(A) \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}037}{0{,}0389}$ $\quad\quad$ $\mathbf{P(A) = 0{,}95}$

PROBLEME

A/ On considère la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a- Etudions la continuité de f en 0 :

$$* \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \ ; \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -2$$

$$* \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 \ ; \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -2$$

$$* f(0) = -2$$

Conclusion :

$$* \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$$ **Donc f est continue en 0.**

b- Montrons que pour tout réel non nul u on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$$

Posons $X = \frac{x}{u} \Longrightarrow x = Xu$

Si $x \longrightarrow 0 \Rightarrow \mathrm{X} \longrightarrow 0$ et on a :

$$\lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - 1}{\mathrm{uX}} = \lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{1}{\mathrm{u}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - 1}{\mathrm{X}}\right).$$

$$\text{Or} \quad \lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{e^{\mathrm{X}} - 1}{\mathrm{X}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}}$$

c- a- Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x} \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x}$$

$$* \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{-x + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3 + 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{-x + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} -1 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1}{x} = -1 + \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x} = -\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{2x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 + 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x) + 2}{x} = 0}$$

Interprétation analytique de ce résultat :

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ *donc f n'estpas dérivab*le *en* 0 .

Interprétation géométrique de ce résultat :

La courbe (C) admet deux demi- tangentes au point d'abscisse 0.

2) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation :

f est dérivable sur IR*.

$$\begin{cases} f'(x) = -1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = (x^2 + 4x)e^{\frac{x}{2}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

* Si $x < 0 \Rightarrow x \in]-\infty; 0[$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = ln2 \Rightarrow x = 2ln2$$

x	$-\infty$	0		$2ln2$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$\forall\ x \in]-\infty; 0[\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

* Si $x > 0 \Rightarrow x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \text{ } car \text{ } e^{\frac{x}{2}} > 0\ \forall\ x$$

$$x = 0 \quad ou \quad x = -4$$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\forall\ x \in]0; +\infty[\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

* Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\frac{1}{2}$	‖	0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	(-2)	$\nearrow$	$+\infty$

3) a- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles $\alpha < 0 < \beta < 1$:

f est continue et monotone sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et $f(]-\infty; 0[) =]-2; +\infty[$ contenant 0 ;

$f(]0;+\infty[) =]-2;+\infty[$ contenant aussi 0 ; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe deux réels α et β telles $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 0$; $\alpha \in]-\infty;0[$ *et* $\beta \in]0;+\infty[$.

$$f(0) = -2 \ et \ f(1) = 2e^{\frac{1}{2}} - 2 > 0$$

$\Rightarrow f(0) \mathrm{x} f(1) < 0$ *donc* $0 < \beta < 1$ *d'où* $\alpha < 0 < \beta < 1$

b- vérifions que $-2{,}75 < \alpha < -2{,}74$:

On a : $\alpha < 0$

$$f(-2{,}75) \approx 0{,}0028 > 0$$
$$f(-2{,}74) \approx -0{,}0058 < 0$$

$\Rightarrow f(-2{,}75)\ \mathrm{x}\ f(-2{,}75) < 0$ ***Donc*** $\boldsymbol{-2{,}75 < \alpha < -2{,}74}$

B/ $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et $I = [0;1]$.

1) Montrons que β est l'unique solution de l'équation $x > 0, g(x) = x$:

$\beta \in [0;1]$ d'après ce qui précède 3)a-.

Soit $h(x) = g(x) - x$.

$h'(x) = g'^{(x)} - 1 = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} - 1$

$h'(x)<0$, $\forall\ x \in [0;1]$, donc h est strictement décroissante sur $[0;1]$.

$$h([0;1]) = [h(1);h(0)] = \left[e^{-\frac{1}{4}} - 1;\ 1\right] \text{ contenant } 0.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in [0;1]$ tel $h(\beta) = 0 \Rightarrow g(\beta) = \beta$.

2) Montrons que $\forall\, x \in I, g(x) \in I$:

$I = [0;1]$; $g(I) = [0{,}7;1] \subset I \Rightarrow g(x) \in I$.

3) Montrons que $\forall\, x \in \mathrm{I},\ |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$:

$g(x) = e^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$

$$x \in I \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$
$$\Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{-\frac{x}{4}} \leq e^{0}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{4}e^{0} \leq -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \leq -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

D'où $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

4) $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

a- Démontrons par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I :

- Vérifions que $U_0 \in \mathrm{I}$.

$U_0 = 1 \Rightarrow U_0 \in \mathrm{I}$.

- Supposons que $U_n \in \mathrm{I}$ et montrons que $U_{n+1} \in \mathrm{I}$.

$\forall\, x \in I\ ;\ g(x) \in \mathrm{I}$.

Or $U_n \in \mathrm{I} \Rightarrow g(U_n) \in \mathrm{I} \Rightarrow U_{n+1} \in \mathrm{I}$ d'où $U_n \in \mathrm{I}$.

b- Démontrons que $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\, |U_n - \beta|$:

On a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliqué entre U_n et β, on a :

$$|g(U_n) - g(\beta)| \leq \frac{1}{4}\, |U_n - \beta|$$

Or $g(\beta) = \beta$ et $g(U_n) = U_{n+1} \Rightarrow |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\, |U_n - \beta|$

- Démontrons que $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$:

On a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\ |U_n - \beta|$

$$\Rightarrow |U_n - \beta| \leq \frac{1}{4}\ |U_{n-1} - \beta|$$

$$|U_{n-1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\ |U_{n-2} - \beta|$$

$$- \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad -$$

$$|U_1 - \beta| \leq \frac{1}{4}\ |U_0 - \beta|$$

En multipliant membre à membre et en simplifiant, on a :

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n\ |U_0 - \beta|$$

Or $\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ et $|U_0 - \beta| \leq |1 - 0| = 1$

$$\Rightarrow \boldsymbol{|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$$

c- Déduisons que (U_n) est convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} |U_n - \beta| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbf{U_n} = \boldsymbol{\beta} \quad \text{donc } (U_n) \text{ est convergente.}$$

d- Déterminons le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n_0} soit une valeur approchée de β à 10^{-3} près :

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow 2n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -3\ln 10$$

$$\Rightarrow -2n\ln 2 \leq -3\ln 10$$

$n \geq \frac{3\ln 10}{2\ln 2} \Rightarrow n \geq 5$ d'où $\mathbf{n_0 = 5}$

e- Calculons la valeur correspondante de U_{n_0} :

$|U_{n_0} - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n_0} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n_0} \leq \mathbf{U_{n_0}} \leq \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n_0}$; *ici* $n_0 = 5$

C/

1) a- Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x - 3) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$$

Donc la droite (Δ): $y = -x - 3$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b- Etudiions l'autre branche infinie de (C) :

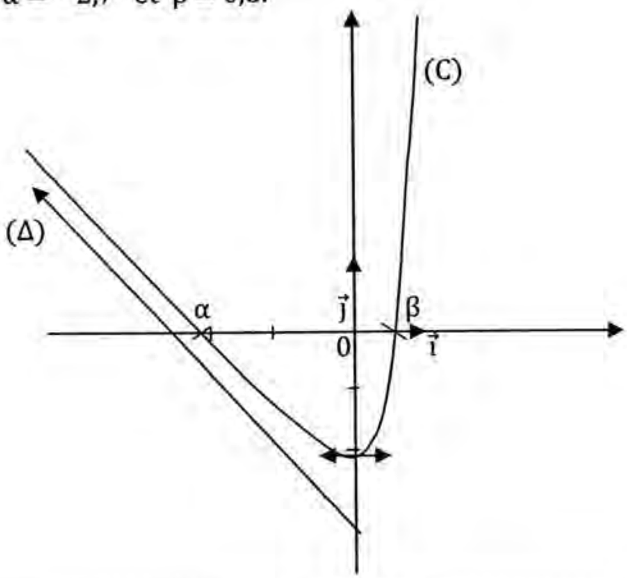
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2xe^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{x} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; donc (C)admet une branche parabolique de direction la droite des ordonnées (Oy) en $+\infty$.

2) Construction de (Δ) et (C) :

$\alpha = -2{,}7$ et $\beta = 0{,}8$.



3) a- Calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x)dx$ par intégrations par parties :

$$I_\beta = \int_0^\beta \left(2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2\ \right)dx$$

Soit $u(x) = 2x^2 \Longrightarrow u'(x) = 4x$

$$v'(x) = e^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow v(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$I_\beta = \left[4x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x\right]_0^\beta - \int_0^\beta 8x\, e^{\frac{x}{2}}\, dx$$

Soit $u_1(x) = 8x \Longrightarrow u_1'(x) = 8$

$v_1'(x) = e^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow v_1(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

$$\Longrightarrow I_\beta = \left[4x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x\right]_0^\beta - \left(\left[16x\, e^{\frac{x}{2}}\right]_0^\beta - \int_0^\beta 16\, e^{\frac{x}{2}}\, dx\right)$$

$$= \left[4x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x\right]_0^\beta - \left[16x\, e^{\frac{x}{2}}\right]_0^\beta + \int_0^\beta 16\, e^{\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \left[4x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x - 16x\, e^{\frac{x}{2}} + 32\, e^{\frac{x}{2}}\right]_0^\beta$$

$$= \left[(4x^2 - 16x + 32)\, e^{\frac{x}{2}} - 2x\right]_0^\beta$$

$$\mathbf{I_\beta = (4\beta^2 - 16\beta + 32)\, e^{\frac{\beta}{2}} - 2\beta - 32}$$

b-Exprimons l'aire $A(\alpha, \beta)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$:

$A(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^0 f(x)dx + \int_0^\beta f(x)dx$

Or $\int_0^\beta f(x)dx$ est déjà déterminée.

$$\int_\alpha^0 f(x)dx = \int_\alpha^0 \left(-x + e^{\frac{x}{2}} - 3\right)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2e^{\frac{x}{2}} - 3x\right]_\alpha^0$$

$$\int_\alpha^0 f(x)dx = 2 - \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 3\alpha\right)$$

$$\mathbf{A(\alpha, \beta) = 2 - \left(-\tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 3\alpha\right) + (4\beta^2 - 16\beta + 32)\, e^{\frac{\beta}{2}} - 2\beta - 32}$$

BACCALAUREAT 2015 - TOGO

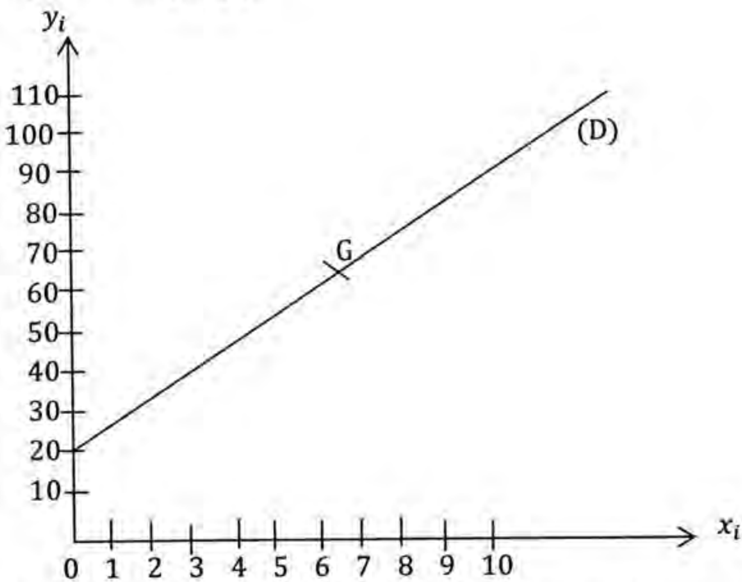
Corrigé

Exercice 1 :

Le tableau suivant donne l'évolution de l'indice annuel des dépenses, exprimé en milliards de francs CFA, d'une compagnie multinationale pendant ces dernières années.

année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
N° de l'année (xi)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indice des dépenses (yi)	36	45	40	58	70	64	80	95	100	108

1) a- Représentons le nuage de points associé à la série statistique double (xi, yi) :



b- Calculons les coordonnées du point G puis construisons :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = 5{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{36+45+40+58+70+64+80+95+100+108}{10} = 69{,}6$$

D'où $G\binom{5,5}{69,6}$

2) a- Calculons à 10^{-3} près, le coefficient de corrélation linéaire de la série $(xi,\ yi)$:

$$\Upsilon = \frac{\mathbf{Cov}\,(x,y)}{\sqrt{\mathbf{V}(x)\mathbf{x}\,\mathbf{V}(y)}} = \frac{\mathbf{Cov}\,(x,y)}{\sigma x\ \mathbf{x}\ \sigma y}$$

$$V(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$
$$= \frac{(1)^2+(2)^2+(3)^2+(4)^2+(5)^2+(6)^2+(7)^2+(8)^2+(9)^2+(10)^2}{10} - (5{,}5)^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}(x) = \mathbf{8{,}25}$$

$$V(y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2$$
$$= \frac{(36)^2+(45)^2+(40)^2+(58)^2+(70)^2+(64)^2+(80)^2+(95)^2+(100)^2+(108)^2}{10} - (69{,}6)^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}(y) = \mathbf{592{,}84}$$

$$\text{Cov}\,(x,y) = \frac{\sum x_{i,}y_i}{n} - (\bar{x},\bar{y})$$
$$= \frac{(1\text{x}36)+(2\text{x}45)+(3\text{x}40)+(4\text{x}58)+(5\text{x}70)+(6\text{x}64)+(7\text{x}80)+(8\text{x}95)+(9\text{x}100)+(10\text{x}110)}{10}$$
$$-(5{,}5\ \text{x}\ 69{,}6)$$

$$\text{Cov}\,(x,y) = 68{,}4$$

On a alors : $\Upsilon = \frac{68{,}4}{\sqrt{8{,}25\ \text{x}\ 592{,}84)}} \Rightarrow \mathbf{\Upsilon = 0{,}978}$

Υ est proche de 1 donc il y a une forte corrélation entre x *et* y. Donc un ajustement linéaire peut être envisagé.

b- Déterminons par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite (D) de régression linéaire de y en x :

Soit (D) : $y = ax + b$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{Cov}\,(x,y)}{\mathbf{V}(x)} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{x}}$$

$$a = \frac{68{,}4}{8{,}25} = 8{,}291 \Rightarrow a = 8{,}291\ \ et$$

$$b = 69{,}6 - (8{,}291\ \text{x}\ 5{,}5) \Rightarrow b = 23{,}9995 \approx 24$$

D'où (D) : $y = \mathbf{8,291x + 24}$

Représentation de (D) : (confère repère).

3) On suppose que l'évolution de l'indice se poursuit de la même façon dans les années à venir.

a- Donnons une estimation en milliards de francs CFA de l'indice annuel des dépenses de la compagnie en 2030 :

En 2030, $x = 25 \Rightarrow y = 8{,}291 \times 25 + 24 \Rightarrow \mathbf{y = 231,275}$

Donc en 2030, l'indice annuel des dépenses sera de 231,275 milliards de francs CFA.

b- L'année à laquelle l'indice des dépenses de cette compagnie dépassera 300 milliards de francs CFA .

$y > 300$ Donc on a : $8{,}291x + 24 > 300$

$$\Rightarrow x > \frac{300 - 24}{8{,}291} \Rightarrow x > 33{,}28$$

Donc $x \geq 34$ Donc à partir de l'année (2034 −5)= 2029 l'indice des dépenses de cette compagnie dépassera 300 milliards de francs CFA .

N.B. : On a fait (2034 −5) car le numéro des années a commencé à partir de 2006 ce qui veut dire qu'on a sauté 5 ans partant de 2000.

Exercice 2 :

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

(E) :$z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 + (-5 + 3i)z^3 + (8 - 9i)z^2 + (-14 + 6i)z + 10 = 0$$

a- Vérifions que 1 et i sont des solutions évidentes de (E) :

Soit (E) : P(z) = 0

$P(1) = (1)^4 + (-5 + 3i)(1)^3 + (8 - 9i)(1)^2 + (-14 + 6i)1 + 10$

$= 1 - 5 + 3i + 8 - 9i - 14 + 6i + 10 = 19 - 19 + 9i - 9i = 0$

$\boldsymbol{P(1) = 0}$ **donc 1 est une solution de (E)**

$$P(i) = (i)^4 + (-5+3i)(i)^3 + (8-9i)(i)^2 + (-14+6i)i + 10$$
$$= (i)^4 + (-5+3i)(i)^3 + (8-9i)(i)^2 + (-14+6i)i + 10$$
$$= 1 + 5i + 3 - 8 + 9i - 14i - 6 + 10 = 19 - 19 + 9i - 9i = 0$$
$$14 - 14 + 14i - 14i = 0$$

$\boldsymbol{P(i) = 0}$ **donc** $\boldsymbol{i}$ **est une solution de (E).**

b- Résolvons l'équation (E) :

1 et i sont des solutions de (E).

$(z-1)(z-i) = z^2 - (1+i)z + i$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l}
z^4 + (-5+3i)z^3 + (8-9i)z^2 + (-14+6i)z + 10 & z^2 - (1+i)z + i \\ \cline{2-2}
-[z^4 - (1+i)z^3 + iz^2] & z^2 + (-4+4i)z - 10i \\ \cline{1-1}
(-4+4i)z^3 + (8-10i)z^2 + (-14+6i)z + 10 & \\
-[(-4+4i)z^3 + 8z^2 + (-4-4i)z] & \\ \cline{1-1}
-10iz^2 + (-10+10i) + 10 & \\
-[-10iz^2 + (-10+10i) + 10] & \\ \cline{1-1}
\quad 0 \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Donc $\mathrm{P(z)} = (z-1)(z-i)[z^2 + (-4+4i)z - 10i\,]$

(E) : $\mathrm{P(z)} = 0$

$\Rightarrow z = 1;\ z = i\ \ ou\ z^2 + (4-4i)z - 10i = 0$

$\Delta = (4-4i)^2 - 4(1)(-10i) = 16 - 32i - 16 + 40i \Rightarrow \Delta = 8i$

Soit $\Delta = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = 4 \\ a^2 + b^2 = |\Delta| = 8 \end{cases} \quad \text{On a :} \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$$
$$2a^2 = 8$$
$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2\ \ ou\ \ a = -2$$

$$\text{Si} \begin{cases} a = 2\ ,\ b = 2 \\ \mathrm{a} = -2\ ,\ \mathrm{b} = -2 \end{cases}$$

D'où $\sqrt{\Delta} = 2 + 2i$ *ou* $\sqrt{\Delta} = -2 - 2i$

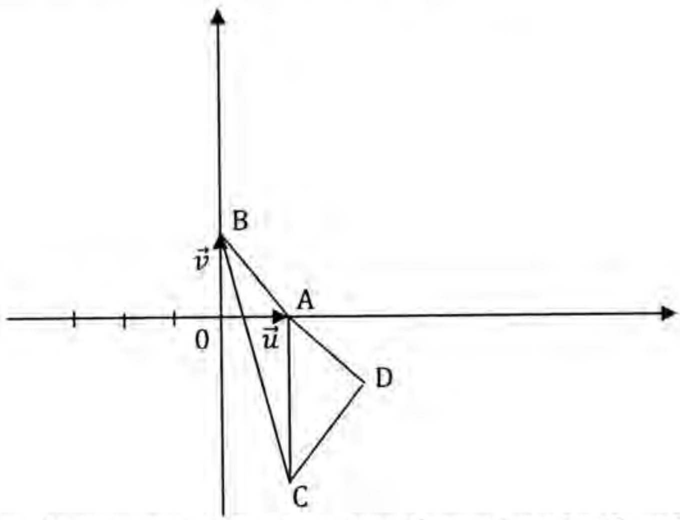
$$z_1 = \frac{-(-4+4i) - (2+2i)}{2} = \frac{4 - 4i - 2 - 2i}{2} = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-(-4+4i) + (2+2i)}{2} = \frac{4 - 4i + 2 + 2i}{2} = 3 - i$$

Donc $\boldsymbol{S = \{1 - 3i; 3 - i; i; 1\}}$

2) A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, $1 - 3i$ et $3 - i$.

a- Plaçons les points dans repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:



b- Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$
$$\begin{array}{c|c} A & C \\ B & D \end{array}$$

b1 – Déterminons l'écriture complexe de S :

$S: z' = az + b$

$$a=\frac{z_C-z_D}{z_A-z_B}=\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\frac{(1-3i)-(3-i)}{1-i}=\frac{1-3i-3+i}{1-i}$$
$$=\frac{-2-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(-2-2\mathrm{i})(1+i)}{2}=\frac{-2-2i-2i+2}{2}$$
$$\boldsymbol{a=-2i}$$

$$b=z_C-az_A \ ou \ b=z_D-az_B$$
$$b=1-3i-(-2i)(1)=1-3i+2i=1-i$$
$$\boldsymbol{b=1-i}$$

D'où $\quad \boldsymbol{S: z'=-2iz+1-i}$

b2- Donnons les éléments caractéristiques de S :

$a=-2i$ et $b=1-i$

$|\mathrm{a}|=2$ et $\arg(\mathrm{a})=-\frac{\pi}{2}$

$z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ (Ω le centre).

$$z_\Omega=\frac{1-i}{1+2i}=\frac{(1-i)(1-2i)}{5}=\frac{1-2i-i-2}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$$

Donc S est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$, de rapport $k=2$ et d'angle $\alpha=-\frac{\pi}{2}$.

3) On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n ($n \in \mathbb{N}$) avec $z_0=i \ \ et \ \ z_{n+1}=-2iz_n+1-i.$

a- Calculons $\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω :

$$\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}=a \ \ or\ a=-2i. \quad (S: z'=-2iz+1-i)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}=-2i}$$

Nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}\right)=\operatorname{Arg}(-2i)=-\frac{\pi}{2}$$

Donc le triangle $\Omega M_n M_{n+1}$ est un triangle rectangle en Ω.

b- $U_n = |z_{n+1} - z_n|$

Démontrer que la suite $(U_n)n \in IN$ est une suite géométrique :

$$U_n = |z_{n+1} - z_n|$$
$$U_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$$
$$U_{n+1} = |-2iz_{n+2} + 1 - i - (-2iz_{n+1} + 1 - i)|$$
$$= |-2i(z_{n+1} - z_n)| = |-2i| \text{ x } |z_{n+1} - z_n|$$
$$U_{n+1} = 2|z_{n+1} - z_n| \Leftrightarrow U_{n+1} = 2U_n$$

$U_0 = |z_1 - z_0|$ or $z_1 = -2iz_0 + 1 - i = -2i(i) + 1 - i = 3 - i$

$$U_0 = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$$

Donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1er terme $U_0 = \sqrt{13}$.

c- Exprimons en fonction de n la longueur $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$

$= U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

$$\mathbf{d_n = U_0 \text{ x } \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)}$$

Donc $d_n = \sqrt{13} \text{ x } \left(\frac{1 - (2)^{n+1}}{1 - 2}\right) \Rightarrow \mathbf{d_n = -\sqrt{13} \text{ x } [1 - (2)^{n+1}]}$

Ou

$$\mathbf{d_n = -\sqrt{13} + \sqrt{13}\,(2)^{n+1}}$$

PROBLEME

I/. On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par $g_k(x) = -2x + 1 + 2x\ln(kx)$, k étant un paramètre réel non nul.

1) Déterminons, suivant les valeurs de k, l'ensemble de définition E_k de g_k :

$$E_k = \{x \in IR / kx > 0\}$$
$$kx = 0 \Rightarrow x = 0$$

* Pour $k < 0$, $E_k =]-\infty; 0[$
* Pour $k > 0$, $E_k =]0; +\infty[$

2) Calculons les limites de g_k aux bornes de E_k :

* pour $k < 0$. $E_k =]-\infty; 0[$

$$\lim_{x\to-\infty} g_k(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x + 1 + 2xln(kx) = \lim_{x\to-\infty} 2x(-1 - \frac{1}{2x} + ln(kx)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g_k(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty\,;\, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \; et \; \lim_{x\to-\infty} ln(kx) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g_k(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -2x + 1 + 2xln(kx)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \boldsymbol{g_k(x) = 1} \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x = 0\,; et \; \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} xln(kx) = 0$$

* pour $k > 0$. $E_k =]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x + 1 + 2xln(kx) = \lim_{x\to+\infty} x(-2 + \frac{1}{x} + 2ln(kx)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{g_k(x)} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,; et \; \lim_{x\to+\infty} ln(kx) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g_k(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} -2x + 1 + 2xln(kx)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \boldsymbol{g_k(x) = 1} \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0\,; et \; \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} xln(kx) = 0$$

3) Calculons la dérivée g_k' de g_k :

$$g_k'(x) = -2 + 2\left[ln(kx) + \frac{k}{kx}x\right] = -2 + 2[ln(kx) + 1],$$
$$= -2 + 2\,ln(kx) + 2$$
$$\boldsymbol{g_k'(x) = 2\,ln(kx)}$$

4) Etablissons le tableau de variation de g_k pour chaque cas :

$$g_k'(x) = 0 \Rightarrow 2\,ln(kx) = 0 \Rightarrow ln(kx) = 0 \Rightarrow kx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

* Pour $k < 0$, $E_k =]-\infty; 0[$

On a : $g_k\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{2}{k} + 1 + \frac{2}{k}ln(1) = -\frac{2}{k} + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		0
$g'_k(x)$		$+$	0	$-$	||
$g_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\left(\frac{-2+k}{k}\right)$	$\searrow$	1

* Pour $k > 0$, $E_k =]0; +\infty[$

On a :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g'_k(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g_k(x)$	|| 1	$\searrow$	$\left(\frac{-2+k}{k}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) a- Montrons que pour $k > 0$ et pour $x \in]0; +\infty[, gk(x) > 0$:

Pour $k > 0 \Rightarrow \frac{-2+k}{k} > 0$

Or $\forall\, x \in \left]0; \frac{1}{k}\right[, g_k(x) \in \left]\frac{-2+k}{k}; 1\right[\Rightarrow g_k(x) > 0$

et $\forall\, x \in \left]\frac{1}{k}; +\infty\right[, g_k(x) \in \left]\frac{-2+k}{k}; +\infty\right[\Rightarrow g_k(x) > 0$

D'où $\boldsymbol{gk(x) > 0, \forall\, x \in]0; +\infty[\text{ et } k > 2}$

b- Montrons que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution négative unique $\alpha_0 \in \left]-\infty; \frac{1}{k}\right[$:

g_k est continue et monotone sur chacun des intervalles $\left]-\infty; \frac{1}{k}\right[$, $\left]\frac{1}{k}; 0\right[$ et $g_k\left(\left]-\infty; \frac{1}{k}\right[\right) = \left]-\infty; \frac{-2+k}{k}\right[$ contenant 0

$g_k\left(\left]\frac{1}{k}; 0\right[\right) = \left]1; \frac{-2+k}{k}\right[$ ne contenant pas 0 $\left(k < 0 \Rightarrow \frac{-2+k}{k} > 0\right)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une solution unique $\alpha_0 \in \left]-\infty; \frac{1}{k}\right[$ telle que $g_k(\alpha_0) = 0$.

c- Montrons que pour $0 < k < 2$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives α_1 et α_2 :

$\forall\, 0 < k < 2,\ \frac{-2+k}{k} < 0$

g_k est continue et monotone sur chacun des intervalles $\left]0; \frac{1}{k}\right[$, $\left]\frac{1}{k}; +\infty\right[$ et $g_k\left(\left]0; \frac{1}{k}\right[\right) = \left]\frac{-2+k}{k}; 1\right[$ contenant 0

$$g_k\left(\left]\frac{1}{k}; +\infty\right[\right) = \left]\frac{-2+k}{k}; +\infty\right[\text{ contenant aussi } 0$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe deux réels $\alpha_1 \in \left]0; \frac{1}{k}\right[$ et $\alpha_2 \in \left]\frac{1}{k}; +\infty\right[$.

d- Etudions le signe de $g_2(x)$.

<u>A titre d'aide</u> : *remplacer k par 2 dans le tableau de variation pour $k > 0$*

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_k(x)$	1	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall\, x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[,\ g_2(x) \in\ ]0; 1[\ \Rightarrow g_2(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[,\ g_2(x) \in\ ]0; +\infty[\ \Rightarrow g_2(x) > 0$

Conclusion : $\forall\, x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, g_2(x) > 0 \text{ et } g_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

II/ Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x, définie par : $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln(kx)}{2x-1}, k \geq 2$

On désigne par (Ck), la représentation graphique de f_k .

1) Déterminons l'ensemble de définition Dk de la fonction f_k :

$$Dk = \{x \in IR \ /\ kx > 0 \text{ et } 2x - 1 \neq 0\}$$

$$kx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Or $k \geq 2 \Rightarrow k > 2$

Donc $\boldsymbol{Dk} =]\mathbf{0};+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]\mathbf{0};\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) a- Montrons que la fonction f_2 admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f_2(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{2} - \frac{ln\,(2x)}{2x - 1}$$

En posant $X = 2x$, $x \to \frac{1}{2} \Rightarrow X \to 1$

Donc on a :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{ln\,(2x)}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{ln\ X}{X - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}} f_2(x) = \frac{1}{2} - 1$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f_2(x) = -\frac{1}{2}\ \ or\ \ f_2\ n'estpas\ définie\ en \frac{1}{2}$$

D'où f_2 admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$.

N.B : l'élève peut aussi poser $h = 2x - 1 \Rightarrow 2x = h + 1$

Donc $x \to \frac{1}{2} \Rightarrow h \to 0$ On a :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{ln\,(2x)}{2x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{ln\,(h + 1)}{h} = 1$$

b- Calculons aux bornes de Dk les limites de f_k :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{k} - \frac{ln\,(kx)}{2x - 1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \boldsymbol{f_k(x)} = -\infty\ \ car\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} l\,n(kx) = -\infty\ et\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2x - 1 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \frac{1}{k} - \frac{ln\,(kx)}{2x - 1}$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \boldsymbol{f_k(x) = +\infty} \quad car \begin{cases} ln(kx) \to ln\left(\frac{k}{2}\right) > 0 \\ (2x-1) \to 0 \\ (2x-1) < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} \boldsymbol{f_k(x) = -\infty} \quad car \begin{cases} ln(kx) \to ln\left(\frac{k}{2}\right) > 0 \\ (2x-1) \to 0 \\ (2x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{k} - \frac{ln\,(kx)}{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{k} - \frac{ln\,(kx)}{2x}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \frac{1}{k}} \quad car \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(kx)}{2x} = 0$$

3) a- Calculons la fonction dérivée f_k' de f_k :

$$f_k'(x) = -\frac{\frac{k}{kx}(2x-1) - 2ln\,(kx)}{(2x-1)^2} = -\frac{2 - \frac{1}{x} - 2ln\,(kx)}{(2x-1)^2} = -\frac{2x - 1 - 2xln\,(kx)}{x(2x-1)^2}$$

$$\boldsymbol{f_k'(x) = \frac{-2x + 1 + 2xln\,(kx)}{x(2x-1)^2}} \quad d'où \ \boldsymbol{f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x(2x-1)^2}}$$

b- Etudions le sens de variation de f_k :

Le signe de $f_k'(x)$ dépende de celui de $g_k(x)$ $(k \geq 2)$ car $x(2x-1)^2 > 0 \ \forall\, x \in Dk$.

Or $\forall\, x \in Dk, g_k(x) > 0 \Longrightarrow f_k'(x) > 0$ donc f_k est strictement croissante sur D_k.

Dressons son tableau de variation pour $k = 2$:

$$D_2 = \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad et \ g_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f_2'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f_2(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Dressons son tableau de variation pour $k \neq 0$ $(k > 2)$:

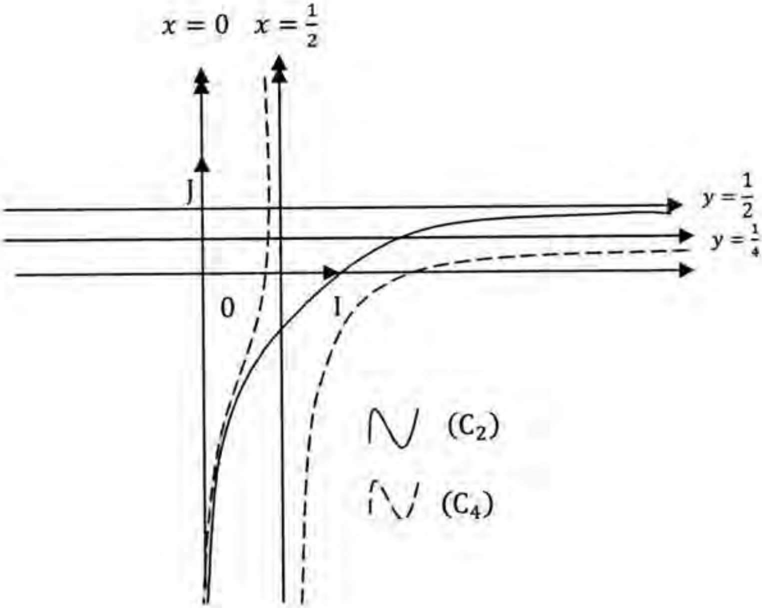
x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$+$	‖	$+$
$f_k(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{1}{k}$

4) Représentons (C_2) et (C_4) dans le même repère ;

Les asymptotes

$(C_2) \Rightarrow$ asymptote verticale: $x = 0$ et asymptote horizontale: $y = \dfrac{1}{2}$

$(C_4) \Rightarrow$ asymptote verticale: $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$ *et* asymptote horizontale: $y = \dfrac{1}{4}$



III/

1) a- A l'aide de f_2, montrons que : $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};\, +\infty\right[, 0 < lin2x < 2x - 1$:

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};\, +\infty\right[, -\frac{1}{2} < f_2(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{ln2x}{2x-1} < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -1 < -\frac{ln2x}{2x-1} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{ln2x}{2x-1} < 1 \Rightarrow \mathbf{0 < ln2x < 2x - 1}$$

b- Déduisons que : $\int_1^2 ln2xdx < 2$:

$0 < ln2x < 2x - 1 \Rightarrow 0 < \int_1^2 ln2xdx < \int_1^2 (2x-1)dx$

$\Rightarrow 0 < \int_1^2 ln2xdx < [x^2 - x]_1^2 \Rightarrow 0 < \int_1^2 ln2xdx < 4 - 2 - (1 - 1)$

$0 < \int_1^2 ln2xdx < 2$ D'où $\boldsymbol{\int_1^2 ln2xdx} < 2$

2) A l'aide du graphique de la partie II, montrons que $\frac{ln6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x)dx < \frac{2ln2}{3}$:

f_2 est continue et croissante sur $[2; 3]$. D'après la méthode des rectangles on a :

$$f_2(2) < \int_2^3 f_2(x)dx < f_2(3) \Rightarrow -f_2(3) < -\int_2^3 f_2(x)dx < -f_2(2)$$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2} - \frac{ln6}{5}\right) < -\int_2^3 f_2(x)dx < -\left(\frac{1}{2} - \frac{ln4}{3}\right)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{ln6}{5} < -\int_2^3 f_2(x)dx < -\frac{1}{2} - \frac{2ln2}{3}$$

$$\boldsymbol{\frac{ln6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x)dx < \frac{2ln2}{3}}$$

BACCALAUREAT 2016 - TOGO

Corrigé

Exercice 1 :

1) a- Montrons que $f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0;1]$:

Pour cela on va dériver $f(x)$.

* f est bien sur $[0;1]$.

* Dérivée :

$$f'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)'}{x + \sqrt{x^2+2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{f}$ ***est bien une primitive de*** $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$

b- Déduisons la valeur exacte de l'intégrale I :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \left[ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 \;;\; \boldsymbol{I = ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}$$

2) a- Sans calculer explicitement J et K, montrons que $\mathrm{K} = \mathrm{J} + 2\mathrm{I}$:

$$\mathrm{J} + 2\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2}^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \Rightarrow \mathrm{J} + 2\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx = K$$

$$\boldsymbol{donc\ K = J + 2I}$$

b- A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrons que $\mathrm{K} = \sqrt{3} - \mathrm{I}$:

Intégrons K :

$K = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right)dx$

$$\begin{cases} \mathrm{U}' = 1 \\ \mathrm{V} = \sqrt{x^2+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = x \\ V' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \end{cases}$$

$\left[K = x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \qquad \boldsymbol{x = \sqrt{3} - J}$

3) Déduisons les valeurs exactes de J et K :

On a : $\begin{cases} K - J = 2I \\ K + J = \sqrt{3} \end{cases}$

$$2K = 2I + \sqrt{3}$$

$$K = I + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{K = ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

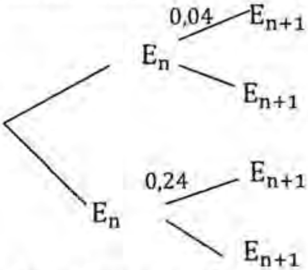
$\begin{cases} -K + J = -2I \\ K + J = \sqrt{3} \end{cases}$

$$2J = \sqrt{3} - 2I$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \Rightarrow \boldsymbol{J = \frac{\sqrt{3}}{2} - ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 2 :

1) Faisons rapidement un arbre de probabilité.



a- Donnons les valeurs numériques des probabilités :

$P(E_{n+1}/E_n) = 0{,}04 \quad ; \quad (E_{n+1}/\overline{E}_n) = 0{,}24$

b- Exprimons les probabilités des événements « E_{n+1} et E_n » et de « E_{n+1} et $\overline{E}_n$ » en fonction de P_n :

$P(\text{« } E_{n+1} \text{ et } E_n \text{ »}) = P(E_{n+1}/E_n).P(E_n)$

$\boldsymbol{P(\text{« } E_{n+1} \text{ et } E_n \text{ »}) = 0{,}04.P_n}$

$$P(« E_{n+1} \text{ et } \overline{E}_n ») = P(E_{n+1}/\overline{E}_n).P(\overline{E}_n) = 0{,}24.(1 - P(E_n))$$

$$\mathbf{P(« E_{n+1} \text{ et } \bar{E}_n ») = 0,24(1 - P_n)}$$

c- Utilisons les questions précédentes pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :$P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P$:

$$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \text{ et } E_n) + P(E_{n+1} \text{ et } \overline{E}_n)$$
$$= 0{,}04P_n + 0{,}24(1 - P_n)$$
$$\mathbf{P_{n+1} = 0,24 - 0,2P_n}$$

2) a- Résolvons l'équation :$P = 0{,}24 - 0{,}2P$:

$$P = 0{,}24 - 0{,}2P \Leftrightarrow P + 0{,}2P = 0{,}24$$
$$0{,}2P = 0{,}24 \Rightarrow \mathbf{P = 0,2}$$

b- Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = P_n - P$.
Calculons U_{n+1} en fonction de U_n :

$U_n = P_n - P$

$U_{n+1} = P_{n+1} - P \quad / \quad P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P_n$

$U_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P_n - P$

$U_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2 - 0{,}2P_n$

$= 0{,}04 - 0{,}2P_n = 0{,}2(0{,}2 - P_n) = -0{,}2(P_n - P)$

$$\mathbf{U_{n+1} = -0,2U_n}$$

(U_n) est alors une suite géométrique de raison $q = -0{,}2$ et de premier terme $U_1 = P_1 - P = -0{,}1$.

$U_n = U_1q^{n-1} \Rightarrow \mathbf{U_n = -,1(-0,2)^{n-1}}$

Expressions de P_n en fonction de n :

$U_n = P_n - P \Rightarrow P_n = U_n + P$

$\mathbf{P_n = 0,2 - 0,1(-0,2)^{n-1}}$

c- Montrons que la suite (P_n) est convergente et déterminons sa limite :

$$\lim_{n\to+1}(-0,2)^{n-1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty} P_n = 0,2$$

Problème

$$f_k :]0; +\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \longmapsto x - k - \frac{klnx}{x}$$

Partie A

1) k ∈ IN $g_k(x) = x^2 - k + klnx$.

a- Domaine de g_k:

* Si k = 0 $g_k(x) = x^2$
$Dg_0 = IR$

* Si k ≠ 0 $Dg_k =]0; +\infty[IR$

Dérivée de g_k $(k \neq 0)$

$$g'_k(x) = \frac{2x^2 - k}{x}$$

Signe de la dérivée :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'_k(x)$	‖ $\qquad$ +

Sens de variation

$\forall\ x \in]0; +\infty[$, g_k *est strictement croissante.*

Précisons ses limites en 0 et en $+\infty$: $(k \neq 0)$

Limite en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g_k(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x^2 - k + klnx)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g_k(x) = -\infty$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - k + klnx)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = +\infty$$

D'autre part pour k = 0 $g_0(x) = x^2$, g_0 *est décroissante sur* $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\lim_{x\to 0} g_0(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g_0(x) = +\infty$$

b- Montrons que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée α_k :

g_k étant strictement croissante, elle définie une bijection de $[1;3]$ dans $[1-k; 9-k+kln3] = J$

$1 \leq k$ car $1 \in IN^*$ donc $\mathbf{1-k \leq 0}$

$1-ln3 < 0$ $et \dfrac{9}{1-ln3} < 0$ $donc$ $\dfrac{9}{1-ln3} < k \Rightarrow \dfrac{-9}{-1+ln3} < k$

$\Rightarrow -9 < k(-1+ln3) \Rightarrow 0 < 9 + k(-1+ln3) \Rightarrow 0 < g_k(3)$

Alors il existe un unique élément $\alpha_k \in [1;3]$ tel que $g_k(\alpha_k) = 0$

g_k est définie et continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Elle définit une bijection de $]0; +\infty[$ dans IR.

On montre que $1-k \leq 0 \leq 9-k+kln3$

donc $g_k(1) \leq 0 \leq g_k(3)$

d'où il existe $\alpha_k \in [1;3]$ tel que $g_k(\alpha_k) = 0$ *comme* g_k *est bijective.*

Méthode 2

g_k est définie et continue sur $]0; +\infty[$; elle est strictement croissante.

$g_k(1) = 1-k \leq 0$

$g_k(3) = 9-k+kln3 \geq 0$

On a $g_k(1) \times g_k(3) \leq 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha_k \in [1;3]$ tel que $g_k(\alpha_k) = 0$.

2) Pour établir la relation $f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$, on va dériver $f_k(x)$.

$$f_k'(x) = \frac{x^2-k+klnx}{x^2} \Rightarrow \boldsymbol{f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}}$$

Etudions le signe de g_k :

g_k étant croissante et s'annulant en α_k on a :

x	0		α_k		$+\infty$
$\boldsymbol{g_k}(x)$	||	$-$	0	$+$	

Sens de variation de g_k :

$* \forall x \in]0; \alpha_k[$ $f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2} < 0$

f_k est donc décroissante sur $]0; \alpha_k[$.

$* \forall x \in]\alpha_k ; +\infty[\; f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2} > 0$

f_k est donc croissante sur $]\alpha_k ; +\infty[$

3) a- Etablissons les limites de f_k en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(x - k - \frac{k\ln x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(x - k - k.\frac{1}{x}.\ln x\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_k(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} x \to 0 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \\ \ln x \to -\infty \end{cases}$$

Etablissons les limites de f_k en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - k - k\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} x \to +\infty \\ \frac{\ln x}{x} \to 0 \end{cases}$$

b- Montrons que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k) :

$$\lim_{x \to +\infty} (f_k(x) - y) = \lim_{x \to +\infty} \left(-k\frac{\ln x}{x}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} (f_k(x) - y) = 0$; ceci prouve que (D_k) est asymptote à (C_k) .

c- Etudions la position de (C_k) par rapport à (D_k) :

x	0	1	$+\infty$
$k\frac{\ln x}{x}$	+		−
$f_k(x) - y$	+		−
position	(C_k) est au-dessus de (D_k)		(C_k) est au-dessuus de (D_k)

Partie B :

Etude des cas particuliers k = 1 et k = 2 :

1) Pour k = 1, on a :

$$g_1(x) = x^2 - 1 + lnx$$

$$g_1(1) = 1 - 1 + 0 \Rightarrow \boldsymbol{g_1(1) = 0} \quad d'où \quad \boldsymbol{\alpha_1 = 1}$$

Pour k = 2, on a :

$$g_2(x) = x^2 - 2 + 2lnx$$

On vérifie que

$g_2(1,2) < 0$ *et* $g_2(1,3) > 0$ *d'où on déduit que* $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2) a- Montrons que $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$.

On a : $g_2(\alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2^2 - 2 + 2ln\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2^2 - 2 = -2ln\alpha_2$

$$\Rightarrow -ln\alpha_2 = \frac{\alpha_2^2 - 2}{2}$$

On a : $f_2(\alpha_2) = \alpha_2 - 2 - 2\frac{ln\alpha_2}{\alpha_2} = \alpha_2 - 2 + \frac{2}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2^2-2}{2}\right)$

$$= \alpha_2 - 2 + \left(\frac{\alpha_2^2 - 2}{\alpha_2}\right) = \alpha_2 - 2 + \left(\alpha_2 - \frac{2}{\alpha_2}\right)$$

$$\boldsymbol{f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}}$$

b- Donnons un encadrement de $f_2(\alpha_2)$:

on a : $1,2 < \alpha_2 < 1,3$

$$\frac{1}{1,2} < \frac{1}{\alpha_2} < \frac{1}{1,3} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2}{1,2} < \frac{-2}{\alpha_2} < \frac{-2}{1,3}$$

$$-2 - \frac{2}{1,2} < -2 - \frac{2}{\alpha_2} < -2 - \frac{2}{1,3}$$

$$-3,67 < -2 - \frac{2}{\alpha_2} < -3,59$$

$$et \;\; 2,4 < 2\alpha_2 < 2,6$$

$$-1,27 < 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2} < -0,99$$

$\boldsymbol{-1,27 < f_2(\alpha_2)} < -0,99$

3) Donnons les tableaux de variation de f_1 et f_2 :

Tableaux de variation de f_1 :

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableaux de variation de f_2 :

x	0	$1,2$	α_2	$1,3$	$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f_2(\alpha_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Représentons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2).*(voir la dernière page)*

5) Calculons en cm^2, la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1,\ x = 2\ \ et\ \ y = x - 1$:

Soit $I = \int_1^2 \left(y - f_1(x)\right)dx \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{lnx}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x} lnx dx$

$I = \left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_1^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{2}(lnx)^2$

L'aire est donnée par $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(ln2)^2.4\ cm^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = 0,96\ cm^2}$$

Partie C :

1) Calculons $f_{k+1}(x) - f_k(x)$:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = x - (k+1) - (k+1)\frac{lnx}{x} - x + k + \frac{klnx}{x}$$

$$\boldsymbol{f_{k+1}(x) - f_k(x) = -1 - \frac{lnx}{x}}$$

Calculons la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f_{k+1}(x) - f_k(x) = -1$$

2) Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $h(x) = 1 + \frac{lnx}{x}$:

a- Etablissons le sens de variation de h :

Domaine de définition de h : $Dh =]0;\ +\infty[$

Dérivée de h : $h'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$

Signe de $h'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	

Sens de variation de h :

$\forall\, x\ \in]0; e[, h\ est\ croissante$

$\forall\, x\ \in]e;\ +\infty[, h\ est\ décroissante$

Calculons les limites de h en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{lnx}{x}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{1}{x} lnx\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} x \to 0 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \\ lnx \to -\infty \end{cases}$$

Etablissons les limites de h en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} lnx\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$$

Tableau de variation de h :

x	0		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{e}$	$\searrow$	1

$*\,\forall\, x \in [e;\ +\infty[\ h(x) < 0\ \ donc\ \ pas\ de\ racine.$

* h définie et croissante sur $]0;e[$ puis strictement croissante alors elle définie une bijection de $]0;e[$ dans $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right[$

Puisque $0 \in]-\infty;1[$ alors il existe $\beta \in]0;\ 1[$ tel que $h(\beta)=0$

β est alors l'unique valeur ($\beta \in]0;1[$) tel que $h(\beta)=0$

b- Déduisons que $h(x)=0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0;1[$:

h est définie continue et croissante strictement de $]0;1[$ sur $]-\infty;1[$. Elle définie ainsi une bijection de $]0;1[$ sur $]-\infty;1[$.

$0 \in]-\infty;1[$ alors il existe $\beta \in]0;1[$ tel que $h(\beta)=0$.

c - Montrons que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta)=\beta$:

$$f_k(x) = x - k - \frac{klnx}{x} = x - k\left(1+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$f_k(x) = x - kh(x)\ d'où\ \ f_k(\beta) = \beta\ - kh(\beta) or\ h(\beta) = 0$$

$$\boldsymbol{f_k(\beta) = \beta}$$

3) a- Puisque $\forall\ x \neq 0,\ \ f_k(\beta)=\beta$ alors toutes les courbes passent par le point invariant $(\beta;\ \beta)$.

D'après la question 1) $f_{k+1}(x) - f_k(x) = -h(x)$. Or h ne s'annule qu'en un seul point ($h(\beta)=0$).

b- Préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et de (C_k) :

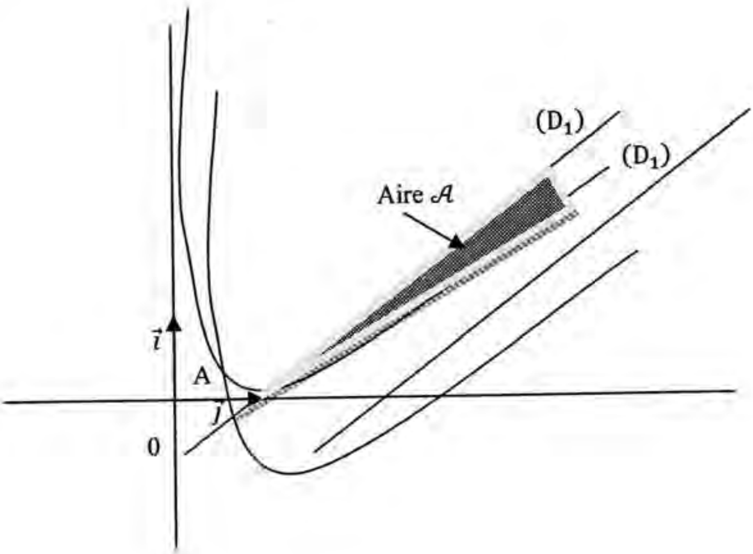
D'après 2)

x	0		e		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On a : $f_{k+1}(x) - f_k(x) = -h(x)$.

x	0		e		$+\infty$
$-h(x)$	‖	$+$	0	$-$	
position	‖	(C_{k+1}) $/(C_k)$		(C_k) $/(C_k)$	

Représentation graphique



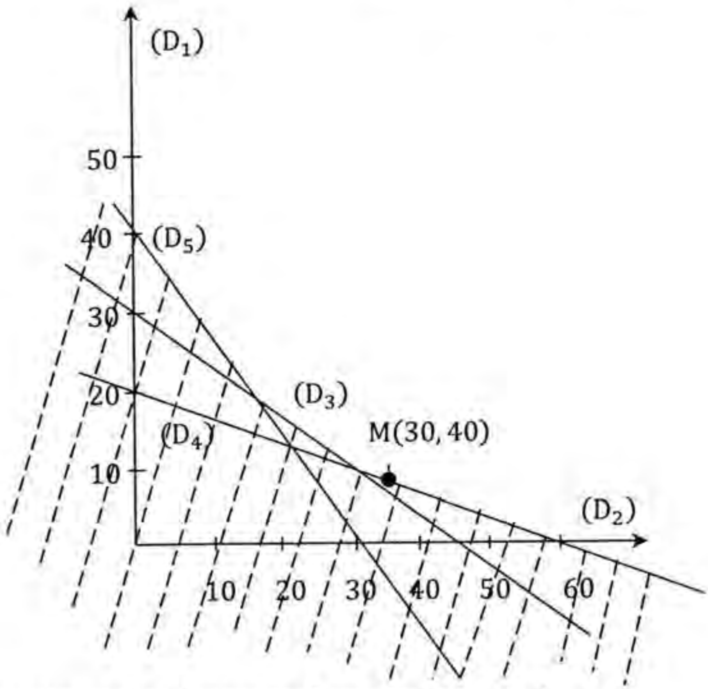
BACCALAUREAT 2017 - TOGO

Corrigé

Exercice 1 :

1) Représentation graphique de G :

$$(\Sigma)\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \left| \begin{array}{l} (D_1) : x = 0 \\ (D_2) : y = 0 \\ (D_3) : 2x + 3y = 90 \\ (D_4) : x + 3y = 60 \\ (D_5) : 4x + 3y = 120 \end{array} \right.$$



2) a- Exprimons la dépense en francs en fonction de x et y :

Soit m cette dépense. On a :

$$\boldsymbol{m = 200x + 400y}$$

b- Justifions que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge :

Pour renouveler le linge, x et y doivent satisfaire au système :

$$(Z)\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ 4x + 12y \geq 240 \\ 8x + 6y \geq 240 \end{cases}$$

Or ce système équivaut à $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$ lequel est (Σ)

Donc (Z) est le système lié au renouvellement du linge.

c- Vérifions si les achats sont possibles avec 5.000 F :

Posons $m = 5.000$. On a :

$$200x + 400y = 5000 \Leftrightarrow x + 2y = 25$$

Désignons par (D_{5000}) la droite d'équation : $x + 2y = 25$.

Graphiquement $(D_{5000}) \cap G = \emptyset$ donc avec 5.000 F, il est impossible de procéder aux achats nécessaires.

d- Déterminons le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale :

Désignons par (D_m) la droite d'équation : $200x + 400y = m$.

Cette dépense minimale est obtenue dès que $(D_m) \cap G = \{M\}$ avec l'ordonnée y de M la plus petite possible. En faisant varier m, on a : $M(30; 10)$. Ainsi la dépense minimale est : $m_{min} = 30 \times 200 + 10 \times 400$ soit 10.000 F

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $A(a = 2)$, $B(b - 3 + i\sqrt{3})$ et $C(c = 2i\sqrt{3})$.

1) a- Calculons $\frac{a-b}{c-b}$ et nature de ABC :

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{2-3-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}(-1-i\sqrt{3})}=\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

$\frac{a-b}{c-b} \in$ IR* d'où ABC est un triangle rectangle en B.

b- Déterminons l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC :

ABC étant un triangle rectangle en B, Ω est le milieu de [AC] donc :

$$z_\Omega=\frac{a+c}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1+i\sqrt{3}}$$

2) On note $(z_n)_{n\in IN}$, la suite de nombres complexes de premier terme $z_0=0$ et A_n, le point d'affixe z_n telle que :

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2$$

a- Déterminons les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1=A$ et $A_2=B$:

$$z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+i\sqrt{3})+2$$

$$z_3=2+2i\sqrt{3} \quad donc \quad \mathbf{A_3(2+2i\sqrt{3})}$$

$$z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(2+2i\sqrt{3})+2$$

$$z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+2=2i\sqrt{3} \quad donc \quad \mathbf{A_4(2i\sqrt{3})}$$

b- Comparons les longueurs des segments :

$[A_1A_2]=|3+i\sqrt{3}-2|=|1+i\sqrt{3}|=2$

$[A_2A_3]=|2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}|=|-1+i\sqrt{3}|=2$

$$[A_3A_4]=|2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}|=|-2|=2$$

On conclut que les segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ sont de même longueur.

c- $\omega = 1 + i\sqrt{3}$. Etablissons que pour tout entier naturel n, on a :
$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$:

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3}$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + 2 \text{ x} \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right] = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + 2 \text{ x} \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n - \left(1+i\sqrt{3}\right)\right]$$

Or $z_n - \left(1 + i\sqrt{3}\right) = z_n - \omega$ donc

$$\boldsymbol{z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)}$$

d- Déduisons que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$$

$$z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$$

Donc A_{n+1} est l'image de A_n par la rotation de centre $\Omega\,(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

e- Justifions que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$:
D'après 2) d, on a :

$$z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$$

Comme $A_n \neq \Omega$, on obtient par récurrence que $z_n \neq \omega$

Donc $z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$

$$z_{n+2} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+1} - \omega)$$

$$\vdots$$

$$z_{n+6} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+5} - \omega)$$

Après multiplication membre à membre et simplification, on obtient $z_{n+6} - \omega = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 (z_n - \omega\ )$

$$= e^{i2\pi}\ (z_n - \omega\ )$$

Or $e^{i2\pi} = 1$ donc $z_{n+6} - \omega = z_n - \omega$

D'où $\boldsymbol{z_{n+6} = z_n \Rightarrow A_{n+6} = A_n}$

Autre méthode :

Désignons par R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a d'après 2) d) :

$$A_{n+6} = R(A_{n+5}) = R_0R(A_{n+4})$$
$$= R_0R_0R(A_{n+3}) = - - - = R_0R_0R_0R_0R_0R(A_n)$$
$$A_{n+6} = R^6(A_n)$$

Or R^6 est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$, *donc* $R^6 =$ est une application identique. D'où $\boldsymbol{A_{n+6} = A_n}$

Déterminons l'affixe du point A_{2017} :

On a $2017 = 1 + 2016$ *donc* $A_{2017} = A_1$ *d'où* $\boldsymbol{z_{2017} = 2}$

3) a- Démontrons que $\forall\, n \in IN;\ \ z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$:

Soit h cette proposition :

On a : $z_1 - z_0 = 2 = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^0 = 2$; donc la proposition est vraie au premier rang.

Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est aussi vraie : on a :

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_{n+1} + 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n - 2$$

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_{n+1} - z_n) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$$

$$Donc\ \ z_{n+2} - z_{n+1} = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

P_{n+1} est vraie. Par conséquent, $\forall n \in IN, z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Autre méthode :

$\forall n \in IN\,;\ z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_{n+1} - z_n)$

Donc $z_2 - z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_1 - z_0)$

$z_3 - z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_2 - z_1)$

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - z_{n-1})$$

Après multiplication membre à membre, on obtient :

$z_{n+1} - z_n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_1 - z_0)$ et $z_n = 0\ \ et\ z_1 = 2\ \ donc$

$$z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

b- Déterminons, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$:

$\forall n \in IN\,;\ A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

$$= \left|2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right| = 2\,\mathrm{x}\,\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|^n = 2\,\mathrm{x}\,1^n$$

$$A_nA_{n+1} = 2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2$$

Donc $\forall n \in IN\,;\ \boldsymbol{A_nA_{n+1} = 2}$

Problème :

Partie A

$g(x) = x^2 + lnx$, pour $x \in]0, +\infty[$.

1) Etudions le sens de variation de g :

, $\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ *donc* $g'(x) > 0$ *et* g *est* .
strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(x^2 + lnx) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 + lnx) = +\infty$$

Dressons son tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2) a- Montrons qu'il existe un nombre réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$:

D'après 1, g est continue et strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$.
Comme $g(\alpha) = 0 =]-\infty;\ +\infty[$ et contient 0 alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

Vérifions que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$:

On a : $g(0{,}65) \times g(0{,}66) = 0{,}28 \times 02$

$$g(0{,}65) \times g(0{,}66) < 0$$

Donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

b- Déduisons le signe de $g(x)$:

Comme g est continue et strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$ et que $g(\alpha) = 0$ alors : $\boldsymbol{g(x) < 0}$ **pour** $\boldsymbol{x \in]0,\ \alpha[}$ et

$\boldsymbol{g(x) > 0}$ **pour** $\boldsymbol{x \in]\alpha,\ +\infty[}$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculons $\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx$:

$$\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} (x^2 + lnx)dx = \int_{e^{-1}}^{1} x^2\, dx + \int_{e^{-1}}^{1} lnx\, dx$$

$$\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx = \left[\frac{1}{x}x^3\right]_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} lnx\, dx$$

$$= \frac{1}{3}(1 - e^{-3}) + \int_{e^{-1}}^{1} lnx\, dx$$

Désignons par $K = \int_{e^{-1}}^{1} lnx\, dx$ *puis procédons par partie*:

$$Posons \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = lnx \end{cases} \text{on a:} \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$Ainsi\ K = [xlnx]_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx = [xlnx]_{e^{-1}}^{1} - [x]_{e^{-1}}^{1}$$

$$K = [xlnx]_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx = [xln(x) - x]_{e^{-1}}^{1} = 2e^{-1} - 1$$

Par suite : $\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx = \frac{1}{3}(1 - e^{-3}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-3}) + 2e^{-1} - 1$

$$\boldsymbol{Donc} \quad \int_{e^{-1}}^{1} \boldsymbol{g(x)dx = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-3} + 2e^{-1}}$$

Partie B

$$f(x) = 1 - x + \frac{1 + lnx}{x}$$

1)a − Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis en donnons une interprétation:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - x + \frac{1 + lnx}{x}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - x + (1 + lnx)\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty \text{ car } \begin{cases} 1 - x \to 1 \\ 1 + lnx \to -\infty \\ \dfrac{1}{x} \to +\infty \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

b- Calculons la limite de $f\ en\ +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = -\infty \text{ car } \begin{cases} 1 - x \to -\infty \\ \dfrac{1}{x} \to 0 \\ \dfrac{lnx}{x} \to 0 \end{cases}$$

c- Montrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right) = 0 \ car \begin{cases} \frac{1}{x} \to 0 \\ \frac{lnx}{x} \to 0 \end{cases}$$

Donc la droite (D) ; $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Etudions la position de (C) par rapport à (D) :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1+lnx}{x}$$

$$1 + lnx \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
x	||	$+$	$+$
$1+lnx$	||	$-$	$+$
$f(x)-(-x+1)$	||	$-$	$+$

Donc la courbe (C) est en dessous de (D) sur $]0, e^{-1}[$; au dessus de (D) sur $]e^{-1}; +\infty[$ et coupe (D) au point d'abscisse e^{-1}.

2) Etudions les variations de f:

$\forall x > 0 : f'(x) = -1 + \frac{1-(1+lnx)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - lnx}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $f'(x)$ a le signe de $-g(x)$

$\forall x \in]0; \alpha] f'(x) \geq 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$.

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||		$f(\alpha)$		
	||	$\nearrow$		$\searrow$	
	|| $-\infty$				$-\infty$

3) a- Montrons que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$:

$$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1 + ln\alpha}{\alpha}$$

D'après A/2) $g(\alpha) = 0$ donne $ln\alpha + \alpha^2 = 0 \Longrightarrow ln\alpha = -\alpha^2$

donc $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{\alpha}$ $d'où$ $\boldsymbol{f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}}$

b- Montrons que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$:

$\forall x \in]0; +\infty[,\ h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[$ h *est dérivable et nous avons*:

$$\boldsymbol{h'(x) = -2 - \frac{1}{x^2}}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h décroît strictement sur $]0; +\infty[$.

c- Déduisons que $f(\alpha) < h(0{,}65)$:

comme h est décroissante sur $]0; +\infty[$, et que $\alpha > 0{,}65$ alors $f(\alpha) < h(0{,}65)$.

or $h(\alpha) = f(\alpha)$ donc $\boldsymbol{f(\alpha) < h(0,65)}$

d- Montrons que $f(\alpha) > f(0{,}65)$:

sur $]0; \alpha]$, f est strictement croissante. Comme $\alpha > 0{,}65$ alors $\boldsymbol{f(\alpha)} > f(0{,}65)$

e- Déduisons un encadrement de $f(\alpha)$ à 2.10^{-2} près :

De 3)c) et 3)d), on obtient $f(0{,}65) < f(\alpha) < h(0{,}65)$

Or $f(0{,}65) \geq 1{,}22$ et $h(0{,}65) \leq 1{,}24$ donc $\boldsymbol{1{,}22 \leq f(\alpha) \leq 1,24}$

4) Calculons les coordonnées du point A :

Posons $f'(x) = -1$ et on a : $\frac{-x^2 - lnx}{x^2} = -1$

soit $-lnx = 0$ *donc* $x = 1$; $f(1) = 1$

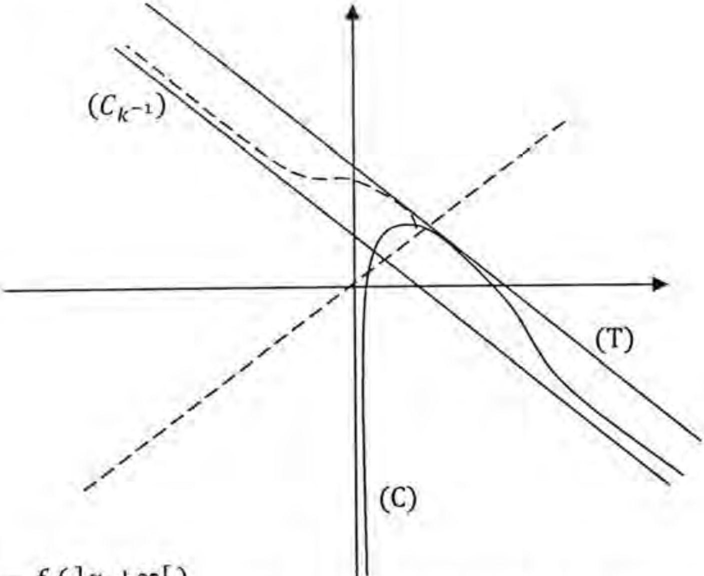
$$donc \quad \boldsymbol{A\binom{1}{1}}$$

Donnons une équation de cette tangente (T) :

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\boldsymbol{(T): y = -x + 2}$$

5) Traçons (D), (T) et (C).



6) $k = f\,(\,]\alpha, +\infty[\,)$.

a- Montrons que k définit une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur un intervalle à préciser :

Sur $[\alpha; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, donc k est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle est donc une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur $k\,(\,]\alpha, +\infty[\,)\ avec$

$k\,(\,]\alpha, +\infty[\,) = f\,(\,]\alpha, +\infty[\,) = \left]-\infty; 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right[$

b- Précisons l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1}:

k^{-1} est dérivable sur $\left]-\infty; 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right[$

Justifions : Sur $[\alpha; +\infty[$, f est dérivable et $f'(\alpha) = 0$; donc k est dérivable sur $[\alpha; +\infty[$ et $k'(x) \neq 0\ \forall\ x \in [\alpha; +\infty[$ alors k^{-1} est dérivable sur $\left]-\infty; 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right[$.

c- Donnons le sens de variation de k^{-1} :

comme k est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, il en est de même de k^{-1} sur $\left]-\infty; 1-2\alpha+\frac{1}{\alpha}\right[$.

Dressons son tableau de variation :

x	$-\infty$	$1-2\alpha+\frac{1}{\alpha}$
$(k^{-1})'(x)$	$-$	
$(k^{-1})(x)$	$+\infty$ ↘ α	

d- Calculons le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$:

$(k^{-1})'(1) = \frac{1}{k'[k^{-1}(1)]} = \frac{1}{k'(1)}$

$$(k^{-1})'(1) = \frac{1}{-1} = -1$$

e- Tracer la courbe $C_{k^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

BACCALAUREAT 2018 - TOGO

Corrigé

Exercice 1 :

1) a- Résolvons dans ℂ l'équation (E) : $Z^2 + 2Z + 2 = 0$:

(E) : $Z^2 + 2Z + 2 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$

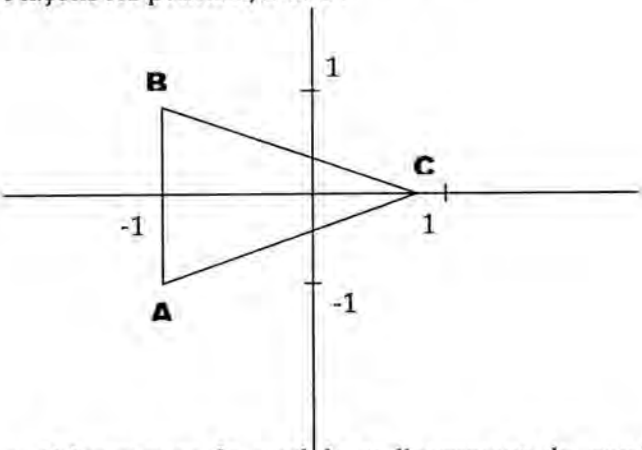
$$Z_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$$

$$Z_2 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

$$\mathbf{S = \{-1 - i;\ -1 - i\}}$$

b- $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(z_3 = \sqrt{3} - 1)$.

Plaçons les points A, B et C :



c- Déterminons le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$:

$$z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\sqrt{3} - 1 - (-1 - i)}{-1 + i - (-1 - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} \Rightarrow Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$* \ |Z| = \frac{\left|1 - i\sqrt{3}\right|}{2} = 1$$

$*\ \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{Arg(z)} = -\frac{\pi}{3}$

d- Déduisons la nature du triangle ABC :

$$|Z| = \frac{AC}{AB} = 1 \ et \ \mathrm{Arg(z)} = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -\frac{\pi}{3}$$

Donc le triangle ABC est un triangle équilatéral direct.

2) Trouvons les fonctions numériques f :

$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

* Equation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

D'après ce qui précède :

$$r_1 = -1 - i \ et \ r_2 = -1 + i$$

$$d'où \quad \boldsymbol{f(x) = e^{-x}(Acosx + Bsinx); (AB) \in IR^2}$$

3) On considère l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b \ et \ c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a- On suppose que $b = c = 2a \ avec \ a \ non \ nul.$

On a alors $ay'' + 2ay' + 2ay = 0$

$\Rightarrow y'' + 2y' + 2y = 0$

De la question (2), les fonctions $x \longmapsto (Acosx + Bsinx)e^{-x}$ sont solutions de (I). On conclut alors que f est solution de (I).

b- Déterminons l'ensemble des triplets (a, b, c) pour que F soient solutions de (I).

f est solution de (I) ssi $b = c = 2a$

Or $(a, b, c) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\Rightarrow 2a \leq 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1; \ b = 2; \ c = 2 \\ a = 2; \ b = 4; \ c = 4 \\ a = 3; \ b = 6; \ c = 6 \end{cases}$$

$$\mathrm{D'où} \ \{(1; 2; 2); \ (2; 4; 4); (3; 6; 6)\}$$

c- Montrons que la probabilité d'avoir le triplet (1, 2, 2) est $\frac{1}{216}$:

Soit A l'évènement « Avoir le triplet (1, 2, 2) ».

Toutes les boules ont le même probabilité d'être tirées ; soit $\frac{1}{6}$ (6 numéros).

Donc on a : $p(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ D'où $\mathbf{p(A) = \frac{1}{216}}$

4) Déterminons la probabilité pour que f soit solution de (I) :

On a 3 triplets répondant à cette question.

Donc on a : $p(F) = 3 \times \frac{1}{216}$ si F est l'évènement associé.

$\Rightarrow$: $\mathbf{p(F) = 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{72}}$

Exercice 2 :

$I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}du.$

1) a- Démontrons que $\forall\, n \in IN,\ I_n \geq 0$:

$$u \in [0,1] \Rightarrow 1-u \geq 0 \ \ et\ \sqrt{u} \geq 0$$

Donc $(1-u)^n\sqrt{u} \geq 0$ $D'où$ $\forall\, n \in IN,\ I_n \geq 0$

b- Démontrons que $\forall\, n \in IN,\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^n\, u^{3/2}du$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^{n+1}\sqrt{u}du - \int_0^1 (1-u)^n\sqrt{u}du$$

$$= \int_0^1 (1-u)^n\,(1-u-1)\sqrt{u}du$$

$$= -\int_0^1 (1-u)^n\, u\sqrt{u}du$$

Or $\sqrt{u} = u^{1/2} \Rightarrow u\sqrt{u} = u^{3/2}$

D'où $\boldsymbol{I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 (1-u)^n\, u^{3/2}du}$

Déduisons le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in IN}$:

$(1-u)^n\, u^{3/2} \geq 0$; $\forall\, n \in IN;$ $où$ $\forall\, u \in [0;1]$.

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$ car $-(1-u)^n\, u^{3/2} \leq 0$

D'où (I_n) est décroissante.

2) Montrons que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est convergente :

(I_n) étant décroissante et minorée donc elle est convergente.

3) a- Vérifions que la dérivée de la fonction $u \mapsto u^{3/2}$ sur $[0;1]$ est la fonction $u \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{u}$:

Soit $h(u) = u^{3/2}$

$$h'(x) = \frac{3}{2} \times u^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}u^{1/2} \quad or \quad u^{1/2} = \sqrt{u}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{u}$$

D'où la dérivée de la fonction $u \longmapsto u^{3/2}$ sur $[0; 1]$ est la fonction $u \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{u}$.

b- Calculons I_0 et I_1 :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{u}du$$

Or $\frac{3}{2}\sqrt{u}$ est la dérivée de $u^{3/2}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}u^{3/2}$ est la primitive $\sqrt{u}$.

$$\Rightarrow I_0 = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad d'où \quad \boldsymbol{I_0 = \frac{2}{3}}$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}du$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}du - \int_0^1 u\sqrt{u}du = I_0 - \int_0^1 u^{3/2}du$$

$$= I_0 - \left[\frac{2}{3}u^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \Rightarrow \boldsymbol{I_1 = \frac{4}{15}}$$

c- Démontrons que $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$

On a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^n u^{\frac{3}{2}} du$

Posons :

$$t' = -(1-u)^n \Rightarrow t = \frac{1}{n+1}(1-u)^{n+1}$$

$$v = u^{3/2} \Rightarrow v' = 3/2\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \left[\frac{1}{n+1}u^{3/2}(1-u)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2(n+1)}(1-u)^{n+1}\sqrt{u}du$$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = -\frac{3}{2n+2}\int_0^1 (1-u)^{n+1}\sqrt{u}du$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{3}{2n+2} I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{3}{2n+2} I_{n+1} + I_{n+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}}$$

4) a- Déduisons l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n :

$$I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1} I_{n-2}$$

$$I_{n-2} = \frac{2n-4}{2n-1} I_{n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$I_3 = \frac{6}{9} I_2$$

$$I_2 = \frac{4}{7} I_1$$

$$I_1 = \frac{2}{5} I_0$$

En multipliant membre à membre et en simplifiant on a :

$$I_n = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \frac{8}{11} \times --- \times \frac{2n}{2n+3} \times I_0$$

$$I_n = \frac{2^n (1 \times 2 \times 3 \times --- \times n)}{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times --- \times (2n+3)} \times I_0$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^{n+1} (1 \times 2 \times 3 \times --- \times n)}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times --- \times (2n+3)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_n = \frac{2 \times n\,!}{(2n+3)\,!}}$$

b- Calculons I_4 :

$$I_n = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \frac{8}{11} \times --- \times \frac{2n}{2n+3} \times I_0$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \frac{8}{11} \times I_0 \Rightarrow \boldsymbol{I_4 = \frac{256}{3465}}$$

Problème :

Partie A

$g(x) = (x-1)e^{x-1} - 1.$

1) a- Justifions que la limite de g en $-\infty$ est -1 :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} - 1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1} \ car \ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

b- Déterminons la limite de g en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{x-1} - 1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty} \ car \ \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$$

2) a- Démontrons que $\forall x \in IR$, on a $g'(x) = xe^{x-1}$:

g est dérivable sur IR.

$$g'(x) = e^{x-1} + e^{x-1}(n-1) = (n-1+1)e^{x-1}$$

Donc $\boldsymbol{g'(x) = xe^{x-1}}$.

b- Etudions le sens de variation de g :

$\forall x \in IR, e^{x-1} > 0$ *donc* $g'(x)$*est du signe de* x.

* $\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

* $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de g:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

3) a- Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left]\frac{3}{2};2\right[$:

D'après le tableau de variation, g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc sur $\left]\frac{3}{2};2\right[$.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}18 \quad et\; g(2) = 1{,}72$$

Comme $g\left(\frac{3}{2}\right) \times g(2) < 0$ d'où $\alpha \in \left]\frac{3}{2};2\right[$.

b- Vérifions que $\alpha \in]1{,}56;\ 1{,}57[$:

$$]1{,}56;\ 1{,}57[\ \in \left]\frac{3}{2};2\right[$$

$$g(1{,}56) = -0{,}0196 \quad et\; g(1{,}57) = 0{,}5079$$

$$g(1{,}56) \times g(1{,}57) =< 0 \;\; donc\; \alpha \in]1{,}56;\ 1{,}57[.$$

Partie B

$f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1.$

1) Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-2)e^{x-1} - x + 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-2)e^{x-1} - x + 1$$

$$= \lim_{\to +\infty} x\left(\left(1 - \frac{2}{x}\right)e^{x-1} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

2) a- Démontrons que f est une primitive de g sur IR :

f est dérivable sur IR.

$$f'(x) = e^{x-1} + e^{x-1}(x-2) - 1 = (x-1)e^{x-1} - 1$$

$\boldsymbol{f'(x) = g(x)}$ d'où f est une primitive de g .

b- Etudions le sens de variation de f :

$f'(x) est\ du\ signe\ de\ g(x)$.

* $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

* $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a- Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x + 1) = \lim_{x \to -\infty} (x - 2)e^{x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x + 1) = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

b- Etudions les positions relatives de (C) et (D) :

$\Rightarrow$ signe de $f(x) - (-x + 1) = (x - 2)e^{x-1}$

$$(x - 2)e^{x-1} = 0 \Rightarrow x = 2\ car\ e^{x-1} \neq 0\ \forall\, x \in IR$$

* $\forall\, x \in]-\infty; 2[\ \ f(x) - (-x + 1) < 0\ donc\ (C)\ est\ en\ dessous$ de (D).

* $\forall\, x \in]2; +\infty[\ \ f(x) - (-x + 1) > 0\ donc\ (C)\ est\ au\ dessus$ de (D).

$x = 2, f(x) - (-x + 1) = 0\ donc\ (C)\ et\ (D) se\ coupent\ en\ x = 2$

4) Démontrons que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x - 2)e^{x-1} - x + 1}{x}$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{x-1} - 1 + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

D'où (C) admet une branche parabolique de direction la droite des ordonnées en $+\infty$.

5) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = -1$:

(T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$\boldsymbol{(T): y = \left(-2e^{-2} - 1\right)x + 1 - 5e^{-2}}$$

6) Démontrons que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$

On a : $f(\alpha) = (\alpha - 2)e^{\alpha-1} - \alpha + 1$

Or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1}$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha-2}{\alpha-1} - \alpha - 1 \text{ } d'où \text{ } \boldsymbol{f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}}$$

7) Montrons que $f(\alpha)$ est négatif :

$$f(\alpha) = -\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 3}{\alpha - 1}$$

Or $\alpha \in]1{,}56; 1{,}57[\Rightarrow \boldsymbol{\alpha - 1} > 0$

$$-\alpha^2 + 3\alpha - 3 = 0$$

$$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 3 < 0 \text{ } d'où \text{ } \boldsymbol{f(\alpha)} < 0$$

8) Déduisons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives :

* f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$

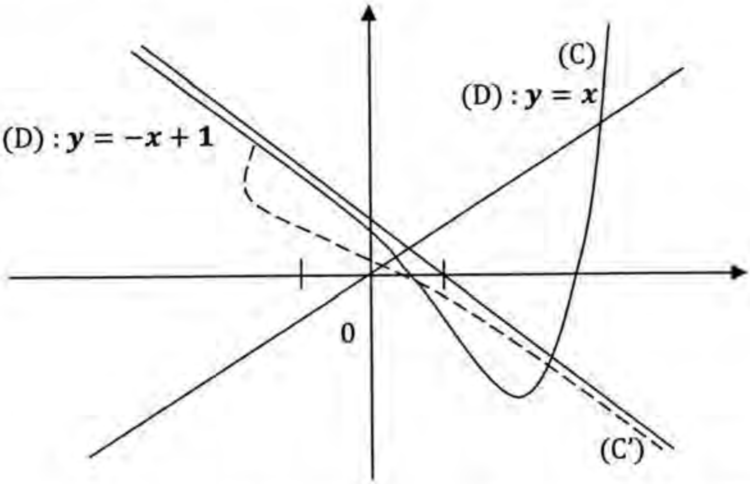
$f(]-\infty; \alpha[) =]f(\alpha); +\infty[$ contenant 0, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_1 \in]-\infty; \alpha[$. En outre $f(0) > 0$ donc $x_1 > 0$.

* f est continue et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

$f(]\alpha; +\infty[) =]f(\alpha); +\infty[$ contenant 0, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_2 \in]\alpha; +\infty[$. En outre $f(0) > 0$ donc $x_2 > 0$.

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives x_1 et x_2.

9) Traçons (D), (T) et (C) :



10) $\lambda \in]-\infty, 2[$ et A(λ) l'aire du domaine délimitée par (C), (D) et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 2$.

a- A l'aide d'une intégration par parties, calculons A(λ) :

(C) est en dessous de (D) sur $]-\infty, 2[$ donc $-x + 1 - f(x) > 0$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{3}(-x + 1 - f(x))dx \times ua$$

$$= \int_{\lambda}^{2} -(x-2)e^{x-1}dx \times ua$$

Ici $ua = 4\,cm^2$ (unité d'aire).

Posons $u = -x + 2 \Rightarrow u' = -1$

$$v' = e^{x-1} \Rightarrow v = e^{x-1}$$

$$A(\lambda) = \left[\left([(-x+2)e^{x-1}]_{\lambda}^{2} - \int_{\lambda}^{2} -e^{x-1}dx\right) \times ua\right]$$

$$= [(-x+2)e^{x-1} + e^{x-1}]_{\lambda}^{2} \times ua$$

$$= \left(e + (\lambda - 3)\right)e^{\lambda-1} \times 4\,cm^2$$

$$\mathbf{A(\lambda) = 4\left(e + (\lambda - 3)\right)e^{\lambda-1}\ cm^2}$$

b- Déterminons la limite de A(λ) lorsque λ tend vers $-\infty$:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(4\left(e + (\lambda - 3)\right)e^{\lambda-1}\right)$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 4e \quad car \quad \lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = (\lambda - 3)e^{\lambda-1} = 0$$

Partie C

h est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ \alpha[$.

1) Démontrons que h est une bijection sur J à préciser :

h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;\ \alpha[$, donc elle réalise une bijection de $]-\infty;\ \alpha[$ sur $J =]h(x);\ +\infty[= \left]2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1};\ +\infty\right[$.

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

a- Précisons l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} :

h' s'annule en α donc h^{-1} n'est pas dérivable en $f(\alpha)$ et $\forall\, x\, \alpha]-\infty;\ \alpha[; h'(x) \neq 0$. Donc h^{-1} est dérivable sur J.

Dressons son tableau de variation :

- Sens de variation de h^{-1} :

h^{-1} a le meme sens de variation que h.

x	$f(\alpha)$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	$-$
$(h^{-1})(x)$	α $\searrow$ $-\infty$

b- Construction de courbe (C') de h^{-1} (cf repère)

(C') = $S_{(\Delta)}(C)$ *avec* $(\Delta): y = x$.

BACCALAUREAT 2019 - TOGO

corrigé

Exercice 1 (3 points)

$I = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx.$

1- Calculons I + J :

$I + J = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx + \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi} (e^x cos^2 x + e^x sin^2 x)\, dx = \int_0^{\pi} e^x (cos^2 x + sin^2 x)\, dx$$

$$or \ cos^2 x + sin^2 x = 1$$

Donc $I + J = \int_0^{\pi} e^x dx = [e^x]_0^{\pi}$

$$\boldsymbol{I + J = e^{\pi} - 1}$$

2-a/ Montrons que $J - I = \int_{\pi}^{0} e^x cosaxdx$:

$$J - I = \int_0^{\pi} e^x (sin^2 x - cos^2 x)\, dx$$

Or $sin^2 x - cos^2 x = -cos2x$

$$\Rightarrow J - I = -\int_{\pi}^{0} e^x cos2xdx$$

$$\boldsymbol{J - I = \int_{\pi}^{0} e^x cos2xdx \quad donc \quad a = 2}$$

b/A l'aide d'une double Intégration par parties, démontrons que $J - I = \frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$:

posons : $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$

$$v(x) = cos2x \Rightarrow v'^{(x)} = -2sin2x$$

$$J - I = [e^x cos2x]_\pi^0 + \int_\pi^0 2e^x sin2xdx$$

$$J - I = -e^\pi + 1 + 2\int_\pi^0 e^x sin2xdx$$

Calcul de $\int_\pi^0 e^x sin2xdx$

posons : $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$

$$v(x) = sin2x \Rightarrow v'^{(x)} = 2cos2x$$

$$\int_\pi^0 e^x sin2xdx = [e^x sin2x]_\pi^0 - \int_\pi^0 2e^x cos2x$$

$$\int_\pi^0 e^x sin2xdx = -2(J - I)$$

On a alors :

$$J - I = 1 - e^\pi - 4(J - I)$$

$$\Rightarrow 5(J - I) = 1 - e^\pi$$

D'où $\boldsymbol{J - I = \frac{1}{5}(1 - e^\pi)}$

3- Déterminons les valeurs exactes de I et de J :

On a : $\begin{cases} I + J = e^\pi - 1 & (1) \\ J - I = \frac{1}{5}(1 - e^\pi) & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 2J = e^\pi - 1 + \frac{1}{5}(1 - e^\pi)$

$$= \frac{5\pi - 5 + 1 - e^\pi}{5} = 2J = \frac{4}{5}(e^\pi - 1)$$

$$Donc \quad \boldsymbol{J = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 2I = e^\pi - 1 - \frac{1}{5}(1 - e^\pi)$

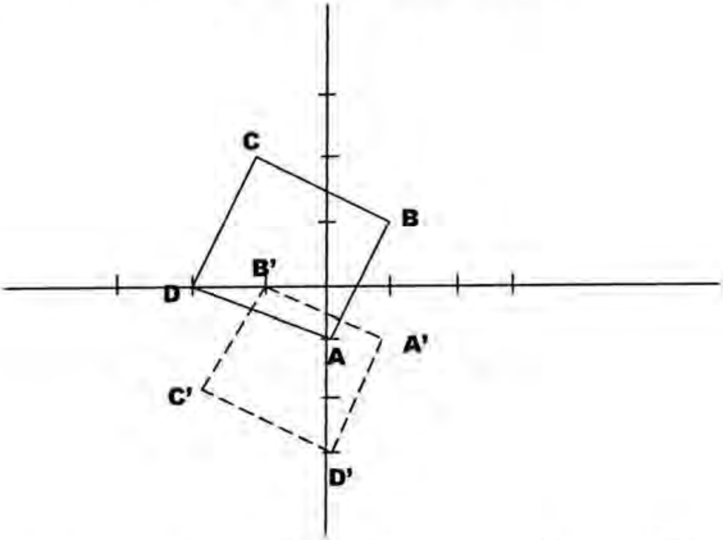
$$= \frac{5e^{\pi} - 5 - 1 + e^{\pi}}{5} = \frac{6}{5}(e^{\pi} - 1)$$

$$Donc \quad \boldsymbol{I = \frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)}$$

Exercice 2 :

I/ $Z_A = -i$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = -1 + 2i$; $Z_D = -2$

1- Plaçons sur une figure les points A, B, C et D :



2- a/ Interprétons géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = Z$:

On a : $\begin{cases} |Z| = \frac{CA}{DB} \\ \text{Arg}(Z) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{CA}}\right) \end{cases}$

b/Calculons le nombre complexe Z :

$$Z = \frac{-i-(-i+2i)}{1+i-(-2i)} = \frac{1-3i}{3+i}$$

$$Z = \frac{(1-3i)(3-i)}{9+1} \quad donc \quad \boldsymbol{Z = -i^2}$$

3- Déterminons le module et l'argument de Z :

On a : $|Z| = |-i|$ $donc$ $|Z| = 1$

$$\text{Arg}(Z) = \text{Arg}(-i) \ donc \ \text{Arg}(Z) = -\frac{\pi}{2}$$

Nature du quadrilatère ABCD :

On a : $\frac{Z_A+Z_C}{2} = \frac{-1+i}{2}$ et $\frac{Z_D+Z_B}{2} = \frac{-1+i}{2}$

$\frac{Z_A+Z_C}{2} = \frac{Z_D+Z_B}{2}$ $donc$ ABCD est un parallélogramme.

De plus CA = DB et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{CA}}\right) = -\frac{\pi}{2}$, on en déduit que ABCD est un carré.

Il/ $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$$

1-a/ Calculons $Z_1, Z_2,$ et Z_3 :

On a : $Z_1 = \lambda Z_0 - i$ $donc$ $\boldsymbol{Z_1 = -i}$

$$Z_2 = \lambda Z_1 - i = \lambda(-i) - i \quad donc \quad \boldsymbol{Z_2 = -(1+\lambda)i}$$

$$Z_3 = \lambda Z_2 - i = -\lambda(1+\lambda)i - i \quad donc \quad \boldsymbol{Z_3 = -(\lambda^2+\lambda+1)i}$$

b/ Démontrons que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \ldots\ldots + \lambda + 1)i$:

Par récurrence :

- Vérifions que $Z_1 = -(1)i$

$Z_1 = -i = -(1)i$ $donc$ $c'est$ $vérifié.$

- Supposons pour un entier k non nul que

$Z_k = -(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \ldots\ldots + \lambda + 1)i$ et montrons que

$$Z_{k+1} = -(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \ldots\ldots + \lambda + 1)i$$

On a : $Z_{k+1} = \lambda Z_k - i = -\lambda(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \ldots\ldots + 1)i - i$

$$Z_{k+1} = -(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \dots\dots + \lambda + 1)i$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots\dots + \lambda + 1)i$

c/ Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$:

$1 + \lambda \dots\dots + \lambda^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison λ et du 1er terme 1.

Comme $\lambda \neq 1$, on a : $1 + \lambda \dots\dots + \lambda^{n-1} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = -\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} i$

D'où $\boldsymbol{Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1}}$

2) $\lambda^k = 1$

Démontrons que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$:

On a : $Z_{n+k} = \frac{1-\lambda^{n+k}}{\lambda-1} i = \frac{1-\lambda^k \times \lambda^n}{\lambda-1} i$

$$Z_{n+k} = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i \quad car \quad \lambda^k = 1$$

D'où $Z_{n+k} = Z_n$

3- Etude du cas $\lambda = i$.

a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = Z_{4n+k}$:

on a : $Z_{4n+k} = \frac{1-i^{4n+k}}{i-1} i = \frac{1+i^{4n} \times i^k}{i-1} = \frac{1-(i^4)^n \times i^k}{i-1}$

$Z_{4n+k} = \frac{1-i^k}{i-1} i \quad car \quad i^4 = 1$

D'où $Z_{4n+k} = Z_k$

b/Montrons que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ :

on a : $Z_{n+1} = iZ_n - i = e^{i\frac{\pi}{2}} Z_n - i$ c'est l'expression complexe d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit Ω le centre de cette rotation.

On a : $Z_\Omega = \frac{-i}{1-i}$ donc $\boldsymbol{Z_\Omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i}$

D'où M_{n+1} est l'image de M_n par la rotation φ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}i\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c/ Déterminons les images de A. B, C, et D par φ et plaçons ces points :

on a : $Z_{A'} = i(-i) - i = 1 - i$; *donc* $\boldsymbol{A'(1-i)}$

$Z_{B'} = i(1+i) - i = -1$; *donc* $\boldsymbol{B'(-1)}$

$Z_{C'} = i(-1+2i) - i = -2 - 2i$; *donc* $\boldsymbol{C'(-2-2i)}$

$Z_{D'} = i(-2) - i = -3i$; *donc* $\boldsymbol{D'(-3i)}$

d/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{4n+1} = -i$:

D'après ce qui précède $Z_{4n+k} = Z_k$

Donc $Z_{4n+1} = Z_1$, *or* $Z_1 = -i$ *D'où* $Z_{4n+1} = -i$

PROBLEME

<u>Partie A</u>

1- Résolvons l'équation différentielle (E): $2y' - y = 0$:

(E): $2y' - y = 0$

(E) est du type $y' = ay$. Donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{\frac{x}{2}},\ k \in IR$

$S = \left\{ke^{\frac{x}{2}},\ k \in IR\right\}$

2- (E') : $2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$.

a/ Déterminons deux réels m et p tels que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$ soit solution de (E') :

f est solution de (E') ssi $2f'(x) - f(x) = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$

f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x) = (2mx + p)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$$

On a :$2\left[(2mx+p)e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(mx^2+px)e^{\frac{x}{2}}\right]-(mx^2+px)e^{\frac{x}{2}}$

$$=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$$

$\Rightarrow (4mx+2p)e^{\frac{x}{2}}=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 4m=-1 \\ 2\mathrm{p}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{4} \\ p=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\boldsymbol{f(x)=(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x)e^{\frac{x}{2}}}$

b/ Soit g une fonction définie et dérivable sur IR.

b1/ Montrons que g est solution de (E') ssi $g-f$ est solution de (E) :

g solution de (E') $\Leftrightarrow 2g'-g=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ $\quad (a)$

f solution de (E') $\Leftrightarrow 2f'-f=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ $\quad (b)$

$(a)-(b) \Leftrightarrow 2g'(x)-g(x)-2f'(x)+f(x)=0$

$\Leftrightarrow 2(g-f)'-(g-f)=0$

D'où $g-f$ est solution de (E).

b2 /Résolution de (E') :

D'après 1 et b1, on a : $g(x)-f(x)=ke^{\frac{x}{2}}$

Donc $g(x)=ke^{\frac{x}{2}}+f(x)$

$$g(x)=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+k\right)e^{\frac{x}{2}};\ \ k\in IR$$

D'où l'ensemble solution de (E') est l'ensemble des fonctions $x\mapsto\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+k\right)e^{\frac{x}{2}};\ \ k\in IR$

$$S_{(E')}=\left\{\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+k\right)e^{\frac{x}{2}};\ \ k\in IR\right\}$$

3) Déterminons la solution g_0 de (E') dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0.\vec{i},\vec{j})$ passe par le point A(1.0) :

$$g_0(1) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{4} + k\right)e^{\frac{x}{2}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4} + k = 0 \Longrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

D'où $g_0(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1)e^{\frac{x}{2}}$

$$g_0(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

Partie B

$$h(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

1- Calcul des limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \alpha \in IR \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty \end{cases}}$$

2- Etudions la dérivabilité de h sur IR :

h est le produit de deux fonctions dérivables sur IR, donc h est dérivable sur IR.

Déterminons la fonction dérivé h' de h :

$$h'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{8}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$\boldsymbol{h'(x) = -\frac{1}{8}(x-1)(x+3)e^{\frac{x}{2}}}$$

3-Etudions le sens de variation de la fonction h puis dressons son tableau de variation :

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x - 3 \quad ou \quad x = 1$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall\, x \in \,]-\infty; -3[\, \cup \,]1; +\infty[, h'(x) < 0$

$\forall\, x \in \,]-3; 1[\,, h'(x) > 0$

$$h'(-3) = h'(1) = 0$$

Sens de variation :

* h est strictement décroissante sur $]-\infty; -3]$ et $[1; +\infty[$
* h est strictement croissante sur $[-3; 1]$.

Dressons son tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-4e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$h(1) = 0 \;\; et \;\; h(-3) = -4e^{-\frac{3}{2}}$

4- Soit φ la fonction definie sur IR par $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ et par (Γ) sa courbe représentative.

a/ Etudions les positions relatives de (C) et (Γ) :

$\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ et (Γ) sa courbe représentative :

Posons $d(x) = h(x) - \varphi(x)$

$= -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{4}[(x-1)^2 - 4]e^{\frac{x}{2}}$

$$d(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)e^{\frac{x}{2}}$$

Signe de $d(x)$:

$$d(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \;\; ou \;\; x = 3$$

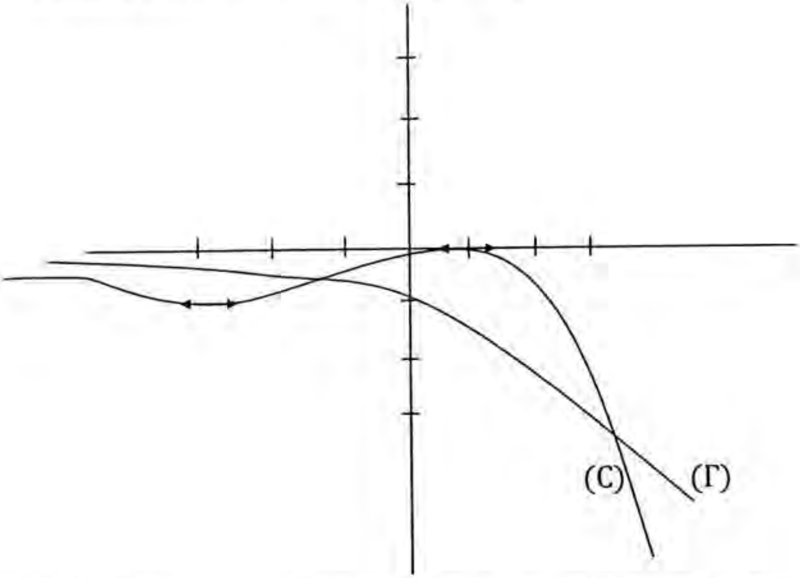
x	$-\infty$ $\quad -1$		3 $\quad\quad +\infty$
$d(x)$	$-$	$+$	0 $\quad -$

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, d(x) < 0$, *donc* (C) est en dessus de (Γ).

$\forall x \in]-1; 3[, d(x) > 0$, *donc* (C) est au $-$ *dessous de* (Γ)

(C) et (Γ) se coupent aux points d'abscisses $x = -1$ *et* $x = 3$

b/Construisons les courbes (C) et (Γ) :



5-a/ Déterminons trois réels a, b et c tels que la fonction $H: x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$ soit une primitive de h sur IR :

On a : $H'(x) = (2ax + b)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$

$$H'x = \left[\frac{a}{2}x^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + b + \frac{c}{2}\right]e^{\frac{x}{2}}$$

Or $H'(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}$

Par identification :

$$\begin{cases} \frac{a}{1} = -\frac{1}{4} \\ 2a + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \\ b + \frac{c}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{d'où } \; a = -\frac{1}{2}\,; \; b = 3 \; \; et\, c = -\frac{13}{2}$$

On a alors $\boldsymbol{H(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + 3x \pm \frac{13}{2})e^{\frac{x}{2}}}$

b/ Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), (Γ) et les droites d'équations $x = -1\, et\, x = 3$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} h(x) - \varphi(x)dx = \int_{-1}^{3} h(x)dx - \int_{-1}^{3} \varphi(x)dx$$

$$= [H(x)] - \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_{-1}^{3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = 8e^{-\frac{1}{2}}\, cm^2}$$

Partie C

$$U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt.$$

1- Interprétation géométriquement U_0 :

U_0 est l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1\, et\, x = 2$.

2-a/ Démontrons que $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$:

h est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$ or $n \in \mathrm{IN}$, donc $[n+1;\; n+2] \subset [1; +\infty[$

$\forall\, t \in [n+1;\; n+2]$, on a:

$$h(n+2) \leq h(t) \leq h(n+1)$$

$$-h(n+1) \leq -h(t) \leq -h(n+2)$$

$$\int_{n+1}^{n+2} -h(n+1)dt \leq \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt \leq \int_{n+1}^{n+2} -h(n+2)dt$$

D'où $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$

b/Déduisons le sens de variation de la suite (U_n) :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, -h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$

On a : $-h(n+2) \leq U_{n+1} \leq -h(n+3)$

Donc $U_n \leq U_{n+1} \leq -h(n+3)$

$U_n \leq U_{n+1}$ donc la suite (U_n) est un suite croissante.

3- Convergence de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} [-h(n+1)] = +\infty$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ *d'où la suite* (U_n) *est divergente donc* (U_n) *n'est pas convergente.*

BACCALAUREAT 2020 - TOGO

Corrigé

Exercice 1 :

1) Calculons la probabilité P(A) d'avoir une boule de chaque couleur :

$$urne\begin{cases}3 \text{ boules blanches}\\ 4 \text{ boules bleues}\\ 3 \text{ boules rouges}\end{cases}$$

Tirage simultané de 3 boules de l'urne.

Soit A « Obtenir une boule de chaque couleur »

$$P(A) = \frac{\text{CardA}}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

$$P(A) = \frac{C_3^1 \text{ x } C_4^1 \text{ x } C_3^1}{C_{10}^3}; P(A) = \frac{3 \text{ x } 4 \text{ x } 3}{120} = \frac{36}{120}; \quad \mathbf{P(A) = \frac{3}{10}}$$

2) X =nombre de boules blanches obtenues.

a- Déterminons la loi de probabilité de X :

* Valeurs possibles de X : 0 ; 1 ; 2 ; 3.

$$P(X = 0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}; \qquad P(X = 0) = \frac{7}{24}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \text{ x } C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}; \quad P(X = 1) = \frac{21}{40}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \text{ x } C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}; \quad P(X = 2) = \frac{7}{40}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}; \qquad P(X = 3) = \frac{1}{120}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

b- Calculons l'espérance mathématique de X et l'écart type :

$$E(X) = \sum x_1 \times P_1$$

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120}$$

$$E(X) = \frac{21}{40} + \frac{14}{40} + \frac{1}{40};\quad \mathbf{E(X) = \frac{9}{10}}$$

$$V(X) = \sum x_1^2\ P_1 - \left(E(X)\right)^2$$

$$V(X) = \frac{588}{1200} = \frac{49}{100}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$$

Formule de $V(X)$ ou $\sigma(X)$

3) $P(T) = 1/4$ et $P_T(G) = 1/3$

a- Définissons l'évènement contraire de T :

$\overline{T}$ « Etre non tricheur » (ou toute autre négation

correspondante ou si $\overline{T}$ seul)

* Calculons $P_{\overline{T}}(G)$

$P_{\overline{T}}(G) = P(X \geq 2)$

$P_{\overline{T}}(G) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$P_{\overline{T}}(G) = \frac{7}{40} + \frac{1}{120}$; $P_{\overline{T}}(G) = \frac{21+1}{120} = \frac{22}{120}$; $P_{\overline{T}}(G) = \frac{11}{60}$

Autre méthode :

$P_{\overline{T}}(G) = 1 - P(x < 2)$
$P_{\overline{T}}(G) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1)$
Déduisons la probabilité de l'événement $G \cap \overline{T}$:

$$P(G \cap \overline{T}) = (1 - P(T)) \times P_{\overline{T}}(G)$$

$$P(G \cap \overline{T}) = P(G/\overline{T}) \times P(\overline{T})$$

$$P(G \cap \overline{T}) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{11}{60}$$

$$P(G \cap \overline{T}) = \frac{3}{4} \times \frac{11}{60}; \quad \mathbf{P(G \cap \overline{T}) = \frac{11}{80}}$$

b- Calculons $P(G \cap T)$:

on a : $P(G \cap T) = P(T) \times P_T(G)$

$$P(G \cap T) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}; \quad \mathbf{P(G \cap T) = \frac{1}{12}}$$

c- Démontrons que la probabilité de l'événement G est $\frac{53}{240}$:

$$P(G) = \frac{53}{240}$$

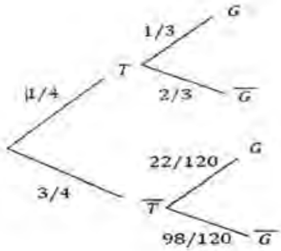
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(G) = P(G \cap T) + P(G \cap \overline{T})$$

$$P(G) = \frac{11}{80} + \frac{1}{12}; \; P(G) = \frac{11 \times 3 + 20}{240}$$

D'où $\mathbf{P(G) = \frac{53}{240}}$

Autre méthode :



d- Calculons la probabilité qu une personne qui a gagne soit tricheur : Il s'agit de $P_G(T)$

$$P_G(T) = \frac{P(G \cap T)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{240}} = \frac{1}{12} \times \frac{240}{53}; \quad \mathbf{P_G(T) = \frac{20}{53}}$$

Exercice 2 :

$f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (2+4i)z + 2 - 4i.$

1) a- Vérifions que $f(i) = 0$:

$$f(i) = -i + 2 + 3i + 2i - 4 + 2 - 4i$$

$$f(i) = 0$$

b- Déterminons les nombres complexes α *et* β tels que : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$:

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - aiz - ib$$

$$f(z) = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - bi$$

Par identification :

$$a - i = -2 - 3i \quad ; \quad \boldsymbol{a = -2 - 2i}$$

$$b - ai = 2 + 4i; \; donc\; b = 2 + 4i + i(-2 - 2i)$$

$$\boldsymbol{b = 4 + 2i}$$

Donc $f(z) = (z - i)(z^2 + (-2 - 2i)z + 4 + 2i)$

Deuxième méthode : Division euclidienne de $\boldsymbol{f(z)}$ par $\boldsymbol{z - i}$

c- Résolvons dans $\mathbb{C}$; $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 + (-2 - 2i)z + 4 + 2i = 0$

$z^2 + (-2 - 2i)z + 4 + 2i = 0$

$\Delta' = (-1 - i)^2 - (4 + 2i)$

$\Delta' = 1 - 1 + 2i - 4 - 2i$; $\Delta' = -4 = 4i^2$ ***ou*** $\Delta = -16$

$z_1 = 1 + i - 2i = 1 - i$

$z_2 = 1 + i + 2i = 1 + 3i$

$\boldsymbol{S = \{i ; (1 - i) ; (1 + 3i)\}}$

2) g est l'application du plan qui $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que :

$$z' = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})z - 1 + 2i$$

a- Soit $A(1 + 3i)$. Déterminons l'affixe de $A' = g(A)$

$$A' = g(A) \Rightarrow z'_A = \frac{1}{2}(1 - i)z_A - 1 + 2i$$

$$z'_A = \frac{1}{2}(1 - i)(1 + 3i) - 1 + 2i$$

$$z'_A = \frac{1}{2}(4 + 2i) - 1 + 2i$$

$$\boldsymbol{z'_A = 1 + 3i}$$

b- Déterminons le nombre complexe $\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A}$. :

$$\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A} = \frac{\frac{1}{2}(1 - i)z - 1 + 2i - 1 - 3i}{z - 1 - 3i}$$

$$\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A} = \frac{1}{2} \times \frac{(1 - i)z - 4 - 2i}{z - 1 - 3i}$$

$$\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A} = \frac{1-i}{2} \times \frac{z-1-3i}{z-1-3i}$$

$$\boldsymbol{\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A} = \frac{1-i}{2}}$$

.c- $\forall\ M \neq A$, déterminons $mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right)$:

$$mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right) = arg\left(\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A}\right)$$

$$mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right) = arg\left(\frac{1-i}{2}\right)$$

$$mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right) = arg(1-i) - arg(2)$$

$$\boldsymbol{mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{A'M'}{AM} = \left|\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A}\right|$$

$$\frac{A'M'}{AM} = \left|\frac{1-i}{2}\right|$$

$$\boldsymbol{\frac{A'M'}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

d- Déduisons les éléments caractéristiques de g :

On a : $z_{A'} - z_A$. *Donc* $g(A) = A$

A est un point invariant de g.

$$\begin{cases} \dfrac{AM'}{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \boldsymbol{mes\left(\widehat{\overline{AM};\overline{A'M'}}\right) = -\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

L'écriture complexe de g est $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}(1-i)$

g est donc une similitude directe de centre **A**, d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Montrer que $\forall\, M \neq A$, le triangle AMM' est rectangle isocèle en M' :

$$\frac{z'-z}{z'-z_A}=\frac{\frac{1}{2}(1-i)z-1+2i-z}{\frac{1}{2}(1-i)z-1+2i-1-3i}$$

$$\frac{z'-z}{z'-z_A}=\frac{\frac{1}{2}(-1-i)z-1+2i}{\frac{1}{2}(1-i)z-2-i}$$

$$\frac{z'-z}{z'-z_A}=\frac{-i\left(\frac{1}{2}(1-i)z-2-i\right)}{\frac{1}{2}(1-i)z-2-i}=-i$$

D'où le triangle $\boldsymbol{AMM'}$ est un triangle rectangle isocèle en $\boldsymbol{M'}$.

PROBLEME :

PARTIE A

$g(x)=x^2-2ln|x|.$

1) Déterminons l'ensemble de définition D de g :

$$D=\{x\in IR;\ |x|\neq 0\}\ ou\ D=\{x\in IR;\ |x|>0\}$$

Donc $\boldsymbol{D=IR^*}$

2) Etudions la parité de g :

$\forall\, x\in IR^*$ on a $-x\in IR^*$

$$g(-x)=(-x)^2-2ln|-x|$$

$$g(-x)=x^2-2ln|x|$$

Donc $\boldsymbol{g}$ est une fonction paire.

3) Calculons les limites de g en 0 et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - 2ln|x|)$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} x^2 \to 0 \\ |x| \to 0 \\ |x| > 0 \\ ln|x| \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}(x^2 - 2ln|x|)$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - 2\frac{ln|x|}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} x^2 \to +\infty \\ \dfrac{ln|x|}{x^2} \to 0 \end{cases}$$

4) Calculons la fonction dérivée g' de la fonction g:

g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Sa dérivée s'écrit :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} \quad donc \quad \boldsymbol{g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}}$$

5) a- Etudions le sens de variation de g :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[\; ; g'(x) < 0$

Donc $\boldsymbol{g}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; \boldsymbol{-1}[$ et sur $]\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[\; ; g'(x) > 0$

Donc $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $]\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{0}[$ et sur $]\boldsymbol{1}; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b- Montrons que $\forall x \in D$; $g(x) > 0$

D'après le tableau de variation de la question précédente, 1 est le minimum de g sur IR*. Donc $\forall x \in \mathrm{IR}^*$; $g(x) \geq 1$

D'où $\boldsymbol{\forall x \in D}$; $\boldsymbol{g(x) > 0}$

PARTIE B :

$x \in IR^*$; $f(x) = -x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$

1) Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}\right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} -x + 3 \to +\infty \\ \dfrac{2ln|x|}{x} \to 0 \\ \dfrac{2}{x} \to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}\right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} -x + 3 \to -\infty \\ \dfrac{2ln|x|}{x} \to 0 \\ \dfrac{2}{x} \to 0 \end{cases}$$

Calculons les limites à gauche et à droite en 0 de f :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(-x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{2ln(-x)}{-x} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(-x + 3 - \frac{2}{x}(1 + ln(-x)) \right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} -x + 3 \to 3 \\ -\frac{2}{x} \to +\infty \\ 1 + ln(-x) \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln(x)}{x} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-x + 3 - \frac{2}{x}(1 + ln(x)) \right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} -x + 3 \to 3 \\ -\frac{2}{x} \to -\infty \\ 1 + ln(x) \to -\infty \end{cases}$$

2) a- Calculons la fonction dérivée f' de f :

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Sa dérivée f' s'écrit :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2 - 2ln|x|}{x^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2ln|x|}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - 2ln|x|)}{x^2}$$

$$\forall x \in IR^*;\ f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

b- Etudions le sens de variation de f :

$\forall x \in IR*$; $x^2 > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de - $g(x)$.

D'après la partie A, on a $\forall x \in IR*$, $g(x) > 0$.

Alors $\forall x \in IR*$; $f'(x) < 0$

f est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \mathbf{0}[$ et sur $]\mathbf{0}; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

3) Calculons $f(1)$:

$$f(1) = -1 + 3 - 2;\ \ f(1) = 0$$

* Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont une négative notée α :

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ vers IR et

$f(1) = 0$. Donc 1 est l'unique solution de l'équation

$f(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$

D'autre part f est continue et strictement décroissante sur

$]-\infty; 0[$

Et $f(]-\infty; 0[) = IR$ or $0 \in IR$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α négative.

En conclusion l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet exactement deux solutions dont **1** et $\boldsymbol{\alpha} < 0$

* Vérifions que $-0{,}25 < \alpha < -0{,}24$

On a : $f(-0{,}25) = 0{,}159$ et $f(-0{,}24) = -0{,}319$

$f(-0{,}25) \times f(-0{,}24) < 0$

Donc $\mathbf{-0,25} < \alpha < -0{,}24$

4) a- Démontrons que la droite $(\Delta) : y = 3 - x$ est asymptote à (C) :

$\forall x \in IR*,\ f(x) - (3 - x) = -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - (3 - x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x} + 2\frac{ln(-x)}{(-x)}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - (3 - x)\right) = 0 \ car \ \begin{cases} -\frac{2}{x} \to 0 \\ \frac{ln(-x)}{(-x)} \to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(f(x) - (3 - x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x} - 2\frac{lnx}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (3 - x)\right) = 0 \ car \ \begin{cases} -\frac{2}{x} \to 0 \\ \frac{lnx}{x} \to 0 \end{cases}$$

D'où la droite (Δ) : $\boldsymbol{y = 3 - x}$ est asymptote oblique à $(\boldsymbol{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Etudions la position de (C) par rapport à (Δ) :

$\forall x \in IR*,\ f(x) - (3 - x) = -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$

$$f(x) - (3 - x) = \frac{-2(1 + ln|x|)}{x}$$

Posons $f(x) - (3 - x) = 0$. On a : $1 + \ln|x| = 0$

$$ln|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{e};\ \ x = \frac{1}{e}\ \ ou\ \ x = -\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2(1 + ln\|x\|)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - (3 - x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$$\forall\, x \in] - \infty; -\frac{1}{e}\, [\cup]0; \frac{1}{e}\, [\, ;\ f(x) - (3\ -\ x) > 0$$

Donc $(\boldsymbol{C})$ est au dessus de (Δ) sur les intervalles

$] - \infty; -\frac{1}{e}\ [\ et\ ]0; \frac{1}{e}\, [$

$$\forall\, x \in] -\frac{1}{e} : 0[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[\, ;\ f(x) - (3\ -\ x) < 0$$

Donc $(\boldsymbol{C})$ est au dessus de (Δ) sur les intervalles

$] -\frac{1}{e} : 0[\cup]\frac{1}{e};\ +\infty[$

Donc $(\boldsymbol{C})$ est en dessous de (Δ) sur les intervalles

$(\boldsymbol{C})$ et (Δ) se coupent aux points d'abscisse $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e}$

5) a- Valeurs de x_0 pour lesquelles (C) admet une tangente
(T) en x_0 parallèle à (Δ)
$(\Delta) : y = 3 - x$
(T) est parallèle à (Δ) si et seulement si $f'(x_0) = -1$

On a alors :

$$-1+\frac{2}{x_0^2}-\frac{2-2ln|x_0|}{x_0^2}=-1$$

$$\frac{2}{x_0^2}-\frac{2-2ln|x_0|}{x_0^2}=0 \Rightarrow \frac{2ln|x_0|}{x_0^2}=0$$

$$x_0 \neq 0 \ \ et \ \ ln|x_0|=0$$

$$|x_0|=1; \quad x_0=-1 \ \ ou \quad x_0=1$$

b- Ecrivons l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x=-1$:

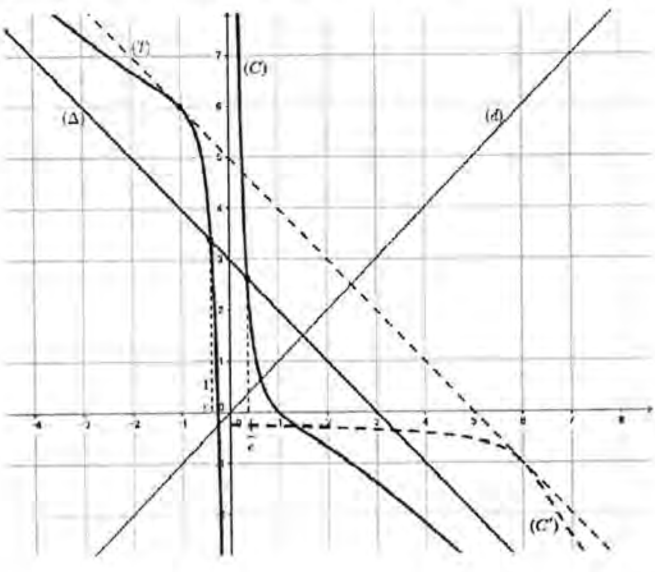
$$(\mathrm{T}) : y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$f'(-1)=-1 \ \ et\, f(-1)=6$$

$$(\mathrm{T}) : y=-(x+1)+6$$

$$\mathbf{(T)} : \boldsymbol{y=-x+5}$$

6) Construisons la droite (Δ), la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T) :



PARTIE C

$h(x) = -2\ln(-x) - (ln\,(-x))^2$.

1) Montrons que h est une primitive sur $]-\infty, 0[$ de la fonction $k: x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$:

La fonction $x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$.

Elle admet donc une primitive sur $]-\infty; 0[$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sa dérivée h' s'écrit :

$$h'(x) = -2\left(\frac{-1}{-x}\right) - -2\left(\frac{-1}{-x}\right) ln(-x)$$

$$h'(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x} ln(-x) = -\frac{2}{x} - \frac{2\,ln(-x)}{x}$$

$$\boldsymbol{h'(x) = k(x)}$$

D'où $\boldsymbol{h}$ est une primitive sur $]-\infty;\ \mathbf{0}[$ de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}}$.

2) a- Montrons que la restriction φ de f à l'intervalle $]-\infty; \alpha[$ est une bijection :

φ est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; \alpha[$.

Donc φ est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty; \boldsymbol{\alpha}[$ vers $\boldsymbol{I = \varphi(]-\infty; \alpha[)}$.

$$I = \left]f(\alpha); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[\;\; or \;\; f(\alpha) = 0 \;; Donc \;\; \boldsymbol{I} =]\mathbf{0};\ +\infty[$$

b- Construisons la courbe (C') de la bijection réciproque φ^{-1} :

$(C') = S_{(\alpha)}: y = x(C)_{]-\infty;\, \alpha[}$

3) Calculons l'air du domaine délimité par la courbe (C'), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$:

(C') est en dessous de l'axe des abscisses. Donc $\varphi^{-1}(x) < 0$.
Donc l'aire du domaine est :
$\mathcal{A} = \int_0^6 -\varphi^{-1}(x)dx$
Effectuons un changement de variable en posant :
$x = \varphi(t)$; On a : $dx = \varphi'(t)dt$

$$x = 0 \Rightarrow t = \varphi^{-1}(0) = \alpha$$
$$x = 6 \Rightarrow t = \varphi^{-1}(6) = -1$$

Alors il vient que :
$\mathcal{A} = \int_\alpha^{-1} -\varphi^{-1}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
$\mathcal{A} = \int_{-1}^{\alpha} \varphi^{-1}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
Or φ étant une bijection, on a : $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$
$\mathcal{A} = \int_{-1}^{\alpha} t\varphi'(t)dt$
Effectuons alors une intégration par parties :
$u' = \varphi'(t) \Rightarrow u = \varphi(t) = f(t)$
$v = t \Rightarrow v' = 1$
Alors : $\mathcal{A} = 6 - \int_{-1}^{\alpha} f(t)dt$
$\mathcal{A} = 6 - \int_{-1}^{\alpha} f(t)dt$

$\mathcal{A} = 6 - \int_{-1}^{\alpha} \left(-t + 3 - \frac{2}{t} - \frac{2ln|t|}{t}\right) dt$

$\mathcal{A} = 6 - \left[-\frac{1}{2}t^2 + 3t - 2\,ln(-x) - (ln\,(-x))^2\right]_{-1}^{\alpha}$

$\mathcal{A} = 6 - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2 - 3\alpha + 2\,ln(-x) + (ln\,(-x))^2$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2 - 3\alpha + 2\,ln(-x) + (ln\,(-x))^2\ cm^2}$

BACCALAUREAT 2021 - TOGO

Corrigé

Exercice 1 : (1,5 points)

Choisissons la bonne réponse :

1- b) ; 2-c) ; 3- d)

Exercice 2 : (2,5 points)

1- Déterminons les nombres réels $a, b\ et\ c$:

$$\frac{1}{(1+e^{1-2t})^2} = a + \frac{be^{1-2t}}{1+e^{1-2t}} + \frac{ce^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^2}$$
$$= \frac{a(1+e^{1-2t})^2 + b(1+e^{1-2t}) + ce^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^2}$$
$$= \frac{(a+ab)e^{1-4t} + (2a+b+c)e^{1-2t} + a}{(1+e^{1-2t})^2}$$

Par identification on a $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{Donc\ \ a=1;\ \ b=-1\ \ \text{et}\ \ c=-1}$$

2- Calculons J

$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+e^{1-2t})^2} dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[a + \frac{e^{1-2t}}{1+e^{1-2t}} + \frac{ce^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^2}\right] dt$$
$$= \left[t + \frac{1}{2}(1+e^{1-2t}) - \frac{1}{2(1+e^{1-2t})}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$J = \frac{1}{4}\left[1 + 2ln\left(\frac{2}{1+e}\right) + \frac{2}{1+e}\right]$$

3- $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{te^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^3} dt.$

a-) Exprimons I en fonction de J :

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{e^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^3}$

$$u(t) = t \Longrightarrow u'(t) = 1$$

$$v'(t) = \frac{e^{1-2t}}{(1 + e^{1-2t})^3} \Longrightarrow v(t) = \frac{1}{4(1 + e^{1-2t})^2}$$

Donc $I = \left[\frac{t}{4(1+e^{1-2t})^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+e^{1-2t})^2} dt$

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{32} - \frac{1}{4}J}$$

b-) Déduisons la valeur exacte de I :

On a $I = \frac{1}{32} - \frac{1}{4}J$

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{32} - \frac{1}{16}\left[1 + 2ln\left(\frac{2}{1+e}\right) + \frac{2}{1+e}\right]}$$

Exercice 3 : (4,5 points)

4 boules indiscernables au toucher marquées 1, 2, 3, 4.

Tirage successif sans remise de deux boules.

$$f : z' = \frac{a}{2}\left[cos\left(\frac{b\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{b\pi}{4}\right)\right]z$$

1- Donnons tous les résultats $(a; b)$:

On a : $(a;b) \in \left\{\begin{matrix} (1;2);\ (1;3); (1;4); (2;1); (2;3)(2;4); \\ (3;1)(3;2); (3;4)(4;1); (4;2); (4;3) \end{matrix}\right\}$

Couples	Écriture complexe de f	Eléments caractéristiques
(1;2)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$S\left(0, \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
(1;3)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$S\left(0, \frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$
(1;4)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$h\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
(3;1)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$S\left(0, \frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
(3;2)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$S\left(0, \frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
(3;4)	$z' = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$h\left(0, -\frac{3}{2}\right)$
(4;1)	$z' = 2e^{\frac{i\pi}{4}}z$	$S\left(0,2; \frac{\pi}{4}\right)$
(4;2)	$z' = 2e^{\frac{i\pi}{2}}z$	$S\left(0,2; \frac{\pi}{2}\right)$
(4;3)	$z' = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}z$	$S\left(0,2; \frac{3\pi}{4}\right)$

2- $z_A = z_0 = 2i \ \ et \ \ A' = f(A)$

Calculons le module et l'argument de $z \ et \ z'$ où b est impair :

On a :

$|z_0| = 2; Arg(z_0) = \frac{\pi}{2} z' = \frac{a}{2}\left[cos\left(\frac{b\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{b\pi}{4}\right)\right]z$

Donc $|z_0| = \frac{a}{2}|z_0| = a \ et \ Arg(z_0') = \frac{b\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

	(1;3)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(4;3)
$\lvert z_0' \rvert$	1	2	3	4	5
$arg(z_0')$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

3- Calculons la probabilité de l'événement E : "les droites (OA) et (OA') sont perpendiculaires" :

Calculons $p(\text{E})$:

$(\text{OA}) \perp (\text{OA'}) \Leftrightarrow \frac{z_0'}{z_0} \in iIR$

On a : $\frac{z_0'}{z_0}=\frac{a}{2}e^{\frac{ib\pi}{4}}$ *donc* $\frac{z_0'}{z_0}\in iIR \Leftrightarrow \frac{b\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in IR$

Donc $b=2$ *et* $a\,\epsilon\{1;3;4\}$

On a : $(a;b)\in\{(1;2);\ (3;2);(4;2)\}$

$$\boldsymbol{p(\mathrm{E})=\frac{3}{12}\ \text{ou}\ p(\mathrm{E})=\frac{1}{4}}$$

4- La loi de probabilité de X :

$X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

$P(X=1)=\frac{1}{4};\ P(X=2)=\frac{1}{4};\ P(X=3)=\frac{1}{4};\ P(X=4)=\frac{1}{4}$

x_i	1	2	3	4	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Calculons l'espérance mathématique de X.

On a :

$$E(X)=\sum_1^4 x_i\,P(X=x_i)=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{E(X)=\frac{5}{2}}$$

Exercice 4 : (4 points)

1- $\forall n\in IN*$ résolvons l'équation différentielle :

$y'+\frac{1}{n+1}y=0$ (1)

Les solutions de (1) sont les fonctions $x\mapsto ke^{-\left(\frac{1}{n+1}\right)x}, k\,\epsilon\, IR$

2- $y'+\frac{1}{n+1}y=\frac{x+1}{(n+1)^2}$ (2)

Déterminons les réels *a et b* tels que la fonction g définie sur IR par : $g(x)=ax+b$ soit une solution de (2) :

g soit solution de (2) si et seulement si

$$g'(x) + \frac{1}{n+1}g(x) = \frac{x+1}{(n+1)^2}$$

$$g'(x) + \frac{1}{n+1}g(x) = \frac{x+1}{(n+1)^2} \Leftrightarrow a + \frac{ax}{n+1} + \frac{b}{n+1} = \frac{x+1}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(n+1)^2 + (ax+b)\,(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{x+1}{(n+1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a(n+1) = 1 \\ a(n+1)^2 + \, b(n+1) = 1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \boldsymbol{a = \frac{1}{n+1}} \\ \boldsymbol{b = -\frac{n}{n+1}} \end{cases}$

3- a) Montrons qu'une fonction h dérivable sur IR est solution de (2) si et seulement si $h - g$ est solution de (1). :

h est solution de (2) si et seulement si

$$h'(x) + \frac{1}{n+1}h(x) = \frac{x+1}{(n+1)^2}$$

$$h'(x) + \frac{1}{n+1}h(x) = \frac{x+1}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) + \frac{1}{n+1}h(x) = g'(x) + \frac{1}{n+1}g(x)$$

$$\Leftrightarrow (h-g)'(x) + \frac{1}{n+1}(h-g)(x) = 0$$

$(h-g)'(x) + \frac{1}{n+1}(h-g)(x) = 0 \Leftrightarrow h - g \; est$ solution de (1)

b-) Déduisons toutes les solutions de (2):

Les solutions de (2) sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto ke^{-\left(\frac{1}{n+1}\right)x} + \frac{x}{n+1} - \frac{n}{n+1}}$$

c-) Déterminons la solution f de (2) telle que $f(0) = 0$

on a : $f(0) = 0 \Rightarrow k = \frac{n}{n+1}$

Donc $f(x) = \frac{n}{n+1}e^{-\left(\frac{1}{n+1}\right)x} + \frac{x}{n+1} - \frac{n}{n+1}$

4- a) $f_n(x) = \frac{x-n}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{1}{n+1}\right)x}$.

Etudions le signe de $f_n'(x)$:

$\forall\, x \in IR, f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}$

Ou $\qquad f_n'(x) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}\right)$

Posons $1 - \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)} \geq 0$

$$1 - \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{n+1} \leq ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -(n+1)ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq (n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Donc $\forall\, x \in \left]-\infty;\ (n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$, $f_n'(x) \leq 0$

$\forall\, x \in \left[\ (n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right);\ +\infty\right[$, $f_n'(x) \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-n}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}\right)$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\left(\frac{1}{n+1}\right)x} = 0 \ \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-n}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{n+1}\left(1 - \frac{n}{x} - \frac{n}{n+1}\frac{e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}}{-\frac{x}{n+1}}\right)\right]$$

$$\text{Or } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\left(\frac{x}{n+1}\right)}}{-\left(\frac{x}{n+1}\right)} = 0 \ \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		$(n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{n+1}+ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Déduction :D'après le tableau de variation, f_n admet un minimum m atteint au point $x_n = (n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$0 < \frac{n}{n+1} < 1$ $donc\ x_n < 0$ et comme f_n est strictement croissante sur $]x_n; +\infty[$ alors $f_n(x_n) < f_n(0)$ d'où $f_n(x_n) < 0$ car $f_n(0) = 0$

On a : $f_n(x_n) = \frac{(n+1)ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-n}{n+1} - \frac{n}{n+1}e^{-ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$$= ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1} + 1$$

$$\boldsymbol{f_n(x_n) = \frac{1}{n+1} + ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Exercice 5 : (7,5 points)

$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{2} + xln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1- Etudions la continuité de f en 0 :

On a :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{x}{2} + xln\left[1 + \frac{1}{x}\right]\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left[1 + \frac{x}{2} + xln(x+1) - xln(x)\right]$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xln(x+1) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xln(x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc f est continue à droite de 0.

f n'est pas définie à gauche de 0.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[1 + \frac{x}{2} + xln(x+1) - xln(x)\right]$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{x}{2} + ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. La courbe (C) de la fonction f admet au point 0 une tangente verticale.

2- a) Déterminons l'ensemble de définition D de f :

$$D = \left\{x \in IR/\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ et } x \neq 0\right\} \cup \{0\}$$

$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

Calculons la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f :

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2} + ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ donc } \boldsymbol{f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}}$$

b) Etudions le sens de variation de f' :

$\forall\, x \in]-\infty; -1[, f''(x) > 0$ *donc* f' *est strictement croisante sur* $]-\infty; -1[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ *donc* f' *est strictement décroisante sur* $]0; +\infty[$.

Déterminons les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2} + ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{2}}$$

Déduction : $f'est\ strictement\ \ croisante\ sur\ ]-\infty;-1[$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{2}\ \ donc\ f'est\ croissante\ \forall\, x \in\,]-\infty;-1[.$$

$$f'(x) > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\forall x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0, f'est\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$

$f'\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{2}\ donc\ f'est\ strictement\ croissante\ \forall x \in\,]0;\ +\infty[$$

$$f'(x) > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\forall x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0, f'est\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$

d'où f' est positive sur chacun des intervalles $]-\infty;\ -1[$ et sur $]0:\ +\infty[$.

3- Déterminons les limites de f aux bornes de D :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 + \frac{x}{2} + xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{2} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{x}{2}\right) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{x}{2} + xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{2} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x}{2}\right) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = +\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$1 \nearrow +\infty$

4- a) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + \frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$:

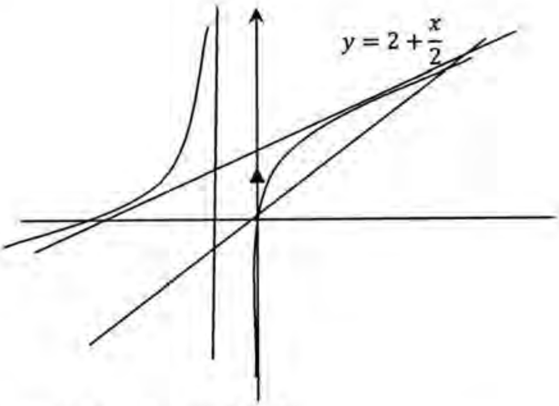
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(2+\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(2+\frac{x}{2}\right)=0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(2+\frac{x}{2}\right)=0$ *donc la droite* (Δ) d'équation $y=2+\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Courbe :



5-) $g(x)=f(x)-x$ sur $[3;5]$

a) Montrons que $\forall\, x\in[3;5], 0<f'(x)\leq\frac{2}{3}$:

f' est strictement décroissante sur $[3;5]$ donc

$\forall\, x\in[3;5], f'(5)\leq\ f'(x)\leq f'(3)$:

$$\text{or}\begin{cases} f'(5)=\dfrac{1}{2}+\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)-\dfrac{1}{6}>0\\ f'(3)=\dfrac{1}{3}+\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)-\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

D'où $\forall\, x\in[3;5], 0<f'(x)\leq\frac{2}{3}$

Montrons que $\forall x\in[3;5], g'(x)<0$

$\forall\, x\in[3;5], g'(x)=f'(x)-1$

On a : $f'(x) \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{3} < 0$

D'où $\forall\, x \in [3;5], 0 < g'(x) - 1 < 0.$

b) Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α :

g est continue et strictement décroissante sur $[3;5]$.

De plus $g(3) \approx 0{,}36$ et $g(5) \approx 0{,}59$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [3;5]$.

c) Montrons que $\forall\, x \in [3;5], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$:

f est dérivable sur $[3;5]$

$\forall\; x \in [3;5],\; |f(x)| \leq \frac{2}{3}$ et comme $\alpha \in [3;5]$ en appliquant le théorème des accroissements finis à f *entre* x *et* α on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha| \; or$$

$or\; f(\alpha) = \alpha\; d'$où $\forall\, x \in [3;5], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|.$

d) On définit la suite $(U_n)\, n \in IN$ par $U_0 = 3$ et $\forall\; n \in IN$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

i) Démontrons que $n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

f est continue et strictement croissante sur $[3;5]$.

Donc $\forall\, x \in [3;5], f(3) \leq f(x) \leq f(5)$

Or $f(3) \approx 3{,}36$ et $f(5) \approx 4{,}4$ donc $3 \leq f(x) \leq 5$

$$U_0 = 3 \;\; donc \;\; U_0 \in [3;5]$$

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 0,\; U_k \in [3;5]$.

On a : $U_{k+1} = f(U_k)$. Comme $U_k \in [3;5], f(U_k) \in [3;5]$.

D'où $\forall\, n \in IN, U_n \in [3;5]$

En utilisant (5c) et en remplaçant x par U_n on a :

$\forall\, n \in IN\; |U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \alpha|$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_1 - \alpha|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \alpha|$$

En multipliant membre à membre les inégalités et en simplifiant on a :

$\forall\, n \in IN, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Or $3 \leq \alpha \leq 5$ et $U_0 = 3$ équivaut à dire que $|U_0 - \alpha| \leq 2$

D'où $\forall\, n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ii) Déduisons la limite de $(U_n)\; n \in IN$:

$\forall\, n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\ et$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\ \ donc\ \ \lim_{n \to +\infty}(U_n)^n = \alpha$$

Déterminons une valeur approchée de α à 0,2 près pour que $|U_n - \alpha| \leq 0{,}2,\ il\ suffit\ que\ \ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}2$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(0{,}1)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 5{,}68$$

$$\Rightarrow n \geq 6$$

Donc U_6 est une valeur approchée de α à 0,2 près.

LE GENIE

A. T. Gérard
Tél.: (00228) 91 70 43 70 / 98 00 34 77
Lomé - TOGO