Examens du Baccalauréat

MATHÉMATIQUES

MTM
GROUP

Sujets des Examens Nationaux du Baccalauréat Marocain

- Section:
  - ❖ Sciences Économiques
  - ❖ Sciences Mathématiques
  - ❖ Sciences Économiques

Réalisation :

Maroc Tex Maths GROUP

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3) \qquad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Version 2023

FASCICULE

VERSION 2023

MTM
GROUP

CE LIVRET

Ce livret est une collection d'examens nationaux, de MATHÉMATIQUES, des années entre ***2008*** et ***2022***, pour les branches scientifiques,

(Sciences et Technologies; Sciences Mathématiques; et Sciences Économiques),.

Ce livret est le fruit d'une collaboration des membres du groupe $[MTMgroup]$,

(**voir liste sur les pages qui suivent**),

constitué de *professeurs* et *inspecteurs* de **Mathématiques**.

MTM
GROUP

Contacter nous

En cas de fautes de frappe.

En cas de remarques.

Veuillez nous contacter

Dans notre groupe de support sur

Telegram

Ou soit par WhatsApp sur:

(062 97 555 13)

Merci

MTM GROUP

PARTICIPANTS

Liste des membres du groupe MTMgroup

Prénom	Nom	Direction Pédagogique
SAID	EL-FATMI	ERRACHIDIA
El Mustapha	Ait Youssef	AZILAL
Abderrahim	Lamrani	Tanger-Assilah
Lahcen	Lafdili	Guercif
HASSAN	MEGDOUL	Guelmim
ABDENNABI	ELKHALIFI	Tanger Assilah
JAOUAD	BELKADI	Taroudant
ZAKARIA	HAJHOUJI	Casablanca
YASSIR	NOUIHAL	MARRAKECH
LAHCEN	ATTOUALI	SIDI KACEM
ABDELKRIM-AMINE	IDRISSI	KÉNITRA
AHMED	SAOURA	ESSAOUIRA
HANANE	CHAHAT	TAZA
MERIEM	ELMKHENTER	SAFI
ISSAM	KHALOUFI	MEDIOUNA
YOUSSEF	HADDOUZ	MARRAKECH
SAID	MENNOU	Casablanca
Bouazza	LOUKILIA	Khouribga
NABIL	KCHIRI	SAFI
MOUNDIR	NICER	RHAMNA
MOHAMMED	LAKHAL	SIDI SLIMANE
SAID	ABDELLAOUI	TANGER-ASSILAH
MOHAMED	SOUHAIL	Casablanca
MOHAMED ABDESSAMAD	AZOUGA	Casablanca
OTMAN	ELHADDAOUI	KELAA DES SRAGHNA
ADIL	BENNAJI	AGADIR
Hamza	EL ANDALOUSSI	TANGER-ASILAH
BRAHIM	AIT IBBOUH	AZILAL
ayoub	Laslami	Casablanca
Zakaria	Berki	El Hajeb
Khalid	Zaou	chtouka aït baha
CHARAF_EDDINE	BOUHAFS	sidi benour
Mohamed	GAFSI	
Rachid	AOUISSI	TAOURIRT
ABDERRAHIM	HADDER	Casablanca
Mohamed	Ferjani	El youssoufia
Smail	Abouhouda	Casablanca
SAID	MANSOURI	MIDELT
ABDELAALY	TADOUMMANT	TATA
OULAID	EN-FEUR	MIDELT
Said	Ait Ouahmane	Marrakech
Ali	ZAAOUAT	
MOHAMED	EDDEBDI	TANGER
Rachid	Abou Israe	Sidi Kacem
Mounir	ezahery	Berrechid
Ayoub	sadki	
Aziz	ouali	marakech

MTM
GROUP

FASCICULE 1

SCIENCES & TECHNOLOGIES

MTM GROUP

Examens du Baccalauréat

MATHÉMATIQUES

MTM
GROUP

Sujets des Examens Nationaux du Baccalauréat Marocain

- Section:
  - ❖ Sciences & Technologies

Réalisation :

Maroc Tex Maths GROUP

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

VERSION 2023

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie de l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calculs des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Équations différentielle et calcul intégral** ..... **2,5 points**
- Problème : **Etude de fonctions numérique et suites numériques** ... **8,5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(0,1,1)$, $B\,(1,2,0)$ et $C\,(-1,1,2)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

0,25 pt **b)** En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega\,(1,1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

0,5 pt Déterminer une équation de la sphère (S).

0,5 pt **3 -** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0,25 pt **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pt **c)** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\,(A, (\Delta))$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0,5 pt **1 -** Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

0,5 pt Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

0,5 pt **3 - a)** Écrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 pt **b)** En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0,25 pt **a)** Vérifier que $|z+2| = 2$

0,5 pt **b)** Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

0,25 pt **c)** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.

0,75 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement **"N'obtenir aucune boule rouge"**

0,75 pt **2 -** Calculer $p(B)$; où B est l'évènement **"Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"**

0,75 pt **3 -** Montrer que $p(C)=\dfrac{1}{2}$; où C est l'évènement **"Obtenir exactement une boule rouge"**

0,75 pt **4 -** Calculer (D) ; où D est l'évènement **"Obtenir au moins deux boules rouges"**

Exercice 4 : (2,5 pts)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=(x+1)\,e^{x}$

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que $x\mapsto xe^{x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I=\displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

0,75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par partie calculer $J=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,e^{x}\,dx$

0,5 pt **2 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+y=0$

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0)=1$ et $h'(0)=2$

Problème : (8,5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

0,5 pt **2 -** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 pt **3 - a)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

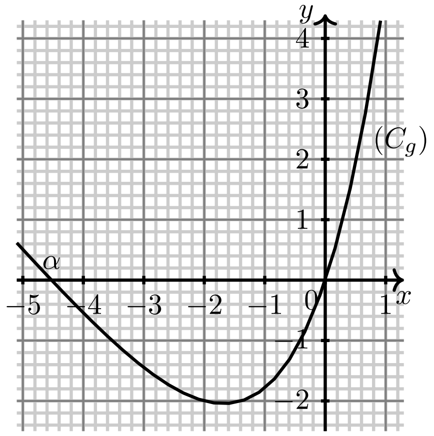
0,75 pt **b)** Étudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,5 pt **5 - a)** Montrer que $f''(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ où $g(x)=(2x+4)\,e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$



0,5 pt **b)** A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha)=0$)

0,5 pt **c)** Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

1 pt **6 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
(On prend : $\ln(4)\simeq 1,4$; $\alpha\simeq -4,5$ et $f(\alpha)\simeq -3,5$)

0,5 pt	**7 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
0,25 pt	**b)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$
	8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
0,5 pt	**a)** Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
0,5 pt	**b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante
0,25 pt	**c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente
0,5 pt	**d)** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales PC et SVT**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et problème :

- Exercice 1 : **Suite numériques** .... **2,5 points**
- Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcule des probabilités** .... **3 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique et Calcule intégrale** . **8,5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

0,75 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$.

0,5 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son première terme.

0,5 pt **b)** Ecrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

0,25 pt **c)** Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots\cdots + \mathcal{U}_{2021}$.

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

0,25 pt **1 - a)** Calculer la distance ΩA.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

0,25 pt **c)** Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S).

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $M_a \in \mathbb{R}$.

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$

0,5 pt **c)** Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 3 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

0,25 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$.

0,5 pt **2 -** Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de point B par h.

0,5 pt **3 -** On considère la rotation R de center C d'angle $\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R.

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

0,25 pt **a)** Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que $(\overline{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}) + (\overline{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}}) \equiv \pi[2\pi]$.

0,5 pt **c)** Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF.

0,5 pt **d)** Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient trois boules blanches, et quater boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements :

1 - On considère les événements suivantes : A : "Obtenir exactement deux boules rouges"
B :" Obtenir exactement une boule verte"

0,75 pt **a)** Montrer que : $P(A) = \dfrac{12}{55}$ et $P(B) = \dfrac{21}{44}$

0,75 pt **b)** Calculer $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

1 pt **a)** Déterminé la loi de la de probabilité X.

0,5 pt **b)** calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Problème : (8,5 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : $1cm$)

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis détermine la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement .

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f.

0,5 pt **4 - a)** Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

1 pt **5 - a)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$)

0,5 pt **b)** En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$

6 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g est paire .

0,5 pt **b)** Construire $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

0,5 pt **7 - a)** On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{6 - e^5}{25}$.

0,5 pt **b)** On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$.
Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

0,5 pt **c)** Déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}I$.

0,5 pt **d)** Calculer l'aire du domine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normale juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales PC et SVT**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et problème :

- Exercice 1 : **fonctions numériques** .... **2 points**
- Exercice 2 : **suites numériques** .... **4 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **5 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique et Calcule intégrale** ... **9 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2 pts)

0,5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \leqslant 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^{x} + 3}{e^{2x} - 1}$

0,5 pt **2 -** Montrer que l'équation $e^{2x} + e^{x} + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

Exercice 2 : (4pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par : $\mathcal{U}_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n}{3 - 2\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **1 -** Calculer $\mathcal{U}_1$

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < \mathcal{U}_n < \dfrac{1}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$

0,5 pt **b)** En déduire la monotonie de la suite $(\mathcal{U}_n)$

0,75 pt **4 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < \mathcal{U}_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite $\mathcal{U}_n$.

0,5 pt **b)** On pose $\mathcal{V}_n = \ln(3 - 2\mathcal{U}_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n$

0,5 pt **5 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{\mathcal{U}_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{\mathcal{U}_n} - 1\right)$

0,5 pt **b)** En déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 3 : (5 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0,25 pt **a)** Ecrire a sous forme algébrique .

0,25 pt **b)** Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

0,5 pt **3 -** Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4 - Soient zl'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **a)** Écrire z' en fonction de z et a

0,25 pt **b)** Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.

0,5 pt **c)** Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.

0,75 pt **5 - a)** Vérifier que $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d-b$

0,5 pt **b)** Ecrire le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique.

0,5 pt **c)** Déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)$

Problème : (9 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=2x\ln x-2x\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$

0,5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

1 pt **b)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ (on prend : $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5$)

0,5 pt **5 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e x\ln x=\frac{1+e^2}{4}dx$

0,5 pt **b)** En déduire : $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$

0,5 pt **6 - a)** Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$

b) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\ln x\geqslant\dfrac{x-1}{x}$.

7 - Soit $g$la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x)=x+3x\ \ ;\ \ x\leqslant0 \\ h(x)=2x\ln x-2x\ \ ;\ \ x>0 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Etudier la continuité de h au point 0

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

0,25 pt **c)** La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales PC et SVT**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et problème :

— Exercice 1 : **suites numériques** .... **4 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **5 points**
— Exercice 3 : **fonctions numériques** .... **3 points**
— Problème : **Etude d'une fonction numérique et Calcule intégrale** ... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4 pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par : $\mathcal{U}_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{1+\mathcal{U}_n}{3-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \mathcal{U}_n < 1$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \dfrac{(\mathcal{U}_n - 1)^2}{3-\mathcal{U}_n}$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente.

3 - On pose $\mathcal{V}_n = \dfrac{1}{1-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,75 pt **b)** Déterminer $\mathcal{V}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\mathcal{U}_n = \dfrac{n+1}{3+n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **c)** Calculer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$

0,5 pt **4 -** A partir de quelle valeur de n, a-t-on $\mathcal{U}_n \geqslant \dfrac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : (5 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :$z^2 - 6z + 13 = 0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :$a = 3+2i$; $b = 3-2i$ et $c = -1-2i$.

0,5 pt **a)** Ecrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique

0,5 pt **b)** En déduire la nature de triangle ABC

3 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3-4i$.

0,5 pt **a)** Ecrire z' en fonction de z

0,25 pt **b)** Vérifier que C et l'image de point A par R

0,5 pt **4 - a)** Montrer que les point A, C et D sont alignés.

0,5 pt **b)** Déterminera le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D

0,5 pt **c)** Déterminera l'affixe m du point E pour que la quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que $\dfrac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

0,5 pt **b)** En déduire que quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0 + \infty[$

0,5 pt **2 -** Déterminer $h(]0;+\infty[)$

0,5 pt **3 - a)** En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

0,5 pt **b)** Montrer que $0<\alpha<1$

0,5 pt **4 - a)** Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

0,5 pt **b)** En déduire que$h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

Problème : (8 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-xe^{-x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,75 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,5 pt **4 - a)** Calculer$f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2

1 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend : $f(2)\simeq 1,25$)

0,5 pt **6 -** Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1}\geq x$

0,5 pt **7 - a)** En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x}dx$

0,5 pt **b)** En déduire que $\int_0^2 f(x)dx=4-e+e^{-1}$

8 - Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,1]$

0,5 pt **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0,75 pt **b)** Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,25 pt **c)** A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de 4 exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **5 points**
— Exercice 3 : **Limites, dérivabilité et calcul intégral** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique** .... **7 points**

✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z .
✓ ln désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 : (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **1 -** Calculer u_1.

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

3 - a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$,

1 pt puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4 - On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **b)** Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 : (5 pts)

1 - Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère I'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$$

0,5 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$.

1 pt **b)** En déduire les solution de l'equation (E) .

2 - Soient les nombres complexes :

$$a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

0,75 pt **a)** Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

0,5 pt **b)** Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique..

0,5 pt **c)** En déduire que : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$.

0,25 pt **b)** Déterminer limage du point C par la rotation R .

0,25 pt **c)** Déterminer la nature du triangle OBC.

0,75 pt **d)** Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés .

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

0,5 pt **c)** en déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$ (Remarquer que $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$).

1 pt **d)** Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0\leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que la fonction : $G: x\mapsto x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **b)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 g(x)dx$.

Prpblème : (7 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

0,5 pt **2 - a)** Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y=-x+\dfrac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

0,75 pt **b)** Résoudre l'équation $e^{x-2}-4=0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$.

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,75 pt **5 -** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C).

0,5 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

1 pt **7 -** Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous (on prend $\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln 3\simeq 1,1$).

0,5 pt **8 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère).

0,5 pt **c)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$).

$\boxed{\text{FIN}}$

R O Y A U M E D U M A R O C

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrappage juillet 2020

MATHEMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de troix exercices et un problème indéquants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Suites Numériques** .... **2 points**
— Exercice 2 : **Nombres Complexes** .... **5 points**
— Exercice 3 : **Dérivabilité et Calcul Intégral** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Etude d'une Fonction Numérique et Suites Numériques** **9 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$

2 - On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

0,75 pt **b)** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (5 points)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2 - On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

0,75 pt **a)** Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

0,5 pt **b)** Soit le nombre complexe $b = \cos(\dfrac{\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\dfrac{\pi}{8})$. Prouver que $b^2 = a$.

3 - On considère dans le plan complexe muni dun repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C daffixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

0,25 pt **a)** Vérifier que $z' = bz$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $|a - b| = |b - c|$ puis déduire la nature du triangle ABC.

0,5 pt **b)** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$.

5 - Soit T la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ et D l'image de A par la translation T.

0,25 pt **a)** Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique $\mathcal{U}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{U}(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^2 + 2}{\mathrm{e}^x}$.

0,25 pt **b)** Poser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{U}$ (sans calcul de limite).

0,5 pt **c)** En déduire le signe de la fonction $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$ (**remarquer que** $\mathcal{U}(0) = 0$).

2 - Soit la fonction numérique $\mathcal{V}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3$.

0,5 pt **a)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^x\, \mathcal{U}(x)$.

0,5 pt **b)** En déduire le signe du fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction $\mathcal{W}$ définie par $\mathcal{W}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^{x} - 3x$ est une primitive de la fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Calculer l'intégrale $\int_0^2 \mathcal{V}(x)\mathrm{d}x$.

0,75 pt **c)** Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (9 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^{(1-x)} + \frac{1}{x} - 2$

0,5 pt **1 -** Monter que $g'(x) < 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **2 -** Déduire le tableau de variations de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (Notez que $g(1) = 0$).

II - On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = (1-x)e^{(1-x)} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ (unité : 2 *cm*)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

0,75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (On pose $f(2) \approx 1,25$)

0,5 pt **4 -** sachant que $f(3) \approx 0,5$ et $f(4) \approx -1,9$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

1 pt **5 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

III - on pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de $[1;2]$.

x	1	2
$h(x)$	0 $\searrow$	$h(2)$

0,5 pt **1 - a)** A partir du tableau de variations de la fonction h ci contre, montrer que $f(x) \leq x$, pour tout x de $[1;2]$.

0,25 pt **b)** Montre que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1;2]$.

0,5 pt **2 -** Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calculs des probabilités** .... **3 points**
— Problème : **Étude de fonctions numérique, calcul intégral et suites numériques** .... **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

0,75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

0,5 pt **b)** En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

0,75 pt Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$.

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle(Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+4=0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $a-d=\sqrt{3}(c-d)$.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3 - On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

0,5 pt Vérifier que $z'=\dfrac{1}{2}az$

4 - Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p=a-c$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $h=ip$

0,5 pt **b)** Montrer que le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noir indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A **:** $\ll$ **Obtenir trois boules vertes** $\gg$

B **:** $\ll$ **Obtenir trois boules de même couleur** $\gg$

C **:** $\ll$ **Obtenir au moins deux boules de même couleur** $\gg$

2 pt **1 -** Montrer que $P(A)=\dfrac{1}{120}$ et $P(B)=\dfrac{7}{40}$

1pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Problème : (11 pts)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité:1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0,5 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 pt **c)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

0,75 pt **d)** Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) déquation $y=x$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$

et pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$

1 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0,5 pt **b)** En déduire que (C) admet un point dinflexion dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1pt **b)** Construire (Δ) et (C) dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x\mapsto x\ln x-x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x\mapsto\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

0,5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

0,5 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,75 pt **2 -** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2019

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Probabilités** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **11 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$, et $C(1,1,3)$.

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,75 pt **2 -** Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

0,5 pt **b)** On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.

0,5 pt **2 -** On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2 = i$

0,5 pt **3 -** On pose $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que $c = ib$.

0,25 pt **b)** En déduire la nature du triangle OBC.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur "

B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées "

C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées "

2 pts **1 -** Monter que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{8}{27}$

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Problème : (11 pts)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **b)** Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.25 pt **b)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 4 > 0$.

0.75 pt **c)** Monter que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$.

0.5 pt **d)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0.5 pt **5 - a)** Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \dfrac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$.

0.25 pt **b)** Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.5 pt **c)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 e^{x-4}dx$.

0.75 pt **d)** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Deuxième partie :

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

0.25 pt **a)** Calculer $g(4)$

0.5 pt **b)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $g(x) = -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$

0.5 pt **c)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) - x = \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

0.25 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) \leq x$.

3 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Monter par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

0.75 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants et un problème réparties suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Problème : **Étude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques** **11 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonrmé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0.-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$.

1 pt — **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,5 pt — **2 -** On considère la sphère (S) dont une équation est : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$
Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega\,(1;0;1)$ et pour rayon $R=5$.

0,25 pt — **3 - a)** Vérifier que $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2t \\ z &= 1+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrque de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

0,5 pt — **b)** Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

0,75 pt — **4 -** Vérifier que $d\,(\Omega;(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt — **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2+2z+5=0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonrmé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

0,25 pt — **a)** Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe : $d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

0,5 pt — **b)** On considère le point A d'affixe $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B.
Montrer que : $b=da$.

3 - Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.

0,75 pt — **a)** Vérifier que $c=b+a$ et en déduire que $c=a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

0,25 pt — **b)** Déterminer $\arg\left(\dfrac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules rouges portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et *quatre* boules blanches portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément *trois* boules de l'urne.
Soit les évènements :

A : " Les trois boules tirées sont de même couleur"

B : " Les trois boules tirées portent le même nombre"

C : " Les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre"

1,5 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{6}$, $p(B) = \dfrac{1}{4}$ et $p(C) = \dfrac{1}{42}$.

2 - On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'évènement A.

0,5 pt **a)** Déterminer les paramètre de la variable aléatoire X.

1 pt **b)** Montrer que $p\,(X=1) = \dfrac{25}{72}$ et calculer $p\,(X=2)$.

Exercice 4 : (11 pts)

partie I : Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :$g(x) = \mathrm{e}^x - x^2 + 3x - 1$.
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $g(0) = 0$.

0,5 pt **2 -** Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des interevalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$.

partie II : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^{-x} + x$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonrmé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que (C) admet une une asymptote (D) au
0,75 pt voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$.

0,5 pt **c)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$,
0,5 pt et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,25 pt **4 - a)** Vérifier que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 4.

1 pt **5 -** Construire (D) et (C) dans le même repère $(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. (On prend $f(4) \approx 4,2$)

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x^2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{2e-5}{e}$

0,75 pt **b)** À l'aide d'une intergration par parties montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{e-2}{e}$

0,75 pt **c)** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par C et D et les axes d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

partie III : Soit U_n la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = fu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **1 -** Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question $II) - 3.b)$)

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite u_n est décroissante.

0,75 pt **3 -** En déduire que u_n est convergente et déterminer sa limite.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrappage juillet 2018

MATHEMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indéquants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres Complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul intégral** .... **2 points**
— Problème : **Etude d'une fonction numérique et suites numériques** ... **9 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et rayon égale à 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\overrightarrow{u}(4,0,-3)$ est un vecteur normal à (P).

0,5 pt **1 -** Montrer que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

0,5 pt **2 -** Vérifier que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

3 - a) Vérifier que $\begin{cases} x = & 2+4t \\ y = & 1 \\ z = & 2-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 pt passant par Ω et orthogonale à plan (P).

0,5 pt **b)** Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

0,25 pt **4 - a)** Calculer $d(\Omega,(P))$

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

Exercice 2 : (3 points)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

0,25 pt **a)** Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe a .

0,5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b=2\left(\cos(\dfrac{\pi}{12})+i\sin(\dfrac{\pi}{12})\right)$

0,5 pt **3 - a)** On considère le point C d'affixe $c=1+i$.
montrer que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

0,5 pt **b)** Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation t.
Montrer que $OD=|b+c|$

0,5 pt **c)** En déduire que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges portant chacune le nombre 1, 3 boules rouges portant chacune le nombre 2, et 6 boules vertes portant chacune le nombre 2.
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :
A:" Les deux boules tirées portant le même nombre.".
B:" Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ".
A:" Les deux boules tirées portant deux nombres dont la somme est égale à 3".

1,5 pt **1 -** Montrer que : $p(A)=\dfrac{13}{22}$ et $p(B)=\dfrac{6}{11}$ puis calculer $p(C)$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $p(A\cap B)=\dfrac{3}{11}$.

0,5 pt **b)** Les événements A et B sont -ils indépendants ? justifier votre réponse.

0,5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre.

Exercice 4 : (2 points)

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = e$

1 pt **2 -** A l'aide d'une intégration par partie, Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2+2x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

Problème : (9 pts)

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

0.25 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0.5 pt **2 -** A partir de ce tableau , déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage $+\infty$

0,25 pt **c)** Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

0,75 pt **2 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

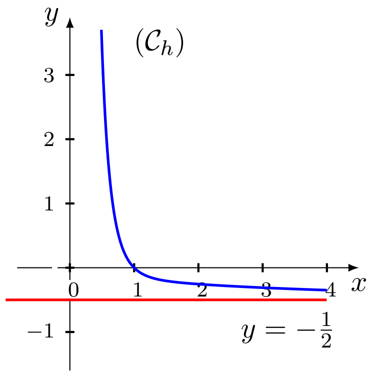
0,5 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1 pt **4 -** Construire dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ (unité : 1 cm)

Partie III : On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$



0.25 pt **1 -** **a)** Vérifier que $h(1) = 0$

0.75 pt **b)** Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_h)$ est la représentation graphique de la fonction h.
Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis en déduire que :
$f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$.

2 - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = e$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(On pourra utiliser le résultat de la question **III)** 1.b)

0,75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Éxpérimentales

Session : normal juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Éxpérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Étude dune fonction numérique et calcul intégral et suites** **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(2;0;2)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1;1;0)$ est le point de contact .

0,25 pt **2 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).

0,75 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$.

0,75 pt **3 -** Montrer que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OBC .

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 8 boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

1,5 pt **1 -** Soit A l'événement : "Parmi les trois boules tirées , aucune ne porte le nombre 0"

Soit B l'événement : "le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 "

Montrer que : $p(A)=\dfrac{5}{14}$ et que : $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

2 - Soit X le variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$.

1 pt **b)** Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Recopier sur votre copier et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

Exercice 3 : (3 pts)

On considère les nombres complexes a et b tels que : $a=\sqrt{3}+ietb=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que $b=(1+i)a$.

0,5 pt **b)** En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déduire ce qui précède que : $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c tel que : $c=-1+i\sqrt{3}$

0,75 pt **a)** Vérifier que : $c = ia$ et en déduire que $OA = OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

0,5 pt **b)** Montrer que le point B l'image du point par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

0,5 pt **c)** En déduire que la quadrilatère $OABC$ est un carré

Problème : (11 pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $g(1) = 0$.

0,25 pt **2 -** À partir du tableau de variation ci-contre :.

Montrer que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $]0;1]$

et pour $g(x) > 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $[1;+\infty[$

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x})\ln x$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $1cm$.

0.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $(1 - \frac{2}{x})\ln x = 0$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées .

0,75 pt **c)** Montrer que $f(x) \leqslant x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5 - Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra la courbe

1 pt (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

0.5 pt **6 - a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $H : x \longrightarrow 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

0.5 pt **d)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

III) Considérons la suite numérique (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.(On pourra utiliser le résultat du question II) 4-c)

0.75 pt **3 -** Déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite..

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Éxpérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Suites numériques** .... **2.5 points**
— Problème : **Étude d'une fonction et calcul intégral** .... **8.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation : $y - z = 0$.

0.5 **1 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,1,1)$ et son rayon est 2.

0.5 **b)** Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

0.5 **c)** Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P).

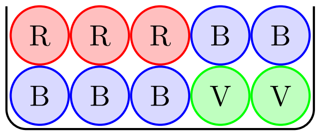
0.25 **a)** Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

0.75 **b)** Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

0.5 **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points de contact de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient *dix* boules indiscernables au toucher : *cinq* boules blanches, *trois* boules rouges et *deux* boules vertes (voir la figure ci-contre).



On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1.5 **1 -** Soit A l'événement :

"Parmi les quatre boules tirées, il y 'a une seule boule verte seulement ".

et B l'événement :

"Parmi les quatre boules tirées, il y 'a exactement trois boules de même couleur".

Montrer que $p(A) = \dfrac{8}{15}$ et que $p(B) = \dfrac{19}{70}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 **a)** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{2}{15}$.

1 **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 4z + 8 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :

$$a = -2 + 2i,\ b = 4 - 4i \text{ et } c = 4 + 8i.$$

0.5 **a)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que : $z' = -iz - 4$.

0.75 **b)** Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

3 - Soit ω l'affixe du point Ω milieu du segment $[BC]$.

0.5 **a)** Montrer que $|c - \omega| = 6$.

0.5 **b)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 17 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 **1 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n > 16$ pour tout entier naturel n.

0.5 **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n.

0.5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

0.5 **b)** En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

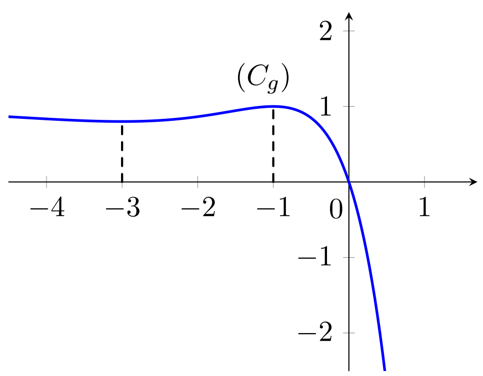
0.5 **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,001$.

Problème : (8.5 pts)

partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

0.25 **1 -** Vérifier que : $g(0) = 0$.

2 - A partir de la représentation graphique de la fonction g (voir figure ci-après)



1 pt Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ et que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \left(x^2 + 1\right) e^x$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm).

0.75 **1 - a)** Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout réel x puis en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

0.5 **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0.25 **c)** Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D).

0.5 **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1 + \dfrac{1}{x} - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)e^x\right]$)

0.25 **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x.

0.75 **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.75 **c)** Montrer que la courbe (C_f) possède un deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 .

1 **4 -** Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f).

(on prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,7$).

0.5 **5 - a)** Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.

0.75 **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^{0} \left(x^2 + 1\right) e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

0.5 **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Problème : **Etude dune fonction numérique et calcul intégral** ...... **8.5 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **1 -** Vèrifier que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = (\dfrac{1}{2})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer (u_n) en fonction de n.

0,5 pt **c)** Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,5 pt **2 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6.

0,5 pt **b)** Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

0,5 pt **3 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B.

Exercice 3 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 9+i$, $a = 5+2i$ et $b = 5+8i$

0,75 pt **a)** Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$.
Vérifier que $u = 3+3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

0,25 pt **b)** Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u).

0,75 pt **c)** Vérifier que $a-\omega=\overline{u}$ puis en déduire que : $\Omega A=\Omega B$ et $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

0,5 pt **d)** On considère la rotation R de centre Ω et d'angle 2π.

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1 pt **1 -** Soit A l'évènement :≪ les deux boules tirées sont rouges≫.
Montrer que $p(A)=\dfrac{2}{15}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

0,5 pt **a)** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$.

1,5 pt **b)** Montrer que $p(X=3)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de X.

Problème : (8.5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^2x-4e^x.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$). **partie I :**

0.25 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x)=2(e^x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(0)=0$).

0.75 pt **c)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,\ln 4[$ tel que : $f(\alpha)=0$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty,\ln 4[$.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0,-5)$.

0.75 pt **c)** tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(on prendra $\ln 4\approx 1,4$ et $\alpha\approx 1,3$).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que $\int_0^{\ln 4}(e^2x - 4e^x)dx = -\frac{9}{2}$.

0,5 pt **b)** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.

partie II :

0,5 pt **1 - a)** Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$.

0,5 pt **b)** Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$.

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x).$$

0,75 pt **a)** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences experimentales

Session : rattrapage juillet 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Suites numériques** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcul de probabilités** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel n

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

0,5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

0,75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,4)$ et $B(0,1,2)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

0,5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

0,75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

Exercice 3 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$.

0,75 pt **a)** Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

0,75 pt Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher)

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 - Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$.

2 - On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2 pt Montrer que $p(X = 1) = \dfrac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 pts)

I - On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0,25 pt **2 -** En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

II - On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x + 1)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\left(\text{Remarque que f(x) s'écrit sous la forme } f(x) = x\left[\dfrac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln x\right]\right)$

0,5 pt **b)** Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0, +\infty[$.

0.75 pt **b)** Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0, +\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $I(1; 0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x - 1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1; 0)$ à la courbe . (C_f)

0,75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$.

0,75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 (x + 1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

0.5 pt **6 -** Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'inéquation : $(x + 1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x - 1)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normale 1 Juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans lespace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Étude dune fonction numérique et suites numériques** . **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les deux points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$. Soit (P) le plan passant par le point A et $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ son vecteur normal.

0.5 pt **1 -** Montrer que $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 - Soit (S) l'ensemble de points M de l'espace qui vérifient la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
0.75 pt Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1,1,0)$ et de rayon 3.

3 - a) Calculer la distance du point Ω du plan (P) puis en déduire que (P) coupe (S) suivant
0.5 pt un cercle (C).

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle est le point $H(0,2,-1)$.

0.75 pt **4 -** Montrer que $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 2 : (3 pts)

I-On considère le nombre complexe a tel que : $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

0.25 pt **2 -** Vérifier que a $=2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

0.25 pt **3 - a)** En linéarisant $\cos^2\theta$ avec θ est un nombre réel, montrer que :$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$. .

0.5 pt **b)** Montrer que $a=4\cos^2\dfrac{\pi}{8}+4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$)

c) Montrer que $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a puis
0.5 pt montrer que $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$.

II- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$,et les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega=\sqrt{2}$ et $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

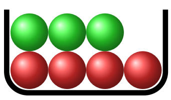
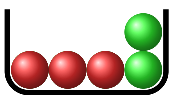
0.5 pt **1 -** Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est $2i$.

0.5 pt **2 -** Déterminer l'ensemble de points M d'affixe z tel que $|z-2i|=2$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

Une autre urne U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

L'urne U_1  L'urne U_2 

I) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne U_1.
Soit l'événement A :"On tire une seule boule rouge et deux vertes"
et l'événement B :" On tire trois boules de même couleur".

2 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{12}{35}$ et $p(B) = \dfrac{1}{7}$.

II) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2 .
Soit l'événement C : "On tire trois boules rouges".

1 pt Montrer que $p(C) = \dfrac{6}{35}$.

Problème : (11 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que : $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$.
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 2 cm). **I)**

0,5 pt **1 -** Montrer que $D_f =]0,e[\cup]e,+\infty[$ (D_f est l'ensemble de définition de la fonction f).

0,75 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\to e}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

0,5 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique à ce résultat (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarquer que $x(1-\ln x) = x - x\ln x$).

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f.

1 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle] 0,1] et croissante sur chacun des deux intervalles $[1,e[$ et $]e,+\infty[$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

II)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$
et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (voir la figure).

0,5 pt **1 - a)** Déterminer graphiquement le nombre de solutions (s) de l'équation (E) suivante : $g(x) = 0, x \in]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que : $2,2 < \alpha < 2,3$.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux deux points d'abscisses 1 et α.

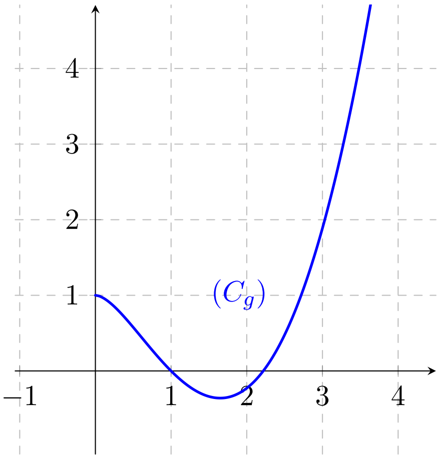
0,5 pt **c)** Déterminer, à partir de (C_g), le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1,\alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1,\alpha]$.

1,25 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).

4 - a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$.

0,75 pt (remarquer que : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f)

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ), et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.



On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	0,12	0,28

III) On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f\,(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question
0,5 pt **II)2. c))**..

0,75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentale

Session : Normal-2 juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentale**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Problème : **Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques** .... **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $x + y + z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt **1 - a)** Calculer le distance $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) est tangente à la sphère (S).

0.5 pt **b)** Vérifier que le point $H(0;-2;-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S).

2 - On considère les deux points $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$.

0.75 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

0.5 pt **b)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (OAB).

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de le droite (Δ) et de la sphère (S).

Exercice 2 : (3 points)

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 10z + 26 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs a, b, c et ω tels que :

$$a = -2 + 2i,\ b = -5 + i,\ c = -5 - i \text{ et } \omega = -3$$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega} = i$.

0.5 pt **b)** En déduire la nature du triangle ΩAB.

3 - Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4i$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe d du point D est $1 + 3i$.

0.75 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules verts et deux boules blanches (les boules son indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1.5 pt **1 -** On considère l'événement A suivant : "tirer une boule blanche au moins".
et l'événement B suivant : "tirer deux boules de même couleur".
Montrer que : $p(A) = \dfrac{13}{28}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de boules blanches tirées.

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$.

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Problème : (11 points)

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-2x$.

0.75 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty,\ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

0.5 pt **2 -** Vérifier que $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

0.5 pt **3 -** En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$).

1 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

(remarquer que $e^x-2x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0.5 pt **b)** Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que $y=x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

1 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).

(on prendra $\dfrac{1}{e-2}\approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0,1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).

0.75 pt **4 - a)** Montrer que $xe^{-x}\leq\dfrac{x}{e^x-2x}\leq\dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$.

0.5 pt **c)** Soit, en cm^2, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Montrer que : $1-\dfrac{2}{e}\leq A(E)\leq\dfrac{1}{e-2}$.

Partie 3

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$:

$$h(x) = f(x)$$

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0.5 pt **2 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}.

Partie 4

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = h\left(u_n\right) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$).

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentale

Session : Rattrapage juillet 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentale**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Etude d'une fonction numérique, calcul intégral** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.75 pt **b)** En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (3 pts)

On cosidère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$,le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

1 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3.

0.5 pt **2 - a)** Calculer la distance du point Ω au plan (P).

0.5 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

1 pt **3 -** Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

0.75 pt **b)** On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

Ecrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Montrer que : $z^{'} = iz + 7 + i$.

0.5 pt **b)** Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.

0.5 pt **c)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC).

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1 pt **1 -** Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".
Montrer que $p(A) = \dfrac{17}{125}$.

2 pt **2 -** Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 pts)

partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $g^{'}(x) = \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ et croisssante sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ (unité 1cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$).

0,75 pt **2 -** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de$+\infty$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f^{'}(x) = \dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat $f^{'}(1) = 0$.

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **4 -** Tracer, dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, la courbe (C).
(On admettra que la courbe (C) possède deux point d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et $2,5$ et on prendra $f(0,3) = 0$)

0,5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^{e} \frac{2\ln x}{x} dx = 1.$

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

0,75 pt **a)** Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,5 pt **b)** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juillet 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

l'éprouve est composée de 5 exercices

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'éspace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Suites numérique** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcule des probabilités** .... **3 points**
— Problème : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les points $A\,(0,3,1)$, $B\,(-1,3,0)$ et $C\,(0,5,0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0$$

0,75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que les point A , B, et C ne sont pas alignés.

0,5 pt **b)** Montrer que $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 pt **2 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega\,(2,0,0)$ et son rayon est 3.

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

0,5 pt **c)** Déterminer le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$$

2 - On considère le nombre complexe : $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2} i$.

0,5 pt **a)** Montrer que le module de u et $\sqrt{2}$ et que $argu \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$

0,75 pt **b)** En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que u^6 est un nombre réel.

3 - On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les deux points A et B d'ffixes respectives a et b tel que : $a = 4 - 4\sqrt{3}i$ et $b = 8$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'afffixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

0,5 pt **a)** Exprimer z' en fonction de z

0,5 pt **b)** Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le tringle OAB est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) numérique définie par :

$$U_0 = 13 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \qquad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 pt **1 -** Montrer par récurrence que $U_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (V_n) la suite numérique telle que $V_n = 14 - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **a)** Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et exprimer V_n en fonction de n

0,75 pt **b)** En déduire que $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite U_n

0,5 pt **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n > 13.99$.

Exercice 4 : (3 pts)

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portants les nombres :

0,0,0,0,0,1,1,1,1

1 - On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac.

Soit A l'évenment : " La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1"

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{5}{9}$.

2 - On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1

1 pt **a)** Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\frac{1}{6}$

b) Saïd a joué le jeu précédent trois fois (Saïd remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac)

1 pt Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois.

Problème : (8 pts)

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

0,5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et en déduire que la fonction g et croissante sur $]0;+\infty[$

0,75 pt **2 -** Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]0;1]$ et que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$

Partie II : On considéré la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unité $1cm$)

0,5 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et donner une représentation géométrique de ce résultat.

0,25 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (*on pourra poser* $t = \sqrt{x}$) puis montrer que

1 pt $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

0,25 pt **c)** Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

1,5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

1 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

0.75 pt **4 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$(on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer).

5 - On considère le deux intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_1^e (1+\ln x)\,dx \text{ et } J = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$$

0,5 pt **a)** Montrer que $H : x \longrightarrow x\ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $I = e$

0,5 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $J = 2e-1$

0,5 pt **c)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ l'axe des abscisses etles droites d'équations $x=1$ et $x=e$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

l'éprouve est composée de quatre exercices indépendantes entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'éspace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Suites numérique** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcule des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** ...... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $A(0,0,1)$; le plan (P) d'équation $2x+y-2z-7=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3 .

1 - a) Montrer que $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite

0,5 pt (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

0,5 pt **b)** Vérifier que $H(2,1,-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ).

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ où $\vec{u} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3.

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de
0,75 pt contact de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

0,75 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2 - On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est
1 pt arithmétique de raison 1.

0,75 pt **b)** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (3 pts)

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française
(on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

1 - On considère l'événement A :" Tirer deux cartes concernant la langue française "
et l'événement B :"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".
1,5 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{45}$ et que $p(B) = \dfrac{16}{45}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

0,25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0, 1$ et 2.

1,25 pt **b)** Montrer que $p(X=0) = \dfrac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives :

$$a = 2 + i, b = 2 - i, c = i, d = -i \text{ et } \omega = 1.$$

0,25 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{a - \omega}{b - \omega} = i$.

0,5 pt **b)** En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

3 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz + 1 - i$.

0,5 pt **b)** Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

0,5 pt **c)** Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)\, e^x$$

. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

1 pt **3 - a)** Montrer que :

$$f'(x) = e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)$$

pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0) = 0$.

0,5 pt **b)** Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $]-\infty, 0]$.

1,25 pt **c)** Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$)

0,75 pt **b)** Construire, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite la courbe (C), (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer).

5 - Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$$

0,75 pt

1 pt

6 - Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 points)

On considère dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $\Omega(1,1,-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et vérifier que $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

1 **b)** Vérifier que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

0,5 **a)** Démontrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0,5 **b)** Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ).

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que :

$$a=7+2i \text{ , } b=4+8i \text{ et } c=-2+5i$$

0,75 **1 - a)** Vérifier que : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

1 **b)** En déduire que : $AC=AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0,75 **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d=10+11i$.

0,5 **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B , C et D sont alignés.

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1,5 **1 -** Soient les deux événements suivants :

A:" Tirer deux boules rouges et deux boules vertes"

B:"Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées"

Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{7}$ et que $p(B)=\dfrac{1}{3}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0,25 **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.

1,25 **b)** Montrer que $p(X=1)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (3 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_1=0 \text{ et } u_{n+1}=\frac{25}{10-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

1 **1 -** Vérifier que : $5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5-u_n>0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2 - On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n=\frac{5}{5-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

0,75 **a)** Montrer que : $v_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que

$$v_{n+1}-v_n=1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

1 **b)** Montrer que : $v_n=n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que

$$u_n=5-\frac{5}{n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

0,25 **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)^2e^x$.
et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,25 **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,25 **2 - a)** Vérifier que : $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et interpréter ce résultat.

(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

0,75 **3 - a)** Montrer que : $f'(x)=x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0]$ et $[2,+\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0,2]$.

0,5 **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1	**4 - a)** Montrer que : $f''(x) = (x^2 - 2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées.
1	**b)** Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
0.5	**5 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$.
0.75	**b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$
0.5	**c)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e-2)cm^2$.
0.5	**d)** Utiliser la courbe pour donner le nombre de solution de l'équation :

$$x^2 = e^{-x} + 4x - 4 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences expérimentales

Session : rattrapage juillet 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

✓ Certaines notations sont utilisées dans différents exercices, toutefois chaque notation ne concerne que l'exercice où elle est utilisée et ne dépend ni des exercices précédents ni des exercices suivants .

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Suite numériques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** ...... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. les points $A(0,0,1), B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0,75 pt — **1 -** Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère et verifier que le point A appartient à la sphère (S).

0,75 pt — **2 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,75 pt — **b)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent a la sphère (S) en A.

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0,25 pt — **a)** Démontrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

0,5 pt — **b)** En déduire les coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S)

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt — **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation :

$$z^2-8z+25=0.$$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$$a=4+3i, b=4-3i\ et\ c=10+3i$$

et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

0,75 pt — **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d=10+9i$.

1 pt — **b)** Vérifier que $\dfrac{b-a}{d-a}=-\dfrac{1}{2}(1+i)$ puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique

0,5 pt — **c)** Montrer que : $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})}=\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt — **1 -** Vérifier que : $u_{n+1}-1=\dfrac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt — **2 - a)** Montrer par récurrence que $u_n>1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n

0,75 pt **b)** En déduire que $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (3 pts)

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : *quatre* jetons blancs, *trois* jetons noirs et *deux* jetons verts

On tire au hasard, simultanément, *trois* jetons du sac

1 - Soient les deux événements suivants

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

1 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{5}{84}$ et que $p(B) = \dfrac{2}{7}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

1 pt **b)** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \dfrac{15}{28}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

(remarquer que $f(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$).

c) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. **0.25 pt**

2 - a) Montrer que : $f'(x) = 2\left(\dfrac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. **1pt**

b) Vérifier que $\dfrac{g(x)}{x} + 1 = \dfrac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$. **0.75 pt**

3 - a) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1, 0)$. **0.5 pt**

b) Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C)) **0.75 pt**

4 - a) Vérifier que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis montrer que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = 1$. **0.75 pt**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$ **0.5 pt**

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale *à* $\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 - 6\mathrm{e} + 8\right)\mathrm{cm}^2$ **0.5 pt**

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : Normal juin 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences & Technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Suites numériques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, les points $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$, $C(3,2,1)$ et la sphère (S) ayant l'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$

0.75 pt **2 - a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ puis vérifier que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

1 pt **b)** Vérifier que : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1

3 - Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 pt **a)** Montrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.25 pt **b)** Montrer que le triplet de coordonnées du point H qui point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(2,0,0)$

0.25 pt **c)** En déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-12z+61=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\text{O},\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$, les A, B ,et C d'affixes respectives $a=6-5i$, $b=4-2i$,et $c=2+i$

0.5 pt **a)** Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ puis déduire que les points A, C et D sont alignés

0.5 pt **b)** On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est $1+5i$
Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d=3+6i$

0.75 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1+i$

0.5 pt **d)** Déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : une boule portant le nombre 0, cinq boules portant chacune le nombre 1 et deux boules portant chacune le nombre 2

On tire au hasard, et simultanément, trois boules de l'urne

1 pt **1 -** Soit A l'événement : " Les trois boules tirées portent des nombres différents deux à deux ".
Montrer que : $P(A)=\dfrac{5}{28}$

1 pt **2 -** Soit B l'événement : " La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 5 ".
Montrer que : $P(B)=\dfrac{5}{56}$

3 - Soit C l'événement : "La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 4 ".
1 pt Montrer que : $P(C) = \dfrac{3}{8}$

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :$u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer, par récurrence, que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante

0.25 pt **c)** Déduire que la suite (u_n) est convergente

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) On utilisant la question **1)**, montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$,
0.75 pt puis écrire v_n en fonction de n

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite du suite (u_n)

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1 - Montrer que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0; 1[$ puis déduire que
0.75 pt $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1]$

2 - Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1; +\infty[$ puis déduire que
0.75 pt $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$
Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\text{O}, \ \vec{\imath}, \ \vec{\jmath})$(unité : **3cm**)

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (On pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right) \ln x$)
et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont
1 pt on précisera la direction

2 - a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et interpréter
1.25 pt géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur l'intervalle
0.5 pt $[1; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis montrer que
0.5 pt $f(x) \geq 0$ pour tout x appartennant à l'intervalle $]0; +\infty[$

1 pt **3 -** Construire la courbe (C) dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

1 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\ln x \mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

0.25 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe du abscisse et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Éxpérimentales

Session : Rattrapage juillet 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

- L'utilisation de la calculatrice programmable n'est pas autorisé ;

- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

- Certaines notations sont utilisées dans différents exercices, toutefois chaque notation ne concerne que l'exercice où elle est utilisée et ne dépend ni des exercices précédents ni des exercices suivants .

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans lespace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Étude dune fonction numérique et calcul intégral** ...... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-3,0,0)$, $B(0,0,-3)$ et $C(0,2,-2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon 3.

1.25 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ puis en déduire que $2x - y + 2z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0.75 pt **b)** Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

2 - Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Montrer que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

0.5 pt **b)** Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1, 2, -1)$.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - i, b = 6 - 7i$ et $c = 8 + 3i$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$.

0.75 pt **b)** En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2i$.

0.75 pt **b)** Montrer que $z' = -iz + 9 + 5i$.

0.25 pt **c)** Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $\dot{u}_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 - v_n > 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **3 - a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 pt **1 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 pt **1 -** Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe (C).

0.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(il est préférable d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions qui suivent)

1.25 pt **3 - a)** Montrer que $f\,'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = \frac{3}{2}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **c)** Montrer que $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.25 pt **c)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

1.5 pt **5 -** Construire les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).

(on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe (C))

0.75 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \ln(x)\, dx = \ln 4 - \ln 3$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences et technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Équations et inéquations** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **5 points**
— Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **9.5 points**

Exercice 1 : (2.5 pts)

0,5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+4x-5=0$.

1 pt **b)** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation : $\ln\left(x^2+5\right)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

1 pt **2 -** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln\left(x^2+1\right)$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{5+8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n.

1 pt **b)** Montrer que $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : (5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-18z+82=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives :

$$a=9+i \quad , \quad b=9-i \quad \text{et} \quad c=11-i.$$

1 pt **a)** Montrer que $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

0,5 pt **b)** Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$.

1 pt **c)** Montrer que : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ puis en déduire que : $AC\times BC=4\sqrt{2}$.

d) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation

1,5 pt R de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

Montrer que : $z'=-iz+10+8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$.

Exercice 4 : (9.5 pts)

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

0, pt **1 - a)** Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ et vérifier que $g(0) = 0$

0,5 pt **2 -** En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x]$.
(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$).

0,25 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$).

0,5 pt **5 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2;-2)$.

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0;2)$.

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}.$$

0,25 pt **b)** En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

FIN

R O Y A U M E D U M A R O C

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : Rattrapage juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences & Technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Équations et inéquations** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Suites numériques** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

1 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

1 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

Exercice 2 : (3.5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B ayant respectivement les affixes : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$

0.5 pt **a)** Écrire sous la forme trigonométrique les deux nombres a et b

0.75 pt **b)** Montrer que b' l'affixe du B' l'image de B par translation qui a le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

1 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

0.75 pt **d)** Déduire d'après ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \dfrac{1}{3}}{15u_n + 1}$

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n > \dfrac{1}{3}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

1.5 pt Montrer que : (v_n) est une suite géométrique son raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n

1 pt **3 -** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4 : (3.5 pts)

I : On considère la fonction numérique g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est croissante sur I

1 pt **2 -** Déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$)

II : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) \ln x$

et Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(l'unité 1 cm)

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

1 pt **b)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\left(\text{remarquer que pour tout } x \text{ de } I : \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\right)$

0.5 pt **c)** Déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on détermine sa direction

1 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

0.5 pt **b)** Déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

0.25 pt **c)** Donner le tableau de variation de f sur I

1 pt **3 -** Tracer (C)(On admettera que la courbe (C)posssède un seul point d'inflexion d'abscisse compris entre 1.5 et 2)

4 - a) Montrer que : $H \ : \ x \longrightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h \ : \ x \longrightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I

0.5 pt **b)** Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}$

0.75 pt **c)** On utilisant l'intégration par partie, montrer que : $\int_1^e \ln x \, dx = \frac{1}{2}$

1 pt **5 - a)** Vérifier que pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

1 pt **b)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les deux droite d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0.5cm^2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : normal juillet 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences & Technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Étude d'une fonction numérique et calcul d'intégral** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, les points $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ et $C(7,1,-3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{\imath}+4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **2 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,1,0)$ et que son rayon est 5

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 pt **a)** Démontrer que : $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de (Δ)

1 pt **b)** Démontrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+10=0$

2 - On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=3-i$, $b=3+i$ et $c=7-3i$

Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $z'=iz+2-4i$

0.25 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c'=5+3i$

1.25 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{c'-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC=2BC'$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient *cinq* boules blanches, *trois* boules rouges et *deux* boules noires (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire, au hasard, et simultamémen, *quatre* boules de l'urne

1 - On considère les deux événement :

A : tirer une seule boule rouge

B : tirer au moins une boule blanche

1 pt Montrer que : $P(A)=\dfrac{1}{2}$ et $P(B)=\dfrac{41}{42}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2, et 3

1 pt **b)** Montrer que $P(X=2)=\dfrac{3}{10}$ et $P(X=0)=\dfrac{1}{6}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

0.75 pt **1 -** Montrer, par récurrence, que : $u_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

0.5 pt **3 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 5 : (8 pts)

I) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4x\mathrm{e}^{2x}$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $g' = 4(2x+1)\mathrm{e}^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que : $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ et vérifier que $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + x + 1$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm\right)$

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (On rappelle que : $\lim\limits_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^u = 0$)

0.75 pt **2 -** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; -\infty\right[$

0.25 pt **4 - a)** Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O

0.25 pt **b)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée)

0.75 pt **5 -** Construire les deux droites (Δ) et (T) et la courbe (C) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1 pt **6 - a)** On utilisant une intégration par partie, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{\mathrm{e}}{2}$

0.5 pt **b)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (T) et les deux droites des équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$ est $(6-2\mathrm{e})cm^2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** ...... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est 5.

1 pt **2 - a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ puis en déduire que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0.5 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Démontrer que : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0.25 pt **b)** Démontrer que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1,-2,0)$.

0.25 pt **c)** Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-8\sqrt{3}z+64=0$$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'ongle $\frac{4\pi}{3}$.

0.5 pt **a)** Montrer que $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

0.25 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

0.75 pt **c)** Montrer que : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

0.5 pt **d)** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules portées les nombres suivants :

① , ① , ① , ② , ② , ② , ③ , ③

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 - Soient A et B deux événement tels que :

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt Montrer que $P(A)=\dfrac{3}{28}$ et que $P(B)=\dfrac{13}{28}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

0.75 pt **b)** Montrer que : $P(X=1)=\dfrac{15}{28}$.

0.75 pt **c)** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21+u_n} \end{cases}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que : $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **3 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

0.5 pt **b)** Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 : (8 pts)

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3.$$

1 - a) Vérifier que :

0.25 pt $$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2) \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle }]0,+\infty[$$

0.5 pt **b)** Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x}$. pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.5 pt **b)** En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

0.5 pt (remarquer que : $g(1) > 0$).

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|= 1cm$)

1 - Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. **1 pt**

2 - a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement. **0.5 pt**

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+lnx}{x^2} = 0$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(On rappel que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^2} = 0$) **0.75 pt**

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. **0.5 pt**

3 - Montrer que $y = 3(x - 1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1, 0)$ **0.5 pt**

4 - Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion uniquement on ne demande pas de déterminer). **0.75 pt**

5 - a) En utilisant l'intégration par partie, montrer que

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx = 1 - \frac{e}{2} \quad \text{(Poser : } u'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = lnx\text{).}$$
1 pt

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale àn : $\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) cm^2$. **0.5 pt**

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcul intégral** .... **2 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique et suites numériques** .. **9 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$.

0.75 pt **1 -** Déterminer le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (OCD) .

0.5 pt **2 -** Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6 .

0.5 pt **3 - a)** Calculer la distance du point Ω au plan (OCD) .

0.5 pt **b)** En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) .

0.75 pt **c)** Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD) .

Exercice 2 : (3 pts)

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les A, B et C d'affixes respectives : $a=2-2i$, $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1 pt **1 -** Écrire sous la forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b .

2 - On considère la rotation R de centre le point O et d'ongle $\dfrac{5\pi}{6}$.

0.75 pt **a)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R . Montrer que : $z'=bz$.

0.5 pt **b)** Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R .

0.75 pt **3 -** Montrer que : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\ [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1 - On considère les deux évènement suivants :

A : Tirer trois boules en même couleurs .

B : Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux

1.5 pt Montrer que : $P(A)=\dfrac{3}{44}$ et $P(B)=\dfrac{3}{11}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

1.25 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 4 : (2 pts)

On pose : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tel que $x \neq -3$

0.75 pt **b)** Montrer que : $I = 1 - 3\ln 2$.

1 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J = -I$.

Problème : (9 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I-1 - Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}) \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

0.75 pt

2 - Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter le résultat

0.75 pt géométriquement

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur

1 pt l'intervalle $[0, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) au

0.5 pt voisinage $+\infty$.

0.25 pt **5 - a)** Vérifier que : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.5 pt **d)** Montrer que : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.75 pt **6 -** Tracer la courbe (C)

(on admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexions dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $\ln 4 \approx 1.4$) .

II- Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} .$$

On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f .

0.75 pt **1 -** Montrer que : $0 \leq u_n \leq \ln 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) décroissante .

1 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 4 : **suites numériques** .... **3 points**
- Exercice 5 : **Calcul intégral** .... **2 points**
- Exercice 6 : **Etude d'une fonction numérique** .... **6 points**

Exercice 1 : (3 pts)

Dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation : $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre le point $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3 .

1 - a) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne du sphère (S) puis vérifier que $A\in(S)$. **0.75 pt**

b) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S). **0.75 pt**

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) .

a) Montrer que : $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que : $(6,-6,-3)$ est le triple de cordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$ **0.75 pt**

b) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A . **0.75 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : **1 pt**

$$z^2-6z+25=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les A, B , C et D d'affixes respectives :

$$a=3+4i\ ,\ b=3-4i,\ c=2+3i \text{ et } d=5+6i$$

.

a) Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont colinéaires. **0.5 pt**

b) Montrer que le nombre $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$. **0.5 pt**

c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'ongle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$. **1 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 7 boules noires et deux boules blanches(les boules sont indiscernables au toucher) On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

1 - Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X. **0.5 pt**

2 - Montrer que : $P(X=0)=\dfrac{1}{36}$ et $P(X=1)=\dfrac{7}{18}$. **1.5 pt**

3 - Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$. **1 pt**

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n} \end{cases}$$

1 - Vérifier que : $1 - u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que :
1 pt $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - u_n > 0$.

2 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de
1 pt n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

1 pt puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 : (2 pts)

1 - Déterminer les fonctions primitives de la fonction : $x \longrightarrow 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\, dx = \frac{1}{2010}$$

1 pt

2 - En utilisant l'intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\, dx = 6\ln 3 - 2$$

1 pt

Exercice 6 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

et soit (C) la courbe représentative de la f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f est paire et que :

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

1 pt

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite
1 pt (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 -** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que

0.5 pt $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4 - Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de

1 pt préciser).

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte trois exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** .... **3 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques 11 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les deux points $A(0,-1,1)$, $B(1,-1,0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

1 - Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ puis vérifier que A appartient à (S). **1,25 pt**

2 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{OA}\wedge\vec{OB}$ et montrer que $x+y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). **1,25 pt**

3 - Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A. **0,5 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation **1 pt**

$$z^2-6z+34=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=3+5i \quad , \quad b=3-5i \quad \text{et} \quad c=7+3i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

a) Montrer que $z'=z+4-2i$ puis vérifier que C est l'image du point A par la translation T . **0,75 pt**

b) Montrer que $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$ **0,5 pt**

c) Déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC=2AC$. **0,75 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes(les boules sont indiscernables au toucher).

1 - On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte. **1 pt**

b) Montrer que la probabilité de tirer au moins une boule verte est $\dfrac{16}{21}$ **1 pt**

2 - On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges . **1 pt**

Problème : (11 pts)

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

0,5 pt **1 - a)** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

0,5 pt **2 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$)

II- On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement .

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

(on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)

0,75 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

(remarquer que : $f(x) = x\left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

0,5 pt **d)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) .

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,5 pt **c)** Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

0,5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \dfrac{1}{2}$).

1 pt **5 -** Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(on admet que $I(e,e,-1)$ est une point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2.7$).

0,5 pt **6 - a)** Montrer que : $H : x \longrightarrow x\ \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $\ln : x \longrightarrow \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis montrer que $\displaystyle\int_1^e \ln x\ dx = 1$.

0,75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\ dx = e - 2$.

0,5 pt **c)** Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

III- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,75 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II)3-a))

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **3 -** En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Problème : **Étude d'une fonction numérique** .... **8 points**

Exercice 1 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A et B d'affixes respectives $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$.
Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'ongle $\dfrac{3\pi}{2}$.

0.75 pt **a)** Montrer que $z' = -iz - 1 + 3i$.

0.5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est $c = -i$.

0.75 pt **c)** Montrer que : $b - c = 2(a - c)$, puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation : $x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0 \ .$$

0.75 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et son rayon est 3 .

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la distance du point I au plan (P) est $\sqrt{6}$.

0.75 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

0.5 pt **3 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et orthogonale à (P).

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1, 1, -2)$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges(les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne .

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité de tirervtrois boules blanches ?

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\dfrac{1}{7}$.

1 pt **3 -** Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases}$

1 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

1 pt **b)** Montrer que : $u_n = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Problème : (8 pts)

I- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

0.75 pt **2 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que $g(0) = 1$)

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

0,5 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$).

0,25 pt **d)** En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, un branche parabolique dont on précisera la direction .

0,75 pt **2 - a)** Pour tout x de $[0, +\infty[$, vérifier que :

$$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et que } 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x).$$

0,5 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$).

0,5 pt **c)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0,75 pt **d)** Montrer que : $f(x) - 2x \leqslant 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x} - 1\right)}{g(x)}$

0,5 pt **b)** Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

1 pt **4 -** Tracer (C) et (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexions).

FIN

FASCICULE 2

Sciences Mathématiques

MTM GROUP

Examens du Baccalauréat

MATHÉMATIQUES

MTM
GROUP

Sujets des Examens Nationaux du Baccalauréat Marocain

- *Section:*
  - Sciences Mathématiques

Réalisation :

Maroc Tex Maths GROUP

$$\sum_{k=n-1}^{k=n+2p} (S_n + u_p) \qquad \int_e^x f_n(t)dt$$

VERSION 2023

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (10 pts)

Partie A :

0,25 pt **1 -** Vérifier que, $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)$; $0 \leq 1-x+x^{2}-\dfrac{1}{x+1} \leq x^{3}$

0,25 pt **2 -** En déduire que, $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)$; $0 \leq x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\ln(1+x) \leq \dfrac{x^{4}}{4}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=\frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[: f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 pt **2 - a)** Montrer que, $(\forall x \in]0;+\infty[)$;, $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^{3}}$

où : $g(x)=x+\dfrac{x}{x+1}-2\ln(1+x)$

0,5 pt **b)** Montrer que , $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^{2}$

0,25 pt **c)** Déduire que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^{3}}{3}$

0,25 pt **d)** Déterminer le sens de variations de f

0,25 pt **3 - a)** Dresser le tableau de variation de f

0,5 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie C :

1 - Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

2 - On considère la suite $(u_{n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{0}=\frac{1}{3} \text{ et } \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_{n})$$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n} \in [0;1]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)|u_{n}-\alpha|$

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n}-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

0,5 pt **d)** En déduire que la suite $(u_{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Partie D : Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_{x}^{1} f(t)\,dt$

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x)=2\ln 2-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^{+}} F(x)$, puis déduire que : $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,dt=2\ln 2-1$

0,5 pt **c)** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

Partie E : On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

0,25 pt **b)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

0,25 pt **c)** Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m **un complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0,5 pt **3 -** Dans cette question, on suppose que, $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

0,25 pt **1 -** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2 - On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2

Et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0,75 pt **a)** Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

0,25 pt **b)** Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0,5 pt **c)** En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$

0,25 pt **b)** Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$

0,5 pt **2 -** Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3 - On suppose que n est impair

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu+(p-1)v=1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0,25 pt **b)** Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1-(p-1)(v+nq)$

0,5 pt **c)** On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

0,5 pt **d)** Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Exercice 4 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}^*,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

0,25 pt **b)** Vérifier que pour tout a , b , c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b)\times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2 - Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2)\,;\ \varphi\left(M(a,b)\right) = \left|a^2-3b^2\right|$

0,5 pt Monter que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3 - Soit $M(a,b)\in E$

0,25 pt **a)** Montrer que $M(a,b)\times M(a,-b) = \left(a^2-3b^2\right).I$

0,5 pt **b)** Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))=1$

0,5 pt **c)** On suppose que $\varphi(M(a,b))=1$

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse

0,25 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2\,;\ \varphi(M(a,b))=0 \Leftrightarrow a=b=0$

0,25 pt **b)** En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

0,25 pt **c)** Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : rattrapage juillet 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** .... **3 points**

Exercice 1 : (10 points)

Partie A :

0.25 pt **1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, 1 + x \leq e^x$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[\;\; ; \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x > 0)\,;\, \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 pt **c)** En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\, f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x + 1 - e^x(1 + x)\right)$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\, f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$)

0.25 pt **c)** En déduire le sens de variations de f sur I

3 - On admet que : $(\forall x > 0)\,;\, f''(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2)\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\, 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0)\,;\, f''(x) > 0$

4 - On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = 0$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\, |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

0.5 pt **5 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0, 1)$

0.5 pt **d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

Partie C :

1 - Pour tout x de $[0, 1]$, on pose , $g(x) = f(x) - x$

0.5 pt **a)** Montrer que g est une bijection de $[0, 1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2 - Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}\,;\, |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t - x_k)dt$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}\,;\, |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

3 - On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}$

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z. $(E_m) : mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (m^2 - 1)^2$

0.5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 pt **2 -** On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les deux points A et B d'affixes respectifs $m - 1$ et $\dfrac{1}{m} - 1$

0.5 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

2 - On suppose que m n'est pas un nombre réel.
Soient C l'image du piont B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe du point C est : $c = m - 1 + \left(\dfrac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $2(p-r) = m-1+\left(\dfrac{1}{m} - m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\dfrac{1}{m} - m\right)$

0.25 pt **c)** Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p - r)$

0.5 pt **d)** Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

Exercice 3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+1&3&-1\\2a+3&6&-2\end{pmatrix}$ et soit $G=\{M(a)/a\in\mathbb{R}\}$

1 - Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\ \varphi(a)=M(a)$

0.5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.5 pt **b)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R})=G$, en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **c)** Déterminer J l'élément neutre dans $(G,\times)$

0.5 pt **d)** Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$

0.5 pt **e)** Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1)\times X=M(2)$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\ M(a)\times J=M(a)\times I$

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.25 pt **c)** Vérifier que les matrices de la forme $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+2&3&0\\3x+5&6&1\end{pmatrix}$ avec $x\in\mathbb{R}$, sont solutions dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ de l'équation : $M(1)\times X=M(2)$

Exercice 4 : (3 points)

0.5 pt **1 -** Montrer que 137 est un nombre premier.

0.5 pt **2 -** Déterminer un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u+136v=2$

3 - Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $x^{38}\equiv 1[137]$

0.5 pt **a)** Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

0.2 pt **b)** Montrer que : $x^{136}\equiv 1[137]$

0.5 pt **c)** Montrer que : $x^2\equiv 1[137]$

0.5 pt **4 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{19}\equiv 1[137]$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **12 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x} + nx$.

Soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. *(on prend* $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$*)*

Partie I :

0.5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$.

0.5 pt **c)** En déduire le sens de variations de f_n sur $\mathbb{R}$. *(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)*

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point I d'abscisse 0.

0.5 pt **b)** Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0.5 pt **4 -** Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

5 - Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

0.5 pt **a)** Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Partie II : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f_0(u_n)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Partie III : On suppose dans cette partie que n est un entier tel que $n \geq 2$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$. *(On prendra* $\dfrac{2e}{1+e} < 1.47$*)*

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$.

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $x_n \leq x_2$

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

Exercice 2 : (4 pts)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b\neq c$

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(a+b+c)\,z+c\,(a+b)=0$

0.5 pt **b)** On suppose dans cette question que : $a=i$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c=a-b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les trois points $A\,(a)$, $B\,(b)$ et $C\,(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soit $P\,(p)$ le centre de rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q\,(q)$ le centre de rotation d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D\,(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

1 pt **a)** Montrer que : $2p=b+a+(a-b)\,i$ et $2q=c+a+(c-a)\,i$

0.5 pt **b)** Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$

0.5 pt **c)** En déduire la nature du triangle PDQ

3 - Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe de K est $k=a+\dfrac{i}{2}\,(c-b)$.

0.5 pt **b)** Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques

Exercice 3 : (4 pts)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x-43y=1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.75 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{41}\equiv 4\,[43]$.

1 - Soit $x\in\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

0.5 pt **a)** Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42}\equiv 1\,[43]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $4x\equiv 1\,[43]$, en déduire que : $x\equiv 11\,[43]$.

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F).

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41}\equiv 4\,[43] \\ x^{47}\equiv 10\,[47] \end{cases}$.

1 - Soit x une solution du système (S).

0.5 pt **a)** Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x\equiv 11\,[43] \\ x\equiv 10\,[47] \end{cases}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $x\equiv 527\,[2021]$ *(On pourra utiliser la partie* I *).*

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **8 points**
- Exercice 2 : **Problème d'analyse** .... **4 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **4 points**
- Exercice 4 : **Structures algébriques** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (8 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \ln(1-x)$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue sur I

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0,5 pt **d)** Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0,25 pt **e)** Donner le tableau de variations de f

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la courbe (C) est concave.

0,25 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

0,25 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie II :

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0; 1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$

0,5 pt **2 -** Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0,25 pt **c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in]0; \alpha]$

0,25 pt **d)** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

4 - pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $\Big(\forall x \in I\Big)$; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $\Big(\forall x \in [0; \alpha]\Big)$; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $\Big|f_n'(x)\Big| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **c)** En déduire que : $\Big(\forall x \in [0; \alpha]\Big)$; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **d)** Montrer que : $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $|f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **e)** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

0,5 pt **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (4 pts)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-\mathrm{i}$

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct$(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2-(m-\mathrm{i})z-\mathrm{i}m=0$$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+\mathrm{i})^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0,75 pt **c)** Sachant que $m=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre z_1+z_2 sous forme exponentielle.

2 - On considère les points A, B et M d'affixes respectifs 2, $-\mathrm{i}$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport a l'axe imaginaire.

0,5 pt **a)** Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0,75 pt **b)** Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatére $ANMB$ soit un parallélogramme.

1 pt **c)** Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\Re e\Big((2-i)m\Big)=\Re e(m^2)$

Exercice 4 : (4 pts)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 pt **1 - a)** Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a^{7n} \equiv 1[p]$

1 pt **b)** Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N})$; $a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2 - On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$

0,5 pt **a)** Montrer que : $a \equiv 1[p]$

0,5 pt **b)** En déduire que : $p = 7$

1 pt **3 -** Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A, alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juillet 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Le candidat doit traiter **exercice 3** et **exercice 4**
Et choisir de traiter **exercice 1** ou bien **exercice 2**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Arithmétiques** (au choix avec exercice 2) .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques**(au choix avec exercice 1) .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** (obligatoire) .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** (obligatoire) .... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 1**, il ne faut pas traiter **Exercice 2**

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (D) : $\quad 7x^3-13y=5$

1 - Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D).

0,5 pt **a)** Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

0,5 pt **b)** En déduire que : $x^{12}\equiv 1\ [13]$

1 pt **c)** Montrer que : $x^3\equiv 10\ [13]$

0,5 pt **d)** En déduire que : $x^{12}\equiv 3\ [13]$

1 pt **2 -** Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 2**, il ne faut pas traiter **Exercice 1**

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

0,5 pt **2 -** Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3 - On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x&x-1\\0&x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0,5 pt **a)** Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\quad\varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

1 pt **b)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

Exercice 3 : (3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $\quad (E) : z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0,5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2 - On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{m}$.

0,5 pt **b)** Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note

— P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A.

— Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B.

— R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O.

0,25 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1 pt **2 - a)** Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0,5 pt **b)** Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

~~0,5 pt **3 -** Montrer que $OQ = PR$ et les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.~~

Exercice 4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0,5 pt **1 -** On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$, montrer que : (P) $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la proposition (P), montrer que f est dévrivable à droite en 0.

0,5 pt **b)** En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche paraboliques dont on précisera la direction.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f'(x) = 3x^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur I (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4 - pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

0,75 pt **a)** Vérifier que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad g'(x) = 2x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)$, en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$,une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1; 2[$ (On prendra $\ln(2) = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$))

0,5 pt **c)** En déduire que les seuls solutions de l'équation $f(x)=x$ sont 0 et α.

0,5 pt **5 - a)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ (On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,25 pt **b)** Montrer que f est une bijection de I vers I . (On notera f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $0<u_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer que par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\quad 0<u_n<\alpha$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $g\left(]0;\alpha[\right)=]0;1[$.

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

0,5 pt **3 -** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur I par : $(\forall x\in I)\quad ;\quad F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'.

0,25 pt **c)** En déduire que F est strictement décroissante sur I.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\quad ;\quad F(x)\leq(1-x)\ln(2)$.

0,25 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in[1;+\infty[)\quad ;\quad F(x)=\frac{\ln(2)}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$$

.

0,5 pt **b)** Calculer $\displaystyle\int_x^1\frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ (On remarque que $\dfrac{t^3}{t+1}=t^2-t+1-\dfrac{1}{t+1}$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\,;\quad F(x)=\dfrac{5}{24}-\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\ln(1+x)-\dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

4 - Pour tout entier naturel non nul n,on pose : $v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad ;\quad -\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq v_n\leq-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarquera que : $\dfrac{2k+1}{2n}<\dfrac{k+1}{n}$)

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage. juillet 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Arithmétique** (au choix) .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures Algébriques** (au choix) .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Les Nombres Complexes** (obligatoire) .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **L'Analyse** (obligatoire) .... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 pts / au choix)

Soit p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1[pq]$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 pt **b)** En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et que $9^{q} \equiv 1[p]$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$.

0.5 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAt, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1\,[q]$

0.5 pt **b)** En déduire que : $q = 5$.

Exercice 2 : (3.5 pts)au choix

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel de dimension 9 et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zero $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Première Partie :

0.25 pt **1 - a)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$

0.5 pt **b)** Déterminer une base de $(E, +, .)$.

2 - a) Vérifier que :

0.25 pt $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx'-yy', xy'+yx', zz')$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Deuxième Partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme : $M(x,y,0)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 pt **1 -** Montrer que F est un sous-groupe de $(E, +)$.

2 - On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E definie par :
$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$

0.5 pt **a)** Monter que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif .(F^* désigne $F - \{0\}$)

0.5 pt **c)** Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = \mathcal{O}$.

b) En déduire qu'aucun des éléments de sous-espace F , n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

0.25 pt

Exercice 3 : (3.5 pts) Obligatoire

Soit m un nombre réel non nul .

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux equation suivantes :

$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ et $(F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$.

0.5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0.25 pt **2 - a)** Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On Considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$.

Soit Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' est le milieu du segment $[OA]$. la rotation de centre Ω et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$, la rotation de centre B' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1.5 pt **1 -** Montrer que $p = -1+m, \quad q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ et que $r = \bar{q}$.

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $q - r = -ip$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $OP = QR$ et les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

Exercice 4 : (13 pts)Obligatoire

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = x\ln(2-x)$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I : f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f' est strictement décroissante sur I.

0.75 pt **c)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$.

0.75 pt **2 - a)** Étudier les variations de f, puis donner son tableau de variations .

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est concave.

0.5 pt **c)** Montrer que : $(\forall t \in I) : \quad f(x) \leqslant f'(t)(x-t) + f(t)$.

0.5 pt **d)** En déduire que : $(\forall x \in I) : \quad f(x) \leqslant x\ln(2)$ et $f(x) \leqslant -x+1$.

0.5 pt **3 -** Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$.)

4 - Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe et les droites d'équations

0.75 pt $x = 0 \quad x = 1$ et $y = 0$ respectivement.

Deuxième Partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I=[0,1]$ par $f_n(x)=x^n\ln(2-x)$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0)=f_n(1)$.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n\in]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n)=0$.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que f_n est dérivable sur I et que $\forall x\in I : f_n'(x)=x^{n-1}g_n(x)$ où $g_n(x)=n\ln(2-x)-\dfrac{x}{2-x}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I.

0.5 pt **c)** En déduire que α_n est unique.

3 - On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ ainsi définie.

1 pt **a)** Montrer que $\forall n\geqslant 2 : f_n(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\alpha_n)=0$.

1 pt **b)** Montrer que $\forall n\geqslant 2 : g_n(\alpha_{n+1})=-\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

0.25 pt **c)** Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$. .

Troisième Partie :

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

0.75 pt **1 -** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante , en déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **2 -** En utilisant une intégration, par partie, montrer que : $I_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{2-x}\mathrm{d}x$.

0.75 pt **3 -** Montrer que : $(\forall n\geqslant 2) : 0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (x+yi)(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera .

0,25 pt **d)** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

2 - On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\{x+yi/x\in\mathbb{R}_+^*\,;\,y\in\mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **3 -** On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G=\{1+yi/y\in\mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E,*)$.

4 - On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\right\}$

0,25 pt **a)** Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

0,5 pt **b)** On considère l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\x+yi&\longmapsto&M(x^2,y)\end{array}$

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

0,25 pt **c)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z définie par :

$$(E):z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2 - On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

0,5 pt **a)** Déterminer le module est un argument de z_1+z_2.

0,25 pt **b)** Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II - Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$,

On considère les points suivants :

A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = (1 + i)m$ et $c = 1 - i$

D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.

0,25 pt **b)** Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$.

0,5 pt **c)** En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

2 - La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0,5 pt **a)** Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

0,25 pt **b)** En déduire h en fonction de m.

Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969]$

1 - On suppose dans cette question que 2969 que ne divise pas n.

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de Bezout, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ : u \times n \equiv\ [2969]$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

0,5 pt **c)** Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0,5 pt **d)** En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

0,5 pt **b)** Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \Longleftrightarrow n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv [2969]$.

Exercice 4 : (10 points)

PARTIE I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - 1\right)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1 - x)$

0,75 pt **b)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\exists! \alpha \in \left]\dfrac{3}{2}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

0,25 pt **d)** Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

0,5 pt **3 - a)** En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe x_0 de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

0,5 pt **b)** En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction f'' , montrer que pour tout x différent de x_0 de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

0,25 pt **c)** En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **4 - a)** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$, $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0,25 pt **5 - a)** Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty;\alpha])$; $f(x) \leq 0$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 3)}{3}$, puis en déduire que : $0 < \alpha \leq \sqrt{3}$

0,5 pt **c)** Calculer en fonction de α, en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 - On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

0,5 pt **a)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)

0,5 pt **b)** En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n$ (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0,25 pt **c)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

0,5 pt **d)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

3 - On suppose que $u_0 < 0$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

0,25 pt **c)** En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

Soit α un nombre complexe non nul.

partie A :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
$(E_\alpha)\ :\ z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = \alpha^2$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0,5 pt **2 -** Sachant que $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}\ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

partie B :

On suppose que le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On considère les points Ω, M_l et M_2 d'affixes respectivement α, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$
et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0,25 pt **b)** En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$, et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0,25 pt **c)** En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

0,5 pt **3 -** Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|\, e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|\, e^{i\theta}}$ est une réel.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n $(n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3)$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 pt **2 -** Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 pt **3 -** On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.
Detérminer la loi de probabilité de X_n

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2, +, .)$.
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V_2. On pose : $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$\forall(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x\vec{i}+y\vec{j}) * (x'\vec{i}+y'\vec{j}) = (xx'+yy')\vec{i} + (xy'+yx')\vec{j}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de V_2

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\forall\left(X,X',Y,Y'\right) \in \mathbb{R}^4 \ \left(X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}\right) * \left(X'\overrightarrow{e_1}+Y'\overrightarrow{e_2}\right) = XX'\overrightarrow{e_1}+YY'\overrightarrow{e_2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0,25 pt **d)** Montrer que $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

3 - Soit $\vec{u} \in V_2 - \left\{\vec{0}\right\}$. On note $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$

0,25 pt **b)** Montrer que $(E_{\vec{u}}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, .)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $* \iff$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée

4 - On suppose que : $(\exists\alpha \in \mathbb{R}^*)$; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & E_{\vec{u}} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\alpha}\vec{u} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$

0,25 pt **b)** En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (10 pts)

partie A :

On considère la fonction g définie sur $I =]-1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

0,5 pt **2 -** Montrer que g est dérivable sur I et que $\left(\forall x \in I\right)$; $g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$

3 - On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha) = 0$

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $\left(\forall x \in \,]-1;\alpha[\right)$; $0 < g(x)$ et que $\left(\forall x \in \,]\alpha;+\infty[\right)$; $g(x) < 0$

partie B :

On considère la fonction f définie sur $I = \,]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur I et que : $\left(\forall x \in I\right)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0,5 pt **b)** Donner le sens de variation de f sur I

0,75 pt **c)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que $(\forall x \in I)$ $f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0,25 pt **3 - a)** Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0,5 pt **b)** Montrer que : $\left(\forall x > 0\right)$; $\ln(1+x) < x$

0,25 pt **c)** En déduire que : $\left(\forall x > 0\right)$; $f(x) < x$

1pt **d)** Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

partie C :

On pose : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

1 pt **1 - a)** En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$

0,5 pt **b)** - Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la tangente (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$

1 pt **2 -** En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}\mathrm{d}x$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3,5 points**
- Exercice 4 : **étude de fonctions et suites numériques** .... **7,5 points**
- Exercice 5 : **fonction définie par intégrale** .... **2,5 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble : $E=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,25 pt **1 -** Montrer que E est un sous groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,5 pt **b)** On pose $\mathrm{J}=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$.

0,5 pt

0,5 pt **3 - a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est une anneau commutatif.

4 - soit φ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ par :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\ );\ \varphi(x+\mathrm{i}y)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** On pose $E^*=E-\{\mathrm{O}\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

0,25 pt **c)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pt **5 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

0.5pt **1 -** Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2\equiv1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv1[p]$.

2 - Soit x un entier relatif vérifiant $x^{p-5}\equiv1[p]$.

0,5 pt **a)** Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x^{p-1}\equiv1\ [p]$

0.5 pt **c)** Vérifier que $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$.

0,5 pt **d)** En déduire que : $x^2\equiv1\ [p]$

0.5 pt **3 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{62}\equiv[67]$.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe .

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation , $\quad (E_m):z^2+(\mathrm{i}m+2)z+\mathrm{i}m+2-m=0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta=(\mathrm{i}m-2\mathrm{i})^2$.

0,5 pt **b)** Donner suivant les valeurs de m l'ensemble des solutions de (E_m).

0,5 pt **2 -** Pour $m=\mathrm{i}\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de (E_m) sous la forme exponentielle .

II - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$

On considère les points : A , Ω, M, et M' d'affixes respectifs $a = -1 - \mathrm{i}$, $\omega = \mathrm{i}$, m et $m' = -\mathrm{i}m - 1 + \mathrm{i}$.

1 - Soit R la rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$ et qui transforme M en M'.

0.25 pt **a)** Vérifier que Ω est le centre de la rotation R.

0,5 pt **b)** Déterminer l'affixe b du point B tel que $A = R(B)$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que $m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.

0,5 pt **b)** En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B ,Ω et M sont cocycliques.

0,5 pt **c)** Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (7.5 pts)

Partie I :

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = x - \ln(1+x)$

0,5 pt **b)** En utilisant le changement de variable $u = t^2$; montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

0,5 pt **c)** En déduire que $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \dfrac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

0,25 pt **d)** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)\ ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

0,25 pt **1 - a)** montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** montrer que f est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résulta de la question I.2).

0,75 pt **c)** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Monter que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[)\ :\ f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

.

0,25 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

0,25 pt **c)** Vérifier que $f\left([0; +\infty[\right) = [1; +\infty[$.

0,5 pt **3 -** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira le demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

Partie III :

1 - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

0,5 pt **a)** Monter que $(\forall x \in]0;+\infty[)\ :\ 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

0,5 pt **b)** En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et que $g(]0;+\infty[) =]-\infty;1[$.

0,25 pt **c)** Monter que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0;+\infty[$.

2 - soit a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_{n+1} = f(u_n)$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$.

0,25 pt **d)** En déduire que le suite (u_n) converge vers α.

Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

0,5 pt **1 -** Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) :\ F(x) \geq x$. puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que F est impaire, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

0,5 pt **c)** Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

0,5 pt **d)** Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage 2018 juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... 3,5 **points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... 3,5 **points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... 3 **points**
- Exercice 4 : **Analyse** .... 11 **points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 .

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M(x,y)}=\begin{pmatrix}\mathrm{x}&\mathrm{y}\\0&\mathrm{x}\end{pmatrix}$ On considère l'ensemble

$E=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\ .)$

0.25 pt **b)** Montrer que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2

0.25 pt **3 - a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi $\times$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4 - On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$(\forall M(x,y)\in M_2(\mathbb{R}))\,(\forall M(x',y')\in M_2(\mathbb{R}))$$
$$M(x,y)TM(x',y')=M(x,y)\times M(x',y')-M(y,0)\times M(y',0)$$

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par : $\begin{array}{cccc}\varphi: & \mathbb{C}^* & \mapsto & E\\ & x+iy & \mapsto & M(x,y)\end{array}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi T

0.25 pt **b)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T)

0.25 pt **c)** On pose : $\mathrm{E}^*=E-\{\theta\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E

0.25 pt **b)** Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3,5 pts)

1 - Pour tout nombre complexe $Z\in\mathbb{C}-\{i\}$ on pose : $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$.

0.5 pt **a)** Vérifier que : $h(z)=z\Leftrightarrow z^2-2\mathrm{i}z-2=0$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):z^2-2iz-2=0$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}(a)=1$

Et pour tout $Z\in\mathbb{C}-\{i,a,b\}$ On considère les points $M(z),M'(h(z)),A(a)$ et $B(b)$

0.75 pt **a)** Montrer que : $\left(\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)=-\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

0.75 pt **b)** En déduire que : $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que si M et A et B sont alignés alors M, A, B et M' sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés alors M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "pile". (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10)

1 pt **1 - a)** Déterminer les valeurs prise par X

1 pt **b)** Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.

1 pt **2 -** Quelle est la probabilité de l'événement : $\left[X \geq \frac{9}{10}\right]$

Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit f la fonction numérique de finie sur l'intervalle $[0, +\infty\,|$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans wh repère orthonormé $(O; \vec{i}; J)$

1 - a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0.5 pt (On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$

0.75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 - a) Étudier la dérivabilité de f a droite en 0 , puis interpréter graphiquement le résultat

0.75 pt obtenus.

0.75 pt **b)** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que :

1 pt $(\forall x \in [0, 1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

0.5 pt **d)** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm)

3 - Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que ba fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **b)** Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur l' intervalle $[0, +\infty[$.

4 - a) En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculer $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

0.75 pt

0.75 pt **b)** Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

c) En déduire en m^2, l'aire du domaine limite par la courbe (C) et les droites d'équations
1 pt respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

5 - Pour out entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

1 pt **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. on pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

et pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, M(a,b) $=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2 - On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :
$(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(c,d)\in\mathbb{R}^2)\,;\ (M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$

0,5 pt Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$

3 - On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\,;\ \varphi(x+iy)=M(x,y)$ et on pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$

0,75 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

0,75 pt **b)** On déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.

0,5 pt **4 -** Montrer que la loi T est distributive par rapport a la loi $+$ dans E.

0,5 pt **5 -** On déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif .

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, (E_m) : $2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que le discriminant l'équation de (E_m) est : $\Delta=(2im)^2$.

0,5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points : A , B , M , M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i, m, Z_1 et Z_2

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $z_1=iz_2+1$

0,5 pt **b)** Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{z_2-m}{z_1-m}=i\dfrac{m-1}{m-i}$.

0,5 pt **b)** Montrer que si les points M , M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω , M , M_1 et M_2 sont cocycliques.(remarquer que : $\dfrac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

Exercice 3 : (3 pts)

On admet que le nombre 2017 est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5 .

1 - Soit le couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0,25 pt **a)** Vérifier que : $p < 2017$.

0,5 pt **b)** Montrer que p ne divise pas y

0,75 pt **c)** Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$ puis déduire que p divise 2016.

0,5 pt **d)** Montrer que : $p = 7$

1 pt **2 -** Déterminer ,suivant les valeurs de p, les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

Exercice 4 : (10 pts)

partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \qquad et \quad (\forall x \in\ ]0; +\infty[); \quad f(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

(on prendra $\|\vec{(i)}\| = \|\vec{(i)}\| = 2cm$)

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f^{'}(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction f

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminera .

0,5 pt **b)** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ (On prend $f(1) = 0,7$ et $4e^{-3} = 0,2$).

partie II :

Soit la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,25 pt **1 -** Montrer que la fonction F est continue sur $[0; +\infty[$.

2 - a) En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x \in\ ]0; +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$$

0,5 pt .

0,25 pt **b)** Déterminer : $\int_x^1 (1+\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}dt$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-1}$.

3 - a) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations

0,5 pt respectives , $x=0$, $x=2$ et $y=0$

4 - Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définit par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n = F(n)-F(n+2)$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel n il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n;n+2[$ tel que :

0,5 pt $u_n = 2(1+\frac{1}{v_n})e^{-\frac{1}{v_n}}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $2(1+\frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 2(1+\frac{1}{n+2})e^{-\frac{1}{n+2}}$

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

partie III :

0,25 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un réel $a_n\in\mathbb{R}^*$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

0,25 pt **c)** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $-\frac{1}{a_n} + ln(1+\frac{1}{a_n}) = -\frac{1}{n}$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall t\in[0;+\infty[)$; $1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $-\frac{x^2}{2} \leqslant -x+ln(1+x) \leqslant -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3 - Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 4$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $a_4\geqslant 1$, en déduire que : $a_n\geqslant 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}}\geqslant 2$).

b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1$ (On pourra utiliser les questions $1-c$ et $2-b$ de la

0,5 pt partie 3).

c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leqslant a_n$ (On pourra utiliser les questions $3-a$ et $3-b$ de la partie 3).

0,5 pt En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

0,5 pt **d)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : de Rattrapage juillet 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **2.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre .

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

0.75 pt **1 -** Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ de dimension 2.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

0.75 pt **b)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3 - On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)$

0.75 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 pt **c)** Montrer que $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\,\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$.

0.5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules $(n\in\mathbb{N}^*)$, dont n sont blanches et n sont noires.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.
La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

0.75 pt **1 -** Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2 - On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3 - Au cours d'un jeu , on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

0.5 pt **a)** déterminer la loi de probabilité de la variable X.

0.25 pt **b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 3 : (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

0.5 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.

2 - On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

0.5 pt Montrer que : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

3 - Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

0.75 pt Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ).

4 - Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$.

0.75 pt Montrer que si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

Exercice 4 : (10 pts)

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x} & ; x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$

0.5 pt **1 -** Montrer que f est continue sur l'intervalle I.

0.5 pt **2 - a)** Soit x dans I. Montrer que $\forall t \in [0; x]$; $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in I)$; $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

0.75 pt **c)** Montrer que f est dérivable à droite en 0.

0.5 pt **3 - a)** Sachant que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, Calculer $f^{'}(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0.25 pt **b)** Étudier les variations de f sur I.

Partie B :

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t; & x \in]0; +\infty[\\ g(0) = 1 \end{cases}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f(x) \leq g(x) \leq 1$.

0.75 pt **b)** Montrer que g est dérivable à droite en 0.

2 - Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \quad g^{'}(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$$

0.75 pt

0.25 pt **3 -** Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I.

4 - a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$

0.75 pt (Remarque que : $\forall x \in]0; +\infty[$; $\quad 0 < \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$)

0.5 pt **b)** Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$

Partie C :

0.75 pt **1 -** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0;1[$.

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b) partie A)

0.75 pt **b)** Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\quad \left|g'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}$

3 - Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; pour tout n dans $\mathbb{N}$

0.75 pt **a)** Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **7 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **3 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(x,y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0,5 pt **2 -** Vérifier : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right) : M(x,y)\times M(x',y')=M\left(xx'-yy',xy'+yx'\right)$

3 - On pose : $E^*=E-\left\{M(0,0)\right\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,25 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0,75 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$

0,5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5 - On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0,5 pt **a)** Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

0,5 pt **b)** En déduire qu'aucun élément de E n'admet pas de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

Exercice 2 : (3 pts)

partie A :

Soit (a,b) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise a^3+b^3

0,25 pt **1 -** Montrer que $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times 57$)

0,25 pt **2 -** Montrer que : 173 **divise** a si et seulement si 173 **divise** b

0,25 pt **3 -** On suppose que 173 **divise** a. Montrer que 173 **divise** $a+b$

4 - On suppose que 173 **ne divise pas** a

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de **FERMAT**, montrer que : $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0,5 pt **c)** En déduire que 173 **divise** $a+b$

partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E)\ x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose $x+y=173k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

0,5 pt **2 -** Montrer que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice 3 : (3.5 pts)

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0,5 pt **2 -** Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3 - On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0;\pi[$

0,5 pt **a)** Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0,5 pt **b)** Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4 - Soit θ un réel donné de lintervalle $]0;\pi[$

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1)t+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1)=0$

0,5 pt **a)** Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z = 2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$

0,5 pt **b)** Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exercice 4 : (7 pts)

partie A :

0,5 pt **1 -** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $\mathrm{e}^{\theta} = \dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

2 - En déduire que :

0,25 pt **a)** $\left(\forall x > 0\right)$; $1-x < \mathrm{e}^{-x}$

0,25 pt **b)** $\left(\forall x > 0\right)$; $x+1 < \mathrm{e}^{x}$

0,25 pt **c)** $\left(\forall x > 0\right)$; $0 < \ln\left(\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\right) < x$

partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$ si $x>0$ et $f(0)=1$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $\left(\forall x \geq 0\right)$; $x - \dfrac{x^2}{2} \leq -\mathrm{e}^{-x}+1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

0,5 pt **b)** En déduire que : $\left(\forall x \geq 0\right)$; $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leq \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \leq \dfrac{x^2}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que : $\left(\forall x > 0\right)$; $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$

0,75 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que f est dérivable en tout point de $]0;+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x > 0\right) \; ; \; f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1-x\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^2}$$

0,5 pt **b)** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

partie C :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln\left(f(u_n)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0,5 pt **3 -** Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(u_n)\right) = x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I.

0,25 pt **c)** Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, montrer que pour tout x de I on a : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\mathrm{d}t = 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 pt **b)** Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **6.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On a deux boites U et V. La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U : Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V, si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V.

Soient les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »
B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »
R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »
B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

0,5 pt **1 -** Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U.

0,5 pt **2 - a)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\dfrac{13}{21}$

0,5 pt **4 -** En déduire la probabilité de l'événement R_V.

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose : $M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(z) \,/\, z \in \mathbb{C}\}$

1 - On munit E de la loi de composition interne * définie par :
$(\forall z \in \mathbb{C})\ (\forall z' \in \mathbb{C}) \quad : \quad M(z) {}^* M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$

1 pt Montrer que $(E, {}^*)$ est un groupe commuatif.

2 - On considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E

1 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*, \times)$ dans $(E, \times)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(E - \{M(0)\}, \times)$ est un groupe commutatif.

1 pt **3 -** Montrer que $(E, {}^*, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad (E) \ : \ z^2 - (1+\sqrt{3})(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i} = 0$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left[(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})\right]^2$

1 pt **b)** Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

0,75 pt **a)** Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B

0,5 pt **b)** Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z \neq b$

Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \dfrac{2}{|z-b|^2}$

0,75 pt **c)** En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$

Exercice 4 : (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}$

et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,75 pt **1 - a)** Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n).

0,75 pt **b)** Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0; +\infty[$ puis donner son tableau de variation.

0,5 pt **c)** Construire (C_2)

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

0,5 pt **b)** Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\ ;\ \ln(x) < x$

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5 - Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\mathrm{d}x$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists c_n \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}])\quad : \quad I_n = f_n(c_n)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n; +\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g_n'

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n) \quad ; \quad g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0) \quad ; \quad \ln(1+t) \leq t$)

0,25 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n;+\infty[$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2) \ (\exists!\ u_n \geq n) \quad : \quad \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)} dt = 1$

4 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b).

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)} dt$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

0,25 pt **a)** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pt **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \in \mathbb{R}$)

0.25 pt **c)** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0,5 pt **a)** Déterminer le nombre complexe b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

0,5 pt **d)** Soit C un point . d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A.
Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

0,25 pt **1 -** Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** Déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :
$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice 3 : (4pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif .

Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$. E est muni de la loi de composition interne T définie par : $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x)TM(y) = M(x + y + 1)$

1 - On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(x) = M(x-1)$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).

0,5 pt **b)** Montrer que (E,T) est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+\mathrm{xy})$.

0,5 pt **b)** En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans E.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " T " dans E.

0,5 pt **d)** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (6.5pts)

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \;\; et \quad \forall x > 0 \quad f(x) = x\left(1+\ln^2 x\right)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0,25 pt **b)** Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y = x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe (C_f). $\left(\text{On prend } e^{-1} \approx 0,4\right)$.

Partie II :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = e^{-1} \quad et \quad (\forall n \in \mathbb{N})\;;\; u_{n+1} = f(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; e^{-1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1} \leqslant l \leqslant 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de l.

Partie III : Soit la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\displaystyle\int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x > 0)$ $\quad F(x) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3x^2}{4} - \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \dfrac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\quad (\forall t \in [x, 2x])$ $\quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

0,75 pt **2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .

0,5 pt **3 - a)** Montrer que s : $(\forall t > 0)$ $\quad -1 \leqslant \dfrac{e^{-t} - 1}{t} \leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\quad -1 \leqslant \dfrac{g(x) - \ln 2}{x} \leqslant \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE

Session : Rattrapage juillet 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique et Probabilités** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** .... **6 points**
- Exercice 5 : **Analyse** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4 pts)

Partie I : On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne * définie par : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$; $x^*y = x + y - e^{xy} + 1$

0.25 **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

0.5 **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

2 - Sachant que l'équation : $(E)\ :\ 3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions distincts a et b dans $\mathbb{R}$,

0.5 Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie II : On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbf{C}^*, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \left\{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

0.5 **1 -** Montrer que $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0.5 **2 -** Montrer que $\mathbf{F}$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

3 - Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbf{F}$ définie par : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$; $\varphi(x + \mathbf{iy}) = M(x,y)$

0.5 **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbf{F}, \times)$

0.25 **b)** On pose $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} - \{M(0,0)\}$. Montrer que : $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right) = F^*$

0.25 **c)** En déduire que $(\mathbf{F}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0.75 **4 -** Montrer que $(\mathbf{F}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Partie I : Soit a un élément de $\mathbf{Z}$.

0.5 **1 -** Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$.

2 - On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ x^{2015} \equiv 2[13]$ et x une solution de (E).

0.5 **a)** Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 **b)** Montrer que : $x \equiv 7[13]$

0.5 **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7 + 13k/k \in \mathbb{Z}\}$

Partie II : Considérons une urne U contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50 indiscernables au toucher.

1 - On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant

0.5 un nombre solution de l'équation (E).

0.5 **2 -** On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation(E) ?

Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathbf{E}) : \mathrm{z}^2 - (\mathbf{1}+\mathbf{i})\mathrm{z} + \mathbf{2} + \mathbf{2i} = \mathbf{0}$

0.25 **1 - a)** Vérifier que $\Delta = (\mathbf{1} - \mathbf{3i})^2$ est le discriminant de l'équation (E)

0.5 **b)** Déterminer $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra $\mathbf{z}_1$ l'imaginaire pur)

0.5 **c)** Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2 - Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$

On considère les points **A** et **B** d'affixes respectifs $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$.

0.25 **a)** Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point **E**, milieu du segment $[\mathbf{AB}]$.

b) Soit **R** la rotation de centre **A** d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et c l'affixe de point C tel que $\mathbf{R}(\mathbf{E}) = \mathbf{C}$.

0.5 Montrer que : $\mathbf{z}_\mathrm{C} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}$.

1 **c)** Soit **D** le point d'affixe $\mathbf{d} = \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{\mathbf{z}_2 - \mathbf{d}}{\mathbf{c} - \mathbf{d}}\right) \times \left(\dfrac{\mathbf{c} - \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 4 : (6 pts)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1 - a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats
0.75 obtenus.

0.75 **b)** Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.25 **c)** Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 **2 - a)** Montrer que le point $I_n\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathbb{C}_n)$.

0.5 **b)** Construire la courbe (C_1) ,

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_1) et les droites d'équations respectives :
0.75 $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

0.75 **3 - a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique $u_n \in]\,0, n\,[$.

0.5 **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall x \in \mathbb{R}); f_{n+1}(x) < f_n(x)$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est conver-
0.75 gente .

0.5 **d)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ et $g(0)=1$

0.5 **1 -** Montrer que la fonction g est paire.

0.75 **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0,+\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.5 **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

0.75 **b)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, On a : $|g(x)|\leq\frac{2}{x}$ puis déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0.5 **4 - a)** Montrer que : $(\forall x>0);0\leq\int_x^{3x}\frac{1-\mathrm{cost}}{\mathbf{t}}\mathrm{dt}\leq\mathbf{2x}$

(Remarquer que : $(\forall \mathrm{t}>0)$; $1-\cos\mathbf{t}\leq\mathbf{t}$)

0.5 **b)** Vérifier que $(\forall x>0);g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\mathrm{cost}-1}{t}dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim_{x\to 0^+}\mathbf{g}(x)$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **8 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **2 points**

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333....31}_{n fois}$ (n fois le chiffre 3)

0,5 pt **1 -** Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0,5 pt **2 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0,75 pt **3 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

0,75 pt **4 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{10k+1} \equiv 0[31]$, puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1} a_{30k+1}

0,5 pt **5 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$;si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dunité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b) \setminus (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$

0,75 pt **2 -** Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

3 - On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :$A * B = A \times N \times B$ avec : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$

0,25 pt **b)** On pose :$E^* = E - \{0\}$ Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0,5 pt **c)** Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **4 -** Montrer que :$\left((A,B,C) \in E^3\right)$ $A * (B + C) = A * B + A * C$

0,5 pt **5 -** En déduire de ce qui précède que $(E, +, *)$est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) $z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

0,25 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

0,75 pt **b)** Écrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

2 - On considère les points I , J , T_1 , T_2 et A d'affixes respectives 1 , -1 , $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

0,5 pt **a)** Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0,25 pt **b)** Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$.Montrer que les points O , K et A sont alignés.

0,25 pt **c)** En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$

3 - Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,25 pt **a)** Donner l'expression complexe de la rotation r

0,5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$

0,25 pt **c)** Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

0,25 pt **4 -** Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.

0,25 pt **5 -** Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 4 : (8 pts)

I)- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\exists \alpha \in]0,1[)$ $f'(\alpha) = 0$

0,5 pt **d)** En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$

II) - On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall t \in [1,+\infty[)$ $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

1 pt **b)** Montrer que : $(\forall t \in [1,+\infty[)$ $F(1) - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \dfrac{1}{4}(\ln x)^2$

(On remarquera que :$F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}dt$)

1 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$

0,25 pt **b)** Étudier les variations de F sur $[0;+\infty[$

III)-

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall t \in]0,+\infty[) \ -t\ln t \leq \dfrac{1}{e}$

0,25 pt **b)** Montrer que :$(\forall t \in [0,+\infty[) \ f(t) \leq \dfrac{1}{e}$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in]0,+\infty[) \ F(x) < x$

2 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in]0;1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} = F(u_n)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_n \in]0,1[$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$; on pose : $L(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$

025 pt **a)** Montrer que L est continue sur $[0;+\infty[$

025 pt **b)** Calculer $L(x)$ pour $x > 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$

3 - Pour tout entier naturel non nul $n \geq 1$, on pose :$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

0,5 pt Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE

Session : Rattrapage juillet 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Probabilité.** .... **2 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique.** .... **1 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.75 points**
- Exercice 4 : **Nombres complexes** .... **3.25 points**
- Exercice 5 : **Analyse** .... **7.5 points**
- Exercice 6 : **Analyse** .... **2.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2 pts)

Considérons trois urnes U, V et W.

L'urne **W** contient 3 boules indiscernables au toucher : 1 Boule noire et 2 boules blanches. chacune des urnes **U** et **V** contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 Boule noires et 2 boules blanches.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne **W** : Si elle est blanche, on la met dans l'urne **U**, puis on tire deux boules simultanément de l'urne **U**, Si elle est noire, on la met dans l'urne **V**, puis on tire deux boules

0.25 **1 -** Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne U ?

0.75 **2 -** Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ?

3 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience.

1 Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

Exercice 2 : (1 pts)

Soit **n** un nombre entier naturel non nul.

Posons $c_n = 2.10^n - 1$ et $b_n = 2.10^n + 1$

0.5 **1 -** Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$, puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ représente le plus grand diviseur commun de **a** et **b**)

0.5 **2 -** Déterminer un couple $(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $\mathbf{b_n x_n + c_n y_n = 1}$

Exercice 3 : (3.75 pts)

On pose $\mathbf{J} =]-1, 1[$

<u>Partie I :</u> Soient **a** et **b** deux éléments de l'intervalle **J**, on pose : $\mathbf{a * b} = \dfrac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{1+ab}}$

1 - Vérifier que $\left(\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{J}^2\right) ; \mathbf{1 + ab > 0}$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition

0.75 interne dans **J**.

0.5 **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans **J**.

0.25 **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans **J** qu'on déterminera.

0.5 **c)** Montrer que $(\mathbf{J}, *)$ est un groupe commutatif.

<u>Partie II :</u> On considère l'application **f** définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{e^{\mathbf{x}} - 1}{\mathrm{e}^{\mathbf{x}} + \mathbf{1}}$

0.75 **1 -** Montrer que la fonction **f** est une bijection de $\mathbb{R}$ vers **J**.

2 - Soit **g** la bijection réciproque de l'application **f** (la détermination de **g** n'est pas demandé)

0.5 Quel que soient **x** et **y** de **J**, on pose : $\mathbf{x \perp y = f(g(x) \times g(y))}$

Montrer que **f** est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbf{J}^*, \perp)$ tel que $\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - \{0\}$.

0.5 **3 -** On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbf{J}$.

Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

0.5 **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2 + i = 0}$ (a est la solution de l'équation telle que $\mathrm{Re}(\mathbf{a}) > \mathbf{0}$)

0.5 **2 - a)** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1 + a}$.

0.25 **b)** En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

0.5 **c)** Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1-a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, on considère les points $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et M' d'affixes respectifs $\mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{z}$ et $\mathbf{z}'$ tels que $\mathbf{zz' + i = 0}$.

0.25 **1 -** Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\bar{\mathbf{z}}$, conjugué de $\mathbf{z}$.

Montrer que les droites $(\mathbf{ON})$ et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 **2 - a)** Montrer que : $\mathbf{z' - a = i\frac{z-a}{az}}$.

0.5 **b)** Montrer que si $\mathbf{z \neq -a}$, alors : $\mathbf{z' \neq -a}$ et $\mathbf{\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}}$.

0.5 **3 -** On suppose que les points A, B, M sont non alignés.

Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

Exercice 5 : (7.5 pts)

Partie I : Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $]\mathbf{0}, +\infty[$ par : $\mathbf{f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}}$

$(\mathbf{C_f})$ est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}; \vec{\mathbf{j}})$ unité 1 cm.

1 **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)}$ et $\lim\limits_{\mathbf{x\to+\infty}} \mathbf{f(x)}$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

0.75 **2 -** Calculer $\mathbf{f'(x)}$, puis en déduire les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $]\mathbf{0}, +\infty[$.

3 - Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $\mathbf{g_n}$ définie sur $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ par : $\mathbf{g_n(x) = f(x) - x^n}$

0.25 **a)** Montrer que $\mathbf{g}_\mathrm{n}$ est strictement décroissante sur $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$.

0.5 **b)** En déduire que pour tout entier $\mathbf{n} \geq 1$ il existe $\alpha_n \in]\mathbf{0}, 1[$ unique, tel que :

$\mathbf{f}(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.

0.5 **c)** Montrer que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$: $\mathbf{g}_\mathrm{n}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{n}+1}) < \mathbf{0}$.

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

0.75

4 - On pose que : $\mathbf{l} = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

0.25 **a)** Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leq \mathbf{l} \leq 1$.

0.25 **b)** Vérifier que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,; \mathbf{h}\left(\alpha_{\mathbf{n}}\right) = \mathbf{n}$ avec $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln \mathbf{x})}{\ln \mathbf{x}}$.

0.5 **c)** Montrer que : $\mathbf{l} = 1$.

0.25 **d)** En déduire que $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = \mathbf{0}$.

Partie II :

0.25 **1 - a)** Étudier le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{x}}^{1} \mathbf{f(t)dt}$ pour tout x de $]\mathbf{0}, +\infty[$

0.5 **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$(\forall x > 0);\ \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{\mathbf{x}}\ln x$

c) En déduire, en $\mathbf{cm}^2$, l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathbf{C_f})$ et les droites d'équations

0.25 respectives $x = 1, x = e^2$ et $y = 0$

2 - Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $\mathbf{U_n} = \dfrac{1}{\mathbf{n}}\displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{k=n}} \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\right)$

0.5 **a)** Montrer que pour tout entiers naturels $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ tels que : $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$ et $\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n-1}$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 **b)** Montrer que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,;\quad \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{U}_n = 4$

Exercice 6 : (2.5 pts)

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $[\mathbf{0}, +\infty[$ par : $\mathbf{g(x)} = \displaystyle\int_{\sqrt{\mathbf{x}}}^{1} \mathbf{e^{-t^2}dt}$.

1 - Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $\mathbf{k(x)} = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}d\mathbf{t}$.

0.25 **a)** Vérifier que pour tout x de $[\mathbf{0}, +\infty[$, ona : $\mathbf{g(x)} = -\mathbf{k}(\sqrt{\mathbf{x}})$.

0.5 **b)** Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est continue sur $[\mathbf{0}, +\infty[$ et dérivable sur $]\mathbf{0}, +\infty[\cdot$

c) Calculer $\mathbf{g'(x)}$ pour tout $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, puis en déduire que g est strictement décroissante sur

0.5 $[\mathbf{0}, +\infty[$

0.75 **2 - a)** Montrer que : $(\forall \mathrm{x} > 0);\ \dfrac{\mathbf{g(x)} - \mathbf{g(0)}}{\mathbf{x}} < -\dfrac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}\mathrm{e}^{-\mathbf{x}}$

b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0 et donner une interprétation

0.5 graphique du résultat obtenu.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Analyse** **6.5points**
— Exercice 5 : **Analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

0,25 pt **a)** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pt **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \in \mathbb{R}$)

0.25 pt **c)** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$

2 - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0,5 pt **a)** Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

0,5 pt **d)** Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

0,25 pt **1 -** Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :

$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ et en déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

Exercice 4 : (3 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif .

Pour tout réel x on pose $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$.

E est muni de la loi de composition interne T définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)TM(y)=M(x+y+1)$$

1 - On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \varphi(x)=M(x-1)$$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).

0,5 pt **b)** Montrer que (E,T) est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+\mathrm{xy})$.

0,5 pt **b)** En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans E.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " T " dans E.

0,5 pt **d)** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (6.5pts)

Première partie : Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=0\ \ et\ f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right)\ \ pour\ (x>0)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x>\mathbf{0}$, en déduire que f est strictement croissante sur $[\mathbf{0},+\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0,25 pt **b)** Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite d'équation $y=x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe (C_f). $\left(\text{On prend } e^{-1}\approx 0,4\right)$.

Deuxième partie :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_{\mathbf{0}} = e^{-1} \; et \; (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f\left(u_n\right)$$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{-1} \leq u_n < 1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1} \leq l \leq 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de l.

Troisième partie : Soit la fonction numérique F définie sur $[\mathbf{0}, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{dt}$

1 - a) Montrer que la fonction $H : x \longmapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction
0,25 pt $h : x \longmapsto \quad x\ln x$ sur $]\ 0, +\infty[$.

b) Montrer que :

$$(\forall x > 0); \int_1^x \ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$$

0,5 pt

c) En déduire que :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

0,5 pt

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \text{ et } g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \text{ pour } x > 0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

2 - Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour
0,75 pt $x > 0$. .

3 - a) Montrer que : $\quad (\forall t > 0) \quad -1 \leq \dfrac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des
0,5 pt accroissements finis).

0,5 pt **b)** Montrer que : $\quad (\forall x > 0) \quad -1 \leq \dfrac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **8.25 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **1.75 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

les parties A et B sont indépendantes

partie A :

Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1;2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,5 pt **1 -** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G

2 - On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.
On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ vers G définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

0,75 pt **a)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

partie B :

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel, et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

0,5 pt **b)** Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ en déduire que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.

2 - Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a,b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

0,75 pt Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

partie A :

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 pt **1 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0,5 pt **2 -** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

partie B :

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

Etape 1 : On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

Etape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

Etape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : N ńla boule tirée à l'étape 1 est noireż

R ńla boule tirée à l'étape 1 est rougeż

E ńtoutes les boules tirées à l'étape 3 sont noiresż

0,5 pt **1 -** Montrer que : $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

0,5 pt **2 -** Calculer $p(E)$

0,5 pt **3 -** ~~Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est réalisé.~~

Exercice 3 : (3.5 pts)

partie A :

Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ \ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0,5 pt **1 -** Montrer que : $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})$ sont les deux solutions de l'équation (E)

2 - On prend : $a = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0,5 pt **a)** Montrer que : $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 pt **b)** En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2

partie B :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$

On admet que $Re(a) < 0$, et on considère les points $A(a)$, $B(-\mathrm{i})$, $C(i)$ et $B'(1)$

0,5 pt **1 -** Déterminer en fonction de a, les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$

0,5 pt **2 -** Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

0,5 pt **3 -** Calculer $\dfrac{a' - c'}{a - 1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$

Exercice 4 : (8.25 pts)

1 - Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2\ln^2(x)}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Montrer que f est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0

(On pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2(x) = 0$)

0,5 pt **c)** Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\left(\forall x > 0\right)\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)}{\left(1 + x^2\ln^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$

0,5 pt **d)** Donner le tableau de variation de la fonction f

2 - Soit F la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
et soit (C_F) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

0,25 pt **a)** Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$

0,5 pt **b)** Montrer que : $\Big(\forall t\geq e\Big)$; $t\ln(t)\leq\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}\leq\sqrt{2}t\ln(t)$

0,75 pt **c)** Montrer que : $\Big(\forall x\geq e\Big)$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\big(\ln(x)\big)\leq\displaystyle\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t\leq\ln\Big(\ln(x)\Big)$

0,5 pt **d)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

0,5 pt **e)** Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 pt **f)** Construire (C_F) (on prend $F(1)\approx 0,5$ et $F\Big(\dfrac{1}{e}\Big)\approx 0,4$)

3 - Pour tout x de $[0;+\infty[$ on pose $\varphi(x)=x-F(x)$

0,75 pt **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ et étudier les variations de φ

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $\varphi(x)=n$ admet une seule solution α_n dans l'intervalle $[0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que : $\Big(\forall n\in\mathbb{N}\Big)$; $\alpha_n\geq n$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0,5 pt **4 - a)** Montrer que : $\Big(\forall n\geq 1\Big)$; $0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$
(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0,5 pt **b)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

Exercice 5 : (1.75 pts)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $\Big(\forall n\geq 1\Big)$; $v_n=n^2\Big(\ln\Big(\arctan(n)\Big)-\ln\Big(\arctan(n+1)\Big)\Big)$

0,5 pt **2 -** En utilisant le théorème des accroissements finies , montrer que :
$\Big(\forall n\geq 1\Big)$ $\Big(\exists c\in\,]n;n+1[\Big)$; $v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0,5 pt **3 -** Montrer que : $\Big(\forall n\geq 1\Big)$; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{\Big(1+(n+1)^2\Big)\arctan(n+1)}$

0,5 pt **4 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétique** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **5.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **4.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

I- Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,75 pt **1 -** Calculer $I - A$ et A^2.

0,5 pt **2 -** En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera.

II- Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1; +\infty[$, on pose $a * b = \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2}$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $*$ et une lois de composition interne dans I.

3 - On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^{*+} & \to & I \\ & & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers $(I, *)$

0,25 pt **b)** En déduire la structure de $(I, *)$.

0,75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1 + 2^m} \ / \ m \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(I, *)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

I- Soit a est un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0$$

0,75 pt **1 -** Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\Longleftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul

On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectives $1, \ 1 + i, \ c, \ ic$ et z.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que A, D et M sont alignés $\Longleftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

0,5 pt **b)** Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Longleftrightarrow (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$.

2 - Soit h l'affixe du point H, le projeté orthogonal du point O sur (AD).

0,75 pt **a)** Montrer que : $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0,5 pt **a)** Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 pt **b)** Sachant que $(-1; -1)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2 - Soit n un entier naturel non nul premier avec 5.

0,5 pt Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3 - Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y\,[4]$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[5]$.

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[10]$.

4 - Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E).

0,25 pt Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

Exercice 4 : (5.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

0,5 pt **2 - a)** Étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D).

0,75 pt **3 -** Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0,75 pt **4 -** Construire la courbe (C_3). (On prend $f_3(-0,6) \simeq 0$ et $f_3(-1,5) \simeq 0$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

0,25 pt **5 - a)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ on a : $\dfrac{e}{n} < \ln n$

1 pt **b)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x \leqslant -\ln n$ et $\dfrac{-e}{n} \leqslant y_n \leqslant 0$.

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

6 - On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ; \ x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

0,25 pt **b)** Vérifier que pour $n \geqslant 3$ on a : $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$.

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$.

Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(0)=1 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \text{ si } x>0$$

0,25 pt **1 -** Soit x un élément de $[0;1]$, montrer que pour tout t de $[0;x]$ on a : $\dfrac{1}{1+2x}\leqslant\dfrac{1}{1+2t}\leqslant 1$

2 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t.$

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{1}{1+2x}\leqslant F(x)\leqslant 1$, et en déduire que F est continue à droite en 0.

0,75 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0\,;1]$ on a :

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t$$

4 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F'(x)=-\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t$

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{-4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

0,75 pt **c)** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$ montrer que

$$\frac{-4}{3}\leqslant\frac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0,25 pt **d)** Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **7.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **2.5 points**

Exercice 1 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

partie I :

Pour tous a et b de l'intervalle $I = [1; +\infty[$, on pose : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

0.5 pt **1 -** Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0.25 pt **3 -** Montrer que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2 - On considère l'application φ définie par : $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & M(x) \end{array}$

0.5 pt **a)** Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

0.5 pt **b)** En déduire la structure de $(E, \times)$.

0.75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous groupe de $(E, \times)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E) :\ z^2 - 4(1 + \frac{2}{3}i)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E).

0.25 pt **b)** Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$.

0.5 pt **2 -** soit θ un argument du nombre complexe z_1.

Ecrire en fonction θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$.

partie II :

On considère trois points A, B et Ω différents deux à deux et d'affixes respectifs a, b et ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$ et soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b - \omega)$.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

0.5 pt **c)** Montrer que $\dfrac{p-a}{q-b} = \left(\dfrac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

2 - On suppose que $\left(\dfrac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0.25 pt **a)** Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0.75 pt **b)** Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$ et déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

Exercice 3 : (3 pts)

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que 503 est un nombre premier.

0.75 pt **b)** Vérifier que : $7^{502} \equiv 1[503]$ puis déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

2 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 49x - 6y = 1$.

0.5 pt Sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

3 - On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

0.25 pt **a)** Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est une solution de l'équation (E).

0.25 pt **b)** Déduire que N est divisible par 2012.

1 pt **c)** Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

Exercice 4 : (7.5 pts)

partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

0.5 pt **1 -** Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

0.5 pt **2 -** Montrer que pour tout nombre réel x, On a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.

0.5 pt **3 -** Dresser le tableau de variation de la fonction f.

1 pt **4 -** Construire $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction $-f$ dans le même repère $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(On admet que -0.7 est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$).

0.75 pt **5 -** Montrer que pour tout x de $]-1; 0[$, on a : $0 < f'(x) < g(e)$.

0.75 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $-1 < \alpha < 0$.

7 - On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = -f(U_n) \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 0 \end{cases}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ -1 \leq U_n \leq 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |U_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|U_n - \alpha|$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |U_n - \alpha| \leq (g(e))^n$.

0.5 pt **d)** Sachant que : $g(e) < 0.6$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

0.25 pt **1 -** Calculer $F(1)$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

0.5 pt **b)** Déduire que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $F(x)=0$.

0.5 pt **3 -** En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$F(x)=\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

0.25 pt **4 -** Montrer que $(\forall x>0);\ \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$

0.5 pt **5 -** Déduire que $(\forall x>0);\ \ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **2.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Exercice d'analyse** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Exercice d'analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (4 pts) (Les deux parties sont indépendantes)

Partie I : Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$ $\quad A^1 = A$ $\quad A^2 = A \times A$ $\quad A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\,;\ \ A^{2k} = I$.

0,5 pt **2 -** Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Partie II : Soit a un nombre réel .

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0; +\infty[$ on pose : $x * y = (x-a)(y-a) + a$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

0,5 pt **b)** Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.

0,5 pt **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pt **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère l'application : $\begin{array}{cccc} \phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

0,5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^2 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{11............1}_{2010 \text{ fois } 1}$

0,25 pt **1 -** Montrer que le nombre N est divisible par 11 .

0,75 pt **2 - a)** Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$.

0,5 pt **b)** Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.

0,5 pt **c)** En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0,5 pt **3 -** Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Première Partie : Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu z : (E_m) : $z^2 + [(1-\mathrm{i})m - 4]z - \mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4 = 0$.

0,5 pt **1 -** Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation $(E - m)$.

2 - Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m) .

0,5 pt **a)** Montrer que : $z_1.z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1+\mathrm{i})m - 3 = 0$.

1 pt **b)** Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1.z_2 = 1$.

<u>Deuxième Partie :</u> Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$. On considère l'application S qui au point M, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' , tel que : $z' - 1 = -(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

0,25 pt **b)** Montrer que : $z'' = \mathrm{i}z + 2$

2 - Soit A le point d'affixe 2 . On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0,5 pt **a)** Calculer : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A , Ω , M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 4 : (6.5 pts)

<u>Première Partie :</u> Étude des solutions positives de l'équation(E) : $\mathrm{e}^x = x^n$ **avec** n **un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que pour tout x de l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ on a : $\mathrm{e}^x = x^n \iff n = f(x)$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 .

1,5 pt **3 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pt **4 -** Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **5 -** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

0,5 pt **6 -** Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **7 -** Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1 < a_n < \mathrm{e} < b_n$.

<u>Deuxième Partie :</u> Étude des deux suites $(a_n)_{n\geq 3}$ **et** $(b_n)_{n\geq 3}$ **.**

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $\dfrac{1}{n} < \ln(a_n) < \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = \mathrm{e}$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère le fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \geq 1)\,;\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$, en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :
$(\forall x \geq 0)\quad F^{'}(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x)$.

3 - On considère la fonction G définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F\left(\tan x\right)\ \ si\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ G(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

0,75 pt **b)** Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $F^{'}(c) = 0$ et que :
$F(c) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2c^2}}{2c}$.

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$)

4 - On considère la fonction numérique H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = F^{'}(x)\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variations de F .

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **2.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **4 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **6 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5pts)

Soit x et y deux nombres de l'intervalle $I =]0,1[$, on pose $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 pt **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.

0.5 pt **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère les deux ensembles suivants : $\mathbb{H} = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{K} = \left\{\dfrac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

0.5 pt **a)** Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

b) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$

0.5 pt Montrer que l'application φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(I, *)$.

0.5 pt **c)** Déduire que $(\mathbb{K}, *)$ est un sous groupe du groupe $(I, *)$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit x un nombre entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2[19]$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$.

2 - Soit d le pgcd des nombres 18 et $x+1$

0.75 pt **a)** Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $d = 18$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $x \equiv 17[18]$.

Exercice 3 : (4 pts)

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

0.5 pt **1 -** Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0.5 pt **3 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B, et C d'affixes respectifs $a = -1 + 3i$, $b = -2i$ et $c = 2 + i$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

2 - On considère la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation $\mathcal{R}_2$ de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation $\mathcal{R}_1$ et M_2 son image par la rotation $\mathcal{R}_2$

0.5 pt **a)** Vérifier que l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}_1$ est $z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) z - \sqrt{3} - i$.

0.5 pt **b)** Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z.

0.5 pt **c)** Déduire que le point I, le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On prend : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1\text{cm}$)

1 pt **1 -** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

0.25 pt **2 - a)** Donner le tableau de variation de la fonction f.

0.75 pt **b)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer, puis donner le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

0.75 pt **3 -** Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de la fonction f^{-1} dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **4 - a)** Calculer l'intégral $\int_1^{1+e} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. (On peut poser : $t = f^{-1}(x)$)

0.5 pt **b)** Déduire l'aire du domaine plan limité par (C^{-1}) et les droites $x = 1$, $x = e + 1$ et $y = x$.

5 - pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation (E_n) : $x + \ln x = n$

0.25 pt **a)** Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n.

0.5 pt **b)** Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

0.5 pt **6 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ f(x_n) \le f(n)$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ x_n \le n$.

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ n - \ln n \le x_n$

0.5 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$.

Exercice 5 : (4 pts)

Soient n un entier non nul et f_n une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel α_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que pour $t \neq 1$, On a : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$.

0.5 pt **b)** Déduire que $\alpha_n + \dfrac{(\alpha_n)^2}{2} + \dfrac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$.

0.75 pt **c)** En déduire que $l = 1 - e^{-1}$, où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3,5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** .... **6,25 points**
- Exercice 5 : **Analyse** .... **3,75 points**

Exercice 1 : (3,5 pts)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

On munit l'ensemble $I =]0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

0,5 pt **1 -** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur I.

0,25 pt **2 -** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I que l'on déterminera .

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe commutatif . ($I\backslash\{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1)

0,25 pt **b)** Montrer que $J =]1, +\infty[$ est un sous-groupe de $(I\backslash\{1\}, *)$.

4 - On munit I de la loi de composition interne $\times$($\times$ est la multiplication dans $\mathbb{R}$)

0,25 pt **a)** Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi x.

0,5 pt **b)** Montrer que $(I, \times, *)$ un corps commutatif .

PARTIE 2 : On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 pt **1 -** Calculer A^2 et A^3.

0,5 pt **2 -** En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 pt **1 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(3 + 4i)$.

0,5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \quad 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0.$$

2 - Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\mathrm{Re}(a) < 0$ et soient les deux points A et B d'affixe respectifs a et b dans le plan complexe .

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$.

0,75 pt **b)** En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A.

3 - Soient C un point d'affixe c du plan différent du point A et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$

0,5 pt **a)** Déterminer c en fonction de d tel que d est l'affixe du point D.

0,5 pt **b)** Déterminer en fonction de c le nombre complexe l l'affixe du point L.

0,75 pt **c)** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{l\ - c}{a\ - c}\right)$, En déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 : (3 pts)

1 pt **1 -** Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2+1 \equiv 0[5]$.

2 - Soit p un nombre premier tel que $p = 3+4k$ où k est un nombre entier naturel .

Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2+1 \equiv 0[p]$.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1[p]$

0,5 pt **b)** Montrer que n et p sont premiers entre eux .

0,75 pt **c)** En déduire que : $\left(n^2\right)^{2k+1} \equiv 1[p]$

0,5 pt **d)** Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel n vérifiant : $n^2+1 \equiv 0[p]$.

Exercice 4 : (6.25 pts)

Partie 1 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 -** Calculer la limite de f en $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,75 pt **3 -** Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe à l'origine du repère puis construire la courbe (C). (on prend $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm Et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de (C)).

0,5 pt **4 -** Calculer l'intégrale $a = \int_0^1 f(x)dx$ puis en déduire, En cm^2 l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C), les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Partie 2 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction numérique f_n définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$.

0,25 pt **b)** En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **3 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f_n(u_n) = 1$.

0,25 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(u_n) = u_n$.

0,75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente .

5 - On pose : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

0,25 pt **a)** Montrer que : $0 < l \leq 1$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad -\dfrac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(4)}{n}$.

0,5 pt **c)** En déduire que : $l = 1$.

Exercice 5 : (3,75 pts)

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

0,25 pt **1 -** Montrer que F est impaire .

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 pt **c)** En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 pt **3 - a)** En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer :

$$(\forall x > 0)(\exists c \in]x, 2x[) : \quad F(x) = \frac{x}{\ln(1+c_x^2)}.$$

0,25 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0) \quad \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

0,75 pt **c)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

0,75 pt **d)** Montrer que : $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$. en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.

0,5 pt **b)** En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **c)** Pour x un réel, déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0,5 pt **d)** Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5X = B$ où $A = M(2)$ et $B = M(12)$ et $A^5 = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{5 \text{ fois}}$

0,5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble $F = \left\{ M\Big(\ln(x)\Big) / x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ est un sous-groupe de $(E, \times)$

Exercice 2 : (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ \ z^2 - 4\mathrm{i}z - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$

0,5 pt **a)** Vérifier que le nombre $a = 1 + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

0,5 pt **b)** En déduire b la deuxième solution de l'équation (E)

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

0,75 pt **b)** Ecrire a sous forme trigonométrique

3 - On considère les points A , B et C dont les affixes sont respectivement a, b et $c = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$ Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$

0,5 pt **a)** Déterminer ω, l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

0,5 pt **b)** Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ)

0,75 pt **c)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête lexpérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

0,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$

0,5 pt **c)** Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0,5 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x)=\dfrac{13}{11}$

0,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (10 pts)

partie A : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\ 0\leq x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à gauche au point 1.

0,5 pt **2 -** Etudier la dérivabilité de f à gauche au point 1.

0,75 pt **3 -** Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$

0,75 pt **b)** Construire la courbe (C) en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
(on prendra $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

0,5 pt **5 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha)=\alpha$

0,25 pt **6 - a)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers I

0,5 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I.

partie B : On pose $I_0=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et pour tout entier naturel n non nul $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$

0,75 pt **1 - a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,75 pt **b)** Montrer que : $\left(\forall n\geq 0\right)$; $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de la suite$(I_n)_{n\geq 0}$

partie C : Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J=[0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul on pose : $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ et $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}F_k(x)$

1 pt **1 -** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in J\right)$: $F(x)-S_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $x\mapsto(1-x)\Big(1-\ln(1-x)\Big)$ est strictement décroissante sur J

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction $t\mapsto\dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour $x\in J$

1 pt **3 - a)** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in J\right)$: $0\leq F(x)-S_n(x)\leq\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle J on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$

0,5 pt **4 - a)** Déterminer $F(x)$ pour $x\in J$

0,25 pt **b)** Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}F(x)$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x; y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x; y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x; y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(\mathcal{F}; \times)$ est un groupe non commutatif.

2 - Soit G l'ensemble des matrices $M(x; 0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

1 pt Montrer que l'ensemble G est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F}; \times)$.

3 - On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit l'ensemble E de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x; y) \in E)(\forall (a; b) \in E) \ ; \quad (x; y) \perp (a; b) = (ax; bx + \frac{y}{a})$$

et on considère l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathcal{F}; \times) & \longrightarrow & (E; \perp) \\ & M(x, y) & \longmapsto & \phi(M(x; y)) = (x, y) \end{array}$$

0,25 pt **a)** Calculer $(1; 1) \perp (2; 3)$ et $(2; 3) \perp (1; 1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que ϕ est un isomorphisme.

0,5 pt **c)** En déduire la structure de $(E; \perp)$.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.

I) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) \ : \ z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$

0,25 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,5 pt **c)** Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe m pour afin que le produit des deux solutions de l'équation (E) est égal à 1.

2 - On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1 pt Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

II) Le plan complexe $(\mathcal{P})$est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$

On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectivement m ; $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

0,5 pt **1 -** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points M , M_1 et M_2 soient alignés.

0,5 pt **a)** Montrer que la transformation R reliant chaque point M d'affixe z au point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe du centre Ω et une mesure de son angle.

0,5 pt **b)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\Re e(m) + \Im m(z) = 1$.

0,5 pt **c)** En déduire l'ensemble des points M tel que les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

Pour tout n entier naturel non nul ,on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_n est pair.

0,5 pt **b)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n \equiv 0\ [3]$

2 - Soit p un entier premier tel que : $p > 3$

0,75 pt **a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$, $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$

0,75 pt **b)** Montrer que l'entier p divise a_{p-2}

0,75 pt **c)** Montrer que pour tout entier naturel q , il existe un entier naturel non nul n tel que :

$$a_n \wedge q = q$$

($a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de a_n et q)

Exercice 4 : (10 pts)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1-\ln(x))^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Partie I :

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité $2cm$)

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (poser $x = t^n$)

0,25 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0.

1 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

0,5 pt **2 - a)** Étudier les variations de la fonction f_1.

0,5 pt **b)** Étudier les variations de la fonction f_2.

0,25 pt **3 - a)** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

0,5 pt **b)** Construire les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

(On admet que le point $A(1;1)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_2)$).

Partie II :

On considère la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que F est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que : $(\forall x<0)\ :\ F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

0,25 pt **b)** En déduire le sens de variations de la fonction F sur $]-\infty;0]$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x<0)\ :\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leqslant F(x)\leqslant\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

b) Vérifier que la fonction $x\mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln(x)}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur

0,25 pt l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_n(t)dt=\frac{3}{4}$

3 - On suppose que la fonction F admet une limite finie L quand x tend vers $-\infty$.

0,25 pt Montrer que $\dfrac{3}{8}\leqslant L\leqslant\dfrac{3}{4}$.

Partie III :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n=\displaystyle\int_{1}^{e}f_n(x)dx$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_n\geqslant 0$

0,5 pt **b)** Déterminer le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$.

0,25 pt **c)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_{n+1}\leqslant U_n$.

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}U_n$

b) En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les

0,5 pt droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 2)\ ;\ \dfrac{1}{n+1}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}$

0,5 pt **b)** Calculer les limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nU_n$.

4 - Soit a un nombre réel différent de U_1.

On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases}V_1=a\\ V_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}V_n\ ;\quad(\forall n\geqslant 1)\end{cases}$

et pour tout entier naturel n non nul , on pose : $d_n=|V_n-U_n|$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ :\ d_n=\dfrac{n!}{2^{n-2}}d_1$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 2)\ :\ \dfrac{n!}{2}\geqslant 3^{n-2}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}d_n=+\infty$

~~0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.~~

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juillet 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I_2 et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels a et b : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$, et soit $V = \{M_{(a;b)} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

0,75 pt **1 -** Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ et déterminer une base de V.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que l'ensemble V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

0,5 pt **b)** Montrer que $(V;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

0,25 pt **3 - a)** Calculer $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.

0,25 pt **b)** L'anneau $(V;+;\times)$ est-il un corps ?

4 - Soit X une matrice de l'ensemble V telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

0,5 pt **a)** Montrer que $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I_2 = 0$

b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$

0,5 pt Montrer que la matrice X admet un inverse dans V qu'on déterminera.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit u un nombre complexe différent de $(1-i)$.

0,25 pt **1 - a)** Développer $(iu - 1 - i)^2$.

0,75 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :(E) : $z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$

2 - Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soient les points $A\left((1+i)u - 2i\right)$, $B\left((1-i)u + 2\right)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$

0,5 pt **a)** Déterminer l'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme U au point I.

0,5 pt **b)** Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A) = B$.

0,5 pt **c)** En déduire que les droite (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires.

0,75 pt **d)** A partir du point U , expliquer une méthode de construction des points A et B.

3 - On pose $u = (1+i)a - 2i$ tel que : $a \in \mathbb{R}$

0,5 pt **a)** Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A , B et U sont alignés.

Exercice 3 : (3 pts)

n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On a trois urnes U_1, U_2 et U_3 L'urne U_1 contient n boules indiscernables au toucher : une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

L'urne U_2 contient n boules indiscernables au toucher : deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.

L'urne U_3 contient n boules indiscernables au toucher : trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

0,25 pt **1 -** Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $P[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

0,75 pt **b)** Montrer que $P[X=1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0,5 pt **c)** En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,75 pt **3 -** Sachant que les deux boules tirées sont rouges , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

0,5 pt **1 - a)** Étudier les variations de la fonction g

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction g.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α de l'intervalle $]\ln(4); \ln(6)[$.

(On prend $\ln(4) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$)

0,5 pt **b)** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 - On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} &= 2\left(1-e^{-U_n}\right) \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 &= 1 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leqslant U_n \leqslant \alpha$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ U_{n+1} - U_n = g(U_n)$.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,5 pt **d)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1 pt **1 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)e^{-x}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.5 pt **3 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,5$)

Partie III :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt \ ; \quad (\forall x > 0) \\ F(0) = -\ln(2) \end{cases}$$

0,5 pt **1 - a)** En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $e^x \ln(2) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leqslant e^{2x}\ln(2)$

0,5 pt **c)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ puis en déduire que F est continue à droite au point 0.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}$

0,25 pt **b)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \ ; \ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

4 - a) Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

0,75 pt Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;x[$ tel que : $F(x) - F(0) = -\dfrac{1}{2}xe^{2c}$

(Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,25 pt **b)** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $-\dfrac{1}{2}e^{2x} \leqslant \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que : $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal Juin 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.25 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.75 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\diagup a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J\times X^3=I$ (ou $X^3=X\times X\times X$)

Exercice 2 : (3,75 points)

Soit a un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre a.

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G): iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (G) est : $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$

0.5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (G).

0.5 pt **2 -** Montrer que a est une solution de l'équation (G) si, et seulement si : $Re(a)=Im(a)$

(où $Re(a)$ est la partie réel du complexe a et $Im(a)$ est la partie imaginaire du complexe a)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$et on suppose que $Re(a)\neq Im(a)$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives : a , $i\overline{a}$ et $1+ia$.

1 - On pose : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$

0.5 pt **a)** Vérifier que : $\overline{Z}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

0.5 pt **b)** Montrer que les points A , B et C sont alignés si, et seulement si : $Im(a)=\dfrac{1}{2}$

2 - On suppose dans cette question que $Im(a)\neq\dfrac{1}{2}$

On considère R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$.

Soit E le milieu du segment $[BC]$.

0.5 pt **a)** Déterminer b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

0.75 pt **b)** Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C'=2AE$

Exercice 3 : (3 points)

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : 35u - 96v = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Partie II:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $(F) : x^{35} \equiv 2\ [97]$

1 - Soit x une solution de l'équation (F).

0.5 pt **a)** Montrer que 97 est premier et que x et 97 sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x^{96} \equiv 1\ [97]$

0.5 pt **c)** Montrer que : $x \equiv 2^{11}\ [97]$

0.25 pt **2 -** Montrer que si l'entier naturel x vérifie $x \equiv 2^{11}\ [97]$, alors x est solution de l'équation (F).

0.5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent sous la forme : $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : (10 points)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0.5 pt **1 - a)** Calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

0.5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau des variations de f.

0.5 pt **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \alpha < 1$.

0.5 pt **d)** Étudier le signe de $f(x)$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

0.5 pt **2 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 0,4$)

Partie II:

On considère les deux fonctions ϕ et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\ ; \quad x > 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases}$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists c \in]0; x[)\ ;\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-c^2}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < 1$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ g'(x) = f(x)$

0.5 pt **c)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\alpha; 1[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction ϕ est continue à droite en 0.

0.5 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \;\; ; \;\; \phi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

0.75 pt **c)** Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \;\; ; \;\; \phi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

0.5 pt **d)** Montrer que : $\phi\left([0;1]\right) \subset [0;1]$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on a : $\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^3}{3}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in]0;1[) \;\; ; \;\; |\phi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$

0.25 pt **c)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \;\; ; \;\; \phi(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$

5 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \;\; \texttt{et} \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{n+1} = \phi\left(u_n\right)$$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; |u_n - \beta| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

0.5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Probabilité** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On considère l'application r qui associe un point $M(z)$ à un point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Et l'application h qui associe le point $M(z)$ à un point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$

On pose : $F = h \circ r$

1 pt **1 -** Déterminer la nature de chacune des deux applications r et h et leurs éléments caractéristiques.

2 - On considère les deux points $\Omega(i)$ et $A(a)$ avec a un nombre complexe donné différent de i.

On pose : $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$

0.5 pt **a)** Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application F alors :

$$z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

0.25 pt **b)** Vérifier que Ω est l'unique point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$

0.75 pt **3 - a)** Déterminer en fonction du nombre complexe a les complexes b , c et d les affixes respectives de B , C et D.

0.25 pt **b)** Montrer que les points Ω et A et D sont alignés.

0.5 pt **c)** Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4)\,;(C,2)\,;(D,1)\}$.

0.25 pt **d)** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartient à l'axe réel.

Exercice 2 : (4 points)

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad x*y = x+y-3xy$$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (1-3x)(1-3y) = 1-3(x*y)$

0.75 pt **b)** Montrer que $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que l'application $\begin{array}{llll}\phi: & \left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star;\times) \\ & x & \longmapsto & 1-3x\end{array}$ est un isomorphisme.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

0.5 pt **c)** Montrer que $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[;*\right)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$.

3 - Pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\; x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

0.25 pt **a)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$

0.5 pt **b)** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

4 - On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;;\; x\top y = x + y - \frac{1}{3}$$

0.5 pt **a)** Montrer que $(\mathbb{R};\top)$ est un groupe abélien.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\mathbb{R};\top;*)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (2.5 points)

Un urne contient quatre boules : une boule blanche, trois boules rouges indiscernables au toucher.
On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne.
On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules successives de même couleur et on arrête l'expérience.
Soit X la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

1 pt **1 -** Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X = 2]$ et $[X = 3]$.

2 - Soit k un entier naturel non nul.

0.75 pt **a)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k]$ est : $P_{2k} = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0.75 pt **b)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k+1]$ est : $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Exercice 4 : (10 points)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \;;\; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction f est continue en 0.

2 - Pour tout réel non nul a de l'intervalle I, on considère la fonction numérique h_a de variable réelle x définie sur l'intervalle I par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)\,x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)\,a^2$$

0.5 pt **a)** Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ puis en déduire qu'il existe un réelle b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

0.75 pt **b)** En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que : $f'(0)=-2$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $I\setminus\{0\}$ et que :

$$(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}\quad\text{avec}\quad g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\quad g(x)<0$

0.25 pt **c)** En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

0.5 pt **4 - a)** Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter les deux résultats obtenus géométriquement.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$

0.5 pt **c)** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha\approx 1,3$)

<u>Partie II</u>:

1 - On considère la fonction ϕ définie sur l'intervalle I par : $\phi(x)=\ln(1+2x)$ et on pose $J=[1;\alpha]$

0.5 pt **a)** Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x\geqslant 1)\ ;\quad 0<\phi'(x)\leqslant\frac{2}{3}$$

0.75 pt **b)** Vérifier que : $\phi(\alpha)=\alpha$ et que : $\phi(J)\subset J$

2 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=1\ \texttt{ et }\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad u_n\in J$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad |u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$

0.5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

<u>Partie III</u>:

On considère la fonction numérique F définies sur l'intervalle I par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $F'(x)$

0.25 pt **b)** En déduire le sens des variations de la fonction F sur l'intervalle I.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x\geqslant 1)\ ;\quad F(x)\geqslant\int_1^x\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,\mathrm{d}t$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

3 - On suppose que la fonction F admet une limite finie l à droite en $-\dfrac{1}{2}$.

On considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) \ ; \quad x \in I \\ \tilde{F}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = l \end{cases}$$

0.5 pt **a)** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in I) \ ; \quad F(x) - l \geqslant f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

0.5 pt **b)** En déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $-\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

FASCICULE 3

Sciences Économiques

MTM GROUP

MTM GROUP

Sujets des Examens Nationaux du Baccalauréat Marocain

Section:

- Sciences Économiques

Examens du Baccalauréat

MATHÉMATIQUES

Réalisation :

Maroc Tex Maths GROUP

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3) \qquad \int_0^1 x^2 - 1 \, dx$$

VERSION 2023

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session Normal : 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte* 3 *exercices :

- Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **4.5 points**
- Exercice 2 : **Problème** .... **11 points**
- Exercice 3 : **Probabilité** .... **4.5 points**

Exercice 1 : (4.5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 2$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0,25 pt **4 -** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$.

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

0,5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

0,5 pt **c)** Donner v_n en fonction de n.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$.

0,25 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (11 points)

Partie 1

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - \ln(x)$$

0,5 pt **1 -** Montrer que $h'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **2 -** Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

1 pt **3 -** Vérifier que $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\ln(2)}{2}$, et dresser le tableau de variation de h (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé).

0,5 pt **4 -** En déduire que : $h(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} + x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

0,25 pt **b)** Donner une interprétation géométrique du résultat.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$.

0,25 pt **c)** Déduire de ce qui précède une interprétation géométrique du résultat.

1pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

1 pt **b)** Déduire de la question 4. de la partie 1 que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4 - Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.

0.5 pt **a)** Calculer $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

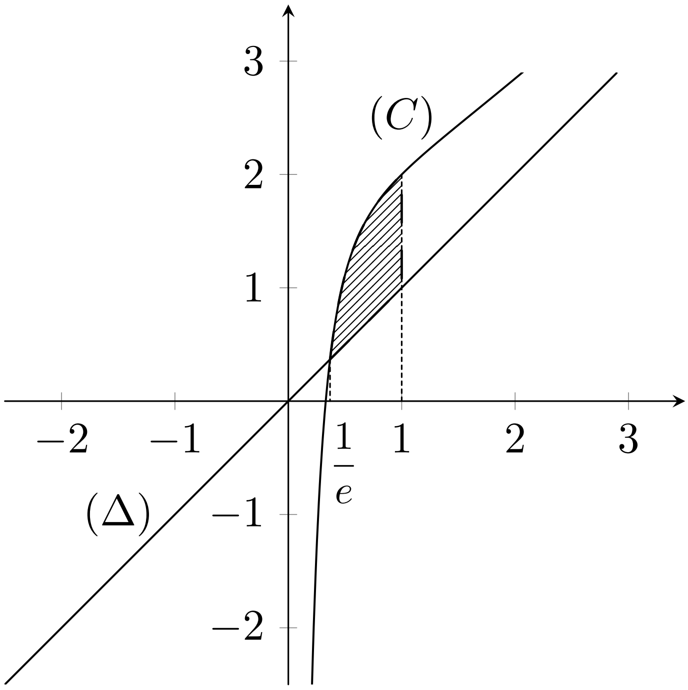
1 pt **b)** Étudier le signe de $f(x) - x$.

0,5 pt **c)** En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur chacun des intervalles $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$.

5 - Dans la figure ci dessous (C) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1,5 pt **a)** Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x} dx$ et calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$.

1 pt **b)** En déduire l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4.5 points) **(On donnera les résultats sous forme de fraction)**

Un sac contient cinq boules blanches numérotées $1 - 2 - 3 - 3 - 3$ et quatre boules noires numérotées $1 - 2 - 3 - 3$ (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 »

1 pt **1 -** **a)** Montrer que $p(A) = \dfrac{4}{9}$.

0.5 pt **b)** Calculer $p(B)$.

1 pt **c)** Calculer $p(A \cap B)$.

0.5 pt **d)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéros 3.

1 pt **a)** Copier et remplir le tableau ci- dessous en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{15}{36}$		

0.5 pt **b)** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4.5 points**

— Exercice 2 : **Étude dune fonction numérique et calcul intégral** .... **11 points**

— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **4.5 points**

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

0.5 pt **2 - a)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0,25 pt **c)** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

0,5 pt **b)** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

0,5 pt **c)** Exprimer v_n en fonction de n.

0,25 pt **5 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{v_n+1}$.

0,25 pt **b)** En déduire de ce qui précède que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$.

0,25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (11 points)

Partie 1 : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$$

1 pt **1 -** Montrer que $g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$.

1 pt **2 -** En déduire g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

0.25 pt **3 - a)** Calculer $g(1)$.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de g. *(Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)*

0.5 pt **c)** En déduire que $g(x) \geq 3$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie 2 : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2\ln(x)}{x}$$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1))$.

0.25 pt **c)** Donner une interprétation géométrique du résultat.

1 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de f.

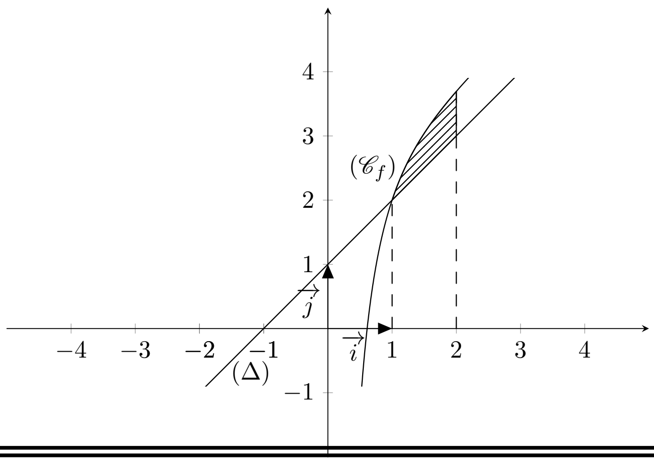
1 pt **4 -** **a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}(-3+2\ln(x))$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1 pt **b)** En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$.

5 - Dans la figure ci-dessous $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x+1$ dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1 pt **a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln(2))^2$

0.75 pt **b)** En déduire l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4.5 points) **(On donnera les résultats sous forme de fraction)**

Une urne contient six jetons rouges portant les numéros $1,2,2,2,3,3$ et quatre jetons verts portant les numéros $2,2,2,3$ (Toutes les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois jetons de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les jetons tirés portent le même numéro »

B : « Les jetons tirés sont de même couleur »

0.5 pt **1 -** Montrer que le nombre de tirages possible est égal à 120.

0.75 pt **2 -** **a)** Montrer que $p(A) = \dfrac{7}{40}$.

0.75 pt **b)** Calculer $p(B)$.

1 pt **c)** Calculer la probabilité de tirer trois jetons de même couleur sachant qu'ils portent le même numéro.

0.5 pt **d)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues à chaque tirage.

1 pt Calculer $p(X=1)$ *et* $p(X=2)$.

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session Normal 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économique Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **5 points**
- Exercice 2 : **Étude de fonctions** .... **5.5 points**
- Exercice 3 : **Étude de fonctions** .... **5.5 points**
- Exercice 4 : **Étude de fonctions** .... **4 points**

Exercice 1 : (5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < -\frac{3}{4}$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$.

0,5 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0,25 pt **4 -** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + \frac{3}{4}$.

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

0,5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

0,5 pt **c)** Donner v_n en fonction de n.

0,5 pt **d)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$.

0,5 pt **6 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (5.5 pts)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\forall x > 0\,;\quad g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$.

0,5 pt **b)** Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

1 pt **3 - a)** Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g.

1 pt **b)** A partir du tableau de variations de g, Donner le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

1,25 pt **c)** A l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation : $1 + e^2 + \ln x \geq \frac{1}{x^2}$.

Exercice 3 : (5.5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$$

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 pt **2 - a)** Montrer que : $\forall x > 0\,;\quad f'(x) = \frac{1}{x}(2\ln x - 1)$.

1 pt **b)** Montrer que $f'(x) \leq 0$ sur $]0;\sqrt{e}]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{e};+\infty[$.

1 pt **c)** Calculer $f(\sqrt{e})$ et $f(e)$ puis dresser le tableau de variations de f.

3 - A partir du tableau de variations de f :

0,5 pt **a)** Donner la valeur minimale de f sur $]0;+\infty[$.

1 pt **b)** Déterminer l'image de l'intervalle $[\sqrt{e};e]$ par f.

Exercice 4 : (4 pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1 - Calculer les limites suivantes :

0,5 pt **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)$

0,5 pt **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)$

0,5 pt **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{e^x-1}{x^2}\right)$

0,5 pt **2 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $t^2+t-2=0$.

1 pt **b)** En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation suivante : $e^{2x}+e^x-2=0$.

1 pt **3 -** Donner une primitive H de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=e^x+\frac{2\ln x}{x}$$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session de rattrapage 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économique Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **5.5 points**
— Exercice 2 : **Étude de fonctions** .... **5.5 points**
— Exercice 3 : **Étude de fonctions** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Étude de fonctions** .... **3 points**
— Exercice 5 : **Système d'équations** .... **2 points**

Exercice 1 : (5.5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < \dfrac{16}{3}$.

0,75 pt **3 -** **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{3}{4}\left(u_n - \dfrac{16}{3}\right)$.

0,5 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0,25 pt **4 -** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \dfrac{16}{3}$.

0,75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

0,75 pt **b)** Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

0,5 pt **c)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \dfrac{16}{3}$.

0,5 pt **6 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (5.5 pts)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln(x) - x\ln(x)$$

1 pt **1 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$.

1 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

0.5 pt **2 -** **a)** Vérifier que $g(e) = -e$.

2 pts **b)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$; $g(x) + x = (x+1)(1-\ln(x))$, puis résoudre l'équation $g(x) = -x$.

3 - Ci dessous voici le tableau de variation de g :

x	0		1		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$			$-$			
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-e$	$\searrow$	

1 pt Donner , à l'aide du tableau de variations de g, l'image de l'intervalle $[1;e]$ par g.

Exercice 3 : (4 pts)

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ci dessous, (Δ) est la droite d'équation $y = x - 1$ et $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

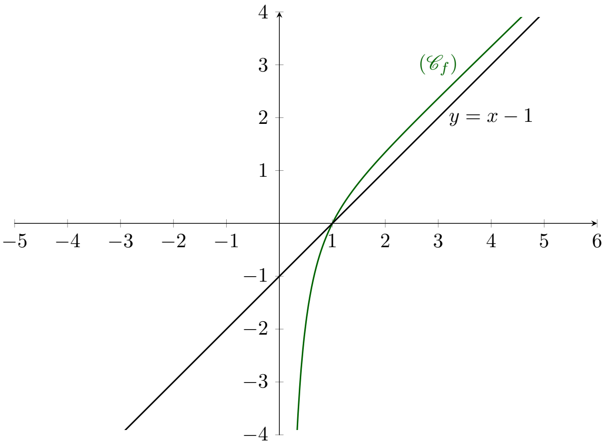
1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

1,5 pts **2 -** Justifier par le calcul que la droite (Δ) est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3 - Ci dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique de f :

0,5 pts **a)** Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 0$

1 pt **b)** Donner graphiquement le signe de $f(x) - (x - 1)$ sur $]0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$.



Exercice 4 : (3 pts)

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \left(\dfrac{1}{x} + 2\right) e^x$.

2 pts **1 -** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} h(x)$;

1 pt **2 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $h'(x) = (2x^2 + x - 1)\dfrac{e^x}{x^2}$

Exercice 5 : (3 pts)

2 pts **1 -** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} u + 2v = 7 \\ 4u - v = 1 \end{cases}$

1 pt **2 -** En déduire que le couple $(0; \ln(3))$ est la solution du système : $\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 4e^x - e^y = 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences économique

Session : Normal juin 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économique**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

le candidat doit traiter **exercice 1** et **exercice 2** et choisir de traiter **exercice 3** ou bien **exercice 4**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** (Obligatoire) .... **6 points**
— Exercice 2 : **problème d'analyse** (Obligatoire) .... **10 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** (Au choix avec *l'exercice 4*) .... **4 points**
— Exercice 4 : **Primitives** (Au choix avec *l'exercice 3*) .... **4 points**

PARTIE I OBLIGATOIRE : Exercice 1 et Exercice 2

Exercice 1 : (6 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{9}{2}$

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

0.75 pt **2 -** **a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > -6$

0.75 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 6)$

0.25 pt **c)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

4 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{3}u_n + 2$.

0.25 pt **a)** Calculer v_0

1 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

0.5 pt **c)** Donner v_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **5 -** **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = 3(v_n - 2)$.

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:$u_n = 6\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right)$

0.5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (10 pts)

PARTIE A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

0,5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

0,5 pt **2 -** Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$

1 pt **3 -** Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g.(sans calculer les limites).

1 pt **4 -** En déduire que $g(x) \leqslant 0$ sur $]0;1]$ et que $g(x) \geqslant 0$ sur $[1;+\infty[$.

PARTIE B :

On considéré la fonction numérique f définie sur $]0;\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x$
et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1,25 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1,5 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

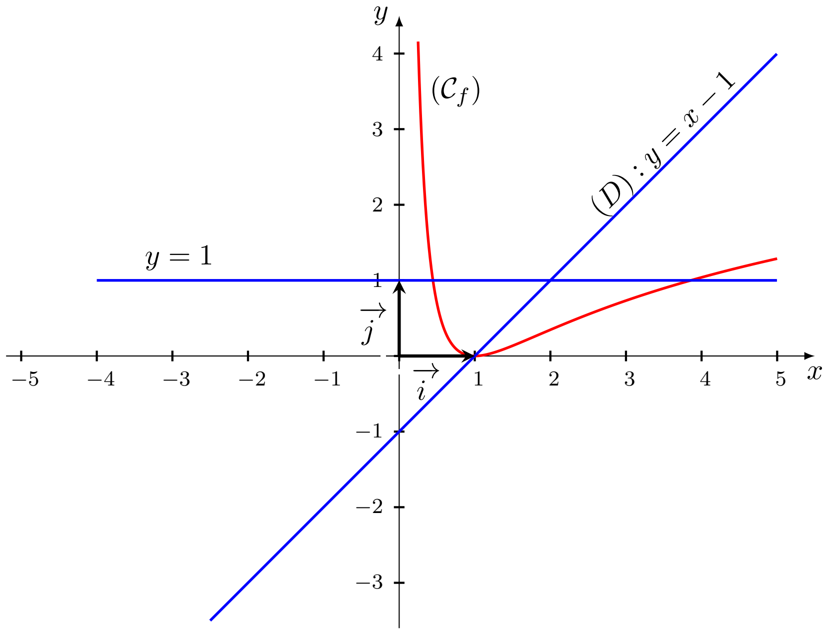
1 pt **b)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **c)** Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations de f.

4 - Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = x - 1$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 pt **a)** Résoudre graphiquement dans $]0; +\infty[$ l'inéquation : $f(x) \leqslant x - 1$.

0,5 pt **b)** Déterminer graphiquement sur $]0; +\infty[$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 1$.



PARTIE II : Le candidat à exclusivement le choix de répondre soit à Exercice 3 soit à Exercice 4

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$

0.5 pt **1 -** Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **2 -** Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1.5 pt **3 -** Calculer $h(0)$ et dresser le tableau de variations de h(sans calculer les limites).

1 pt **4 -** En déduire que $h(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1 pt **1 -** $f_1(x) = x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $]0; +\infty[$.

1 pt **2 -** $f_2(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + 2x$ définie sur $]0; +\infty[$.

1 pt **3 -** $f_3(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1 pt **4 -** $f_4(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$ définie sur $]1; +\infty[$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session : Rattrapage juin 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Sciences Économique**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Instructions au candidat(e)

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Suites numériques** .... **6 points**
- Exercice 2 : **Étude d'une fonction numérique complexes** .... **10 points**
- Exercice 3 : **Étude d'une fonction** .... **4 points**
- Exercice 4 : **Calcul des primitives** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

1 PARTIE I OBLIGATOIRE : Exercice 1 et Exercice 2

Exercice 1 : (6 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** **a)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 3$.

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n-3)^2}{u_n - 2}$.

0,25 pt **c)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0,5 pt **3 -** Montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

1 pt **b)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1.

0,5 pt **c)** Montre que $v_n = \dfrac{1}{2} + n$; pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **5 -** **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3v_n + 1}{v_n}$.

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{6n+5}{2n+1}$.

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (10 pts)

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$. par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

0,5 pt **1 -** Montrer que $g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3 - Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites n'est pas demandé).

0,75 pt

0,5 pt **4 -** Déduire du tableau de variations que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$. par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0,5 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2}+1\right)\right)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1 pt

0,75 pt **3 -** **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **c)** En déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

4 - Soit (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

0,5 pt **a)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

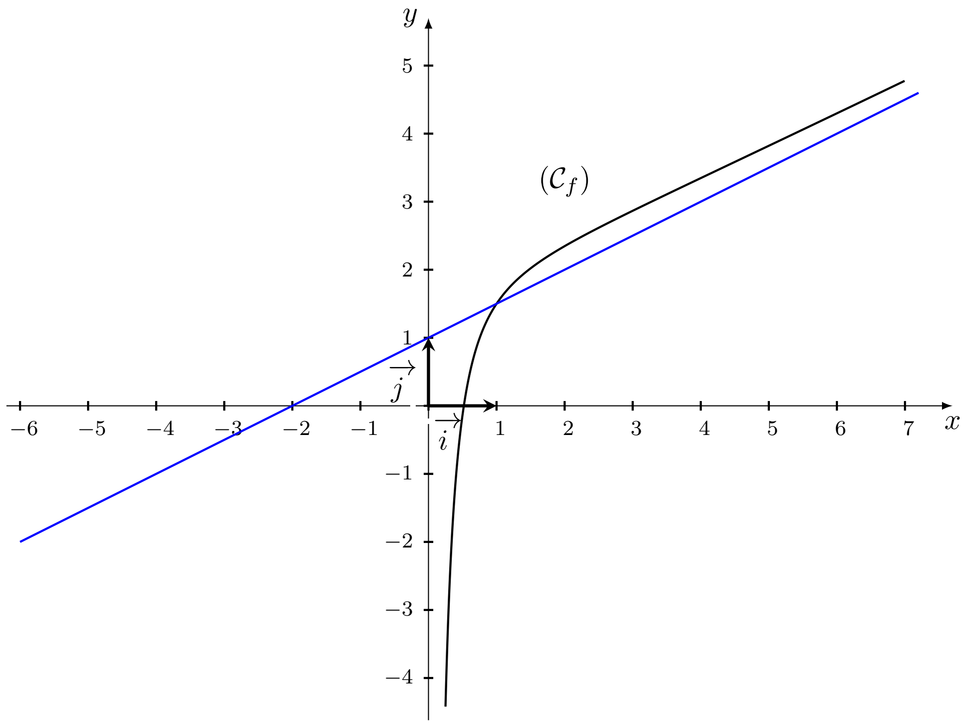
1 pt **b)** Étudier le signe de $\left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)\right)$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire la position relative de (C) par rapport à (D).

1 pt **5 -** Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

6 - Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit a l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$.

1pt Donner à partir de la courbe (C) le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.



2 PARTIE II : Le candidat a exclusivement le choix de répondre : soit à l'exercice 3 soit à l'exercice 4

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \left(x^2+1\right)e^x - 1$

1pt **1 -** Montrer que $h'(x) = (x+1)^2 e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **2 -** Donner le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$

1,5 pt **3 -** Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variations de h (Le calcul des limites n 'est pas demandé)

1 pt **4 -** Etudier à partir du tableau de variations le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 telles que :

1 pt **1 -** $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1 pt **2 -** $f_2(x) = 3x^2\left(x^3+1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1 pt **3 -** $f_3(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1 pt **4 -** $f_4(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Normale Juin 2019

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 2 exercices et un problème :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **4 points**

— Exercice 2 : **Calculs des probabilités** .... **4 points**

— problème : **Problème d'analyse** .... **12 points**

Exercice 1 : (4 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{7}$

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

0.75 pt **2 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - \frac{2}{7} \leq 0$.

b) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{7}\right)$, puis en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.75 pt est une suite décroissante.

0.25 pt **3 -** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

4 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{2}{7}$

0.25 pt **a)** Calculer v_0. .

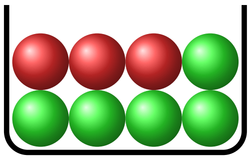
0.5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

0.5 pt **c)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7}$.

0.5 pt **5 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (4 pts)

Donner les résultats sous forme de fraction



Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont **cinq** boules sont vertes et **trois** sont rouges.

On tire au hasard **successivement** et **sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont rouges ".

B : " La première boule tirée est rouge ".

C : " La deuxième boule tirée est verte ".

1 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \frac{6}{56}$ et $p(B) = \frac{21}{56}$.

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$. .

1 pt **3 -** Calculer $p(B \cap C)$.

1 pt **4 -** Les événements B et C sont-ils indépendants ?justifier la réponse.

Problème : (12 pts)

PARTIE I -

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x$

0.5 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 - a)** étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Calculer $g(0)$ puis dresser le tableau de variations de g.(le calcul des limites n'est pas demandé).

0.5 pt **c)** En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$; $g(x) \leq 1$.

PARTIE II -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} + (x-1)$

et on note $(\mathcal{C}_{\{})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

0.5 pt **b)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

1 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1))$.

0.5 pt **b)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.

0.5 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **c)** Dresser son tableau de variation.

1 pt **d)** Donner l'équation de la tangente (T)au point d'abscisse 0.

1 pt **e)** Résoudre l'équation $f(x) = x-1$, puis en déduire les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (Δ) d'équation : $y = x-1$.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)$.

1 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.

5 - Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 pt **a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{3}{\mathrm{e}}$.

0,5 pt **b)** Calculer l'aire de la partie hachurée de la figure.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage 2019

juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4,5 points**
— Exercice 2 : **Calcul de probabilités** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **11,5 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4,5 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 9}{u_n - 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2

0,75 pt **2 -** Montrer par récurrence que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}); u_n < 3$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 3)^2}{5 - u_n}$

0,5 pt **b)** Montrer que (u_n)est une suite croissante

0,25 pt **4 -** En déduire que la suite (u_n) est une suite est convergente

5 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{-2u_n + 4}{u_n - 3}$

0,25 pt **a)** Vérifier que $v_0 = -1$

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{u_n - 3}$

0,5 pt **c)** Montrer que v_n est une suite arithmétique de raison 1

0,25 pt **6 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3v_n + 4}{v_n + 2}$

0,25 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{3n + 1}{n + 1}$

0,25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2 : (4 pts) **(Donner les résultats sous forme de fraction)**

Un sac S_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Un autre sac S_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : " on tire une boule du sac S_1 puis on tire une boule du sac S_2 "

On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont blanches "

B : " Les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

1,5 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{12}$

2 - Montrer que $p(\bar{B}) = \dfrac{7}{24}$

1,5 pt ($\bar{B}$ est l'événement contraire de B) et en déduire $p(B)$

1 pt **3 -** Calculer $p(A \cup B)$

Exercice 3 : (11,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = (1 - \ln x)\ln x$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$

1 - Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et

b) On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\dfrac{(\ln x)^2}{x}) = 0$ et Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et

1 pt interpréter géométriquement le résultat.

1 pt **3 - a)** Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}(1 - 2\ln x)$

b) Montrer que f est croissante sur $]0; \sqrt{e}[$ et qu'elle est décroissante

1,25 pt sur $]\sqrt{e}; +\infty[$

0,5 pt **c)** Calculer $f(\sqrt{e})$ puis dresser le tableau de variations de f

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire les coordonnées des points

1,5 pt d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

e) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point

1 pt d'abscisse $x_0 = 1$

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}(2\ln x - 3)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

1 pt **b)** Montrer que $A(e^{\frac{3}{2}}; \dfrac{-3}{4})$ est un point dinflexion de (C_f)

5 - Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f et soit F la fonction définie par : $F(x) = -x\,(x)^2 + 3x\ln x - 3x$

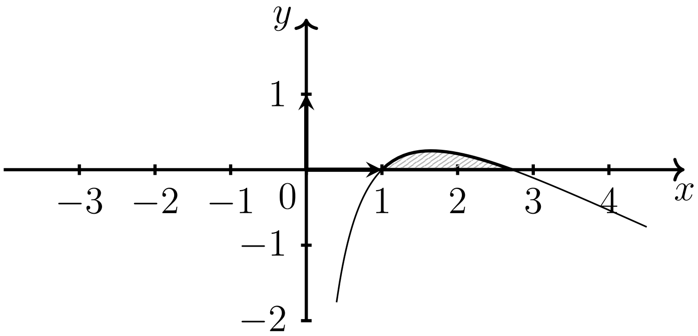
0,5 pt **a)** Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

b) A partir de la courbe (C_f) ci-dessous, donner les variations de F sur $]0;+\infty[$

0,75 pt

c) Calculer laire de la partie hachurée.

1pt



FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économie et Gestion Comptable

Session : Normal 2018

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4,4 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **11,5 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 5$

0.5 pt **1 -** Calculer U_1 et U_2.

0.5 pt **2 - a)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_n < 15$.

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{3}U_n + 5$.

0.25 pt **c)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $-\frac{1}{3}U_n + 5 > 0$.

0.5 pt **d)** En déduire que U_n est une suite croissante et qu'elle est convergente.

3 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - 15$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$

0.75 pt **b)** Calculer le premier terme V_0 et montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = (-12)\left(\frac{2}{3}\right)^n$

0.5 pt **4 - a)** Calculer U_n en fonction de n

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 2 : (4 pts)

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes. On tire **simultanément** au hasard trois boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont blanches"

B : "les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux "

C : "Il n'y a aucun boule blanche parmi les trois boules tirées"

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $p(A) = \frac{1}{56}$.

1,5pt **b)** Calculer $p(B)$ et $p(C)$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.

1.5pt **a)** Copier et remplir le tableau ci contre en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$				

0.5pt **b)** Calculer $E(X)$ l'espérence mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 3 : (11,5 pts)

partie I : On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner l'interprétation géométrique du résultat.

0.5pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.75pt **b)** Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1,$

1pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$et donner l'interprétation géométrique du résultat.

0,75pt **3 -** **a)** Montrer que : $(\forall x>0)$: $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

0.75pt **b)** Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variation de f

0.5pt **c)** En déduire le signe de f sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

0.75pt **d)** Déterminer l'équation de la tengente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

4 - Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1pt **a)** On utilisant une integration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^{e} \ln x\,dx$

1pt **b)** Montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(e^2-1\right)u.a$ (u.a signifier l'unité d'air)

partie II : Soit g la fonction numérique de variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

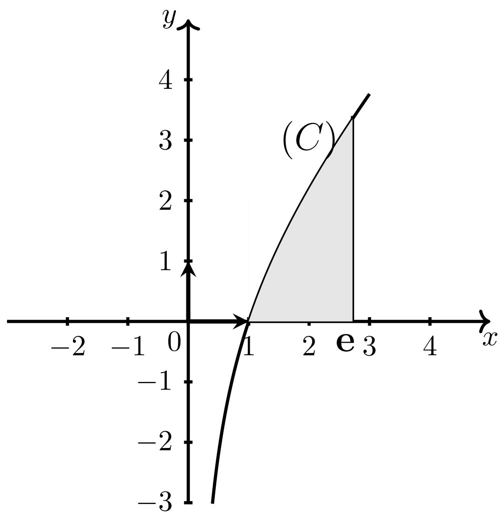
$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln(x))$$

1pt **1 -** Montrer que : $\forall x>0, g'(x) = f(x)$

1pt **2 -** En utilisant $3.c$ de la partie I, montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

0.5pt **3 -** **a)** Que représente la fonction g pour la fonction f ? (Justifier la réponse).

1pt **b)** En déduire, sans calcul, la valeur de $g(e)-g(1)$ (Justifier la réponse).



FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences économique et gestion comptable

Session : Rattrapage juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Eco-SGC**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4.5 points**
— Exercice 2 : **Problème d'analyse** .... **11 points**
— Exercice 3 : **Probabilités** .... **4,5 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4,5 pts)

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 9}{U_n - 4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Calculer U_1 et U_2.

0.25 pt **2 -** **a)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $3 - U_n > 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 3)^2}{4 - U_n}$

0.5 pt **c)** En déduire que (U_n) est une suite croissante.

0.5 pt **d)** En déduire que (U_n) est convergente.

3 - On suppose que : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Calculer V_0.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \dfrac{4 - U_n}{U_n - 3}$.

0.5 pt **c)** Montrer que $V_{n+1} - V_n = -1$ et en déduire que $V_n = -1 - n$.

0.5 pt **4 -** **a)** Montrer que $U_n = \dfrac{1 + 3V_n}{V_n}$.

0.5 pt **b)** En déduire que $U_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$ pour tout N de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de U_n en $+\infty$.

Exercice 2 : (11 pts)

partie I :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$.

0.5 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $g'(x) < 0$ $\forall x$ de $]-\infty; 0]$ et $g'(x) > 0$ $\forall x$ de $[0; \infty[$.Puis dresser le tableau de variation de g.

0.5 pt **3 -** En déduire que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **1 -** Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

0.5 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

0.5 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

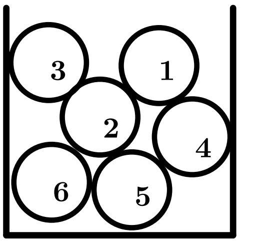
0.5 pt **b)** Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

0.5 pt **c)** Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x = 0$.Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

0.5 pt **4 -** Tracer dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la tangente (T), la droite d'équation $y = 1$ et la courbe (C_f).on prendra $\dfrac{e}{e-1} = 1,6$ on admettra que (C_f) a deux points d'inflexions $J\,(0;1)$ et K d'abscisse α tel que $1,5 < \alpha < 2$.

Exercice 3 : (4,5 pts)

(Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction)
Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros : $1, 2, 3, 4, 5, 6$.On tire simultanément au hasard deux boules du sac.On considère les événements suivants :



A:"les deux boules tirées portent chacune un numéro pair".

B:"les deux boules tirées portent chacune un numéro impair".

C:"l'une deux boules tirées porte le numéro 2".

0.5 pt **1 -** Montrer que $p\,(A) = \dfrac{6}{56}$ et $p\,(B) = \dfrac{21}{56}$.

0.5 pt **2 -** Calculer $p\,(C)$.

0.5 pt **3 -** Calculer $p\,(B \cap C)$.

0.5 pt **4 -** Les événements B et C sont-ils indépendants ?Justifier la réponde.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session : Normal juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Sciences Économique**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **4,5 points**
— Exercice 2 : **Les probabilités** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Problème danalyse** .... **8,5 points**
— Exercice 4 : **Primitives** .... **3 points**

Exercice 1 : (4,5 pts)

1 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)** Calculer u_1 et u_2 .

0,75 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{2}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$.

0,5 pt **d)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

0,25 pt **a)** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en précisant sa raison.

0,25 pt **b)** Calculer son premier terme v_0.

c) Calculer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$.

0,75 pt

0,25 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3 - On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$.

0,75 pt Montrer que $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$.

Exercice 2 : (4 pts)

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher portant respectivement les nombres : $0; 0; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2$

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

0,75 pt **1 -** Montrer que le nombre de cas possibles est 36.

2 - Soit X la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées.

0,75 pt **a)** Montrer que $p(X = 2) = \frac{12}{36}$.

2 pt **b)** Copier le tableau ci - dessous et le compléter en justifiant la réponse.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$			$\frac{12}{36}$		

0,5 pt **c)** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 3 : (8,5 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2-\dfrac{2}{x}+\ln x$

1,5 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$.

2 - **a)** Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de la fonction g (Le calcul des limites en
1,25 pt 0 et en $+\infty$ n'est pas demandé).

1 pt **b)** En déduire le signe de g sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x-2)\ln x$$

0,75 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **2 -** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1,5 pt **b)** Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

1 pt **c)** En utilisant le tableau de variations déterminer l'image par f de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e};2\right]$.

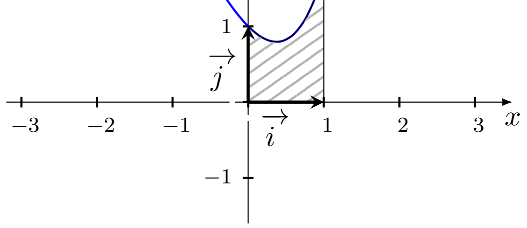
Exercice 4 : (3 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^x - 2x + 1$

1,5 pt **1 -** En utilisant une intégration par parties montrer que : $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = 1$.

2 - Dans la figure ci-dessous $(C_h))$ est la courbe représentative de h dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1,5 pt Calculer l'aire de la partie hachurée .



FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Economiques et Gestion

Session : Rattrapage juillet 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Economiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **4,5 points**
— Exercice 2 : **Calculs des probabilités** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Calculs des intégrales** .... **1,5 points**
— Exercice 2 : **Étude de fonctions numérique** **10points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4,5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+3} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

0,5 pt **1 -** **a)** Calculer u_1 et u_2

0,75 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$ puis montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n > 1$

0,5 pt **c)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1}-u_n = 2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

0,5 pt **d)** En déduire que (u_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

2 - On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$; $v_n \neq 1$

0,25 pt **b)** Calculer v_0

0,5 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

0,25 pt **d)** Calculer v_n en fonction de n.

0,25 pt **3 -** **a)** Montrer que : $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

0,5 pt **b)** En déduire que : $u_n=\dfrac{1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

0,25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (4,5 pts)

Un sac contient trois boules blanches numérotés 0 , 1 , 2 et deux boules noires numérotés 1 , 2 , toutes indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard successivement et sans remise deux boules du sac.

1 - On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirés portant le numéro 1**"**

A : " La premier boules tirée est blanche"

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{10}$

1 pt **b)** Calculer la probabilité de B et montrer que : $p(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$

0,5 pt **c)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au produit des deux nombres portés par les deux boules tirées.

1,5 pt **a)** Copier et compléter le tableau ci-dessous en justifiant les réponses

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\dfrac{8}{20}$			

0,5 pt **b)** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X

Exercice 3 : (1,5 pts)

On pose : $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

0,5 pt **1 -** Calculer I

0,5 pt **2 -** Calculer $I + J$

0,5 pt **3 -** En déduire que : $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

Exercice 4 : (10 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$ et soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1,75 pt **1 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0,75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

1,75 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

1 pt **2 -** **a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(x^2-x+1)}{x^2}e^x$

1pt **b)** Montrer que : $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

0,5 pt **c)** Déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$

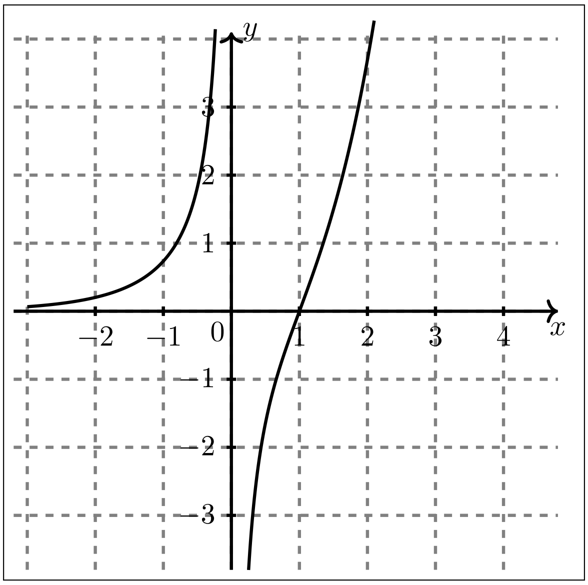
1,25 pt **d)** Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variation sur f.

3 - Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 pt **a)** Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

0,5 pt **b)** Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$

0,5 pt **c)** Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$



FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Normal 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques.** .... **4.5 points**

— Exercice 2 : **Calcul de probabilités** .... **4.5 points**

— Exercice 3 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **11 points**

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la suite (u_n) définie par : $U_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$.

0,5 pt **1 -** Calculer U_1 et U_2.

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$: $\mathbf{U_n} < \frac{5}{3}$.

0,5 pt **3 -** **a)** Montrer que $\mathbf{U_{n+1}} - \mathbf{U_n} = -\frac{3}{5}\left(\mathbf{U_n} - \frac{5}{3}\right)$

0,75 pt **b)** Montrer que $(\mathbf{U_n})_{n\in \mathrm{IN}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.

4 - On pose : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{V_n} = \mathbf{U_n} - \frac{5}{3}$.

0,25 pt **a)** Calculer V_0.

0,5 pt **b)** Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **c)** Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{\mathrm{n}} + \frac{5}{3}$.

0,5 pt **d)** Calculer la limite $\boldsymbol{u_n}$ en $+\infty$.

Exercice 2 : (4.5 pts)

Un sac contient 7 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 2 boules blanches et 2 boules vertes. On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

1 - On considère les événements suivants :

A : " les deux boules tirées sont de la même couleur "

B :" parmi les deux boules tirées, il y a une au moins qui est de couleur rouge "

1 pt **a)** Montrer que $\boldsymbol{p(A)} = \frac{5}{21}$.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de B.

1 pt **c)** Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$.

0,5 pt **d)** Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?justifier.

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules rouges tirées

0,75 pt **a)** Copier et remplir le tableau ci-dessous en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

0,25 pt **b)** calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable X.

Exercice 3 : (11 pts)

Partie : A.

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

.

0,5 pt **1 -** **a)** calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$

0,5 pt **2 -** **a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3}$.

0,5 pt **b)** Étudier le signe de $g'(\boldsymbol{x})$ sur $]0,+\infty[$.

0,75 pt **c)** calculer $g(\mathbf{1})$ puis dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$.

1 pt **d)** En déduire que $g(x) \leq 0$ sur $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ sur $[1,+\infty[$.

<u>Partie : B</u>.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + x\ln x$.

1 pt **1 -** **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1.75 pt

1 pt **2 -** **a)** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

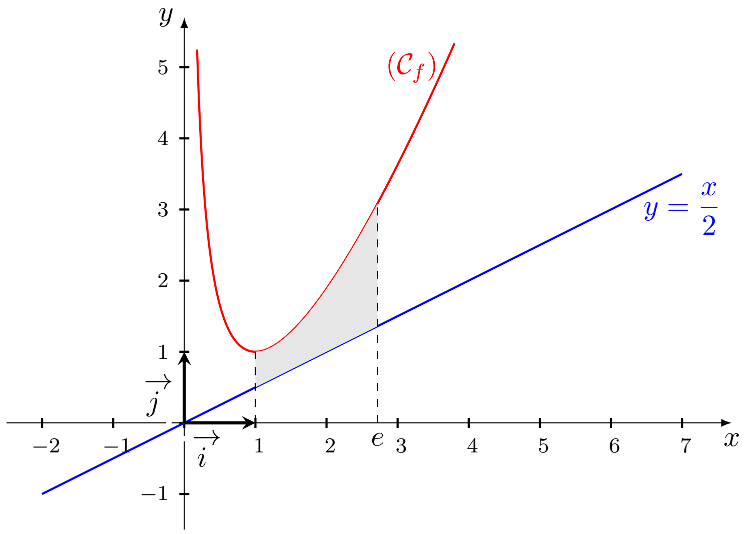
1 pt **b)** Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f

3 - Soit $F(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)\ln x$

1 pt Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

4 - Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe de f et (D) est la droite d'équation : $y = \dfrac{x}{2}$

1.5 pt Calculer l'aire de la partie hachurée .



FIN

Baccalauréat Sciences Économie et Gestion Comptable

Session : Rattrapage juillet 2016

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **4,5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **4,5 points**
— Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **11 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

0.5 pt **2 -** **a)** Mondtrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} + 1 = \dfrac{2(u_n + 1)}{u_n + 3}$.

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$.

0.5 pt **c)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)^2}{u_n + 3}$.

0.5 pt **d)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

3 - On pose $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **a)** Calculer v_0.

0.25 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$.

0.5 pt **c)** Montrer que v_n est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

0.25 pt **d)** Calculer v_n en fonction de n.

0.25 pt **4 -** **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{-v_n + 2}{v_n - 1}$

0.25 pt **b)** En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \dfrac{-n}{n+2}$.

0.25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (4.5 pts) (Tous les résultats de cet exercice se donnent sous forme d'une fraction)

Un sac contient 11 boules indiscernables au toucher : 3 boules blanches, 4 boules vertes et 4 boules rouges. On tire **simultanément** au hasard trois boules du sac.

1 - On considère les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de la même couleur"

B : "tirer exactement une seule boule de chaque couleur "

C : "les trois boules tirées sont de deux couleurs différentes"

1 pt **a)** Montrer que la probabilité de l'événement A est : $p(A) = \dfrac{3}{55}$.

1pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement B.

1pt **c)** En déduire que $p(C) = \dfrac{36}{55}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées.

1.5pt **a)** Copier et remplir le tableau ci-contre en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$		$\dfrac{84}{165}$		

0.5pt **b)** Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 3 : (11 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5pt **1 -** Vérifier que : $f(x) = e^{x}(e^{x} - 4) + 3$

0.75pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1.25pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1pt **3 -** **a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 2)$.

1.5pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

1.5pt **4 -** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ f(x) = (e^{x} - 1)(e^{x} - 3)$, puis déterminer les deux points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

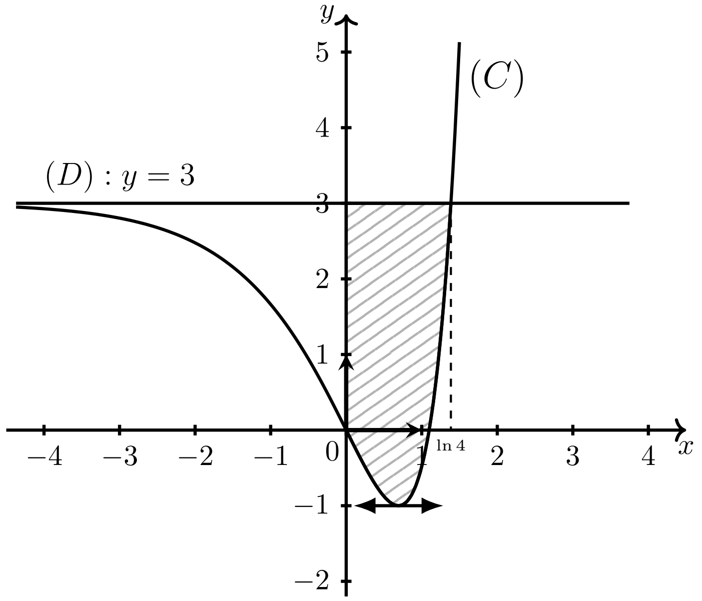
0.5pt **5 -** **a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ f''(x) = 4e^{x}(e^{x} - 1)$.

1.5pt **b)** Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

0.5pt **6 -** Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point $O(0;0)$.

0.5pt **7 -** **a)** Détrminer le point d'intersection de (C) et la droite $(D) :\ y = 3$.

1.5pt **b)** Calculer l'aire de la partie hachurée.



FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économie et Gestion Comptable

Session : Rattrapage juin 2015

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **3 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Calculer U_1 et U_2.

0.5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_n < \frac{5}{4}$

0.5 pt **3 -** **a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}(U_n - \frac{5}{4})$.

0.75 pt **b)** En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

4 - On Suppose que $V_n = U_n - \frac{5}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

0.25 pt **a)** Calculer V_0 .

0.5 pt **b)** Montrer que : $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

1 pt **c)** Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \frac{1}{4}(5 - (\frac{1}{5})^n)$.

0.5 pt **d)** Calculer la limite de U_n en $+\infty$.

Exercice 2 : (11 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + lnx$$

et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0.75 pt **1 -** **a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1.5 pt **b)** Monter que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique .

O.5 pt **2 -** **a)** Vérifier que $f(x) = x + \frac{2 + xlnx}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1 pt **b)** Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique .

0.5 pt **3 -** **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1 pt **b)** Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis étudier le signe de $(x-1)(x+2)$ sur les deux intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

0.5 pt **c)** En déduire que f est une fonction décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

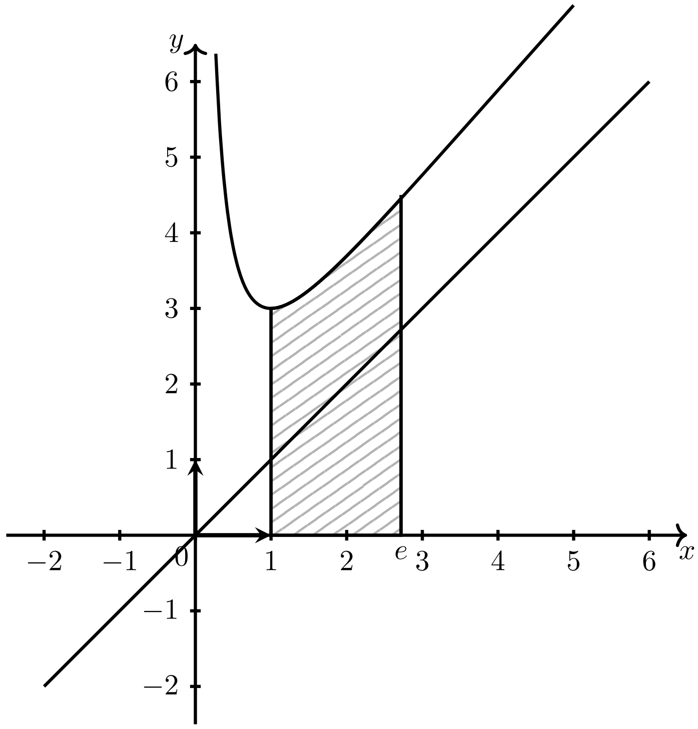
0.5 pt **d)** Dresser le tableau de variation de f .

0.75 pt **4 -** **a)** Vérifier que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1.5 pt **b)** Etudier le signe de $f''(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis en déduire que (C) admet un point d'inlexion I dont on déterminera ces coordonnées .

1 pt **5 -** **a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e lnx\,dx = 1$.

1.5 pt **b)** En déduire l'aire de la partie hachurée dans la figure. .



Exercice 3 : (4.5 pts)

Tous les résultats seront données sous forme de fraction

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément au hazard deux boules du sac.

On conidère les évènements suivants :

0.5 pt **1 -** Montrer que le nombres de tirages possibles est : 28 .

2 - **A** : "Les deux boules tirées sont de la même couleur"

B : "Les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

1 pt **a)** Montrer que $p(A) = \dfrac{13}{28}$.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement B .

3 - Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombres de boules vertes tirées.

0.5pt **a)** Montrer que $p(X = 0) = \dfrac{10}{28}$.

1pt **b)** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

0.5pt **c)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques et Gestion

Session : Rattrapage Juillet 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **4.5 points**
— Exercice 2 : **Étude de fonctions numérique** .... **11 points**
— Exercice 3 : **Calculs des probabilités** .... **4,5 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2

0.5 pt **2 -** Montrer par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n > 4$

0,5 pt **3 -** **a)** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n - 4)$

0,75 pt **b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente

4 - On pose : $v_n = u_n - 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **a)** Calculer v_0

0,5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

1 pt **c)** Calculer v_n en fonction de n puis déduire que : $u_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (11 pts)

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$. par : $g(x) = x + 1 - \ln x$.

0,5 pt **1 -** Montrer que $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

1 pt **2 -** Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3 - Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites n'est pas demandé).

0,75 pt

0,5 pt **4 -** Déduire du tableau de variations que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$. par : $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -1$

0,5 pt **2 -** **a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)$.

2 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique.

0,5 pt **3 -** **a)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x) = 2g(x)$..

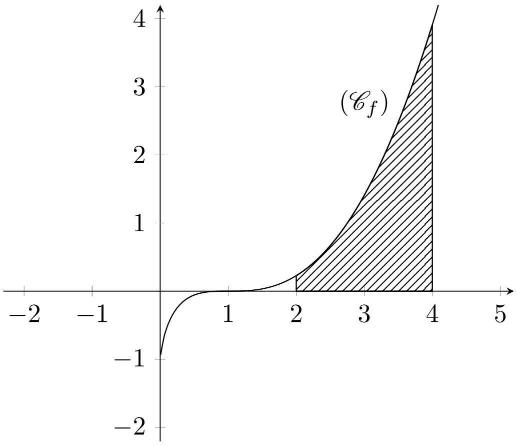
b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

1 pt

1,5 pt **4 -** Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I qu'on déterminera.

1 pt **5 -** **a)** en utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_2^4 2x \cdot \ln x dx = 28\ln 2 - 6$

1 pt **b)** En déduire l'air de la partie hachurée Dans la figure ci-dessous



Exercice 3 : (4,5 pts)

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 5 boules blanches et 2 boules vertes. On tire simultanément au hasard trois boules boules du sac.

1 pt **1 -** Montrer que le nombre de tirages possibles est : 120

2 - On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont de la même couleur "

B : " Parmi les deux boules tirées, il y en a une au moins qui est de couleur rouge "

1 pt **a)** Montrer que : $p(A) = \dfrac{11}{120}$

1 pt **b)** Calculer la probabilité de B

1,5 pt **3 -** Soit x la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules vertes tirées . Remplir le tableau ci-dessous en justifiant les réponses :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Economiques et Gestion

Session : Normal juin 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Economiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **5 points**
- Exercice 2 : **Étude de fonctions numérique et suites numériques** .... **10,5 points**
- Exercice 3 : **Calculs des probabilités** .... **4,5 points**

Exercice 1 : (5 pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2

1 pt **2 -** Montrer par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n > \dfrac{1}{2}$

0,75 pt **3 -** **a)** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente

4 - On pose : $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **a)** Calculer v_0

0,5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$

1 pt **c)** Calculer v_n en fonction de n puis déduire que : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (10,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2\, e^x$
Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1 pt **1 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0,5 pt **c)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$; $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 x^2e^x$

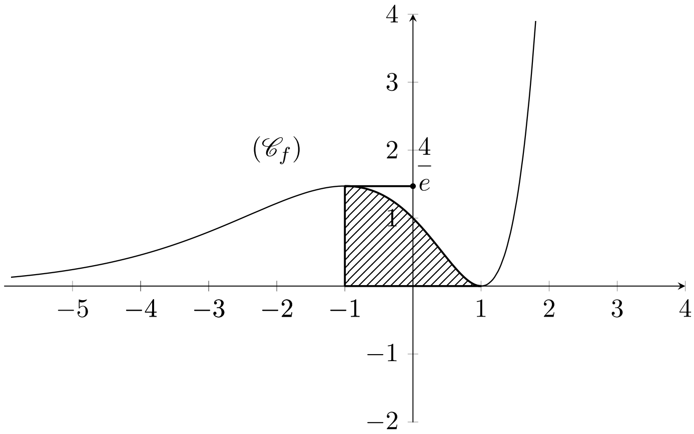
1,5 pt **d)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

1 pt **2 -** **a)** Montrer que : $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ puis calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis dresser le tableau de variation de f.

1 pt **3 -** Montrer que la fonction F définie par : $F(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right) e^x$ est la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4 - Dans la figure ci-dessous (C) est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$



1 pt a) D'après la question 3, calculer l'aire de la partie hachurée.

1 pt b) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 3 : (4,5 pts)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges, deux boules blanches et quatre boules vertes. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

0,5 pt **1 -** Montrer que le nombre de tirages possibles est : 72

2 - On considère les événements suivants :

A : " Tirer une boule blanche en premier "

B : " Les deux boules tirées sont de la même couleur "

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(A) = \dfrac{2}{9}$

1 pt **b)** Calculer la probabilité de B et en déduire que $p\left(\overline{B}\right) = \dfrac{13}{18}$
($\overline{B}$ l'évènement contraire de B)

1 pt **3 -** Sachant que la première boule tirée est blanche, calculer la probabilité pour tirer deux boules de couleurs différentes.

1,5 pt **4 -** Soit x la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées. Remplir le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Economiques

Session : de Rattrappage juin 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Economiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Les Suites Numériques** .... **4.5 points**
— Exercice 2 : **Étude dune Fonction Numérique** .... **11 points**
— Exercice 3 : **Calcul des Probabilités** .... **4.5 points**

Exercice 1 : (4.5 points)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) . \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2 .

0,25 pt **2 -** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$.

0,5 pt **b)** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 2$.

0,5 pt **3 -** **a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.

4 - On pose : $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0,75 pt **a)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

0,5 pt **b)** Calculer v_0 puis déterminer v_n en fonction de n.

0,75 pt **c)** Montrer que : $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}$ puis en déduire que : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0,25 pt **d)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (11 points)

Partie I :

On considère la fonction numérique g de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1,25 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis étudier son signe.

0,75 pt **2 -** **a)** Calculer $g(0)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Calcul des limites n'est pas demandé).

0,5 pt **b)** En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x^2$, et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1,5 pt **1 -** Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 -** **a)** Vérifier que : $f(x) = 2x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

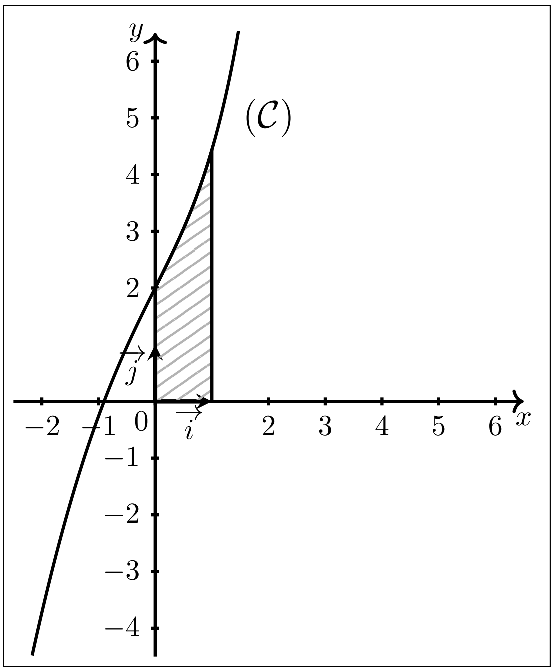
1,5 pt **b)** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **3 -** **a)** Montrer que : $f'(x) = 2.g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 pt **b)** En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2 pt **4 -** Vérifier que : $f''(x) = 2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $f''(x)$, puis en déduire que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion $I(0; 2)$.

1,5 pt **5 -** La figure en dessous représente une partie de la courbe $(\mathcal{C})$ dans l'intervalle $]-2; 2[$. Calculer l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4.5 pts)

Une urne contient 8 boules sont indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 2 boules blanches et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

0,5 pt **1 -** Montrer que le nombre de tirages possibles est : 56.

2 - On considère les événements suivants :

A:« Parmi les boules tirées, il n'existe aucune boule verte ».

B:« Une boule verte et les deux autres boules tirées sont blanches ».

C:« Une boule verte et les deux autres boules tirées sont rouges ».

D:« Les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux ».

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(A) = \dfrac{5}{28}$.

1,5 pt **b)** Calculer la probabilité des événements suivants : B , C et D.

3 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules vertes tirées.

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

1,5 pt **b)** Recopier le tableau de loi de probabilité de X dans votre feuille et le remplir en justifiant votre réponse.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$		$\dfrac{15}{28}$		

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences économiques et gestions

Session : Normal 2013 juin 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences économiques et gestions**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Équation d'exponentielle** .... **1.5 points**
— Exercice 2 : **suite numériques** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
— Exercice 4 : **Calcule des probabilités** .... **4.5 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (1.5 pts)

0.5 pt **1 -** Vérifier que pour tous x dans $\mathbb{R}$: $(X-4)(X-2) = X^2 - 6X + 8$

1 pt **2 -** En déduire, dans $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation : $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$ pour tous n dans $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2

2 - Pour tous n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - \frac{8}{3}$.

0.25 pt **a)** Calculer v_0.

1 pt **b)** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

1.5 pt **c)** Calculer v_n en fonction de n puis déduire que $u_n = \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

0.75 pt **d)** Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (10 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x sur $]0,+\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

1.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = \frac{1+x\ln(x)}{x}$ et calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

3 -

0.5 pt **a)** Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ pour tous x dans $]0,+\infty[$.

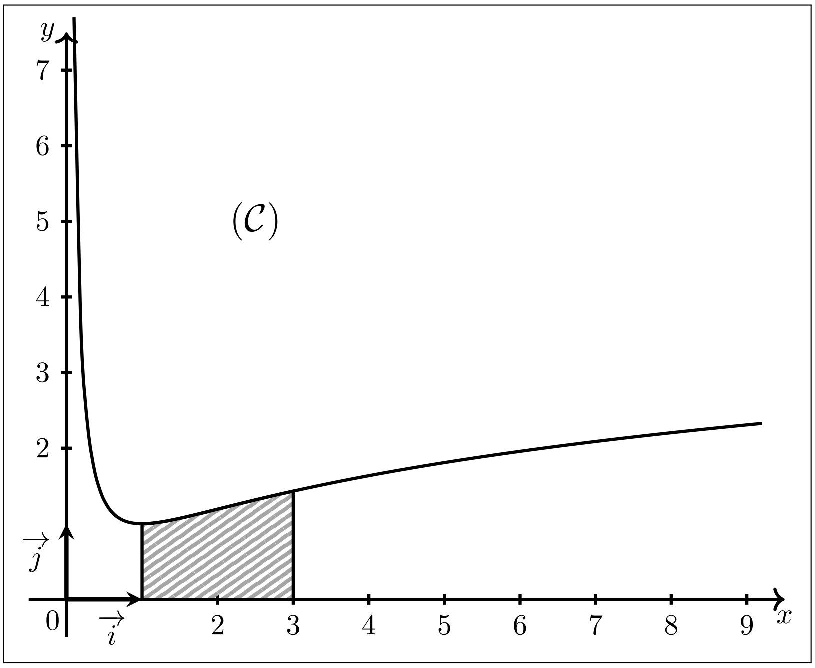
1 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau des variations de la fonction f.

2 pt **4 -** Calculer $f''(x)$ pour tous x dans $]0,+\infty[$ puis montrer que $I\left(2;\frac{1}{2}+\ln 2\right)$ est un point d'inflexion de la courbe de la fonction f.

5 -

1.5 pt **a)** En utilisant l'intégration par partie calculer $\int_1^3 \ln(x)dx$.

1 pt **b)** Calculer l'aire de partie achrée dans la figure ci-dessous.



Exercice 4 : (4.5 pts)

Une urne contient 10 boules : 4 boules rouges, 3 boules vertes et 3 boules blanches (indiscernables au toucher)

On tire au hasard simultanément 4 boules de l'urne.

On considère les deux événements suivants :

A:" Les boules tirées sont de même couleur".

B:" Obtenir exactement une boule blanche".

C:" Les trois boules tirées sont de même couleur et la quatrième de couleur différente".

1 pt **1 -** **a)** Vérifier que : $P(A) = \dfrac{1}{210}$.

1 pt **b)** Calculer $P(B)$.

1 pt **c)** Montrer que $P(C) = \dfrac{19}{105}$

1.5 pt **2 -** Sachant que l'événement C est vérifié, Calculer la probabilité d'obtenir exactement une seule boule blanche.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économie et Gestion Comptable

Session : Rattrapage juillet 2013

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Suites numériques** .... **5 points**
— Exercice 2 : **Calcul d'intégrale** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **8 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (5 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{-8}{U_n - 6}$, $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Calculer U_1 et U_2.

2 - On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 4}$

1.25 pt **a)** Calculer V_0, puis montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

0.75 pt **b)** Calculer V_n en fonction de n.

1 pt **c)** Montrer que : $U_n = \dfrac{4V_n - 2}{V_n - 1}$.

1 pt **d)** En déduire que : $U_n = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

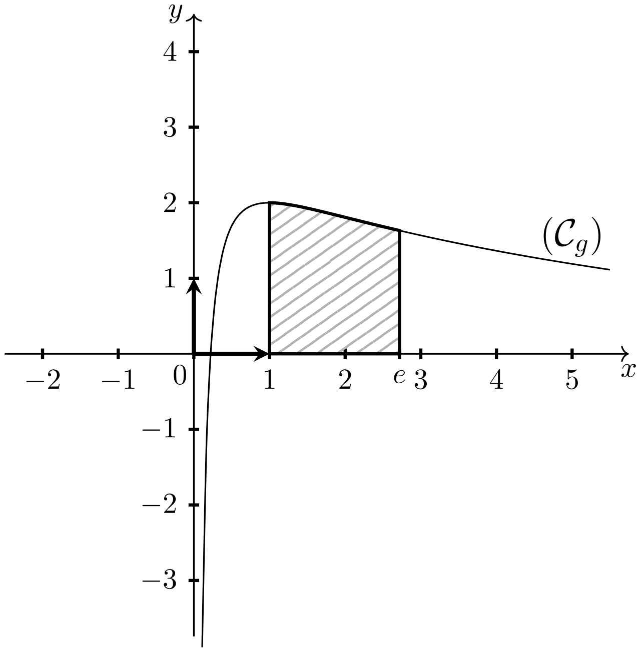
0.5 pt **e)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2 : (3 pts)

1.5 pt **1 -** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $3 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x-1}{x}$ puis calculer : $\displaystyle\int_1^e \frac{3x-1}{x}\,\mathrm{d}x$.

1 pt **2 -** Par une intégration par parties calculer : $\displaystyle\int_1^e lnx\,\mathrm{d}x$.

3 - Dans le repère orthonormé ci-dessous , (C_g) est la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0;6[$ par : $g(x) = \dfrac{3x-1}{x} - \ln x$.



0.5 pt Calculer l'aire de la partie hachurée en utilisant le résultat de la question 1 .

Exercice 4 : (8 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x\ln x)^2 + 3x^2 - 3$$

1 pt **1 - a)** Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1 pt **b)** Montrer que : $\lim_{x\to0^+} f(x) = -3$.

2 pt **2 - a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis montrer que : $f'(x) = 2x\left((\frac{1}{2}+\ln x)^2 + \frac{11}{4}\right)$.

1 pt **b)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

1 pt **c)** Donner le tableau de variations de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2 pt **d)** Calculer $f(1)$ puis déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3 : (4 pts)

Un sac contient 7 boules indiscernables au toucher : trois boules numérotées par 5, deux boules numérotées par 4 et deux boules numérotées par 3. On tire simultanément au hazard deux boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées portent chacune un numéro impair »

B : « La somme des deux numéros sur les deux boules tirées est supérieur ou égal à 9 »

0.5 pt **1 - a)** Déterminer le nombre de tirages possibles.

0.75 pt **b)** Calculer : $P(A)$.

0.75pt **2 -** Montrer que : $P(B) = \frac{3}{7}$.

1.25pt **3 -** Sachant que l'événement B est vérifiée calculer la probabilité de tirer deux boules portantes chacune un numéro impair.

0.75pt **4 -** Est ce que les l'événements A et B sont indépendants ? (justifier votre réponse).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session : Normal juin 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Sciences Économique**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Les intégrales** .... **2 points**
— Exercice 2 : **Les suites numériques** .... **4.5 points**
— Exercice 3 : **Problème danalyse** .... **9,5 points**
— Exercice 4 : **Les probabilités** .... **4 points**

Exercice 1 : (2 pts)

0.5 pt **1 -** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2\}$: $x^2-2x+7-\dfrac{10}{x+2}=\dfrac{x^3+3x+4}{x+2}$

1.5 pt **2 -** En Déduire le calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x+4}{x+2}\mathrm{d}x$

Exercice 2 : (4.5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+\dfrac{3}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2

1 pt **2 - a)** Montrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0\leq u_n$ et $u_n<1$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3}{4}(1-u_n)$

0.5 pt **c)** En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente

3 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-1$.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$ et calculer son premier terme v_0

0.5 pt **b)** Calculer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tot n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 : (9,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=-1+\dfrac{1}{x}-2\ln x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

1 pt **1 - a)** Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

0.25 pt **b)** Donner une interprétation géométrique au résultat obtenu

2 pt **2 - a)** Calculer la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x>+\infty}} f(x)$ puis la limite $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x>+\infty}} \dfrac{f(x)}{x}$

0.25 pt **b)** Donner une interprétation géométrique au résultat obtenu

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\right)$

0.75 pt **b)** Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de le fonction f

1.5 pt **4 - a)** Montrer que : $f''(x)=2\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour tout x $\mathbb{R}$ et déduire la concavité de (C)

b) Compléter le tableau :

0.75 pt

x	0.5	1	e
$f(x)$			

0.5 pt **c)** Montrer que $y=-3x+3$ est léquation de la tangente à (C) au point $A(1,0)$

1.5 pt **5 -** Tracer : (C)

Exercice 4 : (4 pts)

Une urne contient *sept* boules indiscernables au toucher, *quatre* boules rouges, *trois* boules vertes

On tire au hasard et simultanément *trois* boules de lurne

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de couleur des boules tirées

0.5 pt **1 -** vérifier que les valeurs prises par X sont 1 , 2 et 3

1 pt **2 -** Montrer que $p(X=1)=\frac{5}{56}$.

2 pt **3 -** Calculer : $p(X=3)$ puis $p(X=2)$

0.5 pt **4 -** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Calcul intégral** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **Suites numériques** .... **4.5 points**
— Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **9 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 -** Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une fonction primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **2 -** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^e \ln(x)\ dx$.

1.5 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_1^e \left(\ln\left(x\right)\right)^2\ dx$.

Exercice 2 : (4.5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **2 -** **a)** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et convergente.

3 - On pose $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **a)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{v_n-2}{v_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **c)** Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **d)** Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (9 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = e^x\left(3e^x - 4 + \dfrac{1}{e^x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = 2e^x(3e^x-2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1.25 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $f\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right) = -\dfrac{1}{3}$ puis dresser le tableau de variations de f.

0.5 pt **4 -** **a)** Vérifier que $f(x) = (3e^x-1)(e^x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en O et $I(-\ln(3);0)$.

1.25 pt **c)** Montrer que $f''(x) = 4e^x(3e^x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $f''(x)$ puis en déduire que I est point d'inflexion de la courbe (C).

2.25 pt **d)** Calculer $f'(0)$ et $f'(-\ln(3))$ puis construire I et $B\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right);-\dfrac{1}{3}\right)$ et les tangentes à la courbe (C) au points O, I et B, puis tracer la courbe (C)

(on prend $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$ et $\ln(2) \approx 0.7$ et $\ln(3) \approx 1.1$)

Exercice 4 : (4 pts)

Donner les résultats sous forme de fraction

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher, cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 - On considère les deux événements suivants :

A : "Les boules tirées sont de même couleur"

B : "Parmi les boules tirées il y a au moins une boule verte "

0.5 pt **a)** Montrer que la probabilité de A est $p(A) = \dfrac{3}{44}$.

1.25 pt **b)** Calculer $p\left(\overline{B}\right)$ (où $\overline{B}$ est l'événement contraire de l'événement B) puis en déduire $p(B)$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.25 pt **a)** Montrer que les valeurs prises par X sont $0, 1, 2$ et 3.

2 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique et Gestion

Session : Normal juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économique et Gestion**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Équations et Inéquations** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **Suites Numériques** .... **5 points**
— Exercice 3 : **Étude des fonctions numériques** .... **9.5 points**
— Exercice 4 : **Probabilités** .... **3 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $t^2 - 3t + 2 = 0$.

2 - En déduire dans $]0;+\infty[$.

1 pt **a)** Les solutions de l'équation : $(lnx)^2 - 3lnx + 2 = 0$.

1 pt **b)** Ensembles des solutions de linéquation : $(lnx)^2 - 3lnx + 2 < 0$.

Exercice 2 : (5 pts)

On considère la fonction numérique h de la variable réel x définie sur $[1;e]$ par : $h(x) = x - lnx$.

0.75 pt **1 -** Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $[1;e]$ puis déduire que h est croissante sur cette intervalle.

1 pt **2 -** Donner le tableau de variation de h sur $[1;e]$ puis montrer que : $h([1;e]) \subset [1;e]$.

3 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 pt **a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant e$

1 pt **b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0.25 pt **c)** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3 : (9.5 pts)

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = -x + \frac{lnx}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 1 - lnx$$

Partie I

1 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = -(2x + \frac{1}{x})$, puis déterminer le signe de $g^{'}(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0.75 pt **2 - a)** Calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g .(Le calcul des limites n'est pas demandé).

1 pt **b)** En déduire que pour tout x de $]0;1]$: $g(x) \geqslant 0$ et pour tout x de $]1;+\infty[$: $g(x) < 0$.

1 pt **3 -** Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $\quad f^{'}(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Partie II

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.25 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{n\to0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

1.25 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ puis montrer que (C_f) admet une asymptote oblique $(\triangle)$ d'équation $y = -x$ au voisinage $+\infty$.

1.5 pt **c)** Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(\triangle)$.

0.75 pt **2 -** Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f (on utilise le résultat de la question 3 de la partie I).

1 pt **3 -** Tracer la courbe (C_f) et la droite $(\triangle)$.(On admet que (C_f) admet un point dinflexion dabscisse $e^{\frac{3}{2}}$ avec $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.5$ et $f(e^{\frac{3}{2}}) \simeq -4$)

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher, quatre boules rouges et trois boules vertes.

On considère lexpérience aléatoire suivante :

On tire une boule b de lurne et on marque sa couleur :

∗ si b est rouge on la remet dans lurne et puis on tire une deuxième boule.

∗ si b est verte on ne la remet pas dans lurne et puis on tire une deuxième boule.

On considère les événements suivants :

A : ńles deux boules tirées sont de la même couleurż

B : ń tirage dune boule rouge dans le deuxième tirageż

2 pt **1 -** Montrer que : $P(A) = \dfrac{23}{49}$ puis calculer $P(B)$.

1 pt **2 -** Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Calcul intégral** .... **2 points**
- Exercice 2 : **Suites numériques** .... **5 points**
- Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** .... **9.5 points**
- Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (2 pts)

Soit h la fonction numérique définie sur $I =]1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}$.

0.75 pt **1 -** Vérifier que $h(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ pour tout x de I.

1.25 pt **2 -** En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 h(x)\ dx$.

Exercice 2 : (5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n+6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 - a)** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose $v_n = \dfrac{u_n+4}{u_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Calculer $v_n - 1$ en fonction de u_n puis en déduire que $v_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{v_n+4}{v_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{7}{2}$ puis calculer v_n en fonction de n.

0.5 pt **d)** Déduire u_n en fonction de n.

0.25 pt **e)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (9.5 pts)

partie A : On considère la fonction numérique g définie sur $]-\infty;0]$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x)$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 pt **1 -** Montrer que $g'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de I.

1 pt **2 - a)** Calculer $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

0.5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de g.

0.5 pt **3 -** En déduire que $g(x) < 0$ pour tout x de I.

1.5 pt **4 - a)** Calculer $g''(x)$ pour tout x de I et en déduire la concavité de (C).

1.5 pt **b)** Calculer $g'(0)$ puis construire (C). (on prend $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 4cm$ et $g(0) \approx -0.2$)

partie B : Soit f la fonction numérique définie sur I par : $f(x) = \dfrac{\ln(e^x+1)}{e^x}$

1 pt **1 -** On posant $t = \mathrm{e}^x$ montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

1.5 pt **2 - a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de I et en déduire que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$ pour tout x de I.

1.5 pt **b)** Calculer $f(0)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f puis en déduire que $\ln(2) \leq f(x) \leq 1$ pour tout x de I.

Exercice 4 : (3.5 pts)

Un sac U_1 contient deux boules rouges et trois boules blanches.

Un autre sac U_2 contient deux boules blanches et trois boules rouges.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, une boule du sac U_1 et une boule du sac U_2.

On considère les deux événements suivants :

A : "Les deux boules tirées sont de même couleur"

B : "La boule tirée de U_1 est rouge"

2 pt **1 -** Calculer $p(B)$ et montrer que $p(A) = \dfrac{12}{25}$.

1.5 pt **2 -** Sachant que la boule tiré de U_1 est rouge, qu'elle est la probabilité que les deux boules tirées soient de même couleur ?

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Normal juin 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **5 points**

— Exercice 2 : **Étude de fonctions** .... **11 points**

— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**

Exercice 1 : (5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

1 pt **2 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$

1 pt **a)** Calculer v_0, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = -1$

0,75 pt **b)** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, puis donner v_n en fonction de n.

1 pt **c)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et en déduire que $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 : (11 pts)

partie A :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + x + 2x\ln x$$

1 pt **1 -** Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ g'(x) = 3 + 2\ln x$

1,5 pt **b)** Etudier le signe de $g'(x)$, puis dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

1,25 pt **c)** Calculer $g(1)$ et en déduire de la question 2-b) que :

$\forall x \in]0;1] \ ; \ g(x) \le 0$ et que $\forall x \in [1;+\infty[\ ; \ g(x) \ge 0$

partie B :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x + x^2\ln x$$

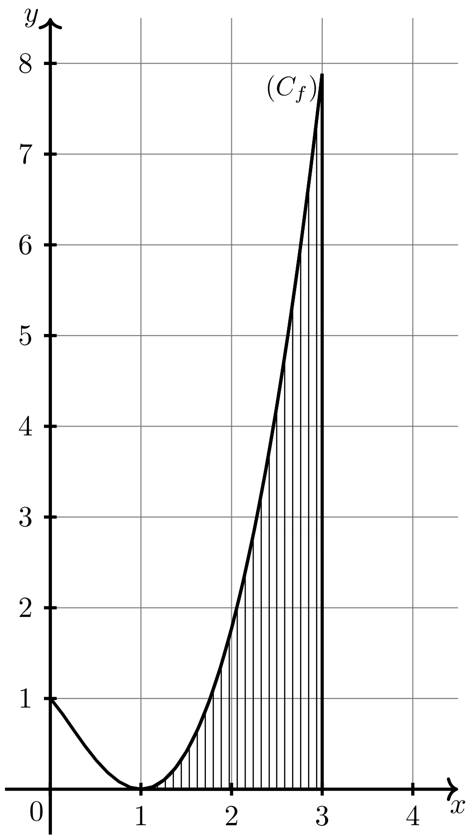
0,5 pt **1 - a)** Calculer la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2 pt **b)** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

1 pt **2 - a)** Vérifier que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

1 pt **b)** En utilisant le résultat de la question 2-c) de la première partie dresser le tableau de variations de f.

3 - Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



1 pt **a)** En utilisant l'intégration par parties montrer que : $\int_1^3 x^2 \ln(x) dx = 9\ln 3 - \frac{26}{9}$

1 pt **b)** En déduire l'aire de la partie hachurée de la figure ci-dessus.

Exercice 3 : (4 pts)

Un bureau détudes est constitué de 20 ingénieurs en informatique et en génie civil et ils sont distribués selon le tableau ci-dessous :

Spécialité	homme	femme
Informatique	5	3
Génie civil	8	4

On a choisi par hasard et simultanément trois personnes de ce bureau pour participer à une formation professionnelle.

0,5 pt **1 -** **a)** Soit l'événement A ńtous les personnes choisis sont des femmesż. Montrer que : $p(A) = \frac{7}{228}$

1 pt **b)** Sachant que toutes les personnes choisies sont des femmes calculer la probabilité quelles soient de même spécialité.

2 - Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de spécialités des personnes choisies.

1,5 pt **a)** Montrer que $p(X = 1) = \frac{69}{285}$ et déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

1 pt **b)** calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Calcul d'intégral** .... **2.5 points**
— Exercice 2 : **les suites numériques** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Étude d'une fonction numérique** .... **9.5 points**
— Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.25 pt **1 -** **a)** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

0.75 pt **b)** Déduire la valeur de l'integrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$.

0.75 pt **2 -** **a)** En utilisant une intégration par partie, calculer : $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.

0.75 pt **b)** Déduire la valeur de l'integrale : $\displaystyle\int_0^1 (x - e^{-2x})e^x dx$.

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{5}{6}U_n + \dfrac{1}{6} \end{cases}$

0.75 pt **1 -** Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_n > 1$.

1 pt **2 -** Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_n - 1$.

1 pt **a)** Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis déterminer sa raison et son première terme.

0.5 pt **b)** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = (\dfrac{5}{6})^n$.

0.25 pt **4 -** **a)** Calculer U_n en fonction de n.

0.5 pt **b)** Calculer la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3 : (9.5 pts)

Partie I

Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x + 1 - e^x$.

1,25 pt **1 -** Calculer $h'(x)$ et étudier son signe puis dresser le tableau de variations de h.(Le calcul des limites n'est pas demandé).

0,5 pt **2 -** En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) \leqslant 0$.

Partie II

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 2e^x$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1,25 pt **1 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

1,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

1 pt **2 -** Montrer que $f'(x) = 2h(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

1,5 pt **3 -** **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-2,2;-2[$.

0.5 pt **b)** Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse 0.

0.75 pt **c)** Calculer $f'(0)$ puis déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en I.

1.25 pt **d)** Tracer la courbe (C_f) et la tangente T dansle repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Exercice 4 : (4 pts)

On considère un Dé de forme cubique non truqué dont les faces portent les chiffres : $1;1;1;2;2$ et 3 successivement.

On lance le Dé deux fois successives et on marque dans chaque fois le chiffre porté par la face de haut. On considère les événements suivants :

A:« Avoir deux fois le chiffre 3 »

B:«Avoir deux chiffre dont le produit est inférieur ou égale à 6»

0,5 pt **1 -** **a)** Montrer que : $P(A)=\dfrac{1}{36}$.

1 pt **b)** Montrer que B est l'événement contraire de A, puis déduire $P(B)$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale le nombre de fois où apparait le chiffre 3.

0,25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

1,5 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,75 pt **c)** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session normal 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économique Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte* 4 *exercices :

- Exercice 1 : **Les suites numériques** .... **04 points**
- Exercice 2 : **Fonction numérique** .... **04.75 points**
- Exercice 3 : **Problème** .... **07.25 points**
- Exercice 4 : **Probabilité** .... **04 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4 points)

- Partie 1 : On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme $u_1 = 100$ et de raison $q = 1.08$ et la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 1.08v_n + 8 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

0.75 pt **1 -** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = 100 \times (1.08)^{n-1}$.

2 - On pose $w_n = v_n + 100$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en déterminant ra raison et son premier
1.25 pt terme.

0.75 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = 101 \times (1.08)^{n-1} - 100$.

- Partie 2 : Un expert a proposé deux types de machines de production pour une entreprise :

1 - La première machine produit u_n tonnes d'un produit en fonctionnant n heures.

2 - La seconde machine produit v_n tonnes du même produit en fonctionnant n heures.
Sachant que l'entreprise veut utiliser l'une des machines pendant 100 heures par semaine, déterminer laquelle des deux machines produit le plus en une semaine en justifiant votre
1.25 pt réponse.

Exercice 2 : (4.75 points)

DAns la figure ci-dessous $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentatif d'une fonction numérique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

Sachant que $(\mathscr{C}_f)$ admet :

- Branche parabolique de direction l'axe (OY) au voisinage de$-\infty$.
- l'axe des abscisses asymptote verticale.
- La droite (Δ) d'équation $y = -x$ asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

En utilisant la figure déterminer :

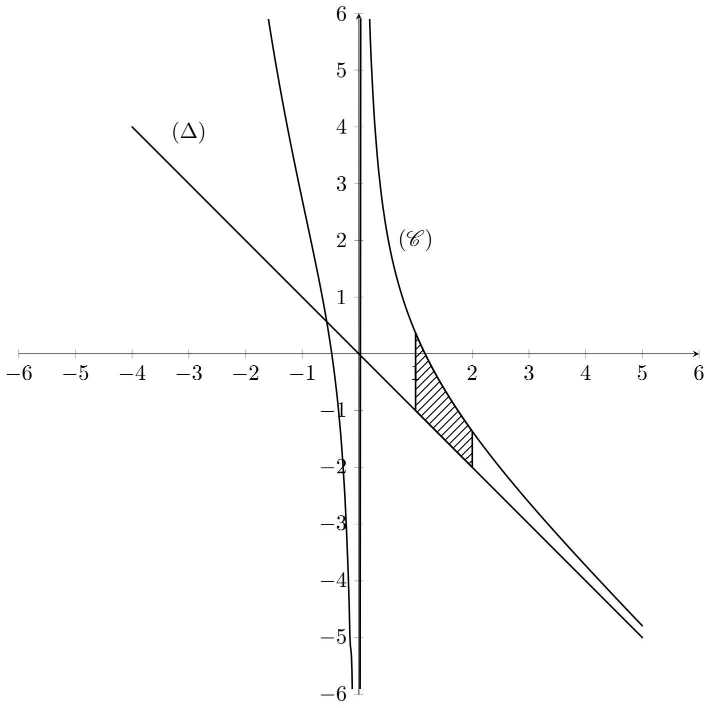
1.25 pt **1 - a)** Les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x)$.

1pt **b)** Dresser le tableau de variations de f sur son domaine de définition.

0.5 pt **c)** Donner le signe de $(f(x) + x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

0.5 pt **d)** Donner le nombre de solution de l'équation $f(x) = -x$ sur $\mathbb{R}^*$

2 - Calculer l'aire de la surface hachurée dans la figure sachant que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f(x) = e^{-x} - x + \dfrac{1}{x}$.



Exercice 3 : (7.25 points)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :$g(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

0.75 pt **1 -** Montrer que le domaine de définition de g est : $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

0.5 pt **2 - a)** Étudier le signe de $x\ln(x)$ sur D.

2.75 pts **b)** Calculer les limites de g aux bornes de D puis interpréter géométriquement les résultats.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall x \in D)$; $g'(x) = -\dfrac{(1+\ln(x))}{(x\ln(x))^2}$.

1.25 pts **b)** Étudier le signe de $g'(x)$ sur D ; puis dresser le tableau de variation de g.

1 pt **4 -** Construire $(\mathscr{C})$ $\left(\text{on prend } e \simeq 2.7 \text{ et } \frac{1}{e} \simeq 0.4\right)$.

Exercice 4 : (4 points)

Une urne contient six boules rouges, quatre d'entre elles portent le numéro 1 et deux portent le numéro 2. Elle contient également huit boules vertes, cinq d'entre elles portent le numéro 1 et trois portent le numéro 2. On tire simultanément deux boules de l'urne. On suppose que toutes les boules sont indistinguables au toucher.

0.25 pt **1 -** Quelle le le nombre de tirage possible ?

2 - On considère les événements suivants :

- A « tirer deux boules sont de la même couleurs »
- B « tirer deux boules portant le même numéro »

0.5 pt **a)** Montrer que $p(A) = \dfrac{43}{91}$.

1 pt **b)** Calculer $p(B)$.

0.5 pt **c)** Sachant que les deux boules sont de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles portent le même numéro ?

0.5 pt **d)** Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3 - On considère la variable aléatoire X qui égale le nombre de boules rouge tirées.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs de X.

1.5 pts **b)** Déterminer la loi de probabilité de X.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : de Rattrapage juillet 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Les Suites Numériques** .... **6 points**

— Exercice 2 : **Étude des Fonctions Numériques** .... **10 points**

— Exercice 3 : **Calcul des Probabilités** .... **4 points**

Exercice 1 : (6 points)

Le tableau suivant donne les variations de la fonction f sur $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{6}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

I- En lisant le tableau , répondez aux questions suivantes :

0,5 pt **1 -** Détérminer les deux extremums de la fonction f

0,75 pt **2 -** Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de D.

0,75 pt **3 -** Vérifie que : $f\Big([1;2]\Big) \subset [1;2]$.

II- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1 pt **1 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1$ et $u_n \leqslant 2$.

1 pt **2 -** Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante .

0,5 pt **3 -** Déduire de ce qui précède que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente .

1,5 pt **4 -** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (10 points)

Partie I :

On considère la fonction numérique h définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = xe^x - 1$.

1 pt **1 -** Calculer $h'(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$ puis montrer que h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

1 pt **2 -** **a)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $h(\alpha) = 0$.

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de h sur $[0;+\infty[$ (Le calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x)$ n'est pas demandé)

1 pt **c)** Déduire que : $h(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$ et $h(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x - 1 - \ln x$.

0,75 pt **1 -** **a)** Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $g(x) = e^{x}\left(1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{x}{e^{x}}\right)\right) - 1.$

1,25 pt **c)** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

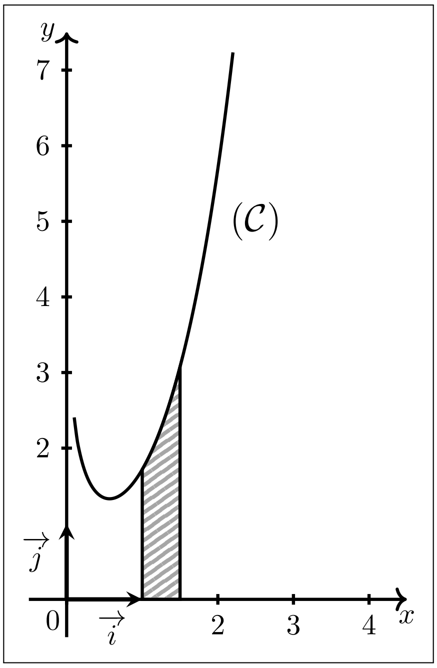
1 pt **2 -** **a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{h(x)}{x}$

1 pt **b)** Etudie le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g (le calcul de $g(\alpha)$ n'est pas demandé)

3 - La courbe (C) est la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 pt **a)** Par integration par parties calculer : $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \ln x dx$:

1 pt **b)** Calculer l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4 pts)

Une étude sur un Dé non truqué a montré que la probabilité que ses faces apparaissent stabilisées comme suit :

Le chiffre de la face	1	2	3	4	5	6
probabilité d'apparence de la face	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

1 - On lance ce Dé deux fois successives et on marque à chaque fois le chiffre porté par la face de haut. On considère les événements suivants :

A:« Avoir deux chiffres impair »

B:«Avoir deux chiffres dont la somme est supérieur ou égale à 10».

0,75 pt **a)** Montrer que : $P(A) = \dfrac{81}{400}$.

0,75 pt **b)** Calculer : $P(B)$

c) Sachant que le chiffre apparait dans la face en haut dans les deux premier fois est impair, calculer la probabilité pour que la somme de ces deux chiffres soit supérieur ou égale à 10.

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale le nombre de fois où apparait le chiffre 2.

0,25 pt **a)** Déterminer les valeurs de X.

1,5 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Normal juin 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Calcul intégrale** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Étude d'une fonction numérique** .... **2.5 points**
— Exercice 3 : **Suites numériques** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Étude d'une fonction numérique** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Dénombrement et probabilités** .... **4 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

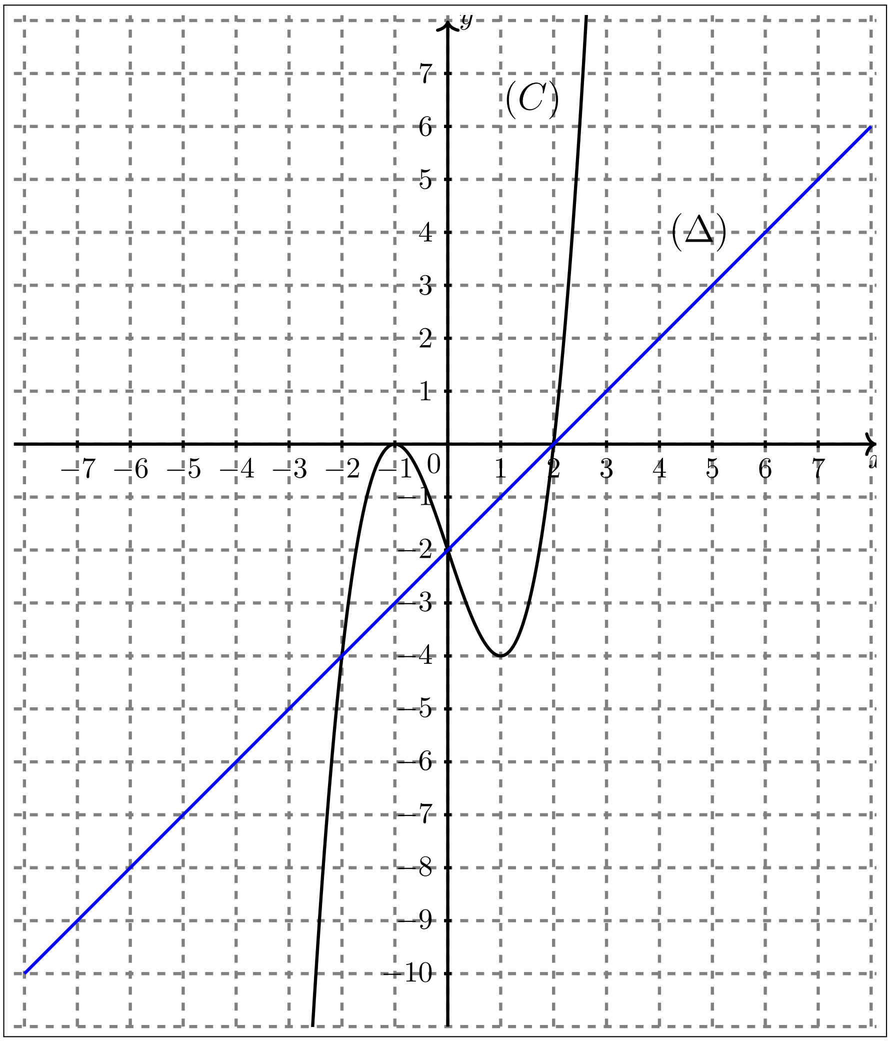
0,5 pt **1 -** **a)** Donner une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^3$

0,5 pt **b)** Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x^3 \mathrm{d}x$

2 pt **2 -** En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^2 x^3 \ln(x) \mathrm{d}x$

Exercice 2 : (3 pts)

(C) est la courbe représentative d'une fonction numérique g définie sur $\left[\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Á partir de la courbe représentative de la fonction g :

0,5 pt **1 -** Déterminer le signe de g sur l'intervalle $\left[\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

0,5 pt **2 -** Déterminer la valeur minimale relative et la valeur maximale relative de la fonction g.

0,75 pt **3 -** Déterminer l'intersection de (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$.

0,75 pt **4 -** Résoudre dans $\left[\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right]$ l'inéquation : $g(x) \geq x - 2$.

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = 30 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{5}u_n + 20 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Posons $v_n = u_n - 25$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **1 - a)** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

1 pt **b)** Calculer v_n en fonction de n, puis déduire que $u_n = 25 + 5\left(\frac{1}{5}\right)^n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

1 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1 pt **2 -** On suppose que u_n est le montant du coût d'un produit d'une entreprise en l'année $2007 + n$ en millions de dirhams. Á partir de quelle année, le montant du coût sera inférieur strictement à $25,0016$ millions de dirhams ?

Exercice 4 : (6.5 pts)

Considèrons la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{\ln(x)}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

1,25 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.

1,25 pt **3 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$ pour tout x de D.

1 pt **b)** Déterminer la monotonie de la fonction de f sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

2 pt **5 -** Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2};2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 5 : (4 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10.

On tire successivement et avec remise *trois* boules de l'urne.

1 pt **1 -** Calculer le nombre de tirages possibles.

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules portant un nombre pair est $\frac{1}{8}$.

1 pt **3 -** Déduire que la probabilité de tirer trois boules portant au moins un nombre impair.

1 pt **4 -** Sachent que toutes les boules tirées portent des nombres pairs, calculer la probabilité de tirer 3 boules dont la somme des nombres qu'elles portent soit égale à 24.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **2.5 points**
- Exercice 2 : **Suites numériques** .... **4 points**
- Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique et calcul d'intégral** .... **9.5 points**
- Exercice 4 : **Calcul des probabilités** .... **4 points**

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2 pts)

Soit f un fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble $\mathcal{D} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		$-$		0		$-$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau :

0.5 pt **1 -** Déterminer, dans l'ensemble $\mathcal{D}$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1 pt **2 -** Déterminer, dans l'ensemble $\mathcal{D}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

1 pt **3 -** Déterminer l'image de l'intervalle $]0, 2]$ par f.

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **1 -** **a)** Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

0.5 pt **b)** Calculer v_n en fonction de n.

1 pt **2 -** **a)** Montrer que $u_n = \dfrac{4 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{4\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3 : (9.5 pts)

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x$.
Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1 pt **1 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

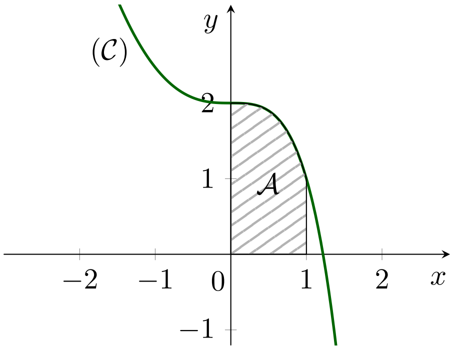
1 pt **b)** Vérifier que $f(x) = x^2 \left(1 + 2(1 - x)\dfrac{e^x}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

2.5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. .

1 pt **2 -** **a)** Montrer que $f'(x) = -2x(e^x - 1)$ pour tout x de I.

1.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3 - La courbe ci-contre est la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f.



1.5 pt **a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = 1$.

1 pt **b)** Calculer $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

Exercice 4 : (3.5 pts)

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : trois boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro 2, trois boules portant le numéro 3 et une seule boule portant le numéro 4.
On tire simultanément 3 boules du sac.

1 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées portant le numéro 1.

1 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par X.

2 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

1 pt **2 -** Calculer la probabilité de l'événement : "tirer une seule boule porte le numéro 1 et deux boules portent chacune un numéro pair"

FIN

Version 1 :: 2023

Merci

MTM GROUP