

LE "PLATEAU DU SAVOIR" EN MATHEMATIQUES AUX PROBATOIRES "CDE" ET "TI"



Cours bien détaillés



**Exercices types examens corrigés et
commentés**

Toute représentation, traduction ou reproduction, même partiel par n'importe quel procédé en tout pays, faites sans autorisations préalable de l'auteur, ou des ayants droits, ou ayant cause est illicite et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires selon la loi du 11 mars 1957 alinéas 2 et 3 de l'article 41.

Une représentation ou reproduction sans autorisations préalable de l'auteur constituerait à une contrefaçon sanctionnés par les articles 425 et puisant du code pénal.

La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41 que les copies ou les reproductions strictes réservés à l'usage privé du copiste et non destiné à une utilisation collective d'une part, et d'autre part que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration.

Par Ingénieur de Conception en Génie Civil et Architecture,

PCEG-MATHS TEBAYA AMBROISE

TABLE DES MATIERES



Chapitre1 : Equation et Inéquation dans $\mathbb{R}$ - Système d'équation de $\mathbb{R}^n$	5-48
Léçon1 : Polynôme du second degré dans $\mathbb{R}$	5
Léçon2 : Equation et Inéquation dans $\mathbb{R}$	14
Léçon3 : Système d'équation de $\mathbb{R}^n$	21
Chapitre 2 : Barycentre - Lignes de niveau.....	51
Léçon1 : Barycentre de deux points et plus de deux points pondérés	51
Léçon2 : Lignes de niveau	58
Chapitre 3 : Géométrie analytique du plan.....	65
Léçon1 : Les droites du plan	65
Léçon2 : Cercles	70
Chapitre 4 : Angles orientés-trigonométrie.....	109
Léçon1 : Angles orientés	109
Léçon2 : Formules de trigonométrie.....	113
Léçon3 : Equations et inéquations trigonométriques.....	117
Léçon4 : Arcs capables.....	122
Chapitre 5 : Suites Numériques.....	147
Léçon1 : Généralités sur les suites numériques	147
Léçon2 : Suites arithmétiques - Suites géométriques.....	153
Chapitre 6 : Généralités sur les fonctions	195
Léçon1 : Applications.....	195
Léçon2 : Opérations sur les fonctions.....	199
Chapitre 7 : Limites-Continuité de Fonctions numériques.....	203
Léçon1 : Limites de Fonctions numériques	203
Leçon 2 : Limite et opération sur les fonctions.	207
Leçon 3 : Continuité de Fonctions numériques.	210
Chapitre 8 : Dérivation.....	214
Léçon1 : Dérivabilité d'une fonction numérique	214
Leçon 2 : Applications de la dérivée d'une fonction.	220
Chapitre 9 : Etude de Fonctions.....	225
Léçon1 : Les éléments de la courbe d'une fonction	225
Leçon 2 : Etude de la courbe d'une fonction.	232
Chapitre 10 : Espaces vectoriels réels	303
Léçon1 : Notion d'espace vectoriel réels	303
Leçon 2 : Familles libres-Familles génératrices.	306
Leçon 3 : Applications linéaires et matrices.	311
Chapitre 11 : Transformations du plan	339
Léçon1 : Présentation des isométries du plan	339
Leçon 2 : Les rotations	348
Leçon 3 : Isométries du plan.	352
Leçon 3 : Homothéties du plan.	357

Chapitre 12: Orthogonalité dans l'espace.....	383
Léçon1 : Droites orthogonales.....	383
Léçon 2 : Droites et plans orthogonaux.....	386
Léçon 3 : Plans perpendiculaires.	388
Chapitre 13: Géométrie analytique de l'espace.....	392
Léçon1 : Vecteurs de l'espace.....	392
Léçon 2 : Equations cartésiennes et représentation paramétriques.....	398
Léçon 3 : Positions relatives des droites et plans dans l'espace.	401
Léçon 4 : Équation cartésienne d'une sphère et positions relative d'une et d'un plan puis d'une sphère et d'une droite.	403
Chapitre 14: Introduction à la théorie des graphes.....	419
Chapitre 15: Statistiques	424
Léçon1 : Caractéristiques de position.....	424
Léçon 2 : Caractéristique de dispersion.....	430
Chapitre 16: Dénombrement.....	432
Léçon1 : Les ensembles.....	432
Léçon 2 : Différents types de dénombrements.....	438

« QUAND CEST DUR, SEULS LES DURS AVANCENT ET CELA PROUVE QUE VOUS ETES SUR LE BON CHEMIN »

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Chapitre 1 : POLYNOMES, EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

LECON 1 : POLYNÔME DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{R}$

Motivation :

Plusieurs problèmes de la vie peuvent se mettre sous la forme d'équation du second degré à savoir certains problèmes de double augmentation ou double réduction, le problème de calcul de dimension voir encore il arrive parfois de connaître la surface et le périmètre d'un rectangle et de chercher souvent à trouver la longueur et la largeur rapidement et sûrement, etc Notre leçon d'aujourd'hui nous donner des méthodes rapides et efficaces pour résoudre de tels problèmes.

Compétence visée :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une équation du second degré.



Prérequis:

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

On admet que $P(x)$ peut s'écrire $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme

1. Donner le degré de $P(x)$.
2. Quelle différence faites-vous entre racine et solution ?
3. Montrer que -1 est une racine de $P(x)$
4. Donner en justifiant le degré du polynôme Q .
5. Déterminer $Q(x)$ par la division euclidienne
6. Donner la forme canonique de $Q(x)$
7. Dédire la forme factorisée de $P(x)$
8. Etudier le signe de $P(x)$
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ puis les inéquations $P(x) > 0$ et $P(x) \leq 0$

Situation Problème:



Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 45x^2 + 536x - 900$

Un livre de mathématiques à la forme d'un pavé droit ayant pour volume 900 cm^3 , pour aire totale 1072 cm^2 et pour longueur totale des arêtes 180 cm . Les réels α , β et δ désignent les dimensions de ce pavé tel que $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \delta)$.

Développer $P(x)$ en fonction des réels α , β et δ puis en déduire les dimensions de ce livre.

1. Polynôme du second degré, forme canonique et factorisation

Activité d'apprentissage :



1. Donner la définition de monôme de $\mathbb{R}$
2. Ecrire alors l'expression d'un polynôme du second degré dans $\mathbb{R}$
3. Rappeler la forme canonique du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$
4. a. Dédire la factorisation de P en fonction de a , b et Δ en posant $\Delta = b^2 - 4ac$.
b. Dire suivant le signe de Δ si le polynôme P est factorisable ou non.

- c. Donner la forme factorisée de P en fonction de Δ pour le cas factorisable.
 5. a. Résoudre $P(x) = 0$. On notera x_1 et x_2 les solutions.

RESUME :**Définition**

On appelle Polynôme du second degré dans $\mathbb{R}$ toute fonction numérique à variable réelle s'écrivant sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$, b et c sont des réels.

$$\text{On a : } P(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Donc $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$. Cette forme est appelée forme canonique du polynôme.

Le polynôme P peut se mettre sous la forme $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ en posant

$$\Delta = b^2 - 4ac. \text{ On obtient } P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Donc $P(x) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$. On en déduit la propriété suivante :

Propriété :

- Si $\Delta > 0$ alors le polynôme P est factorisable et admet donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et sa forme factorisée est $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme P n'admet pas de racines et donc n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme P admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et est donc factorisable et sa forme factorisée est $P(x) = a(x - x_0)^2$.

Exemple 1 : Donnons la forme canonique de $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

$$\text{On a : } P(x) = 2x^2 + 4x - 3 = 2 \left(x^2 + 2x - \frac{3}{2} \right) = 2 \left[(x + 1)^2 - (1)^2 - \frac{3}{2} \right] = 2 \left[(x + 1)^2 - 1 - \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2 \left[(x + 1)^2 - \frac{5}{2} \right]. \text{ Donc la forme canonique du polynôme } P \text{ est } P(x) = 2 \left[(x + 1)^2 - \frac{5}{2} \right]$$

Exemple 2 : Factorisons les polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - x - 6 \quad ; \quad Q(x) = 4x^2 + 12x + 9 \quad ; \quad R(x) = x^2 + x + 1$$

✶ Pour $P(x) = x^2 - x - 6$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$. Donc $\Delta > 0$ d'où le polynôme P est factorisable

et admet donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3$ et sa forme factorisée est $P(x) = (x+2)(x-3)$.

✶ Pour $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$. Donc $\Delta = 0$ d'où le polynôme Q est factorisable et admet donc une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ et sa forme factorisée est

$$Q(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

✶ Pour $R(x) = x^2 + x + 1$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc $\Delta < 0$ d'où le polynôme R n'est pas factorisable et donc n'admet pas de racines.

2. Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$ alors le polynôme P est factorisable et admet donc deux racines distinctes x_1 et x_2 . En supposant que $x_1 < x_2$ on a le tableau de signe de P suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P(x)	Signe de a	0	Signe de -a	Signe de a

- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme P n'est pas factorisable et donc n'admet pas de racines. On a le tableau de signe de P suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme P est factorisable et admet donc une racine double x_0 .

On a le tableau de signe de P suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P(x)	Signe de a	0	Signe de a

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$										
Racines de f (équation $a x^2 + b x + c = 0$)	deux racines distinctes x_1 et x_2 tels que : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de racine										
Factorisation	$f (x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f (x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation										
Signe de f (x)	<table><tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>signe de a</td><td></td><td>signe de - a</td><td>signe de a</td></tr></table>	X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	f(x)	signe de a		signe de - a	signe de a	f(x) est du signe de a	f(x) est du signe de a
X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$									
f(x)	signe de a		signe de - a	signe de a									

Exemple : Donnons le signe des polynômes suivants :

$$P(x) = -x^2 + x + 6 \quad ; \quad Q(x) = 4x^2 + 12x + 9 \quad ; \quad R(x) = x^2 + x + 1$$

✶ Pour $P(x) = -x^2 + x + 6$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$. Donc $\Delta > 0$ d'où le polynôme P est factorisable

et admet donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3$ et sa forme factorisée est $P(x) = -(x+2)(x-3)$. Nous obtenons le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$P(x)$		$-$	$+$	$-$

Donc pour tout $x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$, $P(x) > 0$

Pour tout $x \in]-2; 3[$, $P(x) < 0$ et pour $x = -2$ ou $x = 3$, $P(x) = 0$

★ **Pour $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$**

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$. Donc $\Delta = 0$ d'où le polynôme Q est factorisable et admet donc une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ et sa forme factorisée est

$Q(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$. Nous obtenons le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$Q(x)$		$+$	$+$

Donc pour tout $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}; +\infty[$, $Q(x) > 0$ et pour $x = -\frac{3}{2}$, $Q(x) = 0$.

★ **Pour $R(x) = x^2 + x + 1$**

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc $\Delta < 0$ d'où le polynôme R n'est pas factorisable et donc n'admet pas de racines. Nous obtenons le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$R(x)$		$+$

Donc pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, $R(x) > 0$.

3. Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré.

Activité d'apprentissage :



Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On suppose que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

1. Donner la forme factorisée de P en fonction de ses deux racines distinctes x_1 et x_2
2. Développer $P(x)$ puis le réduire suivant la puissance décroissante de x en fonction de ses deux racines x_1 et x_2 .
3. Calculer la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 \times x_2$
4. Dédire alors que $P(x) = a(x^2 - Sx + P)$

Propriété

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Lorsque $\Delta > 0$ alors le polynôme P est factorisable et admet donc deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. La somme des racines de P est le nombre noté réel S défini par $S = -\frac{b}{a}$ et le produit des racines de P est le nombre noté P défini par $P = \frac{c}{a}$.

Le système défini par $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ est appelé système symétrique.

Les nombres x et y sont les solutions éventuelles de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

Si le couple $(a; b)$ est solution ce système, il en est de même du couple $(b; a)$.

Un tel système est appelé système symétrique.

À retenir

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P \\ x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{S}{P} \end{cases}$$

En effet on a :

- On a : $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$. Donc la somme des racines de P est $S = -\frac{b}{a}$
- On a : $x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Donc le produit des racines de P est $P = \frac{c}{a}$

On sait aussi que $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \text{ Or } S = x_1 + x_2 \text{ et } P = x_1x_2$$

Donc $P(x) = a(x^2 - Sx + P)$ et en obtient le polynôme associé à ce système suivant :

$$p(x) = X^2 - SX + P$$

4. Signe des racines

Propriété :

Soit P un polynôme du second degré ayant pour somme S et pour produit P , dont $\Delta > 0$ alors on a :

- Si $P < 0$ alors le polynôme P admet deux racines de signe contraire.
- Si $P > 0$ alors le polynôme P admet deux racines de même signe et deux cas de signe se présente :
 - Si $S < 0$ alors le polynôme P admet deux racines de signe négatif.
 - Si $S > 0$ alors le polynôme P admet deux racines de signe positif.

Exemple1 : Déterminer sans calculer les racines du polynôme $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$ les réels $x_1 + x_2$; x_1x_2 et $x_1^2 + x_2^2$

- Pour $x_1 + x_2$ on a : $x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = -\frac{12}{4} = -3$. Donc $x_1 + x_2 = -3$
- Pour x_1x_2 on a : $x_1x_2 = P = \frac{c}{a} = \frac{9}{4}$. Donc $x_1x_2 = \frac{9}{4}$
- Pour $x_1^2 + x_2^2$ on a : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ Or $x_1 + x_2 = -\frac{12}{4}$ et $x_1x_2 = \frac{9}{4}$ donc $x_1^2 + x_2^2 = (-3)^2 - 2 \times \frac{9}{4} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$. Donc $x_1^2 + x_2^2 = \frac{9}{2}$

Exemple2 : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes $(S_1): \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ xy = -6 \end{cases}$

- $(S_1): \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{-\frac{1}{3}} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{36} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = \frac{25}{36} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{36} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = \frac{1}{36} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{6} \text{ ou } x+y = -\frac{1}{6} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$. On obtient le produit $p = -\frac{1}{3}$ et la somme $S = \frac{1}{6}$. On obtient le polynôme associé à ce système suivant : $p(x) = X^2 - SX + P$ c'est-à-dire que $p(x) = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{3}$. $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{147}{108} = \frac{49}{36} = \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{7}{6}}{2} = -\frac{1}{2} ; X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{7}{6}}{2} = \frac{2}{3} . \text{ Pour } x = -\frac{1}{2} \text{ on a } y = \frac{2}{3} \text{ et pour } x = \frac{2}{3} \text{ on a } y = -\frac{1}{2} .$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \right\} .$$

- $(S_2): \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{6} \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{-6} = \frac{1}{6} \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ xy = -6 \end{cases}$. On obtient le produit $p = -6$ et la somme $S = -1$. On obtient le polynôme associé à ce système suivant :
 $p(x) = X^2 - SX + P$ c'est-à-dire que $p(x) = X^2 + X - 6$.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = -3 ; X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2} = 2 . \text{ Pour } x = -3 \text{ on a } y = 2 \text{ et pour } x = 2 \text{ on a } y = -3 . \text{ Donc } S = \{(-3; 2); (2; -3)\} .$$

5. Division euclidienne

Définition

La division euclidienne d'un polynôme **A** par un polynôme **B** est l'écriture de la forme $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ où **Q** est le polynôme quotient de **A** par **B** et **R** le polynôme, reste de la division de **A** par **B** tel que $0 \leq d^{\circ}(R) < d^{\circ}(B)$.

Exemple : Donnons la division euclidienne de A par B sachant que :

$$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$$

$$B = X^2 - 5X + 4$$

On pose la division en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres :

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 & X^2 - 5X + 4 \\ \hline X^4 - 5X^3 + 4X^2 & X^2 - 2X + 3 \\ \hline -2X^3 + 13X^2 - 17X + 6 & \\ -2X^3 + 10X^2 - 8X & \\ \hline 3X^2 - 9X + 6 & \\ 3X^2 - 15X + 12 & \\ \hline 6X - 6 & \end{array}$$

$$\text{On a donc } Q = X^2 - 2X + 3 \text{ et } R = 6X - 6 .$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 = (X^2 - 5X + 4)(X^2 - 2X + 3) + 6X - 6$$

6. Interprétation géométrique d'un polynôme du second degré

Activité d'apprentissage :



Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré dans $\mathbb{R}$

1. Rappeler la forme canonique de P
2. Ecrire P sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont des réels à exprimer en fonction de a, b et c .
3. Comment appelle-t-on le point $\Omega \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ pour la courbe de la fonction polynomiale P .

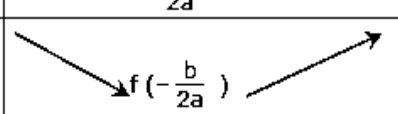
Propriété

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré dans $\mathbb{R}$. La forme canonique de P peut se mettre sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$. La représentation graphique dans

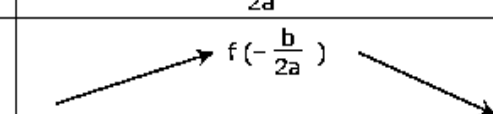
un repère orthogonal est une parabole, dont le sommet est $S\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = S\left(\begin{smallmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{smallmatrix}\right)$ avec $f(\alpha) = \beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses ($x'Ox$) sont les racines du polynôme f et que la droite $(D) : x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de cette parabole.

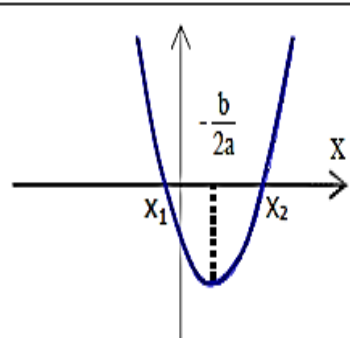
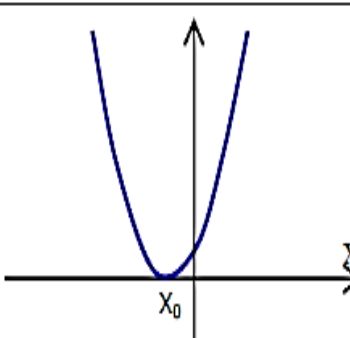
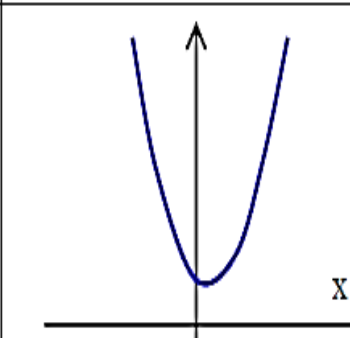
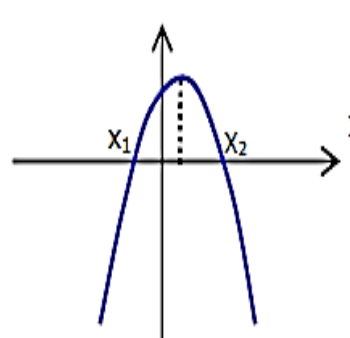
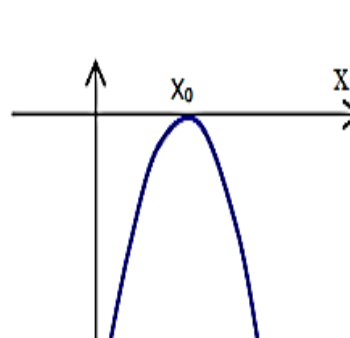
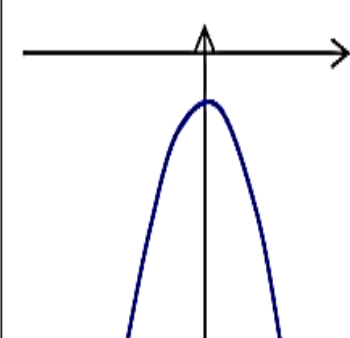
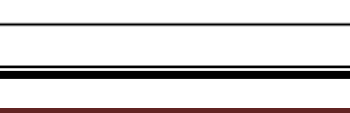
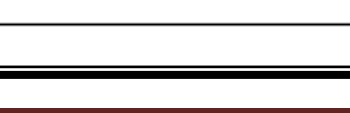
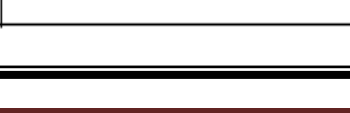
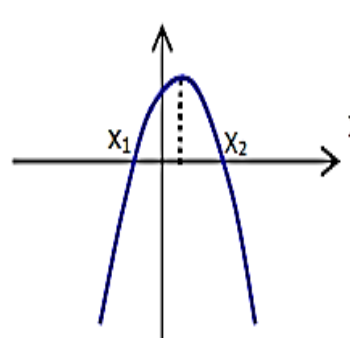
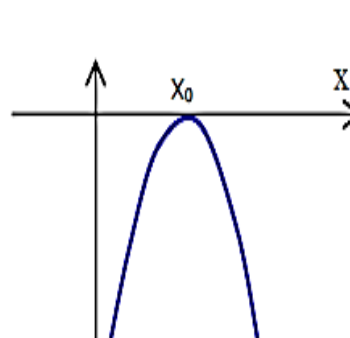
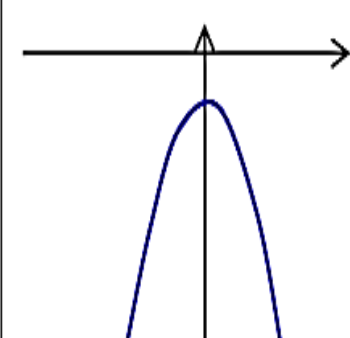
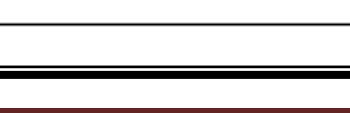
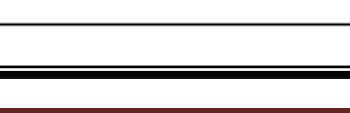
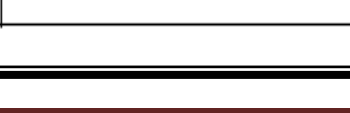
- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$

		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de f		$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de racine
				
$a > 0$				
				
$a < 0$				
				

Exercice d'Intégration 1:

Un joueur de tennis se trouve à 9m du filet et renvoie la balle à $h = 50$ cm du sol avec un angle de $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale. En fonction de sa position délicate, on estime sa vitesse de frappe à $v_0 = 20$ km/h. Sachant que la hauteur du filet est 91,4 cm et que la trajectoire de la balle est donnée par la formule :

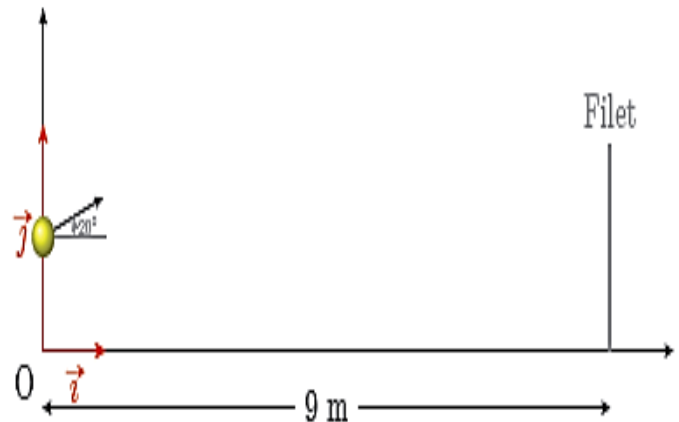
$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{(v_0 \cos(\alpha))^2} x^2 + x \tan(\alpha) + h \text{ où}$$

:

- $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,
- v_0 est la vitesse initiale (exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$),
- α est l'angle de la trajectoire avec l'horizontale,
- h est la hauteur initiale (exprimée en mètre).

Question : La balle dépassera-t-elle le filet ?

Si tel n'est pas le cas, quelle vitesse aurait-il fallu donner à la balle en la frappant ?

**Solution :**

On convertit : $20 \text{ km/h} = \frac{20\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \approx 5,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En remplaçant les lettres dans la formule donnée, on a :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{9,81}{(5,56 \times \cos 20^\circ)^2} x^2 + x \tan 20^\circ + 0,5,$$

soit :

$$y = -0,179\,687\,471x^2 + 0,363\,970\,234x + 0,5.$$

Le sommet de la parabole a pour abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0,363\,970\,234}{2 \times (-0,179\,687\,471)} \approx 1.$$

Donc, au sommet de sa trajectoire, la balle n'aura pas encore atteint le filet.

En prenant $x = 9$, on obtient :

$$y \approx -10,8$$

ce qui signifie que la balle aura touché le sol avant 9 mètres.

Le joueur a donc perdu.

Cherchons la vitesse minimale v (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) à donner à la balle lors de la frappe pour quelle franchisse le filet.

La fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{5,554\,786\,596}{v^2} x^2 + 0,363\,970\,234x + 0,5$$

représente la hauteur (en mètre) de la balle en fonction de sa position x .

On veut que $f(9) > 0,914$, soit :

$$-\frac{5,554\,786\,596}{v^2} \times 9^2 + 0,363\,970\,234 \times 9 + 0,5 > 0,914$$

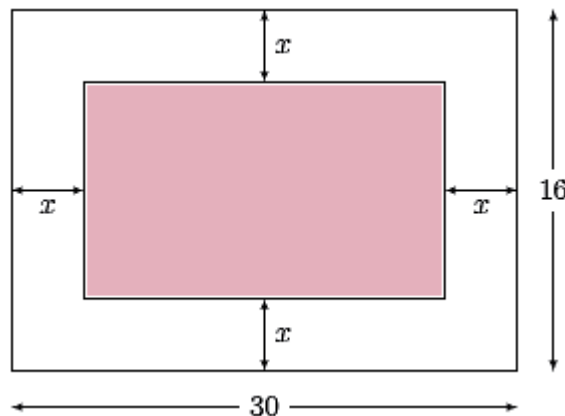
c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \frac{-449,955}{v^2} + 2,862 > 0 &\Rightarrow \frac{-449,955}{v^2} > -2,862 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{v^2} < \frac{-2,862}{-449,955} \\
 &\Rightarrow v^2 > \frac{449,955}{2,862} \\
 &\Rightarrow v^2 > 157,217 \\
 &\Rightarrow v > \sqrt{157,217} \\
 &\Leftarrow v > 12,54
 \end{aligned}$$

La vitesse à donner doit donc être supérieure à $12,54 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit à peu près 45 km/h).

Exercice d'Intégration 2:

Déterminer x de sorte que l'aire de la partie blanche de la figure ci-contre soit égale à celle du rectangle plein.



Solution :

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du « grand rectangle » à l'intérieur duquel se trouve le rectangle plein, dont l'aire sera notée $\mathcal{A}'$.

$\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ désignera donc l'aire de la partie blanche.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} - \mathcal{A}' &= 30 \times 16 - (30 - 2x)(16 - 2x) \\
 &= 480 - (480 - 60x - 32x + 4x^2) \\
 &= 92x - 4x^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur si :

$$92x - 4x^2 = 480 - 92x + 4x^2 \iff 8x^2 - 184x + 480 = 0$$

$$\iff x^2 - 23x + 60 = 0 \quad (\text{en divisant les deux})$$

Le discriminant de $x^2 - 23x + 60$ est :

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \times 60 = 289 = 17^2$$

donc les solutions de l'équation $x^2 + 23x + 60 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{23 - 17}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{23 + 17}{2} = 20.$$

Or, $0 \leq x \leq 8$ car la largeur du rectangle extérieur est égale à 16 et que x ne peut excéder sa moitié.

Ainsi, pour $x = 3$, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur.

LECON 2 : EQUATIONS, INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Motivation :

La recherche du profit nous amène souvent à vouloir prévoir ou à prévoir sur certaines de nos mises.

Nous voulons parfois trouver entre quelles valeurs nous pouvons souvent faire nos choix pour réaliser un plus de profits ou pour obtenir ce que l'on veut par majoration ou minoration ; par exemple on veut savoir pour quelles valeurs du côté d'un carré la surface est inférieure à une valeur donnée ou les valeurs possibles d'une inconnue pour obtenir ce qu'on veut. Notre leçon nous permettra de répondre ou de trouver les solutions facilement lorsque nous aurons un problème de genre se ramenant à une inéquation du second degré.

Compétence visée :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une équation ou une inéquation du second degré.

Prérequis:



On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $P(x) > 0$ et $P(x) \leq 0$

Situation Problème:



Une entreprise commercialise des produits. Le coût de production de x articles (en tonnes) est donné par la relation $c(x) = -2x^2 + 4x - 7$ (en millions de francs CFA). Le coût de vente est donné par $v(x) = 6x - 31$. Un bénéfice est réalisé lorsque le coût de vente est supérieur au coût de production.

1. Le coût de production peut-il atteindre les 5 millions ?
2. A partir de combien d'articles le coût de production $c(x)$ est égal au coût de vente $v(x)$?
3. A partir de combien de tonnes d'articles l'entreprise pourra-elle réaliser un bénéfice ?

1. Equations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

Activité d'apprentissage



On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

On suppose que $a \neq 0$

1. Rappeler la forme canonique du polynôme P en fonction de a, b et Δ .
2. a. Si $\Delta = 0$; donner le signe de P en fonction du signe de a
b. Si $\Delta < 0$; donner le signe de P en fonction du signe de a
c. Si $\Delta > 0$; $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en supposant $x_1 < x_2$ donner le signe de P en fonction du signe de a .

Méthode

- Pour résoudre une équation du second degré $(E): ax^2 + bx + c = 0$ on calcule son discriminant Δ et on obtient :
 - Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet donc deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la solution à l'équation (E) est $S = \left\{ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.
 - Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions et $S = \emptyset$ ou bien $S = \{ \}$.
 - Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet donc une seule solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.
- Pour résoudre une inéquation du second degré $(I): ax^2 + bx + c \geq 0$ on calcule son discriminant Δ et on étudie le signe du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ puis on déduit la solution de l'inéquation (I) .

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x^2 - 4x + 3 = 0$ puis déduisons-en les solutions des inéquations suivantes : $(I_1): x^2 - 4x + 3 < 0$; $(I_2): x^2 - 4x + 3 \leq 0$; $(I_3): x^2 - 4x + 3 > 0$; $(I_4): x^2 - 4x + 3 \geq 0$

- Pour l'équation $(E): x^2 - 4x + 3 = 0$ on a : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$
 $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$. Donc la solution de l'équation (E) est $S = \{1; 3\}$
- On déduit les solutions des inéquations (I_1) ; (I_2) ; (I_3) et (I_4) par le tableau de signe du polynôme $P(x) = x^2 - 4x + 3$ suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
(E)	+	0	-	0	+
- ✓ Pour $(I_1): x^2 - 4x + 3 < 0$ on a $S =]1; 3[$
- ✓ Pour $(I_2): x^2 - 4x + 3 \leq 0$ on a $S = [1; 3]$
- ✓ Pour $(I_3): x^2 - 4x + 3 > 0$ on a $S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$
- ✓ Pour $(I_4): x^2 - 4x + 3 \geq 0$ on a $S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

2. Autres types d'équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

a. Equations et inéquations bicarrées.

Activité d'apprentissage :



On considère le polynôme $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

On suppose que $a \neq 0$ et on pose $X = x^2$.

- Exprimer $P(x)$ en fonction de X .
- Rappeler la forme canonique du polynôme P en fonction de a, b et Δ .
- a. Si $\Delta = 0$; donner les solutions de l'équation $P(x) = 0$ en fonction du signe de X
 b. Si $\Delta < 0$; Conclure simplement.
- c. Si $\Delta > 0$ donner les solutions de l'équation $P(x) = 0$ en fonction du signe de X .

Méthode

- Pour résoudre une équation bicarrée $(E): ax^4 + bx^2 + c = 0$, on pose $X = x^2$ puis on obtient une équation de la forme $(E'): aX^2 + bX + c = 0$.
 Dans ce cas, calcule son discriminant Δ et on obtient :
 - Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E') admet donc deux solutions distinctes $X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ puis on revient sur notre changement $X = x^2$ et la solution à l'équation (E) dépendra du signe de X_1 et de X_2 .
 - Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions et $S = \emptyset$ ou bien $S = \{ \}$.
 - Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E') admet donc une seule solution double $X_0 = \frac{-b}{2a}$ et la solution à l'équation (E) dépendra du signe de X_0 .
- Pour résoudre une inéquation bicarrée $(I): ax^4 + bx^2 + c \geq 0$, on pose $X = x^2$ puis on obtient une inéquation de la forme $(I'): aX^2 + bX + c \geq 0$. On calcule son discriminant Δ et on étudie le signe du polynôme $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ dont les racines sont les solutions de l'équation bicarrée $(E): ax^4 + bx^2 + c = 0$ puis on déduit la solution de l'inéquation (I) .

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1): 9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ puis déduisons-en les solutions des inéquations suivantes : $(I_1): 9x^4 - 12x^2 + 4 > 0$; $(E_2): x^4 + x^2 + 1 = 0$ et $(I_2): x^4 + x^2 + 1 \geq 0$

- Pour $(E_1): 9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ on a : $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 9(x^2)^2 - 12(x^2) + 4$

Posons $X = x^2$. On obtient $9X^2 - 12X + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0$. Comme $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double

$$X_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}. \text{ Or } X = x^2 \text{ donc } x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ Donc la solution de } (E_1) \text{ est } S = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} ; \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

On en déduit le tableau de signe de $P(x) = 9x^4 - 12x^2 + 4$ suivant pour déduire la solution de l'inéquation $(I_1) : 9x^4 - 12x^2 + 4 > 0$.

D'où la solution de (I_1) est $S = \left] -\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}} \right[\cup \left] \sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty \right[$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

- Pour $(E_2) : x^4 + x^2 + 1 = 0$ et $(I_2) : x^4 + x^2 + 1 \geq 0$

Posons $X = x^2$. On obtient $X^2 + X + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ Comme $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution d'où la solution de (E_2) est $S = \emptyset$. On en déduit le tableau de signe de $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ suivant pour déduire la solution de l'inéquation (I_2) :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$		+

D'où la solution de (I_1) est $S = \mathbb{R}$.

b. Equations et inéquations irrationnelles

Méthode

Une équation est dite **irrationnelle** lorsque l'inconnue figure sous un ou plusieurs radicaux.

Pour résoudre une équation du type $\sqrt{a} = b$ ou $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ou une inéquation du type $\sqrt{a} > b$ ou $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ on cherche l'ensemble de définition c'est-à-dire la contrainte sur l'inconnue x de l'équation ou de l'inéquation en posant de préférence $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ puis on passe à la recherche des solutions puis on vérifie si ses solutions trouvées sont dans la contrainte ou pas.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{4-x^2} = x-1$ et l'inéquation $\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1}$

- Pour $\sqrt{4-x^2} = x-1$ on a :
 - **Contrainte sur l'inconnue x .**

$$4 - x^2 \geq 0 \text{ et } x - 1 \geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \text{ et } x \geq 1$$

L'inéquation $(I) : (2-x)(2+x) \geq 0$ nous fait obtenir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
(I)	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $x \in [-2; 2]$

L'inéquation $x \geq 1 \Rightarrow x \in [1; +\infty[$

La contrainte de cette équation est l'intersection des contraintes $[-2; 2]$ et $[1; +\infty[$. Donc la contrainte est $[1; 2]$.

- **Recherche des solutions.**

$$\text{On a } \sqrt{4-x^2} = x-1 \Rightarrow 4-x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 4-x^2 = x^2-2x+1 \Rightarrow 2x^2-2x-3=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 28$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{28}}{4} = \frac{2-2\sqrt{7}}{4} = \frac{1-\sqrt{7}}{2} ; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{28}}{4} = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Or $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \notin [1; 2]$ mais $\frac{1+\sqrt{7}}{2} \in [1; 2]$. Donc $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right\}$.

- Pour $\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1}$ on a :
 - **Contrainte sur l'inconnue x .**

$$2x + 3 \geq 0 \text{ et } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \text{ et } x \geq 1$$

$$\text{L'inéquation } x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[\quad \text{L'inéquation } x \geq 1 \Rightarrow x \in [1; +\infty[$$

La contrainte de cette inéquation est l'intersection de $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $[1; +\infty[$. Donc la contrainte est $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

• **Recherche des solutions.**

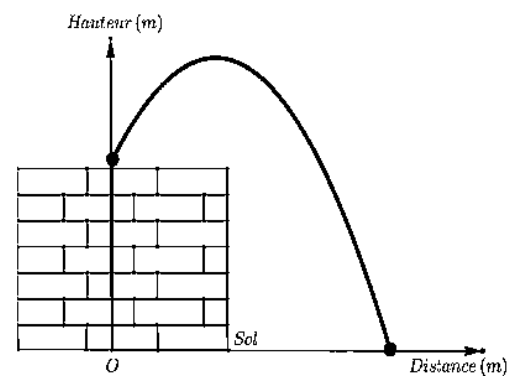
$$\text{On a } \sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1} \Rightarrow 2x+3 > x-1 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in]2; +\infty[$$

La solution à cette inéquation est l'intersection de la contrainte et de l'intervalle $]2; +\infty[$. Donc la solution est $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$. Donc $S = \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.

Activité d'intégration :

Une sauterelle est placée sur un mur qui a la forme d'un rectangle dont l'aire est égale à 10 m^2 et le périmètre est égal à 14 m . Elle saute de ce mur avant de se poser sur le sol. On admet que sa trajectoire est un arc de parabole représentant un polynôme dont l'expression est $h(x) = -x^2 + x + 2$.

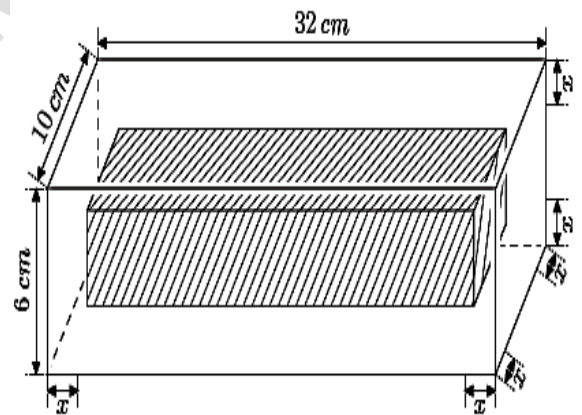
1. Quelles sont les dimensions de ce mur ?
2. Quelle est la hauteur maximale de cette sauterelle ?
3. Quelle est la distance qui sépare le point O du point d'atterrissage de la sauterelle au sol ?



Exercice1 :

Un atelier possède un bloc de marbre de forme parallélépipède et de dimensions : 32 cm de long, 10 cm de profondeur et de 6 cm de hauteur. On souhaite récupérer le « cœur » de ce bloc. Pour se faire, on rabote chaque côté de ce pavé droit d'une longueur de $x \text{ cm}$:

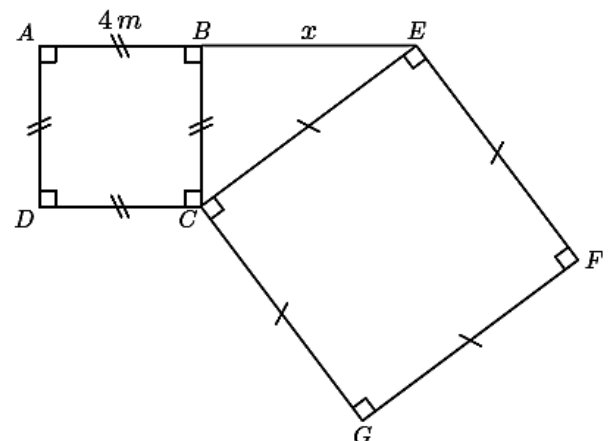
1. Donner les valeurs possibles prises par la variable x .
2. a. Déterminer le volume du « cœur » de ce bloc de marbre.
b. En déduire le volume de la partie rabotée.
3. a. Développer : $-16(x-1)(x-8)(x-15)$
b. Pour quelle valeur de x , le volume de la partie rabotée est égale au volume du « cœur » de cette pièce.



Exercice2 :

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous :

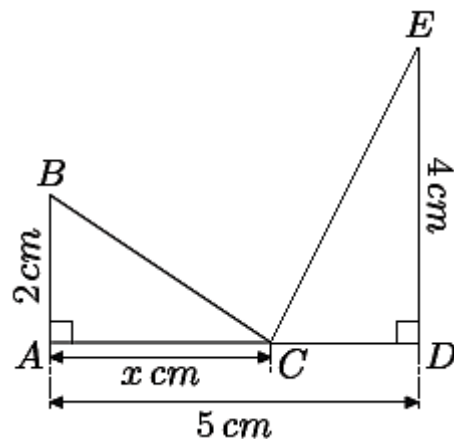
1. Justifier la factorisation suivante :
$$x^2 + 2x - 168 = (x + 14)(x - 12)$$
2. a. Justifier que le carré $CEFG$ a pour aire $(x^2 + 16) \text{ m}^2$.
b. En déduire la valeur de la longueur x afin que l'aire totale du champ soit de 200 m^2



Exercice3 :

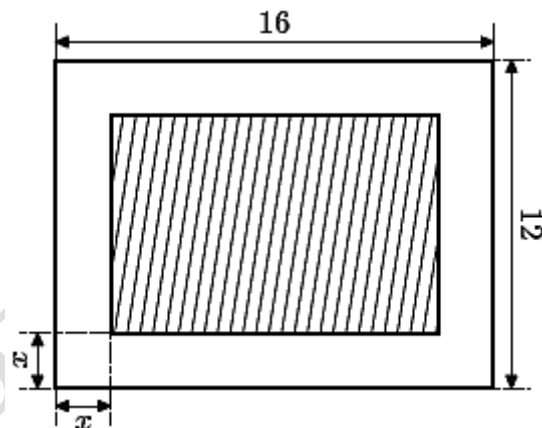
Dans le plan, on considère deux triangles ABC et EDC rectangles respectivement en A et D tels que les points A, C, D soient alignés. On note x la distance, en centimètres, séparant les points A et C .

1. Exprimer en fonction de x la longueur du segment $[BC]$.
2. a. Résoudre l'équation : $x^2 + 4 = (5 - x)^2 + 16$
b. En déduire la longueur du segment $[AC]$ afin que les longueurs CB et CE soient égales. Justifier votre démarche.

**Exercice4 :**

Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur $16m$ et $12m$, la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu : L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :

1. Sans justification, préciser les valeurs possibles de la variable x pour ce problème.
2. a. Justifier que l'aire de jeu mesure, en fonction de x : $4x^2 - 56x + 192$
b. Justifier que l'aire de l'allée mesure, en fonction de x est $56x - 4x^2$
3. a. Etablir l'égalité suivante : $8x^2 - 112x + 192 = 8(x - 12)(x - 2)$
b. Déterminer les possibilités de largeur de l'allée afin que l'aire de jeu ait la même aire que l'allée.

**Exercice5 :**

La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.

Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevée. A chaque tour de la manivelle $\mathcal{M}$ les écrous A et C se rapprochent (ou s'éloignent) de 2 cm , ce qui fait monter (ou descendre) l'appui B , selon l'axe (Oy) .

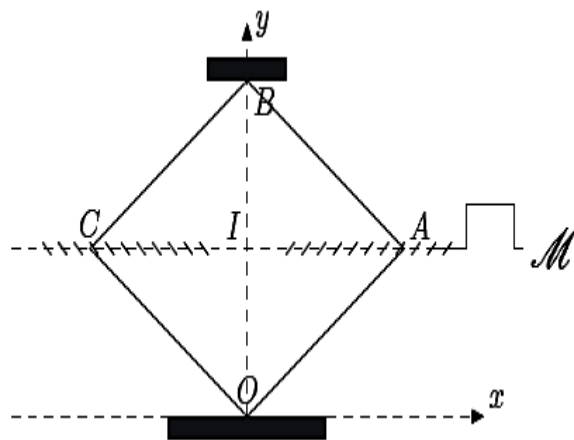
On donne : $OA = OC = AB = BC = 25\text{ cm}$. Dans le repère orthonormé $(O ; x ; y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.

L'ordonnée du point B est notée y_B :

Pour $x_A = 0$, on a : $y_B = 50$;

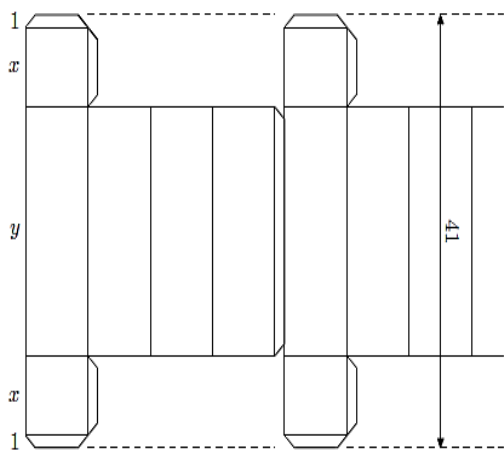
Pour $x_A = 25$ on a : $y_B = 0$.

1. Démontrer que les valeurs x_A et y_B vérifient la relation : $y_B = \sqrt{625 - x_A^2}$
2. a. Déterminer la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 7.
b. Déterminer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 40.
3. Supposons que le cric est fermé ; la hauteur du point B est alors de 0 cm :
a. Lorsque le cric est complètement fermé, combien de tours de manivelles permettent d'atteindre une hauteur de 24 cm pour le point B ?

**Exercice6 :**

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 41 cm de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessins ci-dessous :

Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\text{ cm}$ de côté, munies de deux languettes de 1 cm de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y , ainsi qu'un rabat pour la fermeture.



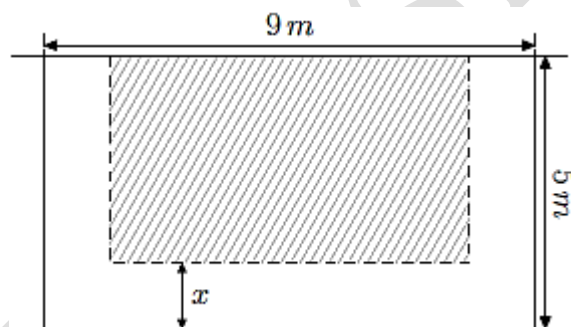
atteint?

1. a. Donner une expression de y en fonction de x .
b. Justifier que la valeur de x appartient à l'intervalle $]0 ; 19,5[$.
2. Démontrer que le volume V , en cm^3 , de la boîte est donné, en fonction de x , par la formule : $V = 39x^2 - 2x^3$
3. a. Déterminer l'expression du polynôme P vérifiant l'égalité : $39x^2 - 2x^3 - 972 = (x - 18)(x - 6) \times P$
b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles le volume V est supérieure à 972 cm^3 .
4. a. Déterminer l'expression du polynôme Q vérifiant l'égalité : $V(x) - 2197 = (-2x - 13) \times Q$
b. En déduire le tableau de signes de l'expression : $V(x) - 2197$
c. Donner le volume maximal que le fabricant peut obtenir avec ce type de boîte ; pour quelle valeur de x , ce maximum est-il

Exercice7 :

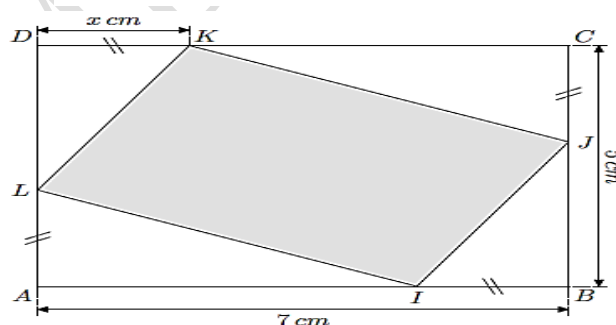
Adossé à sa maison, Jean possède un jardin de forme rectangulaire ayant pour dimensions 9m et 5m . Il souhaite construire sur trois des côtés de ce jardin une allée ayant la même largeur et il plantera de la pelouse sur le reste du jardin. Il propose le schéma ci-dessous où la partie hachurée est l'espace de la pelouse.

Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que l'ensemble de la pelouse ait une surface de 10m^2 ?



Exercice8 :

On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle tel que : $ABCD$ est un rectangle. Les points I, J, K, L sont des points appartenant respectivement aux segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$ vérifiant : $IB = JC = KD = LA$



Quelle doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de 25 cm^2 ?

Exercice9 :

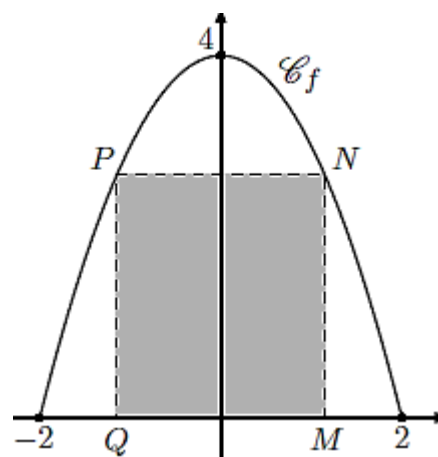
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation:

$$f(x) = 4 - x^2$$

Ci-dessous, est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O ; I J)$:

Le point M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(x ; 0)$ où $x \in [0 ; 2]$. A partir du point M , on construit le rectangle $MNPQ$ dont les côtés sont parallèles aux axes. Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

Dans cet exercice, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.



Exercice10 :

1. Soit l'équation $(E) : y^2 - (m + 1)y + m + 3 = 0$

a. Discuter suivant les valeurs de m , l'existence et le signe des racines de (E) .

On désigne par a et b les racines de (E) lorsqu'elles existent.

b. Pour quelles valeurs de m a-t-on $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 0$?

- c. Pour quelles valeurs de m a-t-on $a^2 + b^2 + ab < 0$?
2. On considère l'équation (E') : $(a + b)x^2 - 2x - a = 0$
 Sans calculer a et b , écrire l'équation (E') en fonction de m , puis déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E') admet deux racines de signes contraires x_1 et x_2 tels que $-1 < x_1 < 1 < x_2$

Exercice11 :

Pour remplir un bassin d'irrigation, on dispose de trois robinets A , B et C . Avec les robinets A et B , le bassin se remplit en 10mins. Avec les robinets B et C , le bassin se remplit en 20mins. Avec les robinets A et C , le bassin se remplit en 12mins.

- Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec chacun des robinets fonctionnant seul ?
- Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts ensemble ?
- Quel est le volume de ce bassin sachant que le débit du robinet A est de 3 l.s^{-1} ?

Exercice12 :

Dans le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) , on considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ où a, b et c sont des nombres réels de représentation graphique (C_g) .

- Sachant que la courbe (C_g) passe par les points $A(-2; -6)$, $B(-1; 0)$ et $C(\frac{1}{2}; -\frac{3}{8})$ montrer que les nombres a, b et c vérifient le système (S)
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + 2b + 4c = -3 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases}$$
- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S)

Exercice12 :

Au fur et à mesure qu'une navette spatiale prend de l'altitude, le poids de l'astronaute diminue jusqu'à atteindre un état d'apesanteur. Si p est le poids (en kg) d'un astronaute sur la terre, son poids (en kg) à l'altitude x (en km) est : $P(x) = p \left(\frac{6400}{6400 + x} \right)^2$.

Un astronaute pèse sur terre 81 kg.

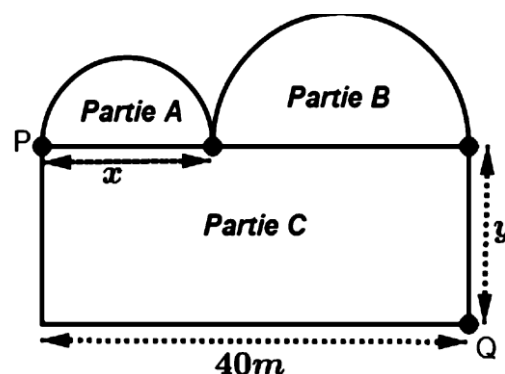
- Illustrer par une courbe la diminution du poids (en kg) de cet astronaute pour $x \leq 1000$.
- Donner la valeur de l'altitude de cet astronaute lorsque son poids est de 9 kg.
- Quel était le poids (en kg) sur terre d'un astronaute de 12 kg à une altitude de 6000 km.

Exercice13 :

L'unité de longueur est le mètre.

Monsieur Ambroise possède une grande réserve divisée en trois parties comme représentée sur la figure ci-contre. Les parties A et B sont des demi-disques ; la partie C a une forme rectangulaire de diagonale $PQ = 50m$.

Monsieur Ambroise désire élever sur la partie A des chèvres, sur la partie B des bœufs et sur la partie C des poulets. Il souhaite que l'aire de la partie B soit égale à deux fois celle de la partie A et il doit élever 5 poulets par mètre carré. Dans les marchés de la place, il doit acheter 40 bêtes (chèvres et bœufs) à 1 150 000 F. Une chèvre lui coûtera 5 000 F et un bœuf 100 000F.



$$PQ = 50m$$

- Déterminer l'aire de la partie A.
- Calculer le nombre maximal de poules qu'il peut acheter pour élever sur la partie C.
- Déterminer le nombre de chèvres et de bœufs que doit acheter M. Ambroise

LECON 3: SYSTEMES LINEAIRES DANS R

Motivation :

Cette leçon nous donnera une méthode pratique pour la résolution des problèmes ayant deux ou trois inconnus

Compétence visée :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à un système d'équations à deux ou trois inconnus.

Prérequis:

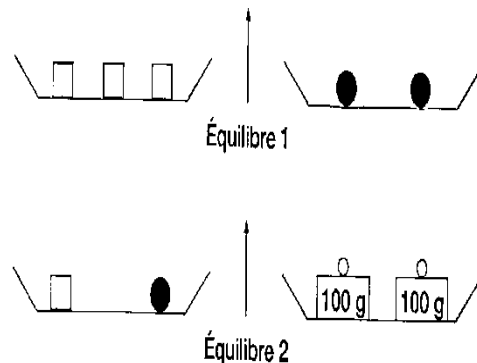
1. Résoudre le système suivant dont les inconnues sont

$$x \text{ et } y : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

2. Avec une balance, on réalise les équilibres suivants :



Quelle est la masse d'un cube ? Quelle est la masse d'une boule ?



Situation Problème:



Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère la parabole P définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer une équation de cette parabole dont la courbe représentative passe par les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -12 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}$

Activité d'apprentissage



Soit le système d'équations (S): $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1. Calculer les nombres réels définis par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.
2. Si $\Delta \neq 0$, alors calculer les nombres réels définis par $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

3. Vérifier que $\begin{cases} a \times \frac{\Delta_x}{\Delta} + b \times \frac{\Delta_y}{\Delta} = c \\ a' \times \frac{\Delta_x}{\Delta} + b' \times \frac{\Delta_y}{\Delta} = c' \end{cases}$

4. Que peut-on dire du couple $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ pour le système (S) ?

RESUME :

Définition

Soit a, b, c et d des nombres réels.

- Toute équation d'inconnues x, y de la forme $ax + by = c$ est appelée équation linéaire de $\mathbb{R}^2$.
- Toute équation d'inconnues x, y, z de la forme $ax + by + cz = d$ est appelée équation linéaire de $\mathbb{R}^3$.
- On appelle équation linéaire à n inconnue $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toute équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ où $a_1, a_2, 3, \dots, a_n$ sont des nombres réels.
- Tout système formé de p équations linéaires à n inconnues est appelé système linéaire de $\mathbb{R}^n$

Vocabulaire

- Une solution d'un système (non nécessairement linéaire) à deux inconnues x et y dans cet ordre est tout couple $(x; y)$ de réels vérifiant toutes les équations du système
- Une solution d'un système (non nécessairement linéaire) à trois inconnues x, y et z dans cet ordre est tout triplet $(x; y; z)$ de réels vérifiant toutes les équations du système
- Plus généralement, une solution d'un système (non nécessairement linéaire) à n inconnues $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dans cet ordre est tout n -uplet $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de réels vérifiant toutes les équations du système
- Résoudre un système c'est déterminer toutes les solutions du système
- Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solution.
- $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ où x et y sont des nombres réels.
- $\mathbb{R}^3$ désigne l'ensemble de tous les triplets $(x; y; z)$ où x, y et z sont des nombres réels.

2. Système linéaire de deux équations à deux inconnues**a. Définition****Définition**

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme $(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Exemple : Le système $(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$ est un système de $\mathbb{R}^2$.

b. Méthode de résolution avec les déterminants**METHODE DE CRAMER**

Soit : $(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ un système de deux équations à deux inconnues x et y .

Cette méthode consiste à calculer le déterminant du système noté Δ , le déterminant de x noté Δ_x et celui de y noté Δ_y définie par : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

- Lorsque $\Delta = 0$ et $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, alors $S = \emptyset$.
- Lorsque $\Delta = 0$ et $\Delta_x \neq 0$ et $\Delta_y \neq 0$, alors le système admet une infinité de solution et donc $S = \mathbb{R}^2$ ou $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c\}$.
- Lorsque $\Delta \neq 0$ alors le système admet un seul couple qui est solution. Dans ce cas : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$

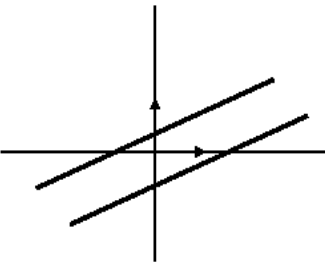
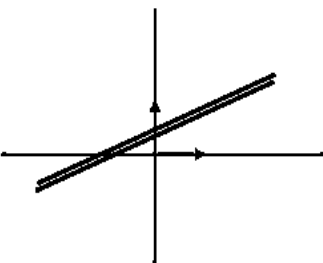
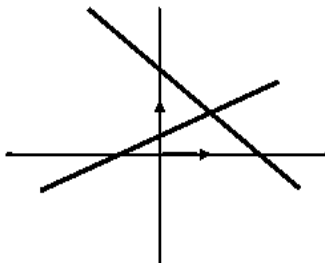
On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 5 \times 3 = -7$;

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - 3 \times 16 = -28$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 2 \times 16 - 5 \times 5 = 7$.

Donc $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-28}{-7} = 4$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1$

Donc le couple $(4; -1)$ est solution de ce système d'où $S = \{(4; -1)\}$.

INTERPRETATION GRAPHIQUE DE LA METHODE DE CRAMER

$\det(S) = 0$ et ($\det x \neq 0$ ou $\det y \neq 0$)	$\det(S) = 0$ et $\det x = \det y = 0$	$\det(S) \neq 0$
		
(D_1) et (D_2) sont strictement parallèles	(D_1) et (D_2) sont confondues	(D_1) et (D_2) sont sécantes

3. Système linéaire de trois équations à trois inconnues

Activité d'apprentissage



Soit le système d'équations (S):

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & (1) \\ 2x - y + z = 4 & (2) \\ x + 3y - 2z = 3 & (3) \end{cases}$$

1. Tirer z dans l'équation (1) puis la remplacer dans les équations (2) et (3). Vous noterez les équations obtenues (1') et (2').
2. En utilisant la méthode par substitution résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système formé par (1') et (2').
3. Déduire la valeur de z et puis la solution du système initial (S).

a. Définition

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle système d'équations linéaires de n équations aux p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ le système :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où } a_{ij} \text{ et } b_i \text{ sont des réels pour tous } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p.$$

On appelle système linéaire de trois équations à trois inconnues, x, y et z , tout système qui peut se mettre sous la forme (S) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' sont des réels donnés.

On appelle opération élémentaire sur les lignes l'une des trois opérations suivantes :

- Échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ($\beta \in \mathbb{R}$). Les autres lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

Le système (S') obtenu en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S).

b. Méthode de résolution des systèmes linéaires.**Principes de base de la triangularisation:**

On passe d'un système (S) à un système équivalent lorsqu'on effectue une des opérations élémentaires suivantes :

- échange de deux lignes L_i et L_j
- remplacement d'une ligne L_i par la ligne λL_i ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) remplacement d'une ligne L_i par la ligne $\alpha L_i + \beta L_j$ ($\alpha ; \beta \in \mathbb{R}^*$)
- On peut résoudre ce système par diverses méthodes parmi lesquelles la méthode par substitution et la méthode du pivot de Gauss (Triangularisation).

Exemple:

Elle a pour but de transformer un système (S) en un système (S') équivalent (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes) et triangulaire supérieur.

Dans ce qui suit, on considère le système (S)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 & L_1 \\ x + 2y - z = 6 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$$

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE	EXEMPLE DE MISE EN ŒUVRE
1. On place en L_1 une ligne dont le coefficient est non nul. (Ce coefficient est appelé "le pivot"). Conseil : choisir, si possible un pivot égal à ± 1 .	$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} \boxed{1}x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 2x - y + z = 7 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$
2. On élimine la première inconnue dans $L_2, L_3, \dots, L_n$ par l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ ($\lambda = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$)	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
3. On choisit parmi $L_2, \dots, L_n$ une ligne où le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.	$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 0 \boxed{-5}y + 3z = -5 & L_2 \\ 0 + 3y + z = 17 & L_3 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2$
4. On recommence l'étape 2 à la ligne adéquate jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.	$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ -5y + 3z = -5 & L_2 \\ \frac{14}{5}z = 14 & L_3 \end{cases}$
Les solutions du système s'obtiennent par résolution d'équations de proche en proche.	$z = 5 ; y = 4 ; x = 3$

Notre système (S) admet un unique triplet solution : $S = \{(3 ; 4 ; 5)\}$

Note : on peut être amené à permuter des colonnes (ou des inconnues) afin de se ramener à des pivots plus simples.

Exercices : résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 5y + 6z = 32 \\ 7x + 8y + 10z = 53 \end{cases} \quad (\text{Réponse : } S = \{(1 ; 2 ; 3)\})$$

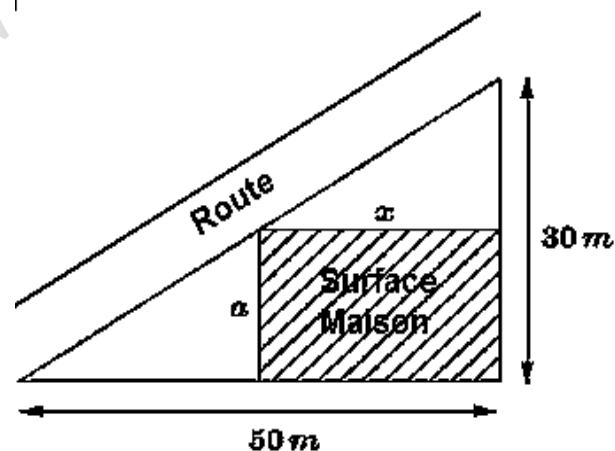
$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z + 2t = 4 \\ 3x - 2y + 5z - 2t = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \quad (\text{Réponse : } S = \{(1 ; 1 ; 1 ; 1)\})$$

Activité d'intégration :

M. IKSE a acheté un terrain triangulaire en bordure d'une grande route entre les mains de son ami M. IGREC qui voulait le vendre à 600.000F CFA mais n'a pas pu avoir un preneur à cause de son prix tellement cher mais a été finalement vendu après avoir subi deux baisses successives de $t\%$ à 486.000 F CFA.

M. IKSE après avoir acheté ce terrain, se propose de construire une maison dont la fondation est rectangulaire de dimensions a et x (partie hachurée) à l'angle droit de son terrain triangulaire. Il voudrait que l'aire de la surface de sa maison soit la plus grande possible pour avoir une grande maison selon les exigences de sa famille grandiose.

Après avoir construit sa maison, M. IKSE possède dans sa cour (partie non hachurée) des chèvres, des poulets et des canards. Cette cour compte au total 75 têtes et 210 pattes d'animaux. Il décide de les vendre tous à cause du fait qu'ils salissent sa cour avec des excréments et il perçoit une somme de 415.000Fcfa à raison de 10.000Fcfa par chèvre ; 2.000Fcfa par poulet, et 3000Fcfa par canard.



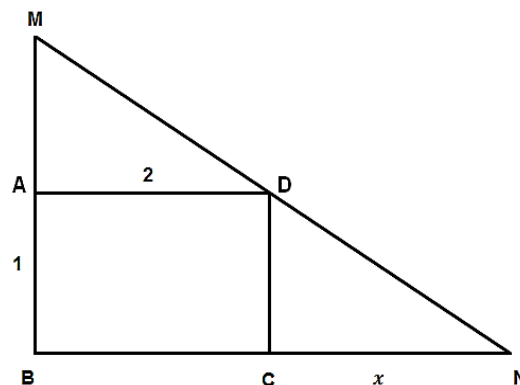
M. IKSE a une entreprise qui commercialise des produits. Le coût de production de x articles (en tonnes) est donné par la relation $c(x) = -2x^2 + 4x - 7$ (en millions de francs CFA). Le coût de vente est donné par $v(x) = 6x - 31$. Un bénéfice est réalisé lorsque le coût de vente est supérieur au coût de production.

1. Calculer les différents taux de baisses subies par le terrain.
2. Quelle est l'aire maximale de la surface de la fondation de cette maison.
3. Déterminer le nombre de chèvres, des poulets et des canards.
4. Le coût de production peut-il atteindre les 5 millions ?
5. A partir de combien d'articles le coût de production $c(x)$ est égal au coût de vente $v(x)$?
6. A partir de combien de tonnes d'articles l'entreprise pourra-elle réaliser un bénéfice ?

Exercices de consolidation

Exercice 1 :

Observez la figure ci-contre. ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$. On désigne par $\mathcal{B}(x)$ l'aire du triangle BMN. On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BMN est minimale. On pose $CN = x$

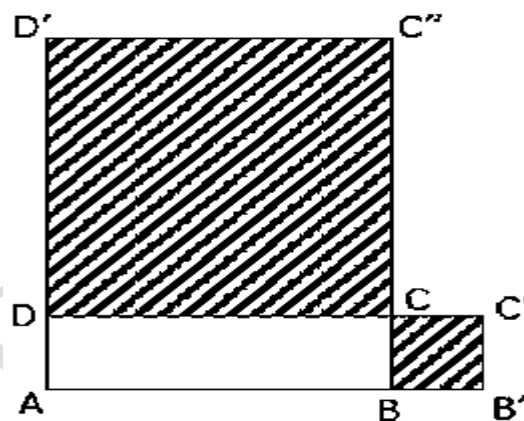


1. Montrer que $AM = \frac{2}{x}$
2. Montrer que l'aire du trapèze BNDA est $\mathcal{A}(x) = \frac{x}{2} + 2$
3. En déduire que l'aire du triangle BMN est $\mathcal{B}(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x}$.

Exercice 2 :

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle, $DD'C''C$ et $BB'C'C$ sont des carrés.

On pose $AB = x$ et $BC = y$ avec $x > y$.



1. L'aire $A(x)$ de $DD'C''C$ est $A(x) = -x^2 + 24x$
2. Donner la forme canonique de $A(x)$ Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle maximale ?
3. L'aire totale des parties hachurées vaut 169cm^2 et l'aire de la partie non hachurée vaut 60cm^2
 - a. Résoudre l'équation $a^2 - 169a + 3600 = 0$
 - b. Justifier que x et y vérifient le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ xy = 60 \end{cases}$
 - c. En déduire que x vérifie l'équation (E): $x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$
 - d. Trouve les dimensions du rectangle ABCD

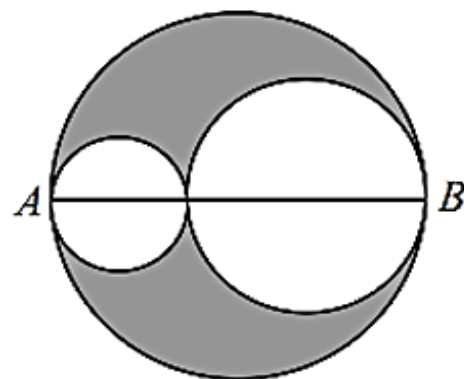
Exercice 3 :

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant (S): $\begin{cases} x + y - 2z = 10 \\ -x + y + z = 16 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$
 b. Déduire les solutions des systèmes suivants :
 $(S_1): \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y+1} - 2\sqrt{z} = 10 \\ -x^2 + \frac{1}{y+1} + \sqrt{z} = 16 \\ x^2 - \frac{1}{y+1} + \sqrt{z} = 4 \end{cases}; (S_2): \begin{cases} |x| + y^3 - \frac{2}{z} = 10 \\ -|x| + y^3 + \frac{1}{z} = 16 \\ |x| - y^3 + \frac{1}{z} = 4 \end{cases} (S'): \begin{cases} x^2 + \sqrt{y+2} - 2(z-1)^3 = 10 \\ -x^2 + \sqrt{y+2} + (z-1)^3 = 16 \\ x^2 - \sqrt{y+2} + (z-1)^3 = 4 \end{cases}$
2. Un certain nombre d'oiseaux sont perchés sur trois fils A, B et C. Si 10 oiseaux quittent les fils A et B pour s'envoler, alors les trois fils auront le même nombre d'oiseaux. Si 8 oiseaux quittent les fils B et C pour le fil A, alors le fil A aura autant d'oiseaux que les deux fils B et C réunis. Si 2 oiseaux quittent les fils A et C pour le fil B, alors le fil B aura autant d'oiseaux que les deux fils A et C réunis.
 - a. Soit x, y et z le nombre d'oiseau perché respectivement sur le fil A, B et C. Montrer que x, y et z vérifient le système (S) en 1)
 - b. Calculer le nombre d'oiseaux perchés sur chaque fil ainsi que le nombre total n des oiseaux au départ.

Exercice 4:

On considère un point M sur le diamètre $[AB]$ d'un cercle. Il détermine deux cercles de

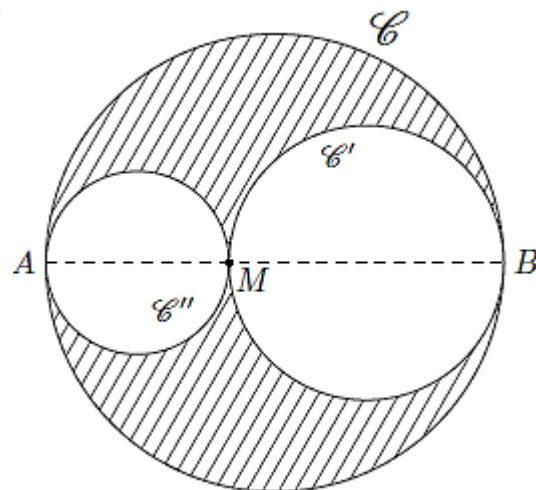
diamètres $[AM]$ et $[MB]$. on pose $AB = 4$ et $AM = x$. soit $f(x)$ l'aire de la surface non coloriée.



1. Montrer que pour $x \in [0; 4]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$
2. Déterminer les positions (si elles existent) de m pour lesquelles $f(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.
3. On prendra dans la suite $\pi = 3$. On considère la fonction $g(x) = -\frac{3}{2}x^2$.
 - a. Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_g) de la fonction g définie sur $[0; 4]$.
 - b. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = -\frac{3}{2}(x - a)^2 + b$ où a et b sont des réels à déterminer.
 - c. Montrer que la courbe (C_f) de la fonction f est l'image de la courbe (C_g) de la fonction g par une transformation plane que l'on déterminera.
4. Construire dans le même repère, la courbe (C_f) .
5. Montrer que la droite $(\Delta): x = 2$ est axe de symétrie à la courbe (C_f) .
6. Montrer que la fonction f est majorée par 6.
7. Construis dans le même repère et en interrompu la courbe de la fonction h définie par $h(x) = 1 + g(x)$.
- II. Dans le plan, on considère le cercle C de diamètre $[AB]$ tel que $AB=5 \text{ cm}$. Soit M un point du segment $[AB]$, on construit respectivement les cercles C' et C'' de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$.

On repère la position du point M par la mesure de AM qu'on note x ; on s'intéresse à l'aire de la partie hachurée qu'on note $A(x)$.

1. Décrire brièvement les valeurs prises par la variable x .
 2. Déterminer une expression de A en fonction de x .
- On considère la fonction qui à x associe $A(x)$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $A(x)$.
 4. a. Déterminer la valeur des réels a et b tels que : $-2x^2 + 10x - 8 = (x - 4)(ax + b)$
 - b. Résoudre l'inéquation suivante : $A(x) \leq 2\pi$

**Exercice 5:**

Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 6x^2 - 51x + 280$

1. Trouver les réels a , p et q tels que $P(x) = (x + a)^3 + p(x + a) + q$
2. On pose $X = x + a$.
 - a. Résoudre l'équation $X^3 + pX + q = 0$ (On vérifiera que 3 est solution de l'équation)
 - b. Résoudre l'équation $P(x) = 0$
 - c. En déduire la résolution de l'inéquation $P(x) \geq 0$

Module 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ELEMENTAIRE DU PLAN

Chapitre 2 : BARYCENTRES ET LIGNES DE NIVEAU

LECON 1 : Barycentre de deux points et plus de deux points pondérés

Motivation :

De nombreux problèmes dans la vie font appel aux barycentres, d'où la nécessité maîtriser la manipulation des outils barycentriques. Nous notons ainsi la recherche du centre de gravité d'un solide.

Compétence visée :

- ✚ Reconnaître et construire le barycentre de 2, 3, Pondérés par des relations vectorielles et ses propriétés.
- ✚ Utilisation des propriétés vectorielles construire un barycentre de manière performante.

Prérequis:



10. Donner l'expression vectorielle du milieu I d'un segment $[AB]$.
11. Donner l'expression vectorielle du centre de gravité G d'un triangle ABC .
12. Quand dit-on que deux vecteurs sont égaux ?
13. Quand dit-on que deux vecteurs sont colinéaires ?

14. En utilisant la relation de Chasles réduire le vecteur $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} - 2\vec{AD} + \vec{BC}$.

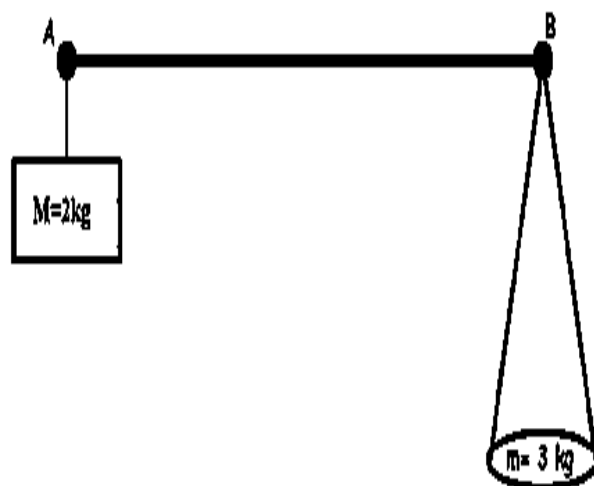
Situation Problème:



Pour remplir un bassin, on dispose de trois robinets A, B et C.

- Avec seulement les robinets A et C ouverts, le bassin se remplit en 20 minutes.
- Avec seulement les robinets B et C ouverts, le bassin se remplit en 15 minutes.
- Avec seulement les robinets A et B ouverts, le bassin se remplit en 12 minutes.

1. Combien faut-il de temps pour remplir le bassin chacun des robinets fonctionnant seul une balance est constituée d'une masse de valeur 2 kg et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige. Pour peser une masse d'une valeur quelconque, le vendeur place à une position précise G un crochet sur la tige $[AB]$ de longueur 8 dm.
2. Où faut-il fixer le crochet G sur la tige $[AB]$ pour réaliser l'équilibre ?
3. Si le point G est tel que $\vec{AG} = \frac{7}{8}\vec{AB}$ quelle est alors la masse pesée ?



7. Barycentre de deux points pondérés

Activité d'apprentissage :



- Soit A, B et G trois points du plan. On suppose deux réels a et b tels que $a + b \neq 0$. On pose $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$.
- Soit k un nombre réel non nul. Multiplier chaque membre de $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ par k .
 - Récrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 - Quelle conclusion fais-tu entre les questions 1) et 2b) ?
- Montrer que si $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ avec $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.
- Montrer que si $a + b = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas du point M.
- Dans le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix}\right)$ et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Donner l'expression des coordonnées du point G.

RESUME :

Introduction : Recherche du point d'équilibre.

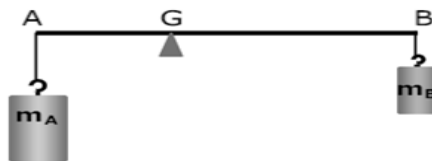
On considère le système constitué d'une tige de masse négligeable portant à ses extrémités des masses m_A et m_B .

Le problème consiste à déterminer la position du point G de la tige permettant de la maintenir en équilibre lorsqu'elle est posée sur un pointeau.

Constat: Lorsqu'on fait varier les masses m_A et m_B , les grandeurs m_A et m_B sont respectivement proportionnelles aux distances GA et GB . Autrement dit $m_A \times GA = m_B \times GB$.

Il vient alors que : $m_A \times \overrightarrow{GA} + m_B \times \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Vocabulaire : En physique, le point G est appelé centre de gravité du système. En mathématiques, on dit que G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs m_A et m_B et on notera $G = \text{bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$.



Définition

- On appelle point pondéré tout couple (A, a) où A est un point et a un nombre réel non nul. Le nombre réel a est appelé coefficient ou poids du point A.
- Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On note $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$ ou $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$

- L'écriture $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ avec $a + b \neq 0$ est appelée **expression vectorielle** du barycentre.

Théorème

Soit A et B deux points du plan, a et b deux nombres réels.

A	B
a	b

Propriété : (Homogénéité)

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.

En effet si $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$ alors pour tout nombre réels k non nul on a :

$$= \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline ka & kb \\ \hline \end{array}$$

Exemple : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & -3 \\ \hline \end{array}$. Le barycentre G existe car $2 - 3 \neq 0$.

Or $k = 5 \neq 0$ donc d'après l'homogénéité du barycentre $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 \times 5 & -3 \times 5 \\ \hline \end{array}$ c'est-à-dire

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 10 & -15 \\ \hline \end{array}$$

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés. Pour tout point M du plan.

- Si $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

Si $a + b = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M .

Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et si $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$ alors $G \begin{pmatrix} \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ \frac{ay_A + by_B}{a+b} \end{pmatrix}$.

Si $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & a \\ \hline \end{array}$, c'est-à-dire G est l'isobarycentre des points A et B alors $G \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

8. Barycentre de trois points pondérés.

Activité d'apprentissage :

1. Soit A, B, C et G quatre points du plan. On suppose trois réel a, b et c tels que $a + b + c \neq 0$. On pose $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. a. Soit k un nombre réel non nul. Multiplier chaque membre de $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ par k.
b. Récrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c. Quelle conclusion fais-tu entre les questions 1) et 2b) ?
3. Soit le point I tel que $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Montrer que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $a\overrightarrow{GI} + (b + c)\overrightarrow{GI} = \vec{0}$
4. Montrer que si $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$
5. Montrer que si $a + b + c = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du point M.
6. Dans le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. Donner l'expression des coordonnées du point G.

Définition

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) l'unique point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

On note $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$ ou $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

Théorème

- Soit A et B deux points du plan, a, b et c trois nombres réels. Si $a + b + c \neq 0$. Il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Si $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
- L'écriture $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ avec $a + b + c \neq 0$ est appelée **expression vectorielle** du barycentre.
- Soit A, B et C trois points distincts du plan. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

Propriété : (Homogénéité)

Le barycentre de trois points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

En effet si $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$ alors pour tout nombre réels k non nul on a : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$

Exemple : $G = \text{bar}$

A	B	C
-2	3	1

. Le barycentre **G** existe car $-2 + 3 + 1 \neq 0$.Or $k = 2 \neq 0$ donc $G = \text{bar}$

A	B	C
-2×2	3×2	1×2

c'est-à-dire $G = \text{bar}$

A	B	C
-4	6	2

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés. Pour tout point M du plan.

- Si $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .
- Si $a + b + c = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Coordonnées du barycentreLe plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et si $G = \text{bar}$

A	B	C
a	b	c

, alors $G \begin{pmatrix} \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{pmatrix}$ **Théorème du barycentre partiel**Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$ Si $G = \text{bar}$

A	B	C
a	b	c

, et si $I = \text{bar}$

A	B
a	b

alors : $G = \text{bar}$

I	C
a + b	c

9. Utilisation du barycentre**Théorème 1: (Alignement des points)**

Trois points sont alignés lorsque l'un peut s'écrire comme barycentre des deux autres. Les points A,

B et C sont alignés lorsque $A = \text{bar}$

B	C
b	c

ou $B = \text{bar}$

A	C
a	c

ou $C = \text{bar}$

A	B
a	b

Exemple :Soit $G = \text{bar}$

A	B	C
2	-3	4

et $I = \text{bar}$

A	C
1	2

Montrons que les points B, G et I sont alignés.

On a : $I = \text{bar}$

A	C
1	2

 $\Leftrightarrow I = \text{bar}$

A	C
1×2	2×2

c'est-à-dire $I = \text{bar}$

A	C
2	4

(D'après

l'homogénéité du barycentre)

Or $G = \text{bar}$

A	B	C
2	-3	4

 $\Rightarrow G = \text{bar}$

I	B
$2 + 4$	-3

 $= \text{bar}$

I	B
6	-3

Comme G s'écrit comme barycentre de B et I alors les points B, G et I sont alignés.

Théorème 2: (Concours des droites)Pour démontrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point G il suffit de montrer que $G \in (AA')$, $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$ c'est-à-dire G s'écrit à la fois comme barycentre de A

Exemple : Soit $= \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$. On donne $A' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & C \\ \hline -3 & 4 \\ \hline \end{array}$; $B' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & C \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$

$C' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & -3 \\ \hline \end{array}$. Montrons que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en G.

- On a : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$ Or $A' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & C \\ \hline -3 & 4 \\ \hline \end{array}$ donc d'après le théorème du barycentre

$$\text{partiel on a : } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & A' \\ \hline 2 & -3 + 4 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & A' \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in (AA').$$

- On a : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$ Or $B' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & C \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & C \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$ (D'après l'homogénéité du barycentre)

Donc d'après le théorème du barycentre partiel on a : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & B' \\ \hline -3 & 2 + 4 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & B' \\ \hline -3 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in (BB').$

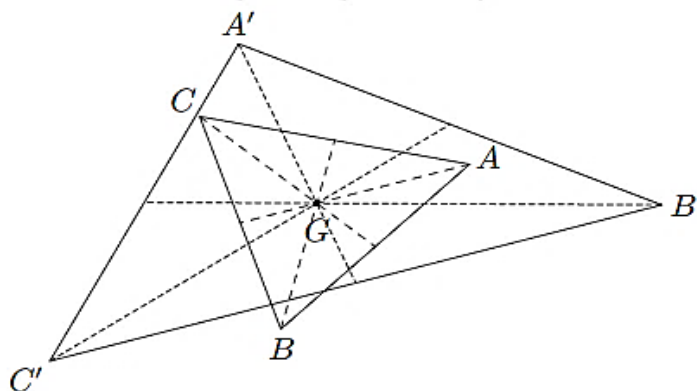
- On a : $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$ Or $C' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & -3 \\ \hline \end{array}$ donc d'après le théorème du barycentre

$$\text{partiel on a : } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline C & C' \\ \hline 4 & 2 - 3 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline C & C' \\ \hline 4 & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in (CC').$$

Exercices de consolidation:

Exercice1 :

La figure ci-contre représente deux triangles ABC et $A'B'C'$ admettant le même point G pour isobarycentre. Etablir la relation suivante : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$



Exercice2 :

Un lustre possède quatre ampoules distinctes en poids et en tailles ; son armature en fer est de forme rectangulaire et de dimension 30 cm sur 10 cm. Une représentation de ce lustre est donnée ci-dessous :

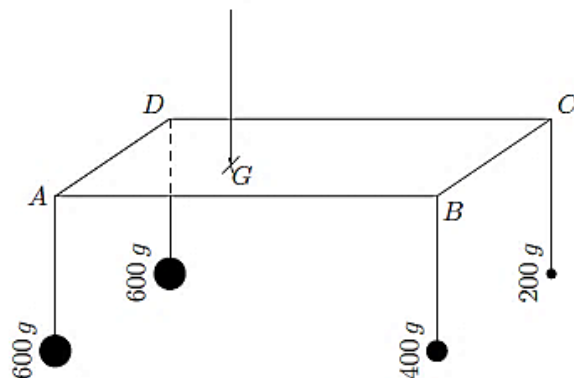
- Tracer dans le plan le rectangle $ABCD$ à l'échelle $\frac{1}{2}$.

On souhaite trouver le centre de gravité de cette figure ; pour cela, on associe à ce problème le système pondéré $\{ (A; 3) ; (B; 2) ; (C; 1) ; (D; 3) \}$ et on recherche la position du point G :

2. Placer les points suivants :

- a. I barycentre partiel des points A et B .
- b. J le barycentre partiel des points B et C .
- c. K le barycentre partiel des points C et D .
- d. L le barycentre partiel A et D .

3. En déduire la position du point G sur la figure.



Exercice 3 :

Le plan est orienté et l'unité de longueur est le centimètre. On considère le rectangle ABCD tel que $AB = 10$; $BC = 4$; $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. E est le point du segment $[DC]$ tel que $DE = 2$. On pose $I_m = \text{bar}\{(A, m^2 + 1); (B, -3m + 1)\}$ où m est un nombre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquels le point I_m existe.
2. Déterminer les valeurs de m pour le point I_m soit le milieu du segment $[AB]$.

Activité d'intégration N°1:

Une entreprise locale compte distribuer ses produits dans les villes A, B et C dont les tonnages journaliers seront respectivement 650, 980 et 540. Elle veut dans le but de minimiser ses coûts de trafic, implanter une zone de stockage autour de ces trois villes et cherche donc un emplacement stratégique qui sera la ville G.

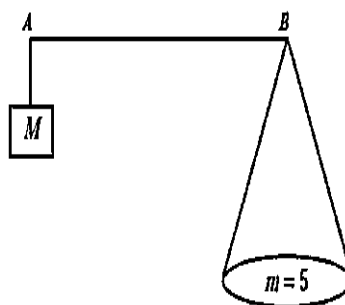
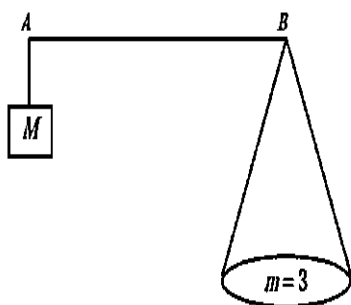
1. A qu'elle niveau de la ville serait plus judicieux d'implanter cette zone de stockage ?
2. Déterminer la distance entre A et puis entre B et C
3. On donne $\overrightarrow{AG} = \frac{98}{163} \overrightarrow{AB}$. Calculer la distance minimale commune AG.

Activité d'intégration N°2 :

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige. Pour peser une masse m , le vendeur place à une position précise un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage pour le commerçant de ne pas manipuler plusieurs masses.

On pourra reproduire ces schémas à l'échelle de son choix.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ? ($M = 2 \text{ kg}$)
2. Le point G est tel que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Quelle est la masse m pesée ? ($M = 2 \text{ kg}$)



LECON 2 : LIGNES DE NIVEAU

Motivation :

En géométrie on utilise les barycentres pour repérer des points par rapport à d'autres points ; en statistique pour repérer la moyenne des points pondérés

Compétence visée :

Reconnaitre et construire les lignes de niveau par des relations vectorielles et ses propriétés.

Prérequis:



Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés. Pour tout point M du plan.

1. Si $a + b + c \neq 0$, alors réduire la somme $\vec{u} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ où G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .
2. Si $a + b + c = 0$, alors montrer que le vecteur $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ est indépendant du point M .

Situation Problème:



Ambroise veut alimenter deux localités A et B distants de 100m en eau potable. Lui et les élites du village font appel à un ingénieur qui leur demande de construire des forages en des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10000$.

Déterminer l'ensemble des positions M occupées par les forages en tenant compte de la proposition de l'ingénieur.

1. Lignes de niveau $aMA^2 + bMB^2 = k$

Activité d'apprentissage :



1. On considère un segment $[AB]$ et I son milieu.
 - a. Exprimer I comme barycentre de A et B .
 - b. Exprimer alors $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI^2 et AB^2 .
 - c. Montrer que $MA^2 + MB^2 = k \Rightarrow MI = \sqrt{\frac{\frac{2k}{a} - AB^2}{4}}$
2. En supposant que $a = 4$, déterminer l'ensemble des positions du point M puis représenter si possible lorsque :
 - a. $MA^2 + MB^2 = 8$
 - b. $MA^2 + MB^2 = -9$
 - c. $MA^2 + MB^2 = 0$

RESUME :

Présentation :

A chaque point du globe terrestre, on peut faire correspondre un nombre réel qui peut, par exemple, être la température, l'altitude, la pression atmosphérique en ce point.

Sur des cartes géographiques, l'ensemble des points ayant par exemple la même altitude est marqué par une ligne. Une telle ligne est simplement appelée "**ligne de niveau**".

Nous pouvons modéliser, en mathématiques, la notion de ligne de niveau de la manière suivante: Étant donné un plan P (le plus souvent une carte géographique), on considère l'application f (altitudes, températures, ...) du plan vers $\mathbb{R}$.

$f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $M \longmapsto f(M)$ La ligne de niveau k de l'application f est l'ensemble noté L_k définie par :

$$L_k = \{M \in P / f(M) = k\}$$

Par exemple :

- L'ensemble des points d'une carte marine ayant la même profondeur est appelé "**ligne isobathe**"
- L'ensemble des points ayant la même altitude est appelé "**ligne isocline**"
- L'ensemble des points ayant la même température est appelé "**ligne isotherme**"

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, a et b deux nombres réels non nuls et E_k la ligne de niveau définie par $aMA^2 + bMB^2 = k$.

- Si $a + b \neq 0$ alors on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) . La ligne de niveau k est : **L'ensemble vide** ou le **singleton G** ou bien le **cercle de centre G**.
- Si $a + b = 0$, la ligne de niveau k est la **droite perpendiculaire à (AB)**

Cas particulier ($a = b$ et $a + b = 0$)

Soient A et B deux points distincts du plan, a et b deux nombres réels non nuls et E_k la ligne de niveau définie par $aMA^2 + bMB^2 = k$.

- Si $a = b$ alors on a : $aMA^2 + aMB^2 = k \Rightarrow MA^2 + MB^2 = \frac{k}{a}$. On pose I le milieu du segment [AB] et on obtient $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$. Donc la ligne de niveau $MA^2 + MB^2 = \frac{k}{a}$ est soit l'ensemble vide (si $\frac{k}{a} < 0$), soit réduit au point I (si $2\frac{k}{a} - AB^2 = 0$) ou soit un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{2k - AB^2}{4a}}$.
- Si $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ alors on a : $aMA^2 - aMB^2 = k \Rightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$.

L'ensemble des points M tel que $MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) au point H tel que $\overline{IH} = \frac{k}{2aAB}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

2. Lignes de niveau $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Activité d'apprentissage :



- On considère un segment [AB] et I son milieu.
 - Exprimer I comme barycentre de A et B.
 - Exprimer alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MI^2 et AB^2 .
 - Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Rightarrow MI = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$
- En supposant que $AB = 4$, déterminer l'ensemble des positions du point M puis représenter si possible lorsque :
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 21$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$

RESUME :

Théorème

Soient A et B deux points distincts du plan, a et b deux nombres réels non nuls et E_k la ligne de niveau définie par $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. La ligne de niveau k est : **L'ensemble vide** ou le **singleton G** ou bien le **cercle de centre G**.

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors la ligne de niveau k est l'ensemble vide.
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors la ligne de niveau k est le point I .
- $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors la ligne de niveau k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

3. Lignes de niveau $\frac{MA}{MB} = k$

Activité d'apprentissage :



1. Montrer que $\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$
2. Montrer que $MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0$
3. On pose $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\}$. Montrer que $(\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0 \Leftrightarrow ((1-k)\vec{MI} + \vec{IA} - k\vec{IB})(\vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{JB}) = 0$
4. Montrer que $((1-k)\vec{MI} + \vec{IA} - k\vec{IB})(\vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{JB}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$
5. Conclure

RESUME :

Théorème

Soient A et B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

- Si $k < 0$ alors la ligne de niveau k est l'ensemble vide.
 - Si $k = 0$ alors la ligne de niveau k est le point A .
 - Si $k = 1$ alors la ligne de niveau k est la médiatrice du segment $[AB]$
 - Si $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ alors la ligne de niveau k est le cercle de diamètre $[IJ]$
- En effet : $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{MA}^2 - k^2 \vec{MB}^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB})$$

Posons $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\}$ i.e $\vec{IA} - k\vec{IB} = \vec{0}$ et $\vec{JA} + k\vec{JB} = \vec{0}$

Donc on a : $(\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB}) \Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA} - k\vec{MI} - k\vec{IB})(\vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{JB})$

$$\Leftrightarrow ((1-k)\vec{MI} + \vec{IA} - k\vec{IB})(\vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{JB})$$

$$\Leftrightarrow ((1-k)\vec{MI} + \vec{IA} - k\vec{IB})(\vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{JB})$$

$$\Leftrightarrow ((1-k)\vec{MI})(\vec{MJ})$$

$$\Leftrightarrow (1-k)(1+k)\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0 \Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0.$$

On conclut de là que M décrit le cercle de diamètre $[IJ]$.

Exercices de consolidation

Exercice 1 :

A et B sont deux points distincts. Construire, s'il existe, le barycentre :

1. G des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; 3)$.

2. H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
3. J des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
4. K des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
5. L des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Exercice2 :

C est le barycentre de (A ; 3) et (B ; -7).

- Déterminer deux réels β et γ tels que A soit barycentre de (B ; β) et (C ; γ).
- Déterminer deux réels α et δ tels que B soit barycentre de (A ; α) et (C ; δ).
- Faire un dessin.

Exercice3 :

Soit G le barycentre de (A ; α) et (B ; β) ($\alpha + \beta \neq 0$).

- Montrer que si α et β sont tous deux positifs alors G se trouve sur le segment [AB].
- Où se trouve le point G si α et β sont tous deux négatifs ?
- Où se trouve le point G si α et β sont de signes contraires

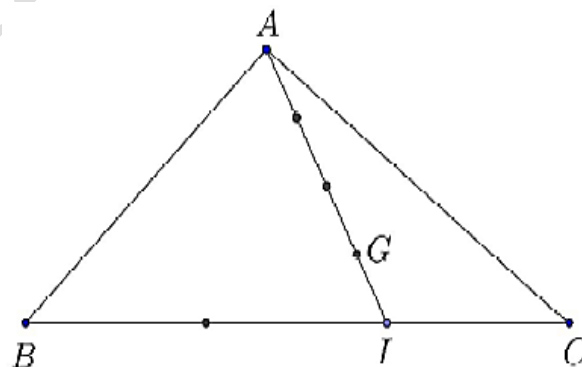
Exercice4 :

ABC est un triangle quelconque et M, un point du plan.

1. Démontrer que le vecteur $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$ est indépendant du point M choisi.
2. Soit $I = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ et $G = \text{bar}\{(A, 4); (B, 2)\}$
 - a. Exprimer le vecteur $\vec{u}$ à l'aide des points I et C.
 - b. Exprimer $4\vec{MA} + 2\vec{MB}$ à l'aide des points G et M.
3. Déterminer :
 - a. L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\|4\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|$
 - b. L'ensemble (ψ) des points M du plan tels que : $(4\vec{MA} + 2\vec{MB}) \cdot (2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}) = 0$
 - c. L'ensemble (ξ) des points M du plan tels que : $\|4\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6\|\vec{MA}\|$.
 - d. L'ensemble (Φ) des points M du plan tels que : $(4\vec{MA} + 2\vec{MB}) \cdot (\vec{MB}) = 0$.

Exercice5 :

Sur la figure ci-contre les graduations sur les segments [BC] et [AI] sont régulières. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B et C affectés de coefficients à déterminer. La droite (CG) coupe la droite (AB) en un point H. Préciser la position de H sur le segment [AB].

**Exercice6 :**

ABC est un triangle quelconque.

1. Construire les points P, Q et R tels que : $\vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{CA}$; $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AB}$; $\vec{BR} = \frac{4}{5}\vec{BC}$
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.
3. On donne $\vec{CD} = 2\vec{BA}$ et I, le symétrique de D par rapport à A.
 - a. Placer les points D et I.
 - b. Démontrer que les points B, C et I sont alignés.
4. a. Démontrer que $2\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC} = 7\vec{MG}$ où G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients à déterminer.
- b. déterminer et construire les ensembles suivants : $(\Gamma_1) = \{M \in P / (2\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}) \cdot \vec{AC} = 0\}$
 $(\Gamma_2) = \{M \in P / (2\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}) \cdot \vec{MA} = 0\}$

Exercice7 :

On considère un carré ABCD de sens direct, de centre O et tel que $AB = 2\text{cm}$. Soit G le barycentre des points pondérés (A,3) ; (B,2) ; (C,3) et (D,7).

1. a. Montrer que G appartient à la droite (BD).

- b. Montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$
- c. Construire le point G.
2. On se propose de déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 2MD^2 = 40$.
- a. Montrer que : $3MA^2 + 3MC^2 = 6MO^2 + 12$ et $2MB^2 + 2MD^2 = 4MO^2 + 8$.
- b. Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \sqrt{2}$.
- c. Montrer que le point A appartient à (Γ) et en déduire la nature exacte de (Γ) .
Construire (Γ)

Exercice8 :

Soit A, B et I trois points du plan tels que $AB = 4$ cm et I le milieu du segment $[AB]$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

- $MA^2 + MB^2 = k$; $k \in \{58, 3, 8\}$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice9 :

ABC est un triangle ; à tout réel m , on associe le point G_m barycentre des points pondérés : $(A, 2)$; (B, m) ; (C, m) . on note O, le milieu du segment $[BC]$.

- Démontrer que lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le lieu de G_m est une droite (Δ) que l'on précisera.
- a. Construire les points G_2 et G_{-2} .
b. On suppose m différent de 2 et -2. Soit G_m , un point de (Δ) distinct de A, G_2 et G_{-2} . Démontrer que la droite (BG_m) coupe la droite (AC) en un point noté I et que (CG_m) coupe (AB) en un point noté J.
- a. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, calculer en fonction de m les coordonnées de I et J.
b. En déduire que les points O, I et J sont alignés.

Exercice10 :

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$; $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

- Calculer les coordonnées du point G barycentre de $(A, 4)$; $(B, 3)$; $(C, 5)$.
- Soit l'expression $h(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$.
a. Calculer $h(G)$.
b. Exprimer $h(M)$ en fonction de MG^2 et $h(G)$.
c. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M)=18$.

Exercice 11 :

On considère dans le plan P un triangle équilatéral ABC de côté a.

- Construire le point D barycentre du système $\{ (A ; 2), (B ; -2), (C ; -1) \}$.
- a. Déterminer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a.
b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.
- Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a. (indication : $\cos(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points du plan tels que $f(M) = 0$.
a. Vérifier que C appartient à (F).
b. Exprimer $f(M)$ en fonction de la distance MD et de a.
c. Déterminer et construire (F).
- Pour tout point M du plan on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BD} + a^2$
a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.
b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G). Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

Exercice 12 :

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC et on note G son centre de gravité. Soit φ et f les fonctions du plan (P) dans $\mathbb{R}$ définies pour tout point M par :

$$\varphi(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \text{ et } f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

1. Démontrer que $\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G)$ avec $\varphi(G) = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$
2. Démontrer que $\varphi(G) = -\frac{1}{2}f(G)$ avec $f(G) = GA^2 + GB^2 + GC^2$
3. Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC.
4. En déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, AC et BC
5. Dans le cas particulier où le triangle ABC est équilatéral de côté a , déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{a^2}{4} \leq \varphi(M) \leq \frac{a^2}{2}$

Exercice 13 :

ABC est un triangle dont les angles sont aigus. A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A sur [BC], [AC] et [AB].

1) Montrer que

- a. A' est barycentre de $\{(B, \tan \hat{B}); (C, \tan \hat{C})\}$
- b. B' est barycentre de $\{(A, \tan \hat{A}); (C, \tan \hat{C})\}$
- c. C' est barycentre de $\{(B, \tan \hat{B}); (A, \tan \hat{A})\}$

2) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et le vecteur $\vec{V}$ défini par :

$$\vec{V} = \tan \hat{A} \cdot \overrightarrow{HA} + \tan \hat{B} \cdot \overrightarrow{HB} + \tan \hat{C} \cdot \overrightarrow{HC}.$$

Montrer que $\vec{V} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\vec{V} \perp \overrightarrow{AB}$

Activité d'intégration N°1 :

Afin d'alimenter deux villages A et B distants de 100m en eau potable, les élites du village font appel à trois ingénieurs.

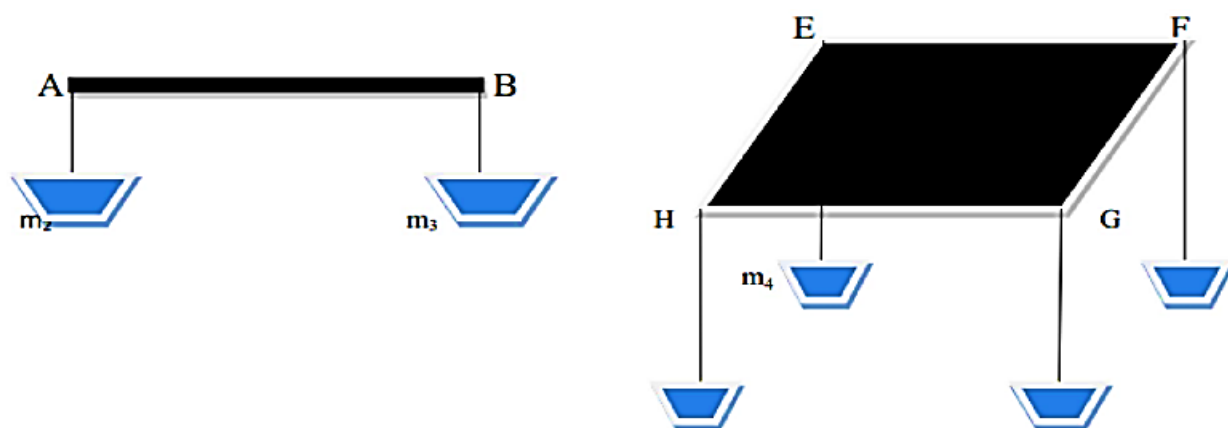
- L'ingénieur 1 demande de construire des forages en des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10000$
- L'ingénieur 2 demande de les construire en des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -900$
- l'ingénieur 3 demande de les construire en des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 50$

Tâches :

1. Déterminer l'ensemble des positions occupées par les forages en tenant compte de la proposition de l'ingénieur 1
2. Où va-t-on construire les puits de forages si on tient compte de la conception de l'ingénieur 2 ?
3. Pour l'ingénieur 3 où doit-on positionner les puits de forages ?

Activité d'intégration N°2 :

Ambroise revient de la rivière où il était allé chercher de l'eau. Il dispose de deux systèmes de levages. Le premier est une tige « AB » rigide et homogène de masse $m_1 = 1\text{kg}$, à laquelle on a suspendu avec des fils de même longueur deux petits sceau d'eau de masses $m_2 = 1\text{kg}$ et $m_3 = 2\text{kg}$. Le deuxième est un plateau parallélépipédique rectangulaire en bois homogène dur « EFGH » de masse négligeable, de longueur 1,5 m et de largeur 1m. Il suspend aux quatre sommets du plateau quatre petits sceaux d'eau de masses identiques $m_4 = 1\text{kg}$. Après 200m de route, un sceau du plateau se renverse. Voici l'illustration graphique de ces systèmes.



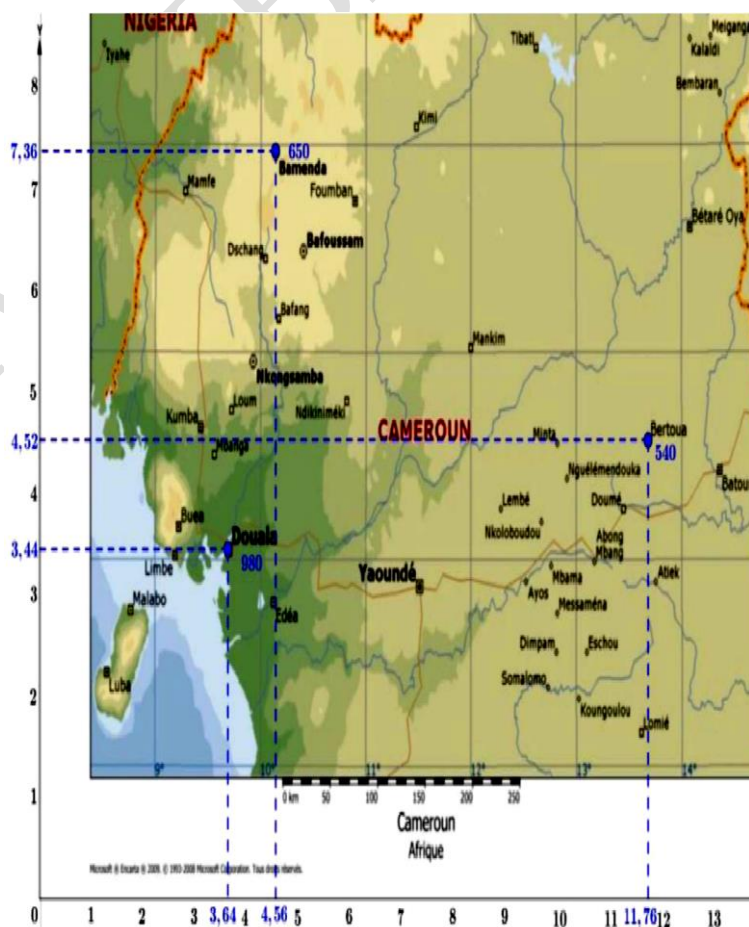
Tâches :

1. Déterminer la position où Ambroise doit arrêter la tige par la main pour qu'elle soit en équilibre.
2. Déterminer la position où Ambroise doit poser le plateau sur la tête pour qu'il soit en équilibre après les 200 premiers mètres de route.
3. Déterminer la position où Ambroise doit poser le plateau sur la tête pour qu'il soit en équilibre pendant les 200 premiers mètres.

Activité d'intégration N°3 :

Une entreprise locale compte distribuer ses produits dans les villes de Bamenda, de Douala et de Bertoua dont les tonnages journaliers seront respectivement 650, 980 et 540. Elle veut dans le but de minimiser ses coûts de trafic, implanter une zone de stockage autour de ces trois villes et cherche donc un emplacement stratégique.

1. A quel niveau de la ville serait plus judicieux d'implanter cette zone de stockage ?
2. Déterminer la distance entre Bamenda-Bertoua et Douala-Bertoua.
3. Les points A et B représentent les villes respectives Bamenda et Douala. On donne : $\overrightarrow{AG} = \frac{98}{163} \overrightarrow{AB}$. Déterminer la distance AG.



Module 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ELEMENTAIRE DU PLAN

Chapitre 3 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN

LECON 1 : LES DROITES DU PLAN

Motivation :

L'équation normale peut servir à avoir un vecteur normal unitaire pour orienter un axe perpendiculaire à une droite donnée ou déterminer la distance d'un point à une droite.



Prérequis:

On donne deux points $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ et deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1. Quand dit-on que deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix}\right)$ sont colinéaires ?
2. Quand dit-on que deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix}\right)$ sont orthogonaux ?
3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
4. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
5. Vérifier que les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux
6. Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Situation Problème:



Une ligne a pour équation cartésienne $3x + 4y - 4 = 0$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ dont l'origine O est un point du sol. Pour certains travaux, un ingénieur veut obtenir un vecteur normal à cette droite qui soit unitaire. Comment va-t-il s'y prendre?

1. EQUATIONS CARTESIENNES DES DROITES DU PLAN

Activité d'apprentissage :



1. Déterminer l'équation de la droite (D) passant par les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D') passant par $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et orthogonale au vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$

RESUME :

a. Droite définie par deux points

Propriété

Soit $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix}\right)$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ lorsque $M \in (AB)$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a : $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

Exemple : Déterminons l'équation de la droite (D) passant par les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (D)$ on a : $M \in (D) \Rightarrow \overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

Or $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-1 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right)$ donc on a : $|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) + 3(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 + 3y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 7 = 0$$

$$\text{Donc } (D) : 2x - 3y + 7 = 0$$

b. Droite définie par un point et un vecteur directeur

Propriété

On sait que pour tout point A et tout vecteur non nul $\vec{u}$, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Cette droite est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

Pour tout couple (x, y) , la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$ pour vecteur directeur.

Réciproquement, toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple : Déterminons l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point de cette droite, on a : $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-3) - 3(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 6 - 3y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y - 9 = 0$$

$$\text{Donc } (D) : 2x + 3y - 9 = 0$$

c. Droite définie par un point et un vecteur normal.

Propriété

On sait que, pour tout point A et un vecteur normal $\vec{n}$, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Cette droite est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

Pour tout couple (x, y) , la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ pour vecteur normal.

Réciproquement, toute droite de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple : Déterminons l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (D)$ tel que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$. On a : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -3(x-3) + (y-2) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x + 9 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 7 = 0$$

Donc $(D) : -3x + y + 7 = 0$

2. Parallélisme et orthogonalités de droites

Activité d'apprentissage :



Soit (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites d'équations cartésiennes respectives $2x + y + 3 = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$ et $x - 2y - 7 = 0$

- Déterminer les vecteurs directeurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de chaque droite respective
- Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires. Que peut-on dire de la position relative de (D_1) et (D_2) ?
- Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ sont orthogonaux. Que peut-on dire de la position relative de (D_1) et (D_3) ?

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

- Les droites (D) et (D') ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-\frac{b}{a})$ et $\vec{u}'(-\frac{b'}{a'})$ et pour vecteurs normales respectifs $\vec{n}(\frac{a}{b})$ et $\vec{n}'(\frac{a'}{b'})$
- $(D) \parallel (D') \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$ ou $\det(\vec{n}, \vec{n}') = 0$.
 $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}' = 0$ ou $\vec{u}' \cdot \vec{n} = 0$.
- $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ ou $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.
 $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{n}') = 0$ ou $\det(\vec{u}', \vec{n}) = 0$.

3. Equation normale d'une droite

Activité d'apprentissage :



Si (D) est d'équation $ax + by + c = 0$.

- Calculer le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$
- Montrer alors que (D) a pour équation $\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = 0$
- Montrer que l'équation de (D) se réduit à $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$
- Vérifier que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$
- En remarquant que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, déduire de 4) qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- En posant $k = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ montrer qu'on obtient $(D) : x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$

Propriété

Soit (D) une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal de (D) et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}; \vec{n})$. (D) admet une équation cartésienne de la forme $x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$. Cette équation est appelée équation normale de la droite (D) . Si (D) est d'équation $ax + by + c = 0$ alors on a :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

En posant $k = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ on obtient $x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$.

Exemple : Déterminons l'équation normale de la droite (D) d'équation $3x + 2y - 1 = 0$

On a : $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Donc $3x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{13}}{13}x + \frac{2\sqrt{13}}{13}y - \frac{\sqrt{13}}{13} = 0 \Leftrightarrow x \cos \theta + y \sin \theta - \frac{\sqrt{13}}{13} = 0$$

Avec $\cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ et $\sin \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

4. Distance d'un point à une droite

Définition

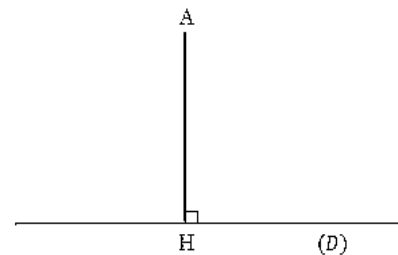
La distance d'un point A à une droite (D) notée $d(A, (D))$ est le plus court chemin AH où H est projeté orthogonal de A sur (D) .

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan et (D) une droite d'équation normale $x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$ et d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

$$\text{On a : } d(A, (D)) = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + k|$$

Ou

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Exemple : Soit $(D) : -x + 3y + 2 = 0$ et $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$\text{On a : } d(A, (D)) = \frac{|-3 + 3 \times (-1) + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (3)^2}} = \frac{|-3 - 3 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|-4|}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad \text{D'où } d(A, (D)) = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

5. Représentation paramétrique d'une droite

Activité d'apprentissage :



On dit qu'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de la droite passant par un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ s'il existe un autre point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de cette droite tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire qu'il existe un réel non nul t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

En utilisant l'expression $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, montrer que $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Définition

La représentation paramétrique de la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Exemple : La représentation paramétrique de la droite passant par $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2 + 7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

6. Expression du déterminant de deux vecteurs

Propriété

- $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$.
- On en déduit que $\sin \theta = \frac{\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.
- On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$.

7. Rappels sur quelques Théorèmes

• Théorème d'Al KASHI

Soit ABC un triangle quelconque tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

De même $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

• Le théorème de la MEDIANE.

Soit I le milieu du segment $[BC]$. On a :

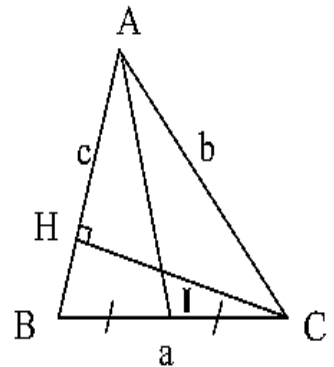
$$1) AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

• Le théorème des SINUS

On a : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2R} = 2\mathcal{A}$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC ; $\mathcal{A}$ la

surface de ce triangle et l'aire de ce triangle est $\mathcal{A} = \frac{AB \times HC}{2}$



Exercice de consolidation :

Soit un triangle ABC, et H le pied de la hauteur issue du sommet B.

On note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $BH = h$.

1. Exprimer h en fonction de c et $\sin \hat{A}$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A})$

2. À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer $\sin^2(\hat{A})$ en fonction de a , b et c .

3. En notant le demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$, montrer alors que : $\sin^2(\hat{A}) = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$

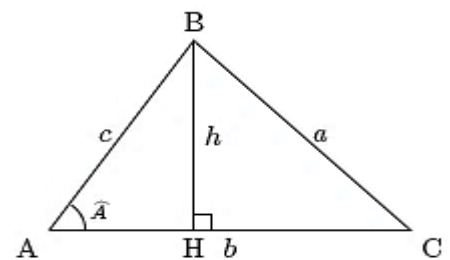
4. En déduire alors que : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Cette dernière formule est appelée la *formule de Héron*.

Solution :

1 Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a : $\sin \hat{A} = \frac{h}{c}$, donc $h = c \times \sin \hat{A}$.

L'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}}.$$



2 La formule d'Al-Kashi est :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

ce qui donne :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \widehat{A}$$

ou encore :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2 \widehat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Or, $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$, donc $\cos^2 \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A}$, ce qui donne :

$$1 - \sin^2 \widehat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

soit :

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

3 Développons :

$$\begin{aligned} & \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2} \\ &= \frac{4 \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)}{b^2c^2} \\ &= \frac{2(a+b+c) \left(\frac{b+c-a}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right)}{b^2c^2} \\ &= \frac{(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab+bc+c^2-ac)(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[2bc+(b^2+c^2-a^2)][2bc-(b^2+c^2-a^2)]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \sin^2 \widehat{A}. \end{aligned}$$

4 De la question 1, on déduit que :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 \widehat{A}.$$

En remplaçant alors $\sin^2 \widehat{A}$ par l'expression trouvée à la question 3, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2 \times \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2} \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ étant un nombre positif, en prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

LECON 2 : CERCLES

Motivation :

Des véhicules lors de la traversée d'un rond-point ont une orbite circulaire. A partir d'un point de la terre on peut repérer leur position connaissant l'angle parcouru grâce aux équations paramétriques d'un cercle.



Prérequis:

Quelle est la forme générale de l'équation cartésienne d'un cercle connaissant les coordonnées de son centre et son rayon ?



Situation Problème:

L'orbite d'un automobile dans un grand carrefour est circulaire et a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 16$. A partir du centre du rond-point, un observateur remarque que l'automobile a effectué 60° de rotation. Comment peut-il déterminer les coordonnées exactes de l'automobile à cet instant dans un repère orthonormé dont l'origine est le centre du rond-point ?

1. CERCLES ET SES CARACTERISTIQUES

Activité d'apprentissage :



Soit (C) un cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r .

1. Montrer que pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de (C) on a : $\Omega M = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
2. Montrer que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1$
3. En remarquant que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{x-x_0}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y-y_0}{r}$
4. Montrer alors que $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$

RESUME :

a. Définition d'un cercle

Définition

On appelle cercle de centre Ω et rayon r , l'ensemble des points M du plan vérifiant $\Omega M = r$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\{\Omega M < r\}$ est l'intérieur du cercle de centre Ω et de rayon r et $\{\Omega M > r\}$ est l'extérieur du cercle de centre Ω et de rayon r .

L'ensemble des points M du plan tels que $\{\Omega M = r\}$ est la frontière du disque de centre Ω et de rayon r . Donc un cercle de centre Ω et rayon r est la frontière du disque de centre Ω et de rayon r .

Propriété

Toute équation de la forme $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ est l'équation d'un cercle pouvant s'écrire sous la forme : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Réciproquement toutes équations pouvant s'écrire sous la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ est l'équation du cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r .

Exemple : Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

$$\text{On a: } 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2y^2 + 6y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x) + 2(y^2 + 3y) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(x-1)^2 - 1^2] + 2\left[\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 2 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Donc M décrit le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{-3}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

b. Représentation paramétrique d'un cercle

Définition

Soit (C) un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r . Le système $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de (C) dans le repère orthogonal (O, I, J) .

En effet : Soit (C) un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r . Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a :

$$M \in (C) \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1$$

$$\text{Donc il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos\theta = \frac{x-x_0}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{y-y_0}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x-x_0}{r} \\ \sin\theta = \frac{y-y_0}{r} \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = r\cos\theta \\ y - y_0 = r\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$$

Exemple : Déterminons la représentation paramétrique du cercle $(C) : 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ dans le repère orthogonal (O, I, J) .

(C) est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{-3}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Donc sa représentation paramétrique est

$$(C): \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}).$$

c. Tangente à un cercle.

Définition

La tangente à un cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ au point $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est la droite d'équation $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.

2. Positions relatives

Motivation :

La réalisation de nombreuses œuvres artistiques telles que le logo des jeux olympiques serait un jeu d'enfant si l'on avait une bonne connaissance sur les positions relatives des cercles.

Prérequis:

1. Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 3 centimètres
2. Place un point A intérieur à (C), un point B extérieur à (C) et un point E appartenant à (C)



Situation Problème:

Un lion, un loup et un cabri sont enchaînés à trois poteaux A, B et C respectivement de telle sorte que la distance entre les poteaux A et B est 20 m, la distance entre les poteaux B et C est 22 m et la distance entre les poteaux A et C est 18 m. la chaîne du lion est longue de 7 m, celle du loup 13 m et celle du cabri 10m.

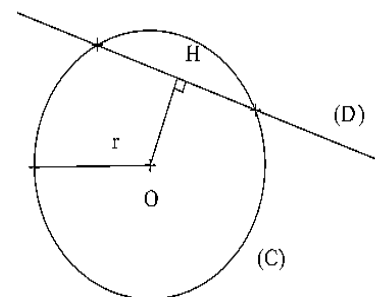


a. Positions relatives entre une droite et un cercle

Propriété

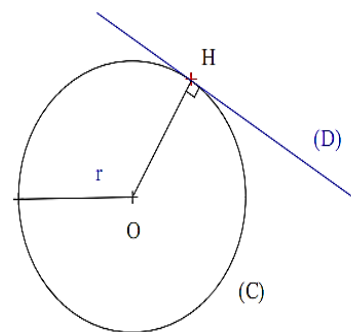
- Une droite peut couper un cercle et le coupe en deux points distincts.

Lorsque $d(H, (D)) < r$ alors (C) et (D) sont **sécants**.



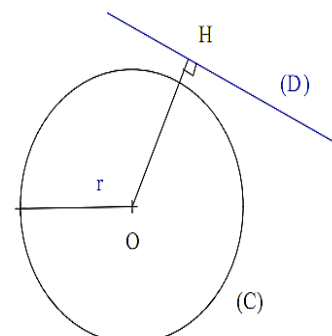
- Une droite peut couper un cercle en un seul point et dans ce cas on dit qu'ils sont **tangents**.

Lorsque $d(H, (D)) = r$ alors (C) et (D) sont **tangents**.



- Une droite peut ne pas couper un cercle et dans ce cas on dit qu'ils sont **disjoints**.

Lorsque $d(H, (D)) > r$ alors (C) et (D) sont **disjoints**.

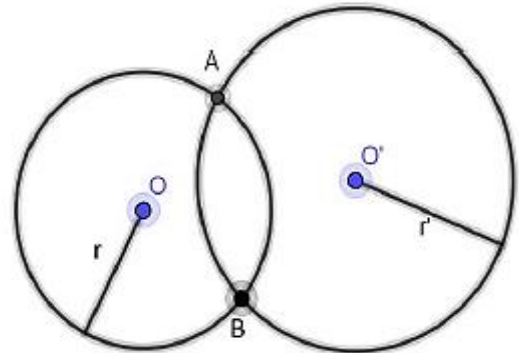
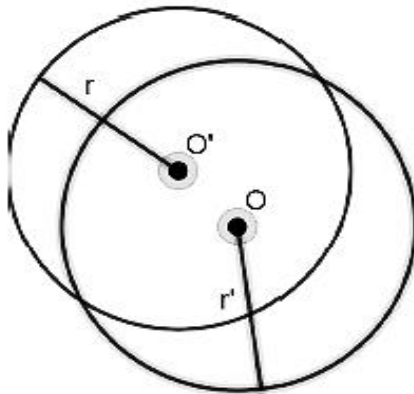


b. Positions relatives entre deux cercles

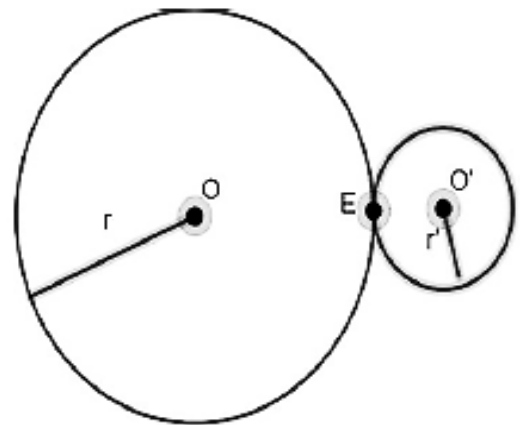
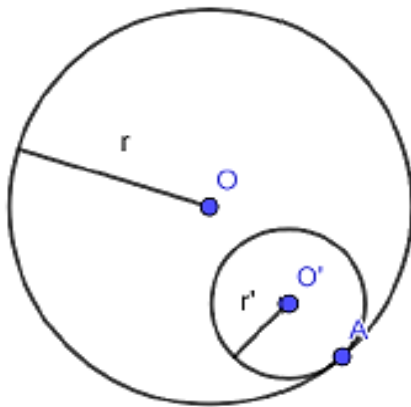
Propriété

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r et (C') un cercle de centre O' et de rayon r' .

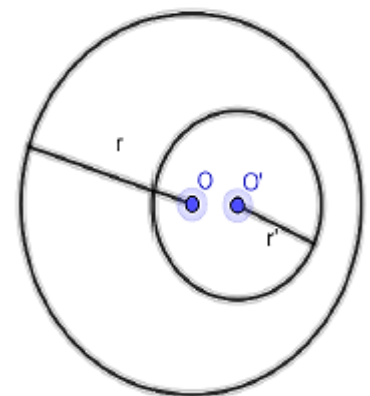
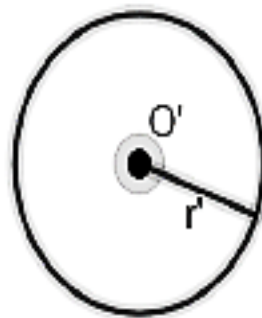
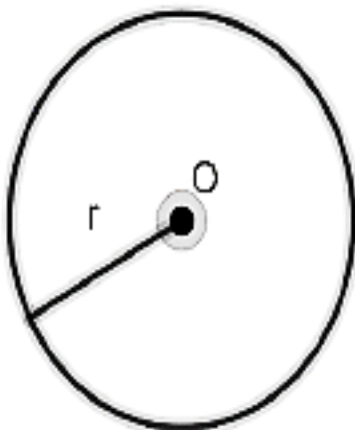
- (C) et (C') sont sécants si et seulement si $OO' < r + r'$.



- (C) et (C') sont tangentes si et seulement si $OO' = r + r'$.



- (C) et (C') sont disjoints si et seulement si $OO' > r + r'$.

**Exercices de consolidation****Exercice1 :**

Soit P le plan affine, muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

On considère le cercle (ξ) de centre Ω et d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$;

et la famille de droites (D_m) d'équations $2x + y - m = 0$.

1. Montrer que les droites (D_m) ont une direction fixe.

2. Déterminer l'équation paramétrique du cercle (ξ)
3. Soit d la distance de Ω à (D_m)
 - a. Montrer que $d^2 = \frac{1}{5}m^2 - 2m + 5$
 - b. En déduire pour quelles valeurs de m , (D_m) est tangente à (ξ)
4. Tracer (ξ) et les droites correspondantes dans un repère orthonormé.

Exercice 1 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $K(2; 1)$ et $L(2; 0)$. Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

1. a. Déterminer le centre Ω et le rayon r de (C) .
b. Vérifier que le point L appartient à (C) et en donner une équation de la tangente (T) à (C) au point L .
2. Etudier la position du point K par rapport à (C) .
3. Soit (D_m) la droite passant par K et de coefficient directeur m ; $M(x; y)$ un point appartenant à (D_m) et à (C) .
a. Donner l'équation réduite de la droite (D_m) .
b. Montrer que x est solution de l'équation (E_m) : $(1 + m^2)x^2 + (-4m^2 + 6m - 2)x + 4m^2 - 12m + 5 = 0$
c. Vérifier que le discriminant de (E_m) est $\Delta_m = 8(2m^2 + 3m - 2)$.
d. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle une unique solution ?
e. En déduire les équations des droites passant par K et tangentes à (C) .
4. a. Déterminer les points $M(x; y)$ de (C) tels que : $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$.
b. En déduire les équations des droites passant par K et tangentes à (C) .

Exercice 3 :

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point $I(-2; -1)$ et les droites (D_m) d'équation $4x - 3y + 2m = 0$; où m est un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de m , I appartient-il à (D_m) ?

On suppose dans la suite $m \neq \frac{5}{2}$.

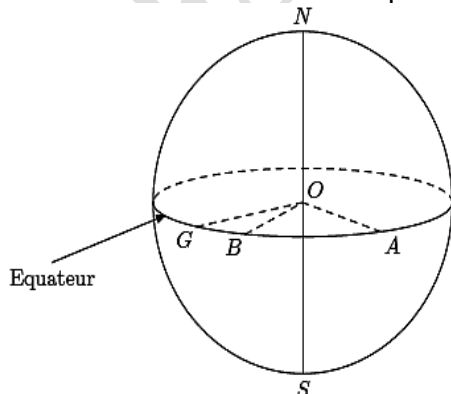
2. La distance d'un point $M_0(x_0; y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est le réel $d(M_0, (D))$ défini par : $d(M_0, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Déterminer en fonction de m la distance de I à (D_m) .

3. Soit (C) le cercle de centre I et de rayon 2. Donner une équation Cartésienne de (C) .
4. Pour quelles valeurs de m la droite (D_m) est-elle tangente à (C) ?
5. Soient $A(0; 1)$ et $B(-4; -3)$ deux points du plan.
a. Montrer que I est le milieu de $[AB]$.
b. Montrer que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 24$ est le cercle (C) .

Exercice 4 :

La terre est assimilée à une sphère de rayon 6 370 km.



1. On considère le plan perpendiculaire à la ligne des pôles (NS) et équidistant de ces deux pôles. L'intersection de ce plan avec la terre s'appelle l'équateur.

Calculer la longueur de l'équateur arrondie au kilomètre près.

2. On note O le centre de la terre et G un point de l'équateur. On considère deux points A et B situés en Afrique sur l'équateur. Ces points sont disposés comme l'indique le schéma ci-dessus. On sait que : $\widehat{GOA} = 42^\circ$; $\widehat{GOB} = 9^\circ$.

Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$, portion de l'équateur située en Afrique arrondie au kilomètre près.

Module 23 : C: CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES

Chapitre 4 : TRIGONOMETRIE

LECON 1 : Angles orientés

Motivation :

Dans la vie courante, la trigonométrie est utilisée dans le calcul des distances, l'arpentage, la topographie, la sylviculture, la cartographie, par les géomètres, les résistances des structures, les programmes informatiques, en électricité ... Cette leçon nous permettra d'apprendre à résoudre les équations trigonométriques.

Compétence visée :

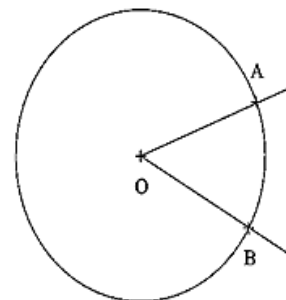
Manipuler le radian et savoir calculer les mesures des angles orientés de manière performante.

Prérequis:

Définir **cercle trigonométrique**, **sens trigonométrique**, **sens non trigonométrique**, angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Situation Problème:

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon $R = 2$ cm. On note A et B deux points de ce cercle. Soit $\widehat{AOB}$ un secteur angulaire de sommet O dont la mesure en degré est 50° découpant sur le cercle (C) le petit arc $\widehat{AB}$. Calculer la longueur L_{AB} de l'arc $\widehat{AB}$ puis l'aire de ce secteur associé à l'angle $\widehat{AOB}$.



10. Angles orientés

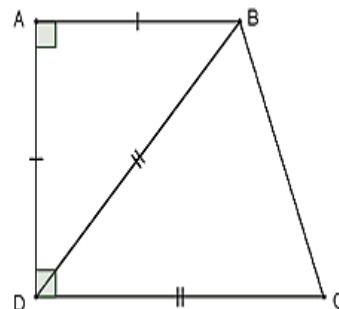
Activité d'apprentissage :

On rappelle que

degrés	180	x
radians	π	α

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze rectangle.

Déterminer les mesures principales des angles orientés suivants: $(\vec{DC}; \vec{DA})$; $(\vec{DA}; \vec{DB})$; $(\vec{BD}; \vec{AB})$ et $(\vec{BD}; \vec{DB})$



RESUME :

Définition

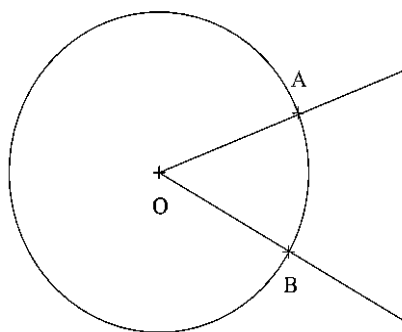
Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

- On appelle **cercle trigonométrique** tout cercle orienté de rayon 1.
- On appelle **sens direct ou sens trigonométrique**, le sens contraire des aiguilles d'une montre et dans ce sens les angles sont comptés positivement.
- On appelle **sens indirect ou sens non trigonométrique**, le sens des aiguilles d'une montre et dans ce sens les angles sont comptés négativement.
- On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, tout nombre réel de la forme : $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, la mesure de cet angle comprise entre $-\pi$ et π .

a. Longueur d'un arc et aire d'un secteur angulaire**Propriété**

- Tous les nombres réels qui sont mesure d'un même angle orienté, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Ce point sera noté, selon les besoins, $M(x)$, $M(x + 2\pi)$, $M(x - 2\pi)$, etc.
- Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure de l'un est une mesure de l'autre.
- Soit un secteur angulaire dont la mesure en radian est α . Ce secteur découpe sur un cercle (C) de centre O et de rayon R un arc $\widehat{AB}$ alors la longueur L_{AB} de l'arc $\widehat{AB}$ est $L_{AB} = R\alpha$. Si la mesure de ce secteur angulaire est en degré alors $L_{AB} = R \times \frac{\pi}{180} \times \alpha$.



L'arc $\widehat{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est :

$$L = \frac{\pi \times r \times \text{mes}\widehat{AOB}}{180}.$$

Le secteur angulaire au centre associé à l'angle $\widehat{AOB}$

a pour aire $\mathcal{A} = \frac{\pi \times r^2 \times \text{mes}\widehat{AOB}}{360}$

Exemple : Soit un secteur angulaire de sommet O dont la mesure en degré est 50° . Ce secteur découpe sur un cercle (C) de centre O et de rayon $R = 2$ cm un arc $\widehat{AB}$. Calculer la longueur L_{AB} de l'arc $\widehat{AB}$.

On a : $L_{AB} = R\alpha$ or $\alpha = \frac{\pi}{180} \times 50^\circ = \frac{5\pi}{18}$ Rad. Donc $L_{AB} = 2 \times \frac{5\pi}{18} = \frac{5\pi}{9}$ cm

Donc la longueur L_{AB} de l'arc $\widehat{AB}$ est $\frac{5\pi}{9}$ cm.

b. Congruence**Définition**

Deux nombres x et y sont congrues modulo 2π s'ils diffèrent d'un multiple entier de 2π . On note : $x \equiv y[2\pi]$ et on lit « x est congru à y modulo 2π ».

On a : $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k \times 2\pi$.

Propriété

Pour tous réels x, y, z et a on a :

- ✓ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x + a \equiv y + a[2\pi]$.
- ✓ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow -x \equiv -y[2\pi]$.
- ✓ $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow x \equiv z[2\pi]$.

Exemple : On sait que $\frac{33\pi}{4} = \frac{32\pi + \pi}{4} = \frac{32\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 8\pi + \frac{\pi}{4} = 4 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$. Donc $\frac{33\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

c. Mesure principale**COIN METHODE**

Déterminer la principale α d'un angle orienté, dont une mesure α est connue, consiste à écrire $\alpha = a + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine d'abord k à l'aide des inégalités : $-\pi < \alpha + 2k\pi < \pi$.

Puis l'on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = a + 2k\pi$.

Exemple : Déterminons la mesure principale de $\frac{2015\pi}{3}$

$$\text{On sait que } \frac{2015\pi}{3} = \frac{2010\pi + 5\pi}{3} = \frac{2010\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 670\pi + \frac{5\pi}{3} = 335 \times 2\pi + \frac{5\pi}{3}$$

Donc $\frac{2015\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3} [2\pi]$. Or $\frac{5\pi}{3}$ n'est pas compris entre $-\pi$ et π donc on doit encore diminuer 2π sur $\frac{5\pi}{3}$.

On a : $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$. Donc la mesure principale de $\frac{2015\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

d. Somme de deux angles orientés.**Définition**

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesure α et β . On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, l'angle orienté dont l'une des mesures est $\alpha + \beta$.

En effet : Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesure α et β , α' et β' deux mesures quelconques de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.

$$\text{On a : } \alpha' \equiv \alpha [2\pi] \Leftrightarrow \alpha' + \beta \equiv \alpha + \beta [2\pi] ; \beta' \equiv \beta [2\pi] \Leftrightarrow \alpha + \beta' \equiv \alpha + \beta [2\pi].$$

Donc $\alpha' + \beta' \equiv \alpha + \beta [2\pi]$; $\alpha' + \beta'$ et $\alpha + \beta$ sont des mesures d'un même angle orienté.

Remarque :

- Deux angles orientés sont opposés lorsque la somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est $-\hat{\alpha}$. On a : $\hat{\alpha} + (-\hat{\alpha}) = \hat{0}$
- La différence de deux angles orientés est la somme du premier et de l'opposé de l'autre : $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\alpha} + (-\hat{\beta})$.

Les propriétés d'addition des angles sont celles de l'addition des nombres réels ; en particulier $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$.

II. Propriétés des angles orientés.**Propriété**

- Pour tout vecteur non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

Exemple : Pour tout vecteur non nuls $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$, $(\vec{AB}, \vec{AD}) + (\vec{AD}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$

- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ quatre vecteurs non nuls. On a : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}')$.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul. On a : $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$

Exemple : Si $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$, alors $(\vec{AC}, \vec{AB}) = -(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{3}$

Propriété

✓ Si $k > 0$, alors $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Exemple : Si $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, alors $(\widehat{2\vec{AC}, \vec{AB}}) = (\widehat{\vec{AC}, 2\vec{AB}}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$

✓ Si $k < 0$, $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Exemple : Si $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, alors $(\widehat{-2\vec{AC}, \vec{AB}}) = (\widehat{\vec{AC}, -2\vec{AB}}) = \pi + (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Donc $(\widehat{-2\vec{AC}, \vec{AB}}) = \frac{4\pi}{3}$.

✓ $(\widehat{k\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

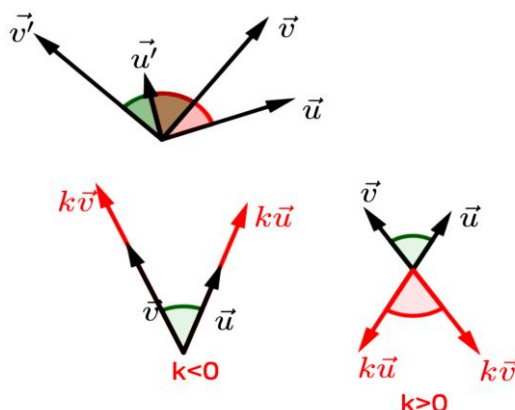
Exemple : Si $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, alors $(\widehat{-2\vec{AC}, -2\vec{AB}}) = (\widehat{2\vec{AC}, 2\vec{AB}}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$

✓ Pour tout nombre réels a et b d'image respectives A et B sur le cercle (C) , $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$.

✓ Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté. On appelle double de $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note $2(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté défini par : $2(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v})$.

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α .

- Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

**12. Angles orientés et cercle .****Propriété****Caractérisation d'un cercle.**

Soit (C) un cercle de centre O , A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M distinct de A et B : $M \in (C) \Leftrightarrow 2(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = (\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$.

Points cocycliques.

- Deux points situés sur un même cercle sont dits cocycliques.
- Par deux points A et B , il passe une infinité de cercle.
- Par trois points distincts et non alignés A , B , C il passe un seul cercle : le cercle circonscrit à ABC .

Soit A , B , C , D quatre points distincts du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

Les points A , B , C et D **sont cocycliques** si et seulement si : $2(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) = 2(\widehat{\vec{DA}, \vec{DB}})$.

LECON 2 : FORMULES DE TRIGONOMETRIE

Motivation :

Dans la vie courante, la trigonométrie est utilisée dans le calcul des distances, l'arpentage, la topographie, la sylviculture, la cartographie, par les géomètres, les résistances des structures, les programmes informatiques, en électricité ... Cette leçon nous permettra d'apprendre à résoudre les équations trigonométriques.

Compétence visée :

Manipuler et démontrer les formules trigonométriques de manière performante.

Prérequis:



Compléter les pointillés suivants : $\cos(-x) = \dots$; $\sin(-x) = \dots$; $\tan(-x) = \dots$
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$; $\cos(\pi - x) = \dots$; $\sin(\pi - x) = \dots$
 $\cos(\pi + x) = \dots$; $\sin(\pi + x) = \dots$; $\cos^2(x) + \sin^2(x) = \dots$
 $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \dots$; $-\dots \leq \cos(x) \leq \dots$; $-\dots \leq \sin(x) \leq \dots$

Situation Problème:



- Démontrer que dans un triangle si les mesures des angles en radian de ses sommets sont : α ; β et γ alors on a : $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}$
- On donne $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$
 $B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$
 - Calculer $A + B$ et $A - B$
 - En déduire les valeurs exactes de A et B .

1. Trigonométrie

Activité d'apprentissage :



- Citer les trois lignes trigonométriques
- En utilisant la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, montrer que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. (On remarque $\cos(2x) = \cos(x+x)$)
- En utilisant la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, montrer que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. (On remarque $\sin(2x) = \sin(x+x)$)
- En résolvant le système $\begin{cases} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \end{cases}$ d'inconnues $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$, montrer que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
- Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, montrer que $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- En utilisant la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, montrer que $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1-\tan^2(x)}$. (On remarque $\tan(2x) = \tan(x+x)$)
- Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, Mettre A et B sous la forme la plus simple possible donné par : $A = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$;
 $B = \sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

RESUME :

a. Ligne trigonométrique d'un angle orienté

Définition

Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- Le **cosinus** de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le **sinus** de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α est l'ordonnée de M.
- Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs sur (OI) et (OJ) du point M alors

$$\text{On a : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos \alpha = \overline{OP} \quad \text{et} \quad \sin(\vec{u}; \vec{v}) = \sin \alpha = \overline{OQ}.$$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on a : $M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$.

- La **tangente** de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α est le nombre réel, noté $\tan(\vec{u}; \vec{v})$ ou $\tan \alpha$ définie par : $\tan(\vec{u}; \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- La **cotangente** de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α est le nombre réel, noté $\cotan(\vec{u}; \vec{v})$ ou $\cotan \alpha$ définie par : $\cotan(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Vocabulaire :

$\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ sont appelés « **lignes trigonométriques** » de l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ ou du nombre réel α .

Ce tableau s'illustre par le cercle ci-dessous :

Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :

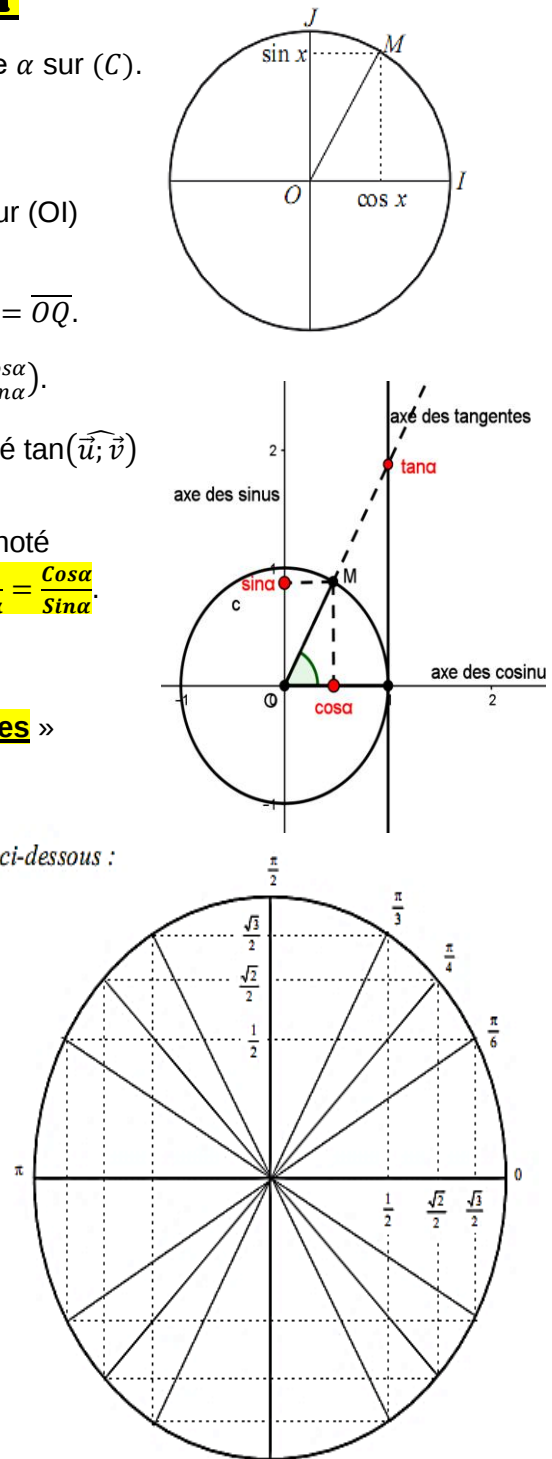
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

**b. Lignes trigonométriques des angles remarquables****Formules d'addition**

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

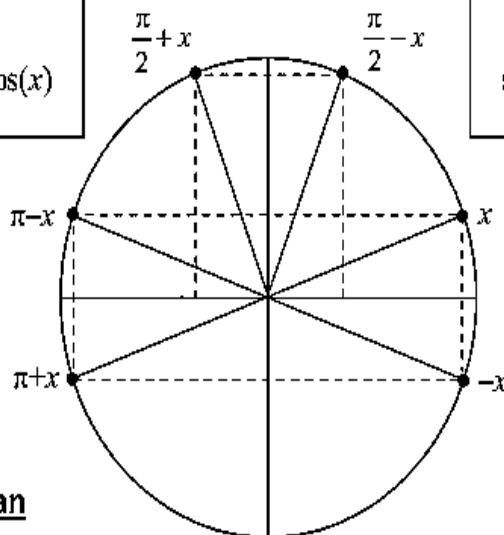
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

**Relations entre cos, sin et tan**

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

$$\text{Extensions : } \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$$

$$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$$

$$\tan(3a) = \frac{3\tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3\tan^2(a)}$$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

Exemple : Les lignes trigonométriques des angles remarquables et les formules relatives aux angles associés permettent de calculer les lignes trigonométriques des nombres réels de l'intervalle $]-\pi; \pi[$ représentées sur la figure ci-contre. On a ainsi :

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Les formules de transformation de produits en sommes et de sommes en produit

Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] & \cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] & \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin(p) - \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

Preuves :

- On a : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & (1) \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & (2) \end{cases}$.

On a : $(1) + (2) \Rightarrow \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a \cos b$

$$\Rightarrow \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

On a : $(1) - (2) \Rightarrow \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$

$$\Rightarrow \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

- On a : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & (1) \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & (2) \end{cases}$.

On a : $(1) + (2) \Rightarrow \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$

$$\Rightarrow \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

On a : $(1) - (2) \Rightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$

$$\Rightarrow \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

3. Expressions de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ en fonction de $\tan \frac{\alpha}{2}$

Propriété

pour tout nombre réel α tel que $\tan \frac{\alpha}{2}$ soit défini, en prenant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$,

on a : $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; Si de plus $\tan \alpha$ est défini alors $\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$.

LECON 3 : EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Motivation :

Dans la vie courante, la trigonométrie est utilisée dans le calcul des distances, l'arpentage, la topographie, la sylviculture, la cartographie, par les géomètres, les résistances des structures, les programmes informatiques, en électricité ... Cette leçon nous permettra d'apprendre à résoudre les équations trigonométriques.

Compétence visée :

Reconnaitre et résoudre les équations et inéquations trigonométriques de manière performante.

Prérequis:



Compléter les pointillés suivants : $\cos(\dots) = \frac{1}{2}$; $\cos(\dots) = -\frac{1}{2}$; $\sin(\dots) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 $\sin(\dots) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan(\dots) = 1$; $\tan(\dots) = -1$; $\cos(\dots) = 0$

Situation Problème:



Nous utilisons en trigonométrie la notation « sin », l'historique sinus se résume comme suivant : au V^e siècle, un indien considéra la demi-corde de l'angle double (2α) au lieu de la corde de l'angle α . Le nom indien donné à la demi-corde de l'angle double deviendra le mot « sinus » créé au XV^e siècle par un allemand, traduit du mot sanscrit « jiva » signifiant « corde d'arc ». Après la traduction de ce mot en arabe, puis en latin, Le sinus fut abrégé « sin ».

1. Considérons les trois équations suivantes : $(E_1): \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_2): \cos x + \sin x = 1$ et $(E_3): 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Comment résoudre ces inéquations dans $]0; 2\pi]$?
2. Considérons les trois équations suivantes : $(E_1): \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_2): \cos x + \sin x \geq 1$ et $(E_3): 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$. Comment résoudre ces inéquations dans $]-\pi; \pi]$?

1. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

a. Equations trigonométriques du type $\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$

Activité d'apprentissage :



1. On admet qu'une équation d'inconnue x du type $\cos x = \cos \alpha$ a pour solution les éléments du système $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. On admet qu'une équation d'inconnue x du type $\sin x = \sin \alpha$ a pour solution les éléments du système $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$
3. On admet qu'une équation d'inconnue x du type $\tan x = \tan \alpha$ a pour solution $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = 1$

RESUME :

Propriété

pour tout nombres réels x et α on a :

$$1- \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad 2- \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3- \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \quad 2\cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc la solution est $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$2. \quad \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc la solution est $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$3. \quad \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi. \text{ Donc la solution est } S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. Equations du type $a\sin x + b\cos x = c$.

Activité d'apprentissage :

On considère (E): $a\sin x + b\cos x = c$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.



- calculer $a^2 + b^2 \neq 0$
- Montrer qu'on a : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$;
- Vérifier que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$.
- En remarquant que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, montrer qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;
- Déduire que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \cos x + \sin \phi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi)$.
- Montrer qu'on a ainsi ramené à résoudre l'équation : $\cos(x - \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Discuter sur l'existence des solutions de l'équation $\cos(x - \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ suivant les valeurs de la constante $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

METHODE

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une Equations du type $a\cos x + b\sin x = c$.

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = c$ ou $\sin x = c$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors :
 - On calcul $a^2 + b^2 \neq 0$
 - On transforme $a\cos x + b\sin x$ en :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) ; \text{ Or } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Donc il existe un nombre réel tel ϕ que : $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; on déduit que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \cos x + \sin \phi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi)$.

- On est ainsi ramené à résoudre l'équation : $\cos(x - \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- La solution de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ dépend du réel $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ car elle admet de solution si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1]$; pas de solution dans le cas contraire.

On a : $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Donc $\cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc la solution est $S = \left\{ -\frac{13\pi}{12} + k2\pi ; \frac{5\pi}{12} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice de consolidation :

1. Calculer $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x^2 + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
3. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation : $-4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} + 4 = 0$
4. a. Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique. (Unité : 3 cm sur les axes).
b. Quelle est la nature du polygone obtenu ?
c. Calculer la valeur exacte de l'aire de ce polygone.

2. INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

a. Inéquations trigonométriques du type $\cos x < a$; $\sin x < a$; $\tan x < a$

Activité d'apprentissage :



(O, I, J) est un repère orthonormé direct.

1. Tracer le cercle trigonométrique (C) .

2. Déterminer deux réels α et β tels que : $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Placer les points M et N des solutions sur le cercle (C)

4. Tracer sur (C) en rouge l'arc représentant les points images des réels x tels que :

$$\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

RESUME :

Propriété

La résolution des inéquations trigonométriques se ramène le plus souvent à la résolution d'équation du type : $\cos x < a$; $\sin x < a$, $\tan x < a$.

Exemple 1: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2\cos x < \sqrt{2}$

On a : $2\cos x < \sqrt{2} \Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x < \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Donc la solution est $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k2\pi ; \frac{\pi}{4} + k2\pi \right[$

2. $\sin 2x \geq -\frac{1}{2}$

On a : $\sin 2x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Donc la solution est $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi ; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right]$

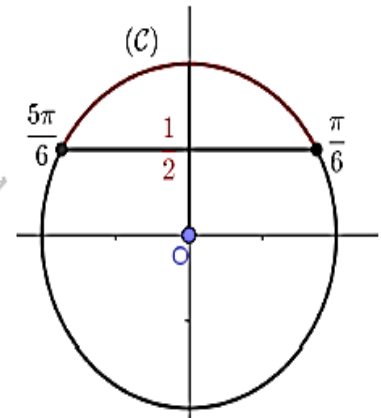
Exemple 2:

Cette partie se fera essentiellement sous forme d'exercice.

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1): $\sin x > \frac{1}{2}$

$$S = \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[; k \in \mathbb{Z}$$



(2): $\cos 2x \geq -\frac{1}{2}$

Posons $X = 2x$

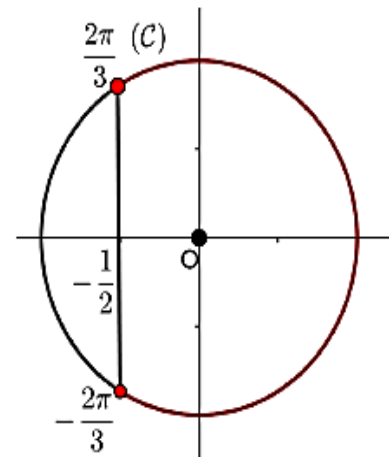
(2) devient donc $\cos X \geq -\frac{1}{2}$

On a donc $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

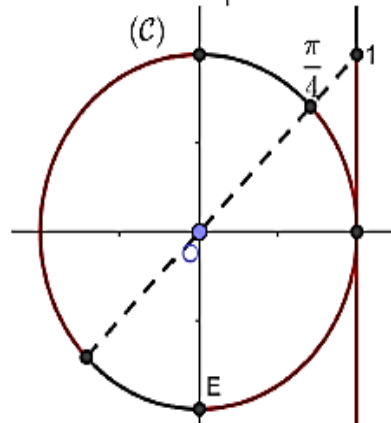
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right]; k \in \mathbb{Z}$$



(3): $\tan x < 1$

$$S = \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right[; k \in \mathbb{Z}$$



b. Inéquations du type : $a\cos^2 x + b\cos x + c \geq 0$, $a\sin^2 x + b\sin x + c \geq 0$ et $a\tan^2 x + b\tan x + c \geq 0$

Propriété

La résolution de ces genres d'inéquations trigonométriques se ramène à poser $X = \cos(x)$ ou plutôt $X = \sin(x)$ ou encore $X = \tan(x)$. On se ramène à un polynôme de degré 2 puis passe à l'étude de signe.

Exemple 1 : Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation (I) : $\frac{2}{1+\tan^2 x} + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ sachant que $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$ et $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Solution : On a : $\frac{2}{1+\tan^2 x} + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ car $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$. Posons $X = \cos x$ on obtient l'inéquation $2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

On a $\Delta = (1 - \sqrt{2})^2 + 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = (3 - 2\sqrt{2}) + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 ; \Delta > 0$.

$$x_1 = \frac{-(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})}{4} = -\frac{1}{2}$$

Or $X = \cos x$ donc $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

Les valeurs de x dans $[0 ; 2\pi[$ sont $\frac{7\pi}{4} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{2\pi}{3}$ et on obtient le tableau de signe suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π			
(I)	+	0	-	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Donc } S = \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[.$$

Exemple 2 :

- Après avoir calculer $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, résoudre dans l'équation $\mathbb{R} : 4x^2 + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
- En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation : $-4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} + 4 = 0$

Solution :

- Calculons $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$

Résolvons dans l'équation $\mathbb{R} : 4x^2 + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

On a $\Delta = (2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{6} = 4(5 + 2\sqrt{6}) - 16\sqrt{6} = 20 + 8\sqrt{6} - 16\sqrt{6} = 20 - 8\sqrt{6}$

$= 4(5 - 2\sqrt{6}) = (2(\sqrt{3} - \sqrt{2}))^2 ; \Delta > 0$. Donc l'équation admet deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad x_2 = \frac{-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc } S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

- Déduisons en dans $\mathbb{R}$ les solutions de $-4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} + 4 = 0$

On a : $-4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} + 4 = 0 \Rightarrow -4(1 - \cos^2 x) + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} + 4 = 0$

$\Rightarrow 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} = 0$. Posons $X = \cos x$ et on obtient :

$4X^2 + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})X + \sqrt{6} = 0$. Ceci est équivalent à l'équation en 2). D'après 2) on a :

$$X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ Or } X = \cos x \text{ donc on a: } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{4})$ ou $\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{6})$ C'est-à-dire que $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc la solution est $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + k2\pi ; -\frac{5\pi}{6} + k2\pi ; \frac{3\pi}{4} + k2\pi ; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

LECON 4 : ARCS CAPABLES

Motivation :

Plusieurs objets dans la nature ont la forme d'un arc de cercle. Cette leçon vise :

- Description des formes planes sur un décor.
- Détection de la répétition d'un motif sur un tissu, un objet d'art.
- Repérage d'un lieu géométrique au niveau d'un rond-point.
- Le repérage d'objets ayant la forme d'un arc de cercle, de les caractériser, de les concevoir...
- La détermination de la position d'un navire par les marins en navigation côtière.

Compétence visée :

- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes\widehat{AMB} = x$.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Prérequis:

- Angles inscrits, angles au centre, angles associés.
- Angles formés par une corde d'un cercle et une tangente.

Situation Problème:

Un objet d'art a été reconnu comme pôle d'attraction dans une ville. Pour protéger cet objet d'art des voitures circulant aux alentours, on veut concevoir un carrefour à sens giratoire (semblable à un rond-point) ayant la forme d'un arc de cercle d'extrémités A et B distants de $30m$ tels que tout point M dudit carrefour vérifie la condition donnée par l'ingénieur de conception : $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = 60^\circ$. Faire une maquette dudit carrefour..

1. ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $Mes(\widehat{AMB}) = x$

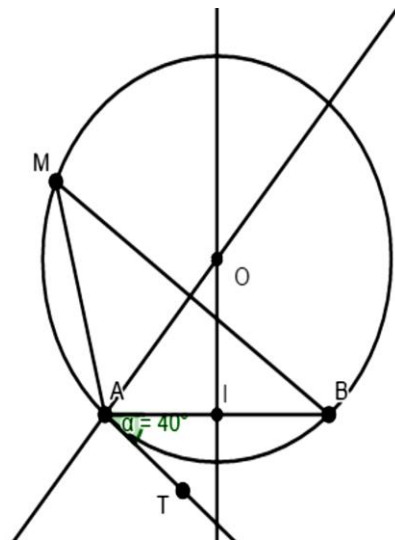
Activité d'apprentissage :

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$, I le milieu du segment $[AB]$. On prendra $\alpha = 40^\circ$.

- 1) Placer un point T tel que $\widehat{TAB} = \alpha$
- 2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT)

en A , (C) le cercle de centre O passant par A ; M un point de (C) distinct de A et de B tel que $\widehat{AMB}$ soit aigu.

- a) Faire une figure.
 - b) Exprimer $Mes(\widehat{AOB})$ et $Mes(\widehat{AMB})$ en fonction de α .
 - c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$
- 3) On suppose que $\widehat{AMB}$ est obtus. Exprimer $Mes(\widehat{AMB})$ en fonction de α .



Solution :

1 et 2a) Voir la figure.

b). Exprimons $Mes(\widehat{AOB})$ et $Mes(\widehat{AMB})$ en fonction de α

$Mes(\widehat{TAB}) = \alpha$ et $Mes(\widehat{TAO}) = 90^\circ$. Donc $Mes(\widehat{BAO}) = 90^\circ - \alpha$. Ainsi, $Mes(\widehat{AOI}) = \alpha$ et $Mes(\widehat{AOB}) = 2\alpha$. Puisque $\widehat{AMB}$ est inscrit aigu et est associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$, alors $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$.

- c). Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$
 L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$ est la réunion du grand arc de cercle (C) d'extrémités A et B , privé des points A et B ; et du symétrique de cet arc par rapport à la droite (AB) .
 (on dit parfois que le segment $[AB]$ est vu depuis l'arc sous l'angle α .)
 3). Si $\widehat{AMB}$ est obtus, alors $Mes(\widehat{AMB}) = 180^\circ - \alpha$

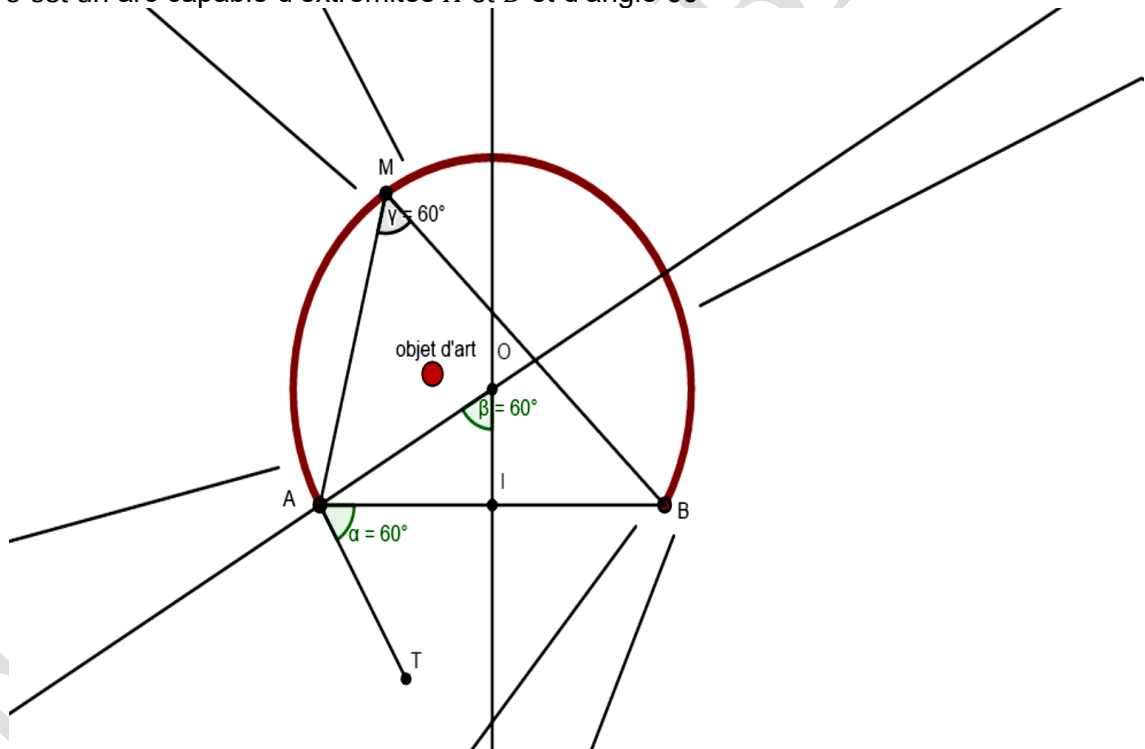
RESUME :**Définition et propriété**

Soient A et B deux points distincts du plan et α un angle aigu. On appelle **arc capable d'extrémités A et B et d'angle α** l'un des arcs de cercle sur lesquels tout point M distinct de A et de B vérifie $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$.

Soient A et B deux points distincts du plan, α un angle aigu, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $Mes(\widehat{AOB}) = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre O et de rayon OA . L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{AMB}) = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B , définis sur (C) par la corde $[AB]$ et du symétrique de cet arc par rapport à (AB) .

Exemple :

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6\text{cm}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{AMB}) = 80^\circ$. Si $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = 60^\circ$, alors le carrefour à sens giratoire est un arc capable d'extrémités A et B et d'angle 60°



2. ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = x + k\pi$ et $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Activité d'apprentissage :**Activité1 :**

Soient A et B deux points distincts du plan.

- 1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{MA}; \widehat{MB}) = 0$.
- a) Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$?



b) Où se trouve le point M ?

c) On suppose que M est sur ladite position. Que vaut $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$?

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

Solution :

1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$.

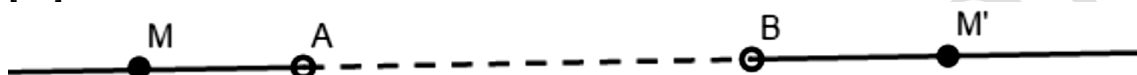
a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de même sens.

b) Le point M est donc sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

c) Si le M est donc sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$, alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$.

d) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.



2) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B , car les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens contraires.



RESUME :

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan.

➤ L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

➤ L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B .

➤ L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est la droite (AB) privée des points A et B .

Activité 2 :

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4\text{cm}$, I le milieu du segment $[AB]$. $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

1) Placer un point T tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \alpha$

2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT) en A , (C) le cercle de centre O passant par A ; M un point de AB , distinct de A et B .

a) Exprimer $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}}; \widehat{\overrightarrow{OB}})$ en fonction de α .

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}}; \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \alpha$

3) Faire de même lorsque : a) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$; b) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$; c) $\alpha \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

RESUME :

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, $\alpha \in]-\pi; \pi[- \{0\}$, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $\text{Mes}(\widehat{OA;OB}) = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre O et de rayon OA .

- Si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA;MB}) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est l'arc $\widehat{AB}$ privé des points A et B .
- Si $\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA;MB}) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est le petit arc de (C) , d'extrémités A et B privé de A et de B .
- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA;MB}) = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est le cercle (C) , privé de A et de B .

Exercice :

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4\text{cm}$.

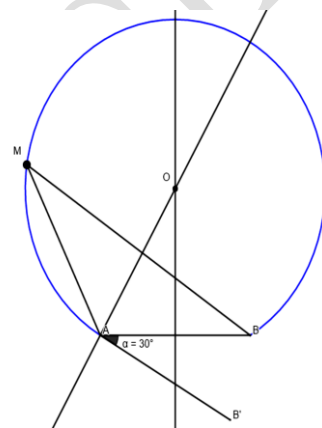
1) Construire sur des figures différentes les arcs capables d'extrémités A et B et d'angle α dans chacun des cas suivants : $\alpha = 60^\circ$; $\alpha = 150^\circ$

2) Construire sur des figures différentes l'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA;MB}) = \alpha$ dans chacun des cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

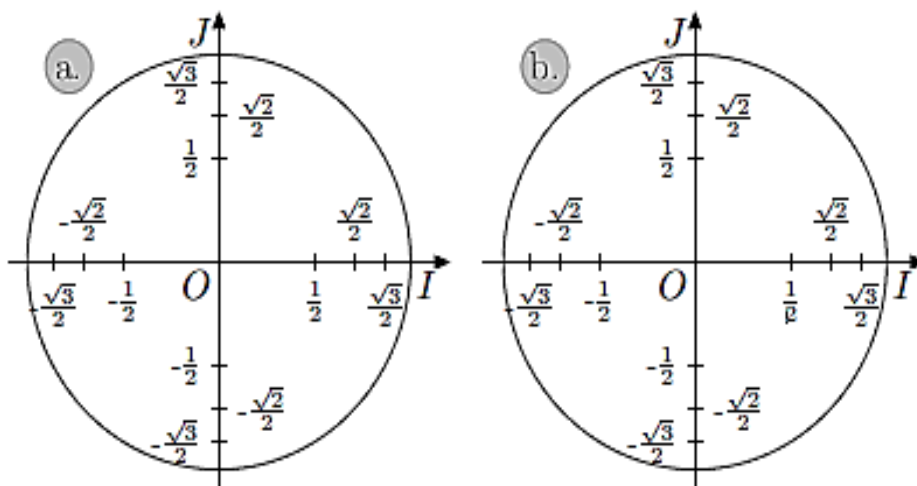
$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad \alpha = -\frac{5\pi}{6} \quad ; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad ;$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad ; \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad ; \quad \alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi \quad ;$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} \quad ; \quad \alpha = -\frac{7\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad \alpha = 3\pi \quad ; \quad \alpha = 6\pi + k\pi$$

**Exercice de consolidation:**

Ci-dessous sont représentés deux cercles trigonométriques où sont indiqués sur les axes des valeurs remarquables :



1. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

a. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\cos\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$

2. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

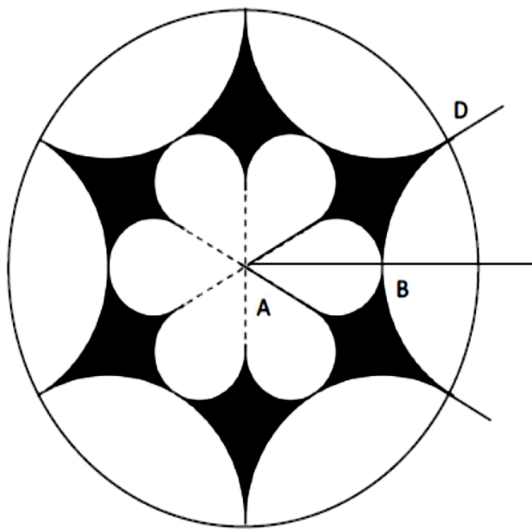
a. $\sin\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$

Activité d'intégration :

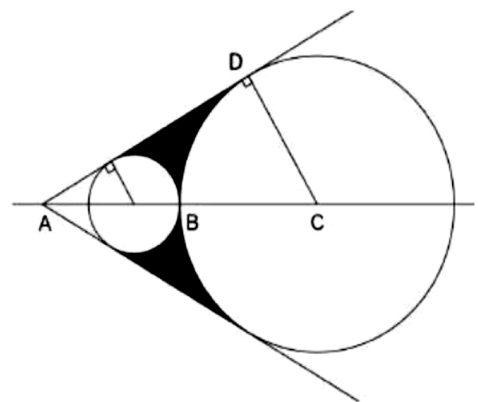
Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

1. Dans le motif ci-dessous, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
2. a. Montrer que $AB = BC$.
b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Rosace



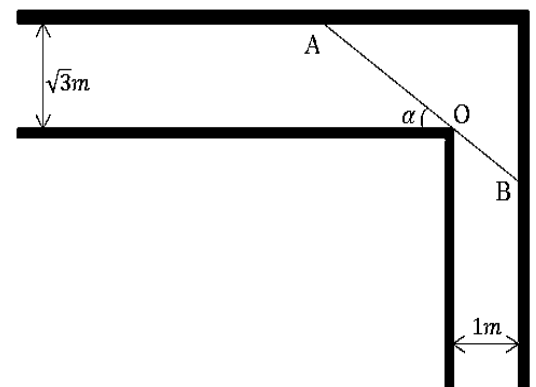
Motif :



Exercices de consolidation

Exercice 1

Un couloir de longueur $\sqrt{3}m$, tourne à l'angle droit et sa largeur n'est plus alors que de $1m$. Sur la figure, une droite passe par O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B.



1. Exprimer, OA, OB et AB en fonction de .

Démontrer que : $AB = \frac{4\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\sin 2\alpha}$.

2. Déterminer α compris entre 0 et 2π pour que $AB = 4$.
3. a. Déterminer les réels α vérifiant $OA = OB$

b. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

c. Ecrire l'équation (E): $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x + 2\sqrt{3} = 0$ sous la forme $a \cos(x - \varphi) + 2\sqrt{3} = 0$ où les réels a et φ sont à déterminer.

- d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Module 21 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Chapitre 5 : SUITES NUMÉRIQUES

LECON 1 : Généralités sur les suites numériques

Motivation :

Il peut nous arriver parfois à chercher à déterminer l'évolution d'une entreprise dans une période précise.

Compétence visée :

Manipuler les suites numériques pour décrire l'évolution d'une situation.

Prérequis:



Considérons les fonctions f et g définies par : $f(n) = 3n^2 - n + 4$ et $g(n) = \frac{2n+3}{n+2}$

Les fonctions f et g sont définies par une formule explicite. Calculer $f(2)$ et $g(4)$.

Situation Problème:



Un cactus mesure 1,5 m et sa taille s'accroît chaque année de 5% de sa taille de l'année précédente. On pose $u_0 = 1,5$ et on note u_n la taille du cactus au bout de n années.

1. Calculer sa taille au bout d'un an notée u_1 et sa taille au bout de deux ans notée u_2 .
2. Quelle sera sa taille dans 50 ans ?

1. Notion d'une suite numérique

Activité d'apprentissage :



1. Considérons les fonctions (U_n) et (V_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies par:

$$U_n = 3n^2 - n + 4 \quad \text{et} \quad V_n = \frac{2n+3}{n+2}.$$

- a. Pour les valeurs $n = 0; 1; 2; 3$ et 4, calculer les images de 0; 1; 2; 3 et 4 notée $U_0; U_1; U_2; U_3$ et U_4 de la fonction (U_n)
- b. Puis de même, calculer les termes $V_0; V_1; V_2; V_3$ et V_4 de la fonction (V_n) .

2. Considérons la fonction définie par $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+2}$ et $U_0 = \frac{3}{2}$.

- a. Calculer U_1 connaissant U_0 puis calculer U_2 connaissant U_1 .
- b. De même, calculer les termes $U_3; U_4; U_5; U_6$ et U_7 de la fonction (U_n)

Définition

Une suite numérique est une fonction U définie sur une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite numérique. Une suite numérique est une suite des nombres.

Notation : Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique U , on a les notations suivantes : **Notation fonctionnelle.** **Notation indicielle**

$$U : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n)$$

$$(U_n)_{n \in E} \quad \text{ou simplement} \quad (U_n)$$

N.B : $u(n)$ ou U_n est appelé terme d'indice n ou terme général ; le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n

Exemple : $U_n = 3n^2 - n + 4$ et $V_n = \frac{2n+3}{n+2}$ sont des suites numériques

Remarque

- D'une façon générale, une suite (U_n) est définie soit par une formule explicite soit par une formule de récurrence.
- Quand une suite (U_n) est définie par une formule explicite, le terme général est une fonction de n donnée par une formule et dans ce cas le calcul du terme d'indice n se fait en remplaçant n par sa valeur dans la formule.

Exemple 1 : Considérons les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = 3n^2 - n + 4$ et $V_n = \frac{2n+3}{n+2}$

Les suites (U_n) et (V_n) sont définies par une formule explicite.

Calculons le terme d'indice 2 de la suite (U_n) et le terme de rang 4 de la suite (V_n) .

Le terme d'indice 2 est $U_2 = 3 \times 2^2 - 2 + 4 = 14$ et le terme de rang 4 est $V_4 = \frac{2 \times 4 + 3}{4 + 2} = \frac{3}{2}$

- La suite (U_n) est définie par une formule de récurrence lorsque chaque terme est défini à partir des termes qui le précèdent.

Exemple 2 : Considérons la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+2} \end{cases}$. Cette suite est définie par une formule de récurrence. Pour calculer U_1 il faut connaître d'abord U_0 ; pour calculer U_2 il faut connaître d'abord U_1 et ainsi de suite.

Calculons les termes de rang 1 et 2.

Le terme d'indice 1 est $U_1 = \frac{2U_0+3}{U_0+2} = \frac{2 \times 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}$ et le terme d'indice 2 est $U_2 = \frac{2U_1+3}{U_1+2} = \frac{2 \times \frac{5}{3} + 3}{\frac{5}{3} + 2} = \frac{19}{11}$.

2. Représentation graphique des termes d'une suite.

Activité d'apprentissage :



Considérons la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{-U_n+4}{U_n+2} \end{cases}$. Dans le plan muni d'un repère

orthonormé, on considère la première bissectrice droite d'équation $y = x$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$ de courbe représentative (C_f) . On peut poser

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

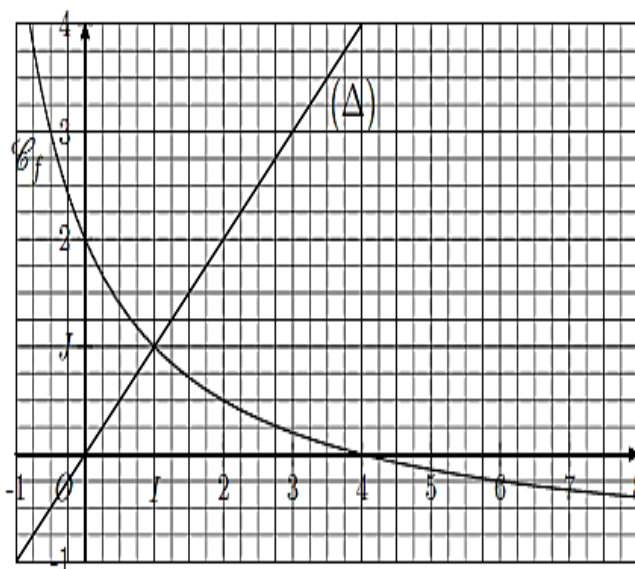
1. Construire le point M_0 de (C_f) d'abscisse U_0 et d'ordonnée $U_1 = f(U_0)$,

Marquer U_1 sur (OY) ; construire le point P_0 sur la première bissectrice d'ordonnée U_1 et d'abscisse U_1 puis marquer U_1 sur (OX) ,

2. Construire le point M_1 de (C_f) d'abscisse U_1 et d'ordonnée $U_2 = f(U_1)$,

Marquer U_2 sur (OY) ; construire le point P_1 sur la première bissectrice d'ordonnée U_2 et d'abscisse U_2 puis marquer U_2 sur (OX) ,

3. Construire le point M_2 de (C_f) d'abscisse U_2 et d'ordonnée $U_3 = f(U_2)$



Marquer U_3 sur (OY) ; construire le point P_2 sur la première bissectrice d'ordonnée U_3 et d'abscisse U_3 puis marquer U_3 sur (OX),

4. En utilisant le même procédé, construire $U_2; U_1; \dots$

RESUME :

Propriété

Une suite étant une fonction, ses termes peuvent être représentés graphiquement dans un repère orthonormé.

Si la suite est définie par une formule explicite, il suffira de représenter graphiquement la fonction f telle que $U_n = f(n)$. L'ensemble des points M_n de coordonnées $(n, f(n))$ où n est un entier naturel constituent une représentation graphique des termes de la suite (U_n) .

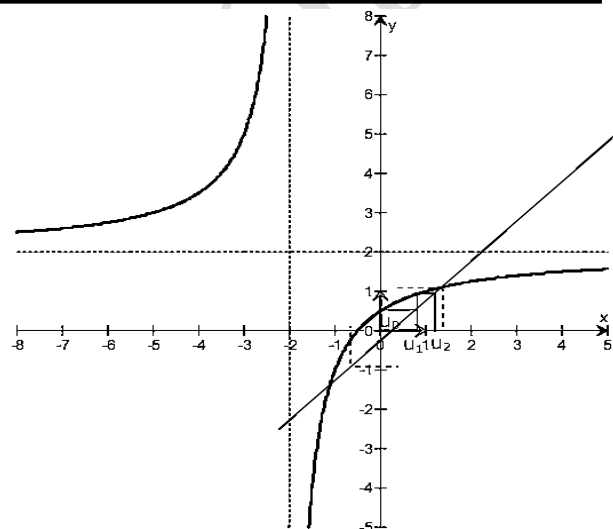
En projetant orthogonalement les points M_n sur (OY), on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe des ordonnées.

Exemple :

Considérons la suite (U_n) définie par

$U_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Construisons sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (U_n) .

Pour construire sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (U_n) , construisons la courbe de (C_f) de f et la droite (Δ) .



Propriété

Construction des termes d'une suite numériques

Si la suite est définie par une formule de récurrence, c'est-à-dire par la donnée de U_0 et une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$, f étant une fonction donnée, on procède comme suit :

- ✚ Construire dans le même repère la représentation graphique de la première bissectrice droite d'équation $y = x$,
- ✚ Construire le point M_0 de (C_f) d'abscisse U_0 et d'ordonnée $U_1 = f(U_0)$,
- ✚ Marquer U_1 sur (OY) ; construire le point P_0 sur la première bissectrice d'ordonnée U_1 et d'abscisse U_1 puis marquer U_1 sur (OX),
- ✚ Construire le point M_1 de (C_f) d'abscisse U_1 et d'ordonnée $U_2 = f(U_1)$,
- ✚ Marquer U_2 sur (OY) ; construire le point P_1 sur la première bissectrice d'ordonnée U_2 et d'abscisse U_2 puis marquer U_2 sur (OX),
- ✚ Construire le point M_2 de (C_f) d'abscisse U_2 et d'ordonnée $U_3 = f(U_2)$
- ✚ Marquer U_3 sur (OY) ; construire le point P_2 sur la première bissectrice d'ordonnée U_3 et d'abscisse U_3 puis marquer U_3 sur (OX),

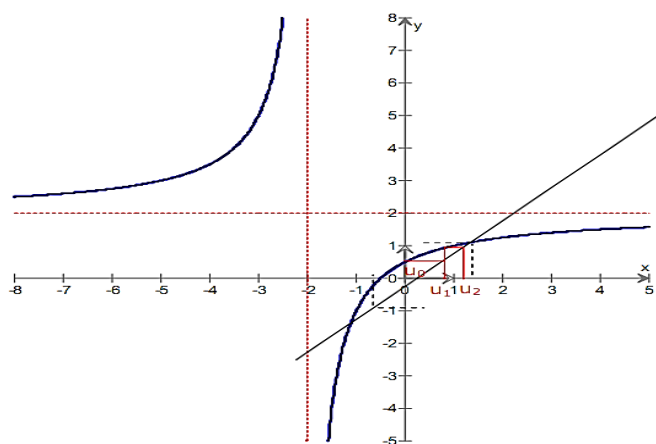
En utilisant le même procédé, construire $U_2; U_1; \dots$

Exemple : Considérons la suite

$$(U_n) \text{ définie par : } \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2} \end{cases}$$

Construisons sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (U_n) .

Pour construire sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (U_n) , construisons la courbe de (C_f) de f et la droite (Δ) .



1. Etude d'une suite numérique

a. Minoration, Majoration

Activité d'apprentissage :

Considérons la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$.



- Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n \geq \frac{3}{2}$ puis conclure
 - Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n = 2 - \frac{1}{n+2}$
 - Déduire que $U_n \leq 2$ puis conclure
- Que peut-on dire de la suite (U_n) .

RESUME :

Définition

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E , on a : $m \leq U_n$.
- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E , on a : $U_n \leq M$.

(U_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée c'est-à-dire il existe un couple des réels $(m ; M)$ tel que $m \leq U_n \leq M$.

Exemple : Considérons la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$. Montrons que (U_n) est bornée.

On a pour tout entier naturel n $n \geq 0 \Rightarrow n+2 \geq 2$ (1) et $n \geq 0 \Rightarrow 2n+3 \geq 3$ (2)

D'où $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{2n+3}{n+2} \geq \frac{3}{2}$ c'est-à-dire que $\frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq U_n$ Donc (U_n) est minorée par $\frac{3}{2}$.

On a : $\frac{2n+3}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2}$ c'est-à-dire que $U_n = 2 - \frac{1}{n+2}$ or $n+2 \geq 0$ c'est-à-dire que $\frac{1}{n+2} \geq 0$

Donc $-\frac{1}{n+2} \leq 0$ d'où $2 - \frac{1}{n+2} \leq 2$ c'est-à-dire que $U_n \leq 2$. Donc (U_n) est majorée par 2.

Comme (U_n) est à la fois minorée et majorée alors (U_n) est bornée c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$.

b. Sens de variation d'une suite numérique.

Activité d'apprentissage 1:

On considère la suite (U_n) dont le terme de rang n est donné par la formule :



$$U_n = n^2 - 7n + 1$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donner le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est défini par :

$$f(x) = x^2 - 7x + 1$$

Etablir que la suite (U_n) est croissante à partir du rang 4.

Activité d'apprentissage 2:



Considérons la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} - U_n \geq 0$
2. Montrer que la fonction f est croissante pour $x \geq 0$
3. Conclure

RESUME :

Définition

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique pour tout élément n de E :

- $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
- $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = 0$ alors la suite (U_n) est constante

c. Notion de convergence d'une suite numérique.

Définition

- Une suite est **convergente** si elle a une limite finie.
- Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente c'est-à-dire possède une limite infinie ou quand sa limite n'existe pas.
- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique définie par : $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$ alors U_n a une limite et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exemple : Dans chacun des cas suivants déterminer le signe, le sens de variation et la limite, si elle existe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$; b) $u_n = \frac{3}{-4n^2 - 5}$; c) $u_n = \frac{n^2}{1+n^2}$; d) $u_n = \frac{n^2}{n+3}$; e) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$;

Solution :

Dans chacun des cas suivants déterminons le signe, le sens de variation et la limite, si elle existe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$. On a: $U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} > 0$ car n est un entier naturel c'est-à-dire que $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

ET $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et converge vers 1.

b) $u_n = \frac{3}{-4n^2 - 5}$.

On a: $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{-4(n+1)^2 - 5} - \frac{3}{-4n^2 - 5} = \frac{24n+12}{(-4(n+1)^2 - 5)(-4n^2 - 5)} = \frac{24n+12}{(4(n+1)^2 + 5)(4n^2 + 5)} > 0$ car n est un entier naturel c'est-à-dire que $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{-4n^2 - 5} = 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

c) $u_n = \frac{n^2}{1+n^2}$. On a: $U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^2} - \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{2n+1}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} > 0$ car n est un entier naturel c'est-à-dire que $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

d) $u_n = \frac{n^2}{n+3}$. On a: $U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2}{n+4} - \frac{n^2}{n+3} = \frac{n^2+7n+3}{(n+4)(n+3)} > 0$ car n est un entier naturel c'est-à-dire que $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n+3} = +\infty$;

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

e) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. On a: $U_{n+1} - U_n = \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

$$= \frac{(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} > 0$$
 car n est un entier naturel c'est-à-dire que $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$; Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

Exercice :

La règle de Titius-Bose (connue vers 1770) permet de retrouver approximativement la distance au Soleil de la plupart des planètes du système solaire. Pour cela, on prend comme unité la distance de la Terre au Soleil qui vaut environ 150 millions de kilomètres. Cette distance est appelée unité astronomique ($u.a.$). Ainsi, $1 u.a. = 150 \cdot 10^7 km$. En écriture moderne, la loi de Titius-Bose s'exprime par la formule suivante : $u_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$ où pour une planète donnée u_n est la distance au Soleil de cette planète (en $u.a.$) et n est le rang de la planète, défini dans le tableau ci-dessous :

Planète	Vénus	Terre	Mars	(Cérès)*	Jupiter	Saturne	Uranus
Rang n	0	1	2	3	4	5	6

(*) La lacune observée entre les orbites de Mars et Jupiter fut comblée en 1801 par la découverte de la planète Cérès, puis plus tard de milliers d'astéroïdes.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

- Calculer la distance approximative au Soleil de la planète Uranus (on donnera le résultat en millions de kilomètres).
- Calculer le rang de la planète dont la distance approximative au Soleil est 780 millions de kilomètres. De quelle planète s'agit-il?

LECON 2 : SUITES ARITHMETIQUES-SUITES GEOMETRIQUES

Motivation :

Il peut nous arriver parfois à chercher à déterminer l'évolution d'une entreprise dans une période précise.

Compétence visée :

Manipuler les suites numériques pour décrire l'évolution d'une situation.

Prérequis:



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- Calculer, en fonction de n la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
- Calculer la limite de la suite (S_n) .

Situation Problème1:



Un cactus mesure 1,5 m et sa taille s'accroît chaque année de 5% de sa taille de l'année précédente. On pose $u_0 = 1,5$ et on note u_n la taille du cactus au bout de n années.

- Calculer sa taille au bout d'un an notée u_1 et sa taille au bout de deux ans notée u_2 .
- Quelle sera sa taille dans 50 ans ?

Situation Problème2:

On a pu lire dans le livre "Voici venu le temps du monde fini" d'Albert Jacquard l'affirmation suivante : Un accroissement d'une population de 2% par an peut sembler bien faible, il correspond pourtant à un doublement en 35 ans, donc à un quadruplement en 70 ans, à une multiplication par 7 en moins d'un siècle.

Les affirmations de l'auteur sont-elles exactes? Justifier la réponse.

1. Suite arithmétique

Activité d'apprentissage 1:



La société SODECOTON embauche Arthur au 1er Janvier 2009 avec un salaire de 250.000FCFA et lui propose deux types d'avancement :

Chaque 1er Janvier, son salaire se verra augmenter de 28.000F.

Chaque 1er Janvier, son salaire augmente de 5%.

- Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième près :
- A partir de quelle année, Arthur aura un salaire plus important en choisissant

l'avancement B?

Année	2009	2010	2011	2012
Avancement A				
Avancement B				

Année	2013	2014	2015	2016
Avancement A				
Avancement B				

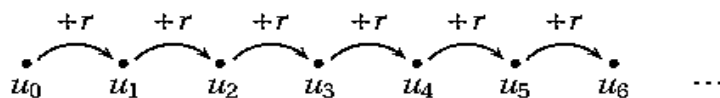
Activité d'apprentissage 2:

Ambroise dispose d'une somme de 300.000FCFA. Une banque lui propose un type d'épargne permettant au capital de s'augmenter de 21.000FCFA chaque année. Ambroise dépose son capital 1^{er} janvier 2020. On désigne par A_n le capital d'Ambroise en 2020 + n . On note $A_0 = 300.000FCFA$.

1. Calculer le capital de Ambroise au 1^{er} janvier 2021 noté A_1
2. Montrer que après n années passées le capital d'Ambroise est $A_{n+1} = A_n + 21.000$
3. Exprimer en fonction de n le capital A_n d'Ambroise.
4. Calculer la limite de la suite (S_n) .

RESUME :**Définition**

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique. (U_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout élément n de E on a : $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre réel r est appelé raison de la suite (U_n) .

**Propriété**

P₁ : Soit (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_k et de raison r .

Pour tout entier naturel n , l'expression de U_n en fonction de n est : $U_n = U_k + (n - k)r$

En particulier si le premier terme est U_0 alors $U_n = U_0 + nr$.

P₂ : Si (U_n) est une suite arithmétique alors $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$ ou encore $2U_n = U_{n-1} + U_{n+1}$.

En particulier si a , b et c sont dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $2b = a + c$.

P₃ : La somme de n premiers termes consécutif d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes et est le nombre réel S_n définie par :

$$S_n = \frac{\text{Nombre de termes}}{2} (\text{1er terme} + \text{dernier terme}).$$

Si $S_n = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_n$ alors $S_n = \frac{n-k+1}{2} (U_k + U_n)$.

En particulier si le premier terme est U_0 alors $S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$.

Exemple : On considère les suites U et V définies par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2+5U_n}$ et $V_n = \frac{1}{U_n}$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer que V est une suite arithmétique dont l'on caractérisera
2. Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n
3. Calculer la valeur exacte de $S = V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_{100}$.

Solution :

1. Montrons que V est une suite arithmétique dont l'on caractérisera.

On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\frac{2U_n}{2+5U_n}} - \frac{1}{U_n} = \frac{2+5U_n}{2U_n} - \frac{2}{2U_n} = \frac{2+5U_n-2}{2U_n} = \frac{5U_n}{2U_n} = \frac{5}{2}$. Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{5}{2}$ d'où V est une suite arithmétique de raison $q = \frac{5}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. Exprimons alors V_n puis U_n en fonction de n

Comme (V_n) est une suite arithmétique alors $V_n = V_0 + nr$ c'est-à-dire $V_n = 2 + \frac{5}{2}n$.

Or $V_n = \frac{1}{U_n}$ donc $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{2 + \frac{5}{2}n} = \frac{2}{5n+4}$. Donc $U_n = \frac{2}{5n+4}$.

3. Calculons la valeur exacte de $S = V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_{100}$

On a : $S = V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_{100} = \frac{100-2+1}{2}(V_2 + V_{100})$.

Or $V_2 = 2 + \frac{5}{2} \times 2 = 7$ et $V_{100} = 2 + \frac{5}{2} \times 100 = 252$, donc $S = \frac{99}{2}(7 + 252) = \frac{99 \times 259}{2} = 12820,5$.

Exercice :

(U_n) est une suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{-7U_n - 8}{2U_n + 1}$.

1. Calculer V_1 et V_2 .
2. $(V_n)_n$ est la suite définie pour tout entier naturel n : $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$. on suppose que la suite (V_n) existe.
 - a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
 - b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
3. Etudier la convergence éventuelle des suites (V_n) et (U_n)

2. Suite géométrique

Activité d'apprentissage :



Ambroise dispose d'une somme de 300.000 FCFA. Une banque lui propose un type d'épargne permettant au capital de s'augmenter de 7% chaque année. Ambroise dépose son capital 1^{er} janvier 2020. On désigne par A_n le capital d'Ambroise en 2020 + n .

On note $A_0 = 300.000 \text{ FCFA}$.

1. Calculer le capital de Ambroise au 1^{er} janvier 2021 noté A_1
2. Montrer que après n années passées le capital d'Ambroise est $A_{n+1} = 1,07A_n$
3. Exprimer en fonction de n le capital A_n d'Ambroise.

RESUME :

Définition et Propriétés

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique. (U_n) est une **suite géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout élément n de E on a : $U_{n+1} = qU_n$. Le nombre réel q est appelé raison de la suite (U_n) .

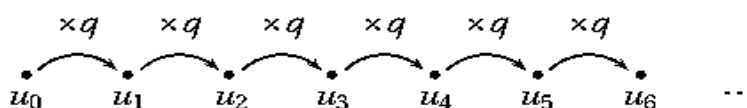
Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_k et de raison q .

P₁ : Pour tout entier naturel n , l'expression de U_n en fonction de n est : $U_n = U_k q^{n-k}$

En particulier si le premier terme est U_0 alors $U_n = U_0 q^n$

P₂ : Si (U_n) est une **suite géométrique** alors $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1}$.

En particulier si a , b et c sont dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors $b^2 = a \times c$.



Propriété

P₃ : La somme de n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique est le nombre réel S_n définie par : $S_n = 1^{\text{er terme}} \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

• Si $q \neq 1$ et si $S_n = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_n$ alors $S_n = U_k \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$.

En particulier si le premier terme est U_0 alors $S_n = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

• Si $q = 1$ alors $S_n = nU_k$. En particulier si le premier terme est U_0 alors $S_n = nU_0$.

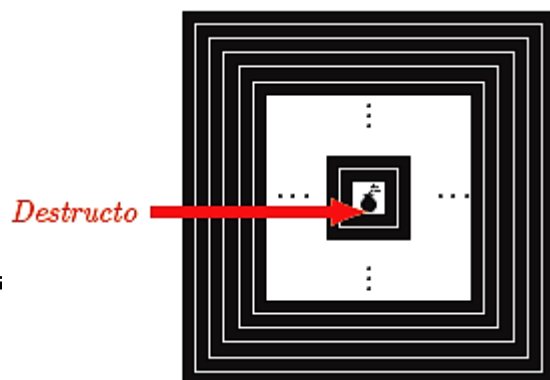
Exemple :

Propriété : Limites d'une suite géométrique

Soit q un réel strictement positif.

- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $|q| > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$



Exercices de consolidation

Exercice 1:

Destructo a la capacité de détruire les murs en fonçant dessus. Malheureusement, après chaque destruction, il perd 5% de sa force.

La force initiale de *Destructo* est de 1 000 Newton.

Un jour, le méchant *Abdou* a mis une bombe dans un bâtiment carré qui demande à *Destructo* de passer à travers 50 murs.

Sachant qu'il faut à *Destructo* au moins 100 Newton pour détruire un mur, arrivera-t-il jusqu'à la bombe ?

Solution :

Notons u_n la force de *Destructo* (en Newton) après avoir traversé n murs, avec $u_0 = 1\,000$.

On a :

$$u_{n+1} = 0,95u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

Ainsi,

$$u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 0,95^n.$$

Avant le 50^e mur, sa force sera :

$$u_{49} = 1\,000 \times 0,95^{49} \approx 81.$$

Par conséquent, *Destructo* n'aura pas assez de force pour détruire le 50^e mur ... Le méchant *massono* a bien calculé son coup !

Exercice2 :

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 220.000FCFA.

Contrat n°1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 3.500FCFA.

Contrat n°2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6% par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.
2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n°2 devient supérieur à celui du contrat n°1. Justifier correctement la réponse.

On rappelle :

- La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q ($q \neq 1$) est :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :

$$S' = v_1 + v_2 + \dots + v_n = n \cdot v_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice3 :

Léonard achète deux bidons de 100 litres : un dans lequel il met de l'eau, l'autre dans lequel il met du lait.

Chaque jour, il consomme 30% de la quantité de lait et 50% de la quantité d'eau qu'il y avait le jour précédent. Tous les soirs avant de se coucher, il ajoute 10 litres de lait dans le bidon de lait et 20 litres d'eau dans le bidon d'eau après.

On note e_n la quantité d'eau et l_n la quantité de lait (en litres) au n -ième jour après les ajouts d'eau et de lait. On a ainsi $e_0 = 100$ et $l_0 = 100$.

1. Calculer e_1 et l_1 .
2. Déterminer les relations de récurrence des suites (e_n) et (l_n) .
3. On pose $u_n = e_n - 40$
 - a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire le terme général de (u_n) en fonction de n , puis celui de (e_n) .
4. On pose $v_n = l_n - \frac{100}{3}$
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

- b. En déduire le terme général de (v_n) en fonction de n , puis celui de (l_n) .
5. Calculer alors e_{365} et l_{365} d'une part, e_{730} et l_{730} . Que peut-on remarquer et alors conjecturer?

Exercice4 :

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1% tous les jours. On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
2. Expliquer pourquoi : $d_{n+1} = 0,99d_n$.

En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .

- a. Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.

$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

- b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Le globe-trotter peut-il gagner?

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km

Exercice5 :

Des chardons envahissent une pelouse de deux façons différentes. Ce dimanche 13 juin, ils couvrent $300m^2$ de la pelouse. Chaque semaine l'aire de la surface envahie par les chardons augmente d'une part de 4% par la prolifération des racines, d'autre part de $13m^2$ dus aux graines envolées des jardins voisins.

On appelle u_n , l'aire de pelouse, en m^2 , envahie par les chardons au bout de n semaines.

On a donc : $u_0 = 300$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1,04u_n + 13$.
3. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n + 325$.
 - a. Démontrer que : $v_{n+1} = 1,04v_n$.
 - b. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. Exprimer v_n en fonction de n , en déduire que : $u_n = 625 \times (1,04)^n - 325$.
5. Au bout de combien de semaines les chardons auront-ils envahi plus de $700m^2$ de la pelouse?

Exercice6 :**Partie A:**

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20% d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1er juin le débit D_0 est égal à $300m^3$ par jour.

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
2. Soit D_n le débit pour le n ème jour après le 1er juin. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n . Quelle est la nature de la suite (D_n) ?
3. Exprimer D_n en fonction de n . Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin. On arrondira au dixième de mètre cube.
4. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.

Partie B:

A partir du 1er juillet, le débit du ruisseau peut être considéré comme nul (inférieur à $0,5m^3/jour$).

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus, on doit libérer de la retenue $500m^3$ d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse.

Le 1er juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000m^3$ d'eau.

1. Soit V_n le volume d'eau au n ème matin après le 1er juillet.
 - a. Montrer que V_1 est égal à $95\,500m^3$.
 - b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
2. On considère la suite de terme général u_n définie pour tout entier n par : $u_n = V_n + 12500$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme u_0 .
3. Exprimer le terme général u_n en fonction de n . En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
4. Calculer v_{31} le volume restant au matin du 1er août. (On arrondira le résultat au mètre cube)

5. A quelle date la retenue sera-t-elle à sec?

Exercice 7 : Suites imbriquées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,55u_n + 0,35v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0,45u_n + 0,65v_n \end{cases}$$

- Soient deux nombres réels non nuls a et b tels que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = au_n + bv_n$ soit géométrique de raison notée q .
 - Montrer que l'on a : $\begin{cases} 0,55a + 0,45b = qa \\ 0,35a + 0,65b = qb \end{cases}$
 - En déduire que $a = \frac{q-0,65}{0,35}$ et $b = \frac{q-0,55}{0,45}$
 - Montrer alors que q est solution de l'équation $q^2 - 1,2q + 0,2 = 0$.
 - Trouver alors les deux valeurs de q possibles, notées q_1 et q_2 , avec $q_1 < q_2$, puis les valeurs possibles de a et b pour chacune de ces deux valeurs de q .
- On pose alors $c_n = u_n + v_n$ et $g_n = 9u_n - 7v_n$
 - Montrer que ces deux suites vérifient les conditions de la suite (w_n) .
 - En déduire une expression de c_n et g_n en fonction de n .
 - En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 8 :

On considère les matrices A, B définies par $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par : $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$

- Justifier que la matrice C vérifie l'égalité : $C = A \cdot C + B$
- On définit la suite (V_n) de matrices lignes par la relation $V_n = U_n - C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - Justifier l'égalité : $V_{n+1} = A \cdot V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - Déterminer le spectre de A
 - Déduire les vecteurs propres de A
 - Déduire la matrice de passage P de A puis diagonaliser A
 - Calculer A^n puis déduire que pour tout entier naturel n , on a : $U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2}-9 \times 2^{n+1} \\ 3 \times 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sin^2 x + 3u_n \cos(2x) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

- Montrer que $u_1 = -\sin^2 x + \frac{3}{2}$
 - Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $(E) : u_1 = 1$.
 - Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique
- Dans la suite on suppose que $x = \frac{\pi}{6}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{3}{2}U_n + \frac{3}{4}$
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on caractérisera
 - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - Calculer en fonction de n la somme S_n définie par $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - Déduire en fonction de n la somme $Q_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q_n$.

Exercice 10 :

Ambroise a reçu un héritage de 200.000 FCFA. Il décide alors de placer cette somme à la banque et on lui propose un placement au taux annuel de 6%. Mais chaque année, la banque lui coupe 9.000 FCFA pour l'entretien de son compte. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement.

- Montrer que (C_n) vérifie la relation de récurrence : $C_{n+1} = 1,06C_n - 9000$
- Calculer C_1 , C_2 et C_3 . La suite (C_n) ainsi obtenue est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier votre réponse
- On définit la suite auxiliaire (u_n) par $u_n = C_n - 150.000$

- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on caractérisera
- Exprimer u_n puis C_n en fonction de n
- De quelle somme Ambroise disposera-t-il au bout de 5 ans ?
- Ambroise veut acheter un congélateur qui coûte 280.000 FCFA. Combien d'années doit-il attendre avant de disposer de cette somme ?

Exercice 11:

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ pour tout entier naturel n .

- a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 3$

- Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$

- Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout n entier naturel par : $v_n = \frac{1}{u_n-3}$

- Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
- En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Activité d'intégration :

Les dix nombres 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55 sont le début de la célèbre suite de Fibonacci, associée à la reproduction des lapins, dont chaque terme s'obtient à partir du troisième en ajoutant les deux termes qui le précèdent. On nomme aussi suite de Fibonacci toute succession de termes dont les deux premiers sont choisis arbitrairement, et dont les suivants sont calculés sur le principe que le terme numéro $(n + 2)$ est égal à la somme des deux termes précédents : ceux de numéros $(n + 1)$ et n , ceci pour tout n entier strictement positif.

- Continuer à écrire les termes de la célèbre suite de Fibonacci qui suivent les dix premiers donnés, et arrêtez-vous dès que vous dépassez 2020.
- Dans une autre suite de Fibonacci les deux premiers termes ont pour valeurs a et b dans cet ordre. Écrire les termes suivants de cette suite, en fonction de a et b , du numéro 3 jusqu'au numéro 10.
 - Calculer en fonction de a et b la somme des dix premiers termes.
 - Comparer cette somme et la valeur du septième terme.
- Vous observez les 10 premiers termes d'une suite de Fibonacci, vous vous rappelez juste que le quatrième à partir de la fin vaut 123, pouvez-vous donner la somme des 10 termes ?
- Tout entier qui ne figure pas dans la célèbre suite de Fibonacci peut être décomposé en somme de plusieurs termes distincts de cette suite, même si on oblige que deux de ces nombres ne doivent pas être consécutifs dans la suite d'origine.
 - Vérifiez cela par écrit pour tous les nombres concernés inférieurs à 34 et vérifiez aussi qu'avec toutes les contraintes la décomposition est unique (c'est à dire se fait d'une seule façon).
 - Écrivez maintenant la décomposition du nombre 2020 en somme de termes de la célèbre suite de Fibonacci.

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Chapitre 6 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

LECON 1 : APPLICATIONS

Motivation :

Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux applications.

Compétence visée :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une application.

Prérequis:



1. Définir une fonction
2. Donner la condition d'existence de l'expression littérale $P(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$
3. Faire la différence entre une fonction et un nombre

Situation Problème:



Dans un pays, les maires des villes A, B et C aimeraient délivrer les actes de mariage de la manière suivante :

- Dans la ville A, tous les hommes n'ont droit qu'à la monogamie ou le célibat
- Dans la ville B, les hommes ne peuvent signer que la polygamie
- Dans la ville C, la monogamie s'impose à tous les hommes

Aidez-les à établir une correspondance entre l'ensemble des femmes et l'ensemble des hommes de chaque ville sachant que ne peuvent se marier que les personnes issues d'une même ville.

13. Fonction

Activité d'apprentissage :



Soient E et F deux ensembles non vides. On considère l'application suivante :

$$f: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto f(x)$$

1. Préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.
2. Quels autres noms peut-on leur donner ?
3. Quel nom donne-t-on à x et à $f(x)$?
4. Lequel est l'ensemble de définition ?

RESUME :

Introduction

Suivant les usages, le terme "**fonction**" renvoie à des situations diverses. Il peut tantôt signifier un métier ou une profession, une propriété commune à plusieurs corps en chimie (fonction alcool), le rôle d'un organe (fonction digestive),...

Le terme "**fonction**" est aussi utilisé pour traduire une relation (un lien) entre les éléments de deux ensembles précis (Ce lien ne va que dans un sens) ou comme un opérateur qui, à une valeur en entrée, renvoie une valeur en sortie. Ce sont ces derniers aspects qui nous intéressent ici.

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle fonction de E et à valeur(s) dans F (ou simplement fonction de E vers F) toute correspondance qui à chaque élément de E associe **au plus** un élément de F .

Notation : On désigne en général les fonctions par les lettres $f, g, h, \dots$ et on écrit par exemple :

$$f: E \longrightarrow F$$

$x \longmapsto f(x)$ Ce qui se lit : « f est la fonction définie dans l'ensemble E et à valeurs dans F qui à chaque élément x de E associe l'élément $f(x)$ de F »

- E est encore appelé "**ensemble de départ**" et F "**ensemble d'arrivée**"
- Les éléments de l'ensemble de départ E sont appelés "**antécédents**" et ceux de l'ensemble d'arrivée F sont appelés "**images**".
- Lorsque la fonction f associe un élément x de E à un élément y de F , on écrit : $y = f(x)$ et on lit : « y est l'image de x par la fonction f ».

Cas particuliers :

- Lorsque l'ensemble d'arrivée F est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction numérique.
- Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$, on parle de fonction numérique d'une variable réelle.

b. Ensemble de définition d'une fonction**Définition**

Soit $f: E \longrightarrow F$ une fonction.

On appelle ensemble (ou domaine) de définition de f l'ensemble noté D_f constitué de tous les éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g , et k un réel non nul.

Dans le tableau suivant on donne les définitions des principales opérations qui concernent ces fonctions.

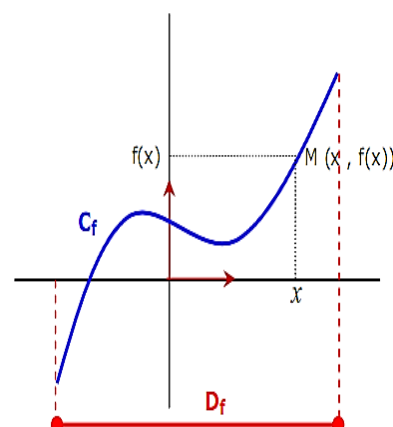
c. Représentation graphique d'une fonction**Définition**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ (I est un intervalle ou une réunion d'intervalles). L'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit I est la courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f dans le plan.

On note, le plus souvent, (C_f) ou C_f la courbe représentative de f .

On dit que la courbe C_f a pour équation cartésienne $y = f(x)$ relativement au repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



d. Injection-surjection-bijection-réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Injection

Définition

f est dite injective lorsque deux éléments distincts de E ont des images distinctes dans F . (On dit encore que f est une injection de E vers F)

Remarque : La propriété d'application injective ci-dessus peut être reformulée sous l'une des trois formes suivantes :

- f est injective si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E$, si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(Pour établir que f est injective, on considère deux éléments quelconques x_1, x_2 de l'ensemble de départ E . On suppose que $x_1 \neq x_2$ et on démontre alors que $f(x_1) \neq f(x_2)$).

- f est injective si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E$, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

(Pour établir que f est injective, on considère deux éléments quelconques x_1, x_2 de l'ensemble de départ E . On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$ et on démontre alors que $x_1 = x_2$)

- f est injective si et seulement si pour tout $k \in F$, l'équation $f(x) = k$ admet au plus une (0 ou 1) solution dans l'ensemble E . (f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f).

Remarque : La 3^{ème} formulation est assez pratique à utiliser lorsque f est une fonction connue par sa représentation graphique.

- Surjection

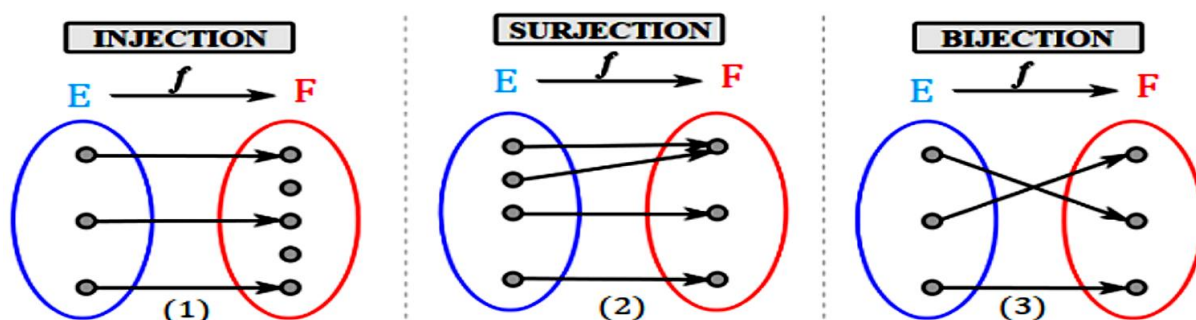
Définition

f est dite surjective (ou f est une surjection) lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f . On dit alors que E s'applique sur F ($f(E) = F$)

Remarque : La propriété d'application surjective ci-dessus peut être reformulée sous l'une des formes suivantes :

- f est surjective si et seulement si $\forall y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$
- f est surjective si et seulement si pour tout $k \in F$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'ensemble E .

Méthode : Pour établir que f est surjective, on considère un élément quelconque y ou k de l'ensemble d'arrivée F puis on démontre que l'équation $f(x) = y$ ou $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'ensemble E . (Pour établir que f est surjective, on considère un élément quelconque y ou k de l'ensemble d'arrivée F).



Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est dite bijective (ou f est une bijection) lorsque qu'elle est à la fois injective et surjective.

Remarque : Il découle de la définition ci-dessus que f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'image d'un élément unique de l'ensemble de départ E .

Autrement dit, f bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. (Pour établir que f est bijective, on considère un élément quelconque y de l'ensemble d'arrivée F et on démontre que l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution dans l'ensemble E)

Bijection réciproque**Définition**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. f étant bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent x dans E tel que $y = f(x)$.

D'autre part, tout élément x de E a une image unique y par f dans F .

Ainsi, la correspondance de $F \longrightarrow E$
 $y \longmapsto x$ est une application bijective.

Cette application, noté f^{-1} , est appelée bijection réciproque de f .

Remarque :

- Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- f^{-1} et f sont réciproque l'une de l'autre car $f \circ f^{-1} = Id$ ou encore $f \circ f^{-1}(x) = x$.

14. Représentation graphique de deux bijections réciproques**Définition**

On se propose d'établir le résultat suivant :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection ; E et F étant des parties de $\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$)

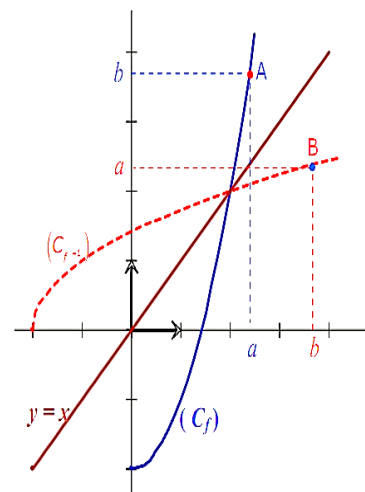
En d'autre terme les courbes représentatives de f et de f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par la symétrie orthogonale (réflexion) d'axe la première bissectrice.

Étape 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite (Δ) d'équation $y = x$ et on note S_{Δ} la symétrie orthogonale d'axe (Δ) .

Établir que pour tout point $A(a ; b)$, on a $S_{\Delta}(A) = A'(b ; a)$.
 (Pour cela, on pourra montrer que tout point $M(x ; y)$ équidistant des points A et A' appartient à (Δ))

Étape 2 : Établir que pour tout point $A(a ; b)$ on a : $A \in (C_f)$

$$\Leftrightarrow A' = S_{\Delta}(A) \in (C_{f^{-1}}).$$



LECON 2 : OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Motivation :

Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux applications.

Compétence visée :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une fonction.

Prérequis:



1. Définir une fonction
2. Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$
3. Tracer la courbe de sa réciproque

Situation Problème:



Ambroise une jeune élève de la classe de troisième se rend au musée pendant les vacances pour faire des recherches par rapport à une leçon qu'elle a aimé pendant le cour d'histoire de M. TEBAYA. Le musée étant construit entièrement en verre jusqu'au sol, une fois à l'intérieur, Ambroise voit son reflet au sol, au-dessus, sur les côtés ainsi que dans les différents angles. Comment expliquer à la jeune fille le phénomène auquel elle fait face ?

1. Composée des fonctions

Activité d'apprentissage :



Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions définies par

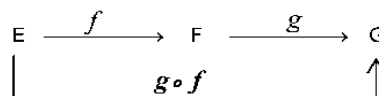
$$f(x) = x^2 + 2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}$$

1. Déterminer les expressions des applications réciproques $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$ respectivement de f et g en résolvant les équations d'inconnues x définies par $f(x) = y$ et $g(x) = y$
2. Calculer $g[f(x)]$ et $[g(x)]$. Comparer le résultat
3. Calculer $f^{-1}[g^{-1}(x)]$ et $g^{-1}[f^{-1}(x)]$. Comparer le résultat
4. Donner le sens de variation de f puis de g sur $[0; +\infty[$

RESUME :

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$; $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ des fonctions



On appelle fonction composée de f par g , et on note $g \circ f$ (on lit « g rond f »), la fonction définie de E vers G par : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$g \circ f$ est une bijection de E vers G et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

En général, $g \circ f \neq f \circ g$ (la composition des fonctions n'est pas commutative)

Nous admettons le résultat suivant : $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (la composition des fonctions est associative)

Définition

Soit E un ensemble non vide. On appelle identité de E (ou application identique de E) l'application notée Id_E définie de E vers E et telle que pour tout élément x de E on a : $Id_E(x) = x$

$$\begin{array}{ccc} Id_E: E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & Id_E(x) = x \end{array}$$

Soit $f: E \longrightarrow F$ une fonction. On a le résultat suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{Id_F} & F \\ \boxed{Id_F \circ f = f} & & & & \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{Id_E} & E & \xrightarrow{f} & F \\ \boxed{f \circ Id_E = f} & & & & \uparrow \end{array}$$

Soit $f: E \longrightarrow F$ une bijection et f^{-1} la bijection réciproque de f . On a le résultat suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ \boxed{f^{-1} \circ f = Id_E} & & & & \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ \boxed{f \circ f^{-1} = Id_F} & & & & \uparrow \end{array}$$

Théorème : sens de variation de $g \circ f$

Si f est **croissante** sur un intervalle I et si g est **croissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .

Si f est **décroissante** sur un intervalle I et si g est **décroissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .

Si f est **croissante** sur un intervalle I et si g est **décroissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

Si f est **décroissante** sur un intervalle I et si g est **croissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

5. Comparaison des fonctions**Définition**

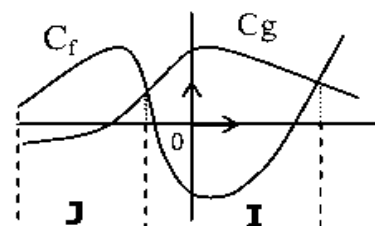
Soit f et g deux fonctions et I un intervalle inclus dans D_f et dans D_g .

- On dit que f est inférieure à g sur I , et l'on note $f \leq g$, si : pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$
- On définit de la manière analogue $f \geq g$, $f > g$ et $f < g$.

Interprétation graphique :

Lorsque $f \leq g$ sur I , la courbe représentative de f est restreinte à I est au-dessous de la courbe représentative de g restreinte à I .

Sur cette figure : $f \geq g$ sur l'intervalle J et $f \leq g$ sur l'intervalle I



Vocabulaire : Étudier la position relative de deux courbes (C_f) et (C_g) revient à comparer les fonctions f et g

Méthode : Pour comparer deux fonctions f et g , il est pratique d'étudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de $f(x) - g(x)$.

6. Majoration, Minoration

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est majorée sur I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $f(x) \leq M$.

On dit que M est un majorant de f sur l'intervalle I .

- f est minorée sur I , s'il existe un réel m tel que pour tout x de I , $f(x) \geq m$ ou $m \leq f(x)$.

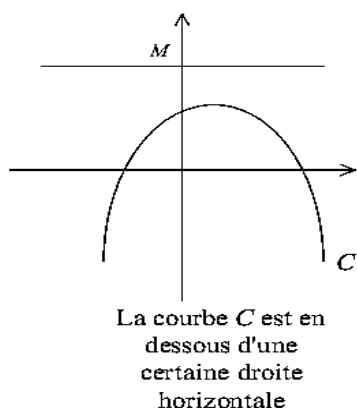
On dit que m est un minorant de f sur l'intervalle I .

f est bornée sur I , si elle est à la fois minorée et majorée sur I .

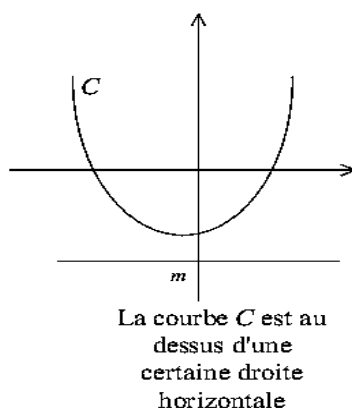
Interprétation graphique :

- f est dite majorée par le nombre réel M si la courbe représentative (C_f) de f est «au-dessous» de la droite d'équation $y = M$.
- f est dite minorée par le nombre réel m si la courbe représentative (C_f) de f est «au-dessus» de la droite d'équation $y = m$.

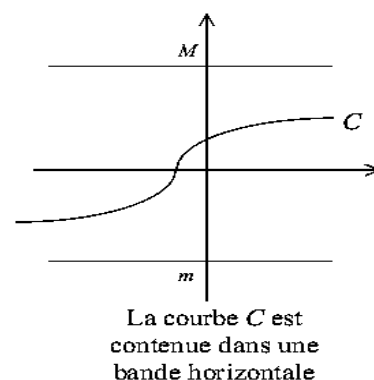
f est majorée (sur $\mathbb{R}$)



f est minorée (sur $\mathbb{R}$)



f est bornée (sur $\mathbb{R}$)



Remarque :

Une fonction f est dite positive sur un intervalle I lorsque pour tout réel x de I , on a : $f(x) \geq 0$ (f est donc minorée par 0). On écrit $f \geq 0$ pour dire que f est positive.

Dans ce cas, la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des abscisses.

7. Extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I . On dit que :

- f admet un minimum sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m) \leq f(x)$. Le nombre $f(x_m)$ est appelé minimum de f sur l'intervalle I .
- f admet un maximum sur I en x_M , si pour tout réel x de I , $f(x_M) \geq f(x)$. Le nombre $f(x_M)$ est appelé maximum de f sur l'intervalle I .

- Si $f(x_m)$ le minimum de f sur l'intervalle I , alors f est minorée par $f(x_m)$ sur I .
- Si $f(x_M)$ le maximum de f sur l'intervalle I , alors f est majorée par $f(x_M)$ sur I .

Attention ! Une fonction peut admettre un majorant (ou un minorant) sur un intervalle sans admettre forcément maximum (ou de minimum).

Exemple : La fonction inverse est minorée par 0 sur l'intervalle $]0; +\infty[$, mais 0 n'est pas un minimum (la fonction inverse n'a pas de minimum sur l'intervalle $]0; +\infty[$).

8. Variations

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est croissante (resp. strictement croissante) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$ (resp. $f(x) < f(x')$).
- f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $x < x'$, on a $f(x) \geq f(x')$ (resp. $f(x) > f(x')$).
- f est monotone (resp. strictement monotone) sur I , lorsque f est soit croissante (resp. strictement) sur I , soit décroissante (resp. strictement) sur I .

N.B : Étudier les variations d'une fonction, revient à préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone. On résume ces résultats dans un tableau appelé tableau de variations.

Attention ! On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.

Remarque : La notion de dérivée que nous verrons plus tard est un outil très performant pour l'étude des variations. On ne doit cependant pas perdre de vue pour les définitions de base données ci-dessus.

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Chapitre 7 : LIMITES ET CONTINUITE

LECON 1 : LIMITES DES FONCTIONS NUMERIQUES

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

Calculer la limite d'une fonction au voisinage de l'infini et d'un point...

Prérequis:



1. On donne $f(x) = x^2 + 2$. Calculer $f(10^8)$ et $f(-10^8)$
2. On donne $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$. Calculer $g(10^8)$ et $g(-10^8)$

Situation Problème:



Les scientifiques ont montré que l'une des conséquences du réchauffement climatique est la fonte des glaciers. Les mathématiciens ont modélisé par $(t) = \frac{1}{1+t}$, la quantité de glaciers en fonction du temps (ou l'unité du temps est le siècle). Monsieur Ambroise se demande quelle quantité de glaciers restera-t-il lorsqu'on sera proche de 2 siècles et si à cette allure, les glaciers ne disparaîtront pas.

Aider monsieur Ambroise à trouver la solution à sa question.

1. Limites d'une fonction à l'infini

Activité d'apprentissage :



1. On donne $f(x) = x^2$. Compléter le tableau suivant puis donner le constat:

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10^1	0	10^1	10^2	10^3	10^4
$f(x)$									

2. On donne $g(x) = \frac{1}{x}$. Compléter le tableau suivant puis donner le constat:

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10^1	0	10^1	10^2	10^3	10^4
$g(x)$									

3. On donne $h(x) = x^3$. Compléter le tableau suivant puis donner le constat:

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10^1	0	10^1	10^2	10^3	10^4
$h(x)$									

4. On donne $h(x) = x^3$. Compléter le tableau suivant puis donner le constat:

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10^1	0	10^1	10^2	10^3	10^4
$h(x)$									

5. On donne $t(x) = \sqrt{x}$. Compléter le tableau suivant puis donner le constat:

x	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$t(x)$									

RESUME :**➤ Limite des fonctions élémentaires.**

- a et b étant des nombres réels. $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x}$ n'existe pas car $D_f = [0, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Plus généralement si n est un entier naturel alors
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Plus généralement si n est un entier naturel $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$.

➤ Limites de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^7 + 6x^6 + 4x - 5}{6x^7 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^7}{6x^7} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x^2 - 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

➤ Limites de la fonction polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0. \text{ (Polynôme de degré } n)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n \text{ est positif} \\ -\infty & \text{si } a_n \text{ est négatif} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \pm\infty \text{ suivant les cas.}$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 3x^2 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

- Lorsqu'une fonction admet une limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) cette limite est unique.
- Certaines fonctions n'admettent pas de limites en l'infini de ce fait la fonction mantisse définie par $m(x) = x - E(x)$ n'admet de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

Une fonction n'admet pas de limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si son ensemble de définition est majoré (resp. minoré).

2. Limite d'une fonction en x_0

a. Limite en x_0

Propriété

Soit f une fonction définie en x_0 . Si f admet une limite en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque :

- Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0 cette limite est unique.
- Une fonction définie en x_0 n'admet pas nécessairement une limite en x_0 . Ainsi la fonction

f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} \\ f(0) = -\frac{3}{2} \end{cases}$ n'admet pas de limite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et pourtant $f(0) = -\frac{3}{2}$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$).

Une fonction f n'a pas de limite en x_0 s'il existe un intervalle ouvert A de centre x_0 tel que $D_f \cap A = \emptyset$.

b. Limites à gauche- limites à droite

Propriété

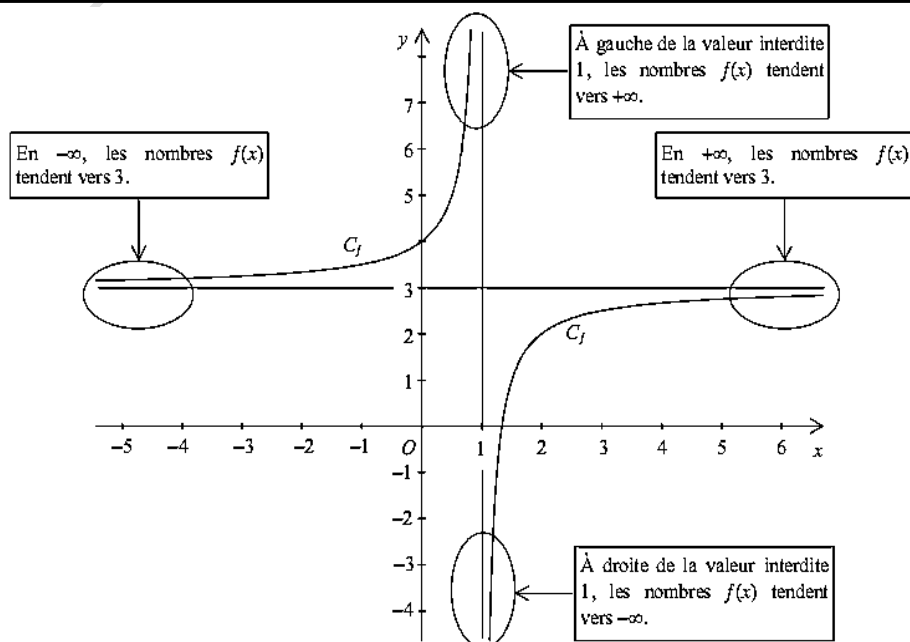
- Lorsqu'une fonction n'est pas définie en x_0 , alors on calcule sa limite à gauche et à droite si cela est possible.
- La limite à gauche de x_0 est noté $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0_g} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
- La limite à droite de x_0 est noté $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0_d} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Exemple :

Considérons la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$

La limite de f en 1 à gauche est égale à $+\infty$ et la limite de f en 1 à droite est égale à $-\infty$

Évidemment, toutes ces considérations purement calculatoires, peuvent avoir un appui graphique :



3. Calculs des limites.

a. Propriété de comparaison.

Propriété : (Majoration – Minoration)

Soit f une fonction.

- S'il existe une fonction g telle que la $g(x) \leq f(x)$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction g telle que la $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- Soit f et g deux fonctions telle que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]A, +\infty[$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|(x + 1)$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $f(x) = x(x + 1) = x^2 + x$ donc pour tout $x \in]0, +\infty[$ $f(x) > x^2$ c'est-à-dire que $x^2 < f(x)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. D'après le théorème de comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :

- Lorsque x tend vers $-\infty$ en remplaçant l'intervalle $]A, +\infty[$ par $]-\infty; A[$ on obtient le même résultat.
- Les fonctions circulaires (Cosinus, Sinus et tangente) n'admettent pas de limite en ∞ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x$ n'existe pas.

Propriété :

Lorsque g est une fonction circulaire alors :

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kg(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{f(x)}$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \cos x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{3} = +\infty$.

b. Théorème des gendarmes**Propriété :**

Soit f une fonction. S'il existe deux fonctions g et h telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$. On sait que $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$. Or $x^2 + 1 > 0$ donc $\frac{2x-1}{x^2+1} \leq \frac{2x+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{2x+1}{x^2+1}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sin x}{x^2+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

LECON 2 : Limite et opération sur les fonctions.

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

Calculer la limite d'une fonction au voisinage d'un nombre en utilisant des techniques de calculs au préalable.

Prérequis:



1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4}{x+2}$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x+3}{x^2+4x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+3}{x^2+4x+2}$

Situation Problème:



La science nous montre qu'avant que l'homme ne vive sur la terre, la terre était presque couverte d'eau. Les mathématiciens ont modélisé par $f(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$, la proportion d'eau sur la terre en fonction du temps (ou l'unité du temps est le siècle). Monsieur Ambroise se demande quelle proportion d'eau était avant que l'homme ne vive sur la terre (à $t = 0$).

Aider monsieur Ambroise à trouver la solution à sa question.

1. Factorisation et Limites d'une fonction

Activité d'apprentissage :



1. Factoriser $x^2 - 4$ puis simplifier $\frac{x^2-4}{x+2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$.
2. Factoriser $x^3 + 27$ puis simplifier $\frac{x^3+27}{x+3}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x+3}$.
3. Factoriser $9 - x$ puis simplifier $\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.
4. Montrer que $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ puis Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
5. Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, Calculer $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3}$. (Poser $X = 2x + 3$)

RESUME :

Propriété :

Si dans une fonction rationnelle, nous obtenons la forme $f(x_0) = \frac{0}{0}$, alors il y'a lieu de factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier les facteurs communs.

NB : $\frac{0}{\infty} = 0$; $\frac{k}{\infty} = 0$.

Exemple : Calculons les limites des fonctions suivantes :

- ✚ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ en remplaçant par -2 on obtient : $\frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$ qui est une forme indéterminée.
- Or $\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$ ainsi $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x-2 = -2-2 = -4$, donc $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$
- ✚ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{x-1}$ en remplaçant par 1 on obtient : $\frac{1-(1)^3}{1-1} = \frac{0}{0}$ qui est une forme indéterminée.

$$\text{Or } \frac{1-x^3}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1} = -\frac{(x-1)(1+x+x^2)}{x-1} = -(1+x+x^2)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(1+x+x^2) = -(1+1+1) = -3, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{x-1} = -3.$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3-3x^2}{x} \text{ en remplaçant par 0 on obtient : } \frac{3 \times 0 - 3 \times 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ qui est une forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \frac{3x^3-3x^2}{x} = \frac{x(3x^2-3x)}{x} = 3x^2-3x \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3-3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2-3x) = (3 \times 0 - 3 \times 0) = 0,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3-3x^2}{x} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x+3} \text{ en remplaçant par } -3 \text{ on obtient : } \frac{(-3)^3+27}{3-3} = \frac{-27+27}{3-3} = \frac{0}{0} \text{ qui est une forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \frac{x^3+27}{x+3} = \frac{x^3+3^3}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2+3x+9)}{x+3} = x^2+3x+9$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x^2+3x+9) = (9-9+9) = 9, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x+3} = 9$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \text{ en remplaçant par 4 on obtient : } \frac{4-\sqrt{4}-2}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0} \text{ qui est une forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}+1$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+1) = (\sqrt{4}+1) = 3, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = 3$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} \text{ en remplaçant par 9 on obtient : } \frac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \frac{0}{0} \text{ qui est une forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \frac{3-\sqrt{x}}{3^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \frac{1}{3+\sqrt{x}}$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{6}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \frac{1}{6}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \text{ en remplaçant par 3 on obtient : } \frac{3^2-3-6}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0} \text{ qui est une forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{(x-3)(x+2)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{((\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2)(x+2)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+2)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = (\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+2)$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+2) = (\sqrt{3}+\sqrt{3})(3+2) = 10\sqrt{3},$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

Remarque :

- Les formes indéterminées sont celles qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$ et $+\infty - \infty$. Si l'un des cas se présente alors il faut faire des transformations avant d'effectuer les calculs.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Propriété :

- Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction somme $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

$\lim g \backslash \lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

- Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction produit fg admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\frac{f}{g}$ quotient admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

$\lim g \backslash \lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	ℓ / ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$?$	$?$
$-\infty$	0	$?$	$?$

2. Limites des fonctions composées

Propriété :

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux nombres réels et x_0 un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = \ell'$.

Exemple : Calculons $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3}$. Posons $X = 2x + 3$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3} = 1$

3. Quelques exemples de calcul des limites des formes indéterminées

a. Utilisation de la factorisation et d'expression conjuguées.

Exemple1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

Exemple2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$.

b. Utilisations du taux de variation.

Exemple1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$

c. Utilisation d'un changement d'écriture.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x} = 1 \times 0 = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

LECON 3 : CONTINUITES

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

Etudier la continuité d'une fonction en un point x_0 et sur un intervalle.

Prérequis:



1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+4}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+4}{x+2}$
2. Peut-on tracer en un seul trait la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$
3. Peut-on tracer en un seul trait la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$

Situation Problème:



Monsieur Ambroise souhaite se rendre au 6^e étage d'un immeuble. Or sa voisine Mme Lucie habite au 3^e étage, et il ne souhaite pas tomber sur elle. Il se demande s'il peut quitter du 1^{er} étage au 6^e étage sans passer par le 3^e étage. Aide Monsieur Ambroise à résoudre ce problème.

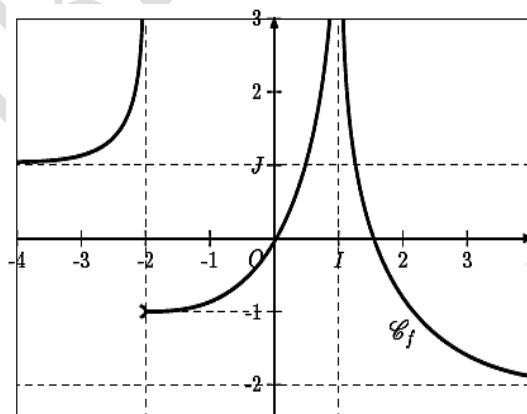
1. Continuité en x_0 des fonctions élémentaires.

Activité d'apprentissage 1:

Ci-dessous est représentée la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$:



1. f est-elle définie en -2 ; 0 ; 1 ; 3 ?
2. Parmi les intervalles suivants, préciser ceux dont la courbe se trace en un seul trait et ceux dont la courbe est discontinue :
 $] -4; -2[$; $] -3; -1[$; $] -2; 1[$; $] 0; 2[$; $] 1; 4[$;
 $] -2; 4[$; $] -4; 4[$
3. Quelle conclusion peut-on tirer de la question 1) et 2)



Activité d'apprentissage 2:



1. Soit f une fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x+3}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
 $f(1) = 5$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ et f une fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$.
 - a. Montrer que $f(x) = g(x)$
 - b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0)$

RESUME :

a. Définition de la Continuité en x_0

Définition :

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel. f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

b. Continuité à gauche, à droite en x_0 .**Définition :**

Soit x_0 et a deux nombres réels.

- Soit f une fonction définie sur $[x_0, a]$; f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- Soit f une fonction définie sur $[x_0 - a, a]$; alors f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur $[x_0 - a, x_0 + a]$; alors f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Prolongement par continuité en x_0 .**Définition :**

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ou $x_0 \in D_f$. Soit l un nombre réel tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

Exemple 1 : Déterminons le prolongement par continuité en 0 de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

On a : $g : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$.

Donc le prolongement par continuité en 0 de g est $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exemple 2 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Donc la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

Exemple 3 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. On a $D_f = [0; 1[\cup]1, +\infty[$.

Calculons les limites de f en 1. Pour tout x élément de D_f on a :

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$. La fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \text{ si } x \in [0; 1[\cup]1, +\infty[\\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 1.

3. Continuité sur un intervalle**Définition :**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est continue sur I si elle est continue sur tout élément de I .

Remarque :

- Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle I , sa courbe représentative est continue d'un seul trait (elle n'est pas entrecoupée).
- Une fonction continue en tout élément d'un ensemble E est dite continue sur E .

Exemple :

- Toutes fonctions polynômes est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction partie entière ($x \mapsto E(x)$) n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
- Toute fonction est continue sur son ensemble de définition.

Propriété :

P1 : Soient f et g deux fonctions continue sur un intervalle I on a :

- Les fonctions $f + g$, fg , kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- Si g est positive sur I , alors la fonction $\sqrt{g}$ est continue sur I .
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

P2 : Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I , tel que $f(I) \subset I'$ et g Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I , tel que $f(I) \subset I'$ et g une fonction continue sur I' , alors la fonction $f \circ g$ est continue sur I . une fonction continue sur I' , alors la fonction $f \circ g$ est continue sur I .

Exemple : soit f une fonction définie par $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $f = u \circ v$ où $u(x) = \tan x$ et $v(x) = \frac{1}{x^2+1}$. La fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R}) =]0; 1] \subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Or v est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc la fonction $f = u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

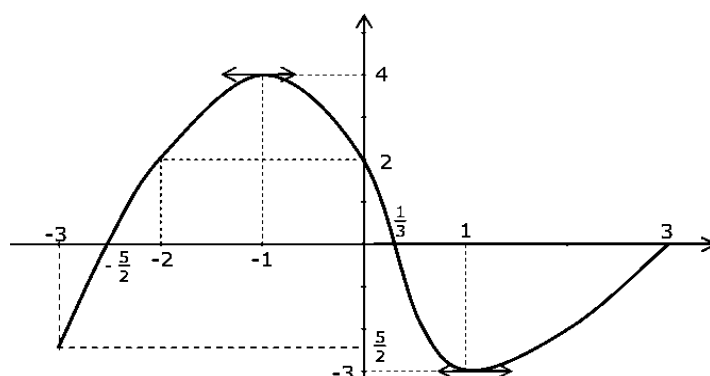
4. Image d'un intervalle par une fonction continue.**Propriété :**

P1 : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.

P2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$. Alors l'image par f de l'intervalle fermé $[a; b]$ est un intervalle fermé $[m; M]$ c'est-à-dire que $f([a; b]) = [m; M]$.

Exemple : La courbe (c_f) ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f . Déterminons les images par f des intervalles suivants : $[-3; 0]$; $]0; 3[$ et $[-3; 3]$.

Intervalle	Images par f
$[-3; 0]$	$\left[-\frac{5}{2}; 4\right]$
$]0; 3[$	$[-3; 2]$
$[-3; 3]$	$[-3; 4]$



Exemple : Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f . Déterminer par observation les images par g des intervalles $\mathbb{R}$ et $[-1; 0]$.

On a : $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $g([-1; +\infty[) =]-\infty; 2]$ et $g([-1; 0]) = [2; 4]$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	4	$-\infty$

Remarque : Comme $f([a; b]) = [m; M]$, alors

il existe $x_1, x_2 \in [a; b]$ tel que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$; on dit que f atteint ses bornes.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur intervalle I , a et b deux éléments de I . pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel α compris entre a et b tels que $f(\alpha) = \beta$. C'est-à-dire pour tout réel β appartenant à $[f(a); f(b)]$; et pour tout réel α appartenant à $[a; b]$ il existe un $f(\alpha) = \beta$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	4	$-\infty$

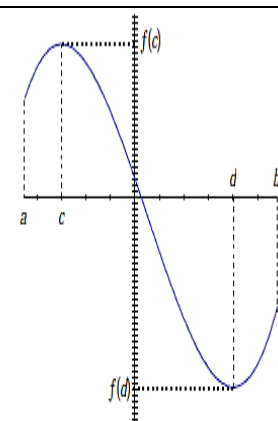
Conséquence :

1. Soit f une fonction continue sur intervalle I , s'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de I , tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.
2. Soit f une fonction continue sur intervalle I , si f s'annule sur I , alors f garde un signe constant sur I .

5. Images d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Le tableau suivant donne l'image $f(I)$.

I	f est strictement croissant	f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; f(a) [$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$[b, +\infty[$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(b)]$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] b, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) [$



Ci dessus, la fonction n'est pas strictement monotone sur $I = [a; b]$ et l'image de I n'est pas $[f(a); f(b)]$.

Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Chapitre 8 : DERIVATION

LECON 1 : DERIVABILITE D'UNE FONCTION

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

- Définir fonction dérivée.
- Connaitre les formules des fonctions dérivées élémentaires.
- Connaitre les opérations sur les fonctions dérivées.
- Définir et écrire l'équation de la tangente en un point x_0 .

Prérequis:



1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

Situation Problème:



Au Cameroun, l'accord de mise sur le marché d'une moto n'est accordé qu'à la condition que la vitesse instantanée huit seconde après le démarrage soit inférieure à 13m/s. La maison de fabrication d'une moto réalise des tests de performance sur un nouveau prototype. La distance parcourue d (en mètre) pendant la phase de démarrage est donnée en fonction du temps t (en secondes) par $d = f(t) = 0,5t^2$. Ce prototype pourra-t-il rouler au Cameroun ?

1. Dérivation en x_0

Activité d'apprentissage :



Soit la fonction $f(x) = 0,5x^2$

1. Montrer que $f(x) - f(2) = 0,5(x^2 - 4)$
2. Factoriser l'expression $f(x) - f(2)$
3. Simplifier la fraction rationnelle $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
5. Notons $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Donner $g(2)$ et calculer $g(8)$. Lorsque x est très proche de x_0 , la vitesse moyenne en les instants x et x_0 est appelée vitesse instantanée en x_0 notée $V(x_0)$.

RESUME :

a. Notion de dérivabilité en x_0

Définition

f est une fonction d'ensemble de définition D_f , x_0 est un nombre réel appartenant un intervalle ouvert contenu dans D_f .

- On appelle taux de variation de f en x_0 , la fonction T_{x_0} définie sur $D_f \setminus \{x_0\}$ par

$$T_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux de variation de f admet une limite en x_0 . Cette limite est appelée nombre dérivée de f en x_0 noté $f'(x_0)$ définie par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = x_0$.

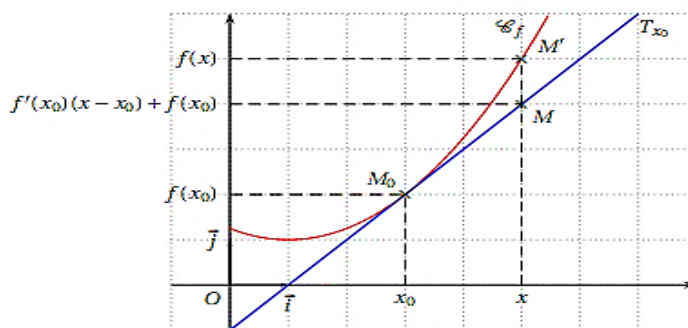
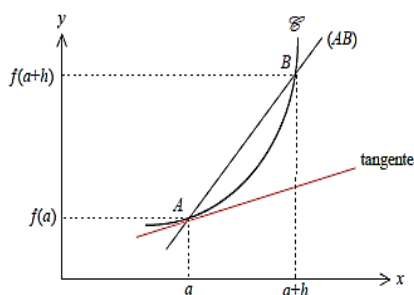
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; x_0]$ où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à gauche de x_0 notée $f'_g(x_0)$.

Autrement dit f est dérivable à gauche de x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0 <} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un nombre fini.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0; b]$ où $b \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite de x_0 notée $f'_d(x_0)$.

Autrement dit f est dérivable à droite de x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0 >} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un nombre fini.

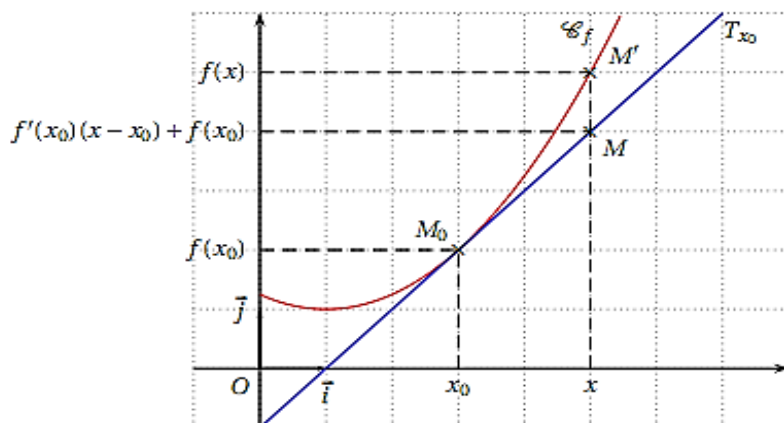
Une fonction est dérivable en x_0 lorsqu'elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 . C'est-à-dire $f'_g(x) = f'_d(x) = f'(x_0)$.



b. Interprétation géométrique (graphique) de la dérivée.

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 . Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M_0 un point de (C_f) d'abscisse x_0 , la droite (MM_0) occupe une position limite (T_{x_0}) appelée tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 ; lorsque x tend vers x_0 son coefficient directeur est $f'(x_0)$ et une de ses équations est : $(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si f est continue en x_0 et non dérivable en x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0 <} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0 >} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, alors la courbe de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente parallèle à l'axe (OJ) .

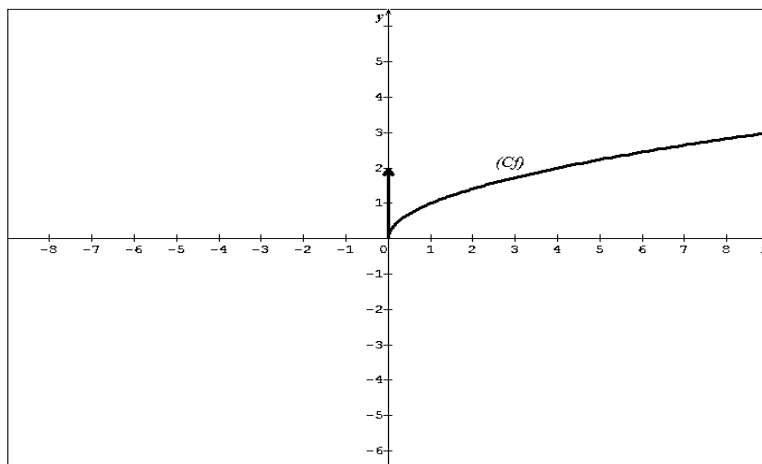


Exemple:

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

D'où (C_f) admet une demi-tangente parallèle à l'axe (OJ) au point d'abscisse 0.

**Remarque:**

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, alors la courbe de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente parallèle à l'axe (OJ)
- Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors le point d'abscisse x_0 est un point anguleux de la courbe de f .
- Lorsqu'une courbe (C_f) d'une fonction f présente une même demi-tangente parallèle à l'axe (OJ) à droite et à gauche d'un point A , alors ce point est un point de rebroussement de (C_f) c'est-à-dire lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^<} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^>} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, le point d'abscisse x_0 est un point de rebroussement.

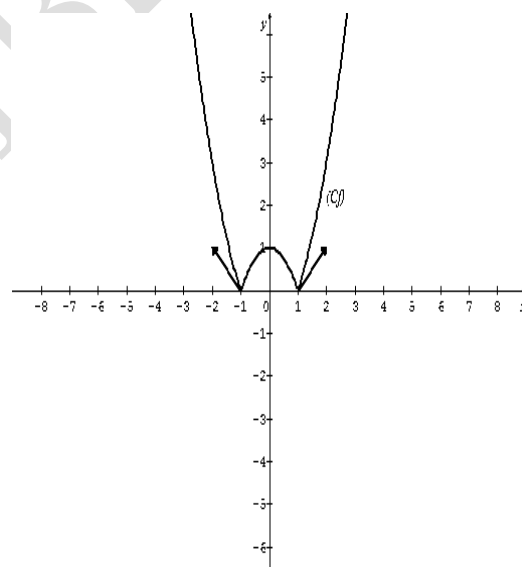
Exemple1: Soit f la fonction définie par $f(x) = |x^2 - 1|$ et C_f sa courbe représentative. Montrons que C_f admet un point anguleux.

La fonction $f : x \mapsto |x^2 - 1|$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^<} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^<} \frac{-x^2+1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^<} (-x-1) = -2$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^>} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^>} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^>} (x+1) = 2$$

Ainsi $f'_g(1) \neq f'_d(1)$. Donc le point d'abscisse 1 est point anguleux de C_f .



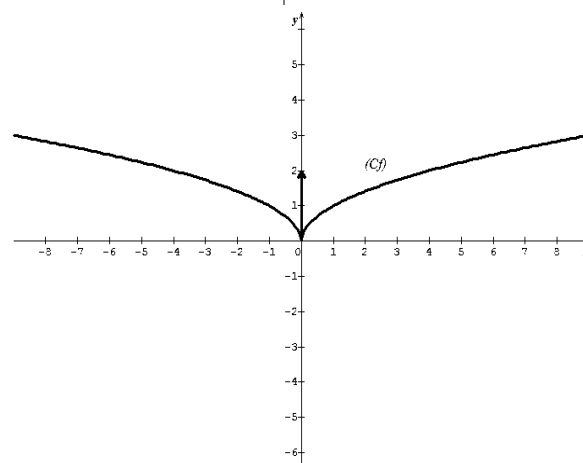
De même on montre que le point d'abscisse -1 est un point anguleux à C_f .

Exemple2: Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$. Au point 0 on a :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) présente une demi-tangente parallèle à l'axe (OJ) à gauche et à droite de 0 ; donc 0 est point de rebroussement.

**2. Fonction dérivée.****a. Dérivabilité sur un intervalle.**

Définition

- On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout élément de $]a, b[$.
- On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b .
- si f est dérivable sur un intervalle I , on appelle fonction dérivée de f sur I , la fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x) .$$

Propriété

- Une fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
- Une fonction f continue sur un intervalle I n'est pas toujours dérivable sur cet intervalle. fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$

Exemple: la fonction $f: x \rightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle ne l'est pas en 0.

Au fait $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$. Or $1 \neq -1$ i.e $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

b. Dérivée usuelles**Dérivés des fonctions élémentaires.**

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

NB : une fonction dérivable en tout élément d'un ensemble E est dite dérivable sur cet intervalle E. Ce dernier est appelé ensemble de dérivabilité.

Exemple: Soit $u(x) = \cos(2x + 3)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x + 3)$

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{-x^2 + 2x + 3}, \text{ On a } g = \sqrt{u} \text{ avec } u \text{ définie par } u(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

Or u est dérivable sur $] -1; 3[$ et $\forall x \in] -1; 3[u(x) > 0$, d'où g est dérivable sur $] -1; 3[$.

$$\forall x \in] -1; 3[, g'(x) = \frac{(-x^2 + 2x + 3)'}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$$

Dérivée et opération sur les dérivées.

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ alors $f'(x) = 5(6x)(3x^2 - 2)^4 = 30x(3x^2 - 2)^4$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ alors $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x - 4) - 4(2x + 3)}{(4x - 4)^2} = \frac{-20}{(4x - 4)^2}$

Dérivées remarquables.

- Soit une fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$, alors pour tous $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{e}{d}\right\}$ on a :

$$f'(x) = \frac{adx^2 + 2aex + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx + e)^2}$$

- Soit une fonction homographique f définie par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, alors pour tous $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a :

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$$

3. dérivées des fonctions composées

a. Dérivée de la fonction composée.

Propriété

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$. Alors la fonction $u \circ v$ est dérivable sur I et on a : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$ c'est-à-dire $\forall x \in I (u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'[v(x)] \quad x \mapsto f'(x)$.

Exemple : Soit une fonction f définie par , $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

On a : $f = u \circ v$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sin x$. On a : u est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u(\mathbb{R}) = [1; +\infty[$ et V est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f = u \circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :
 $f'(x) = (u \circ v)'(x) = (x^2 + 1)' \cos(x^2 + 1) = 2x \cos(x^2 + 1)$. D'où $f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$.

Remarque : Si f est la composée de deux fonction dérivable sur leur ensemble de définition, alors f est dérivable sur son ensemble de définition.

b. Fonction dérivée réciproque.

Propriété

Soit f une bijection d'un intervalle I vers $f(I)$.

Si f dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I , alors sa bijection réciproque est dérivable sur $f(I)$ et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, c'est-à-dire $\forall x \in f(I)$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Preuve : On sait que $f \circ f^{-1} = Id$, c'est-à-dire $f \circ f^{-1}(x) = x$

$$(f \circ f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1}(x))' f' \circ f^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Exemple1: On a : $f(x) = \cos x$. Déterminons car $(\cos x)^{-1}$.

$$f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - [f(x)]^2}.$$

$$\text{On a : } f' \circ f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - [f \circ f^{-1}(x)]^2} = -\sqrt{1 - [f \circ f^{-1}(x^2)]} = -\sqrt{1 - x^2} \text{ car } f \circ f^{-1}(x) = x.$$

$$\text{Donc } (f^{-1})'(x) = (\cos x)^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{De la même façon on montre que } (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } (\tan x)^{-1} = \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exemple2: Soit $f:]0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1[$

$$x \mapsto \cos x.$$

f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}]$ on a : $f'(x) = -\sin x$. Ainsi décroissante sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. Or f est aussi continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et $f(]0; \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0; 1[$, donc f est une bijection.

N.B :

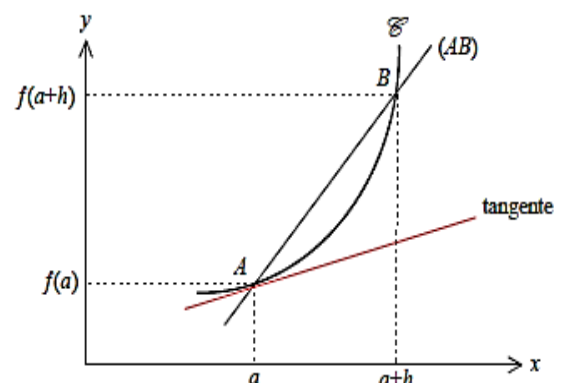
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a .

On considère le point $A(a; f(a))$ et le point $B(a+h; f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point B s'approche du point A (lorsque h tend vers 0), le coefficient directeur de (AB) tend vers le nombre dérivé $f'(a)$ et la droite (AB) devient tangente à $\mathcal{C}$ (un seul point de contact).



LECON 2 : APPLICATION DE LA DERIVEE D'UNE FONCTION

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

- Définir fonction dérivée.
- Connaître les formules des fonctions dérivées élémentaires.
- Connaître les opérations sur les fonctions dérivées.
- Définir et écrire l'équation de la tangente en un point x_0 .

Prérequis:



1. Calculer la dérivée $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$ puis son nombre dérivé en 1.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

Situation Problème:



Une noix de coco, située à 25m du sol, se détache de son cocotier et tombe. On désigne par $x(t)$ la distance en mètres parcourue par la noix de coco au bout de t secondes de chute. On a la relation: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 9,81$.

1. Calculer la vitesse moyenne de la noix de coco entre les instants 3 et 7
2. Calculer la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant 1

1. Différentes interprétations du nombre dérivé

Activité d'apprentissage :



La trajectoire d'un mobile décrit la courbe de la fonction $f(t) = 0,5t^2$ où t est le temps.

1. Calculer $f'(t)$ en fonction de t
2. Etudier le signe de $f'(t)$
3. D'après le signe de $f'(t)$ déduire la nature du mouvement du mobile pour les valeurs de temps positifs
4. La vitesse moyenne de ce mobile entre deux instants t et t_0 est définie par

$$V_m = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \text{ Calculer sa vitesse moyenne entre les instants 1s et 14s.}$$

5. La vitesse instantanée de ce mobile en un instant t_0 est définie par $V(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$. Calculer sa vitesse instantanée à $t_0 = 5s$

RESUME :

c. Interprétation numérique du nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 . Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M_0 un point de (C_f) d'abscisse x_0 , la droite (MM_0) occupe une position limite (T_{x_0}) appelée tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 ; lorsque x tend vers x_0 son coefficient directeur est $f'(x_0)$ et une de ses équations est : $(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Ceci est obtenu comme ceci : $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$ car $f(x) = y$
 $\Rightarrow f'(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$

d. Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t et t_0 est alors : $V_m = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par : $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 .

2. Applications de la dérivation à l'étude de fonctions**a. Sens de variation d'une fonction (monotonie).****Théorème**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

- Si f' est positive sur K , alors f est croissante sur K .
- Si f' est négative sur K , alors f est décroissante sur K .
- Si f' est nulle sur K , alors f est constante sur K .

Exemple: Etudier la monotonie des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = c \text{ avec } c \in \mathbb{R} ; \quad 2) g(x) = \frac{2x+3}{x-1} ; \quad 3) h(x) = \frac{x^2+3x-5}{2-x}$$

Solution :

1) $f(x) = c$. On a : $f'(x) = 0$ donc f est une fonction constante.

2) On a : $f'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$. Donc pour tout réel x $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante.

3) On a : $f'(x) = \frac{(2x+3)(2-x)+(x^2+3x-5)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(2-x)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 2 - \sqrt{3}$$

On obtient le tableau de signe de $f'(x)$ suivant :

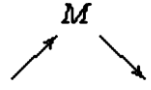
x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

On a $\forall x \in]-\infty; 2 - \sqrt{3}[\cup]2 + \sqrt{3}; +\infty[$, $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante.

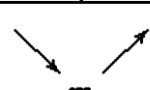
On a $\forall x \in]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante.

b. Extremum relatif d'une fonction**Théorème**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et x_0 un élément de $]a; b[$. Si f' s'annule et change de signe en x_0 , alors f admet un extremum relatif en x_0 qui est soit le minimum ou soit le maximum.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f admet un minimum relatif m en x_0

Exemple: Soit $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$. On a : $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$. On obtient le tableau de signe de $f'(x)$ suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$12x^2$	+	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	-	+

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	0	$+\infty$

La dérivée f' s'annule en 1 en changeant de signe. Or $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f admet un extremum qui est un minimum. La dérivée f' s'annule en 0 mais ne change pas de signe, donc f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

c. dérivées successives et applications

Définition

Soit f une fonction et I un intervalle.

- Si f est dérivable sur I , sa dérivée f' est appelée dérivée première de f on la note f' ou $f^{(1)}$.
- Si f est dérivable sur I , sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f on la note f'' ou $f^{(2)}$.
- De proche en proche, la dérivée de la fonction f d'ordre n ou dérivée n -ième de f sur I . Si elle existe, elle est la dérivée $(n - 1)$ -ième de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

En physique, on adopte les notations de **LEIBNIZ**. Ainsi f ; f' ; f'' ; ...; $f^{(n)}$ seront respectivement notées $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$; ...; $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Activité d'intégration 1 :

Une noix coco, située à 25m du sol, se détache de son cocotier et tombe.
On désigne par $x(t)$ la distance en mètres parcourue par la noix de coco au bout de t secondes de chute. On a la relation: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 9,81$.

3. Calculer la vitesse moyenne de la noix de coco entre les instants 0,5 et 1; puis entre les instants 1 et 1,5; puis entre les instants 1 et t (avec $t \neq 1$)

4.
 - a. On appelle vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0 la limite de sa vitesse moyenne entre les instants t et t_0 lorsque t tend vers t_0
 - b. Calculer la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant 1
 - c. Calculer en fonction de t_0 la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0
 - d. Démontrer que la vitesse instantanée de la noix à l'instant t_0 est égale au nombre dérivé en t_0 de la fonction $t \mapsto x(t)$
5. Quelle est la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant où elle touche le sol ?

Activité d'intégration 2 :

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction une fonction f définie et dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0; 100]$. On dit qu'il y a "saturation" lorsque la fonction de satisfaction prend la valeur 100.

La fonction v , dérivée de la fonction f , est appelée fonction "envie". On a donc : $v = f'$.

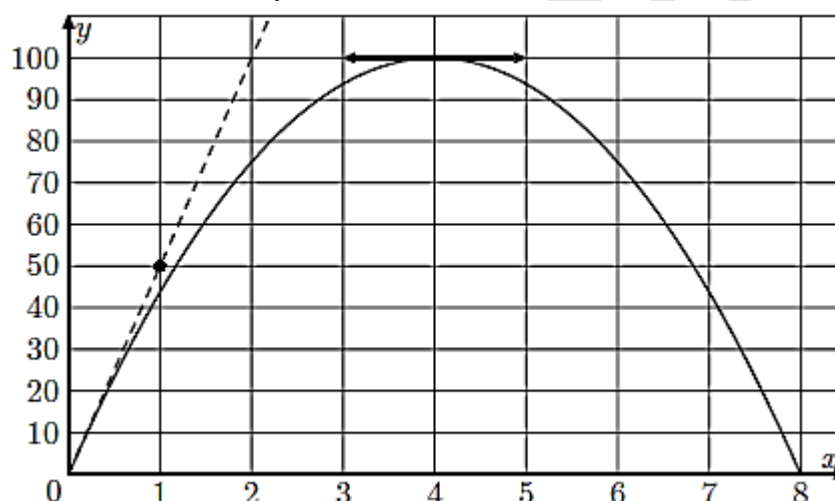
On dit qu'il y a "envie" lorsque v est positive, sinon on dit qu'il y a "rejet".

Charlotte doit rédiger un mémoire de recherche. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour.

En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus.

Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées quotidiennement à travailler.

La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.



La tangente à cette courbe au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe passe par l'origine du repère et la tangente en ce point passe par le point de coordonnées (1 ; 50).

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes:
 - a. Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il "saturation"?
 - b. Sur quel intervalle y a-t-il "envie"?
 - c. Sur quel intervalle y a-t-il "rejet"?
 - d. Donner $v(4)$.

On admettra que la fonction v est ici une fonction affine définie sur l'intervalle $[0; 8]$.

2. Justifier que son expression est : $v(x) = -\frac{25}{2}x + 50$

3. a. Justifier que la fonction f admet pour expression : $f(x) = -\frac{25}{2}x^2 + 50x + c$ où $c \in \mathbb{R}$
- b. Déterminer la valeur du nombre réel c .
4. En déduire les valeurs de x pour lesquelles la satisfaction prend la valeur 75.

Exercices de consolidation

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$. Dans le repère $(O ; I ; J)$ orthonormé ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f :

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

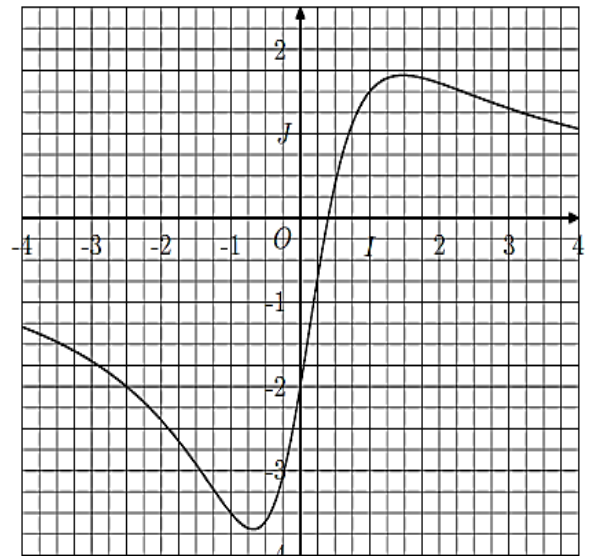
Etablir l'égalité $f'(x) = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$

2. a. Donner les coordonnées du point de C_f ayant 1 pour abscisse.

b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1.

c. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

d. Tracer la tangente (T) .



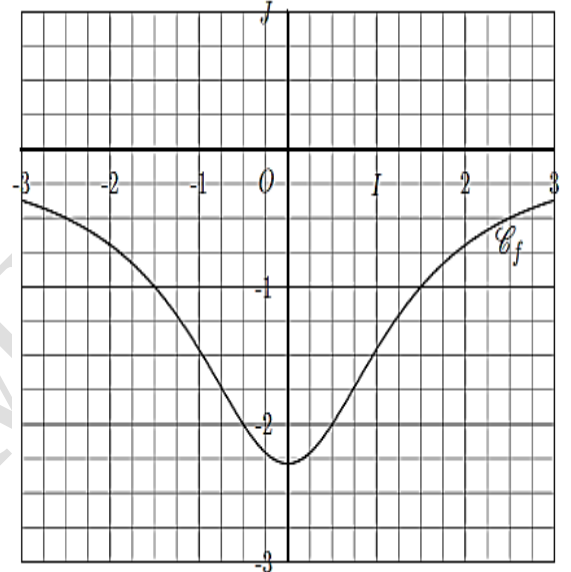
Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation $f(x) = \frac{-16}{4x^2+7}$. Dans le repère $(O ; I ; J)$ orthonormé ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f :

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Etablir l'égalité $f'(x) = \frac{128x}{(4x^2+7)^2}$

2. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

b. Tracer la tangente (T) .



Exercice 2:

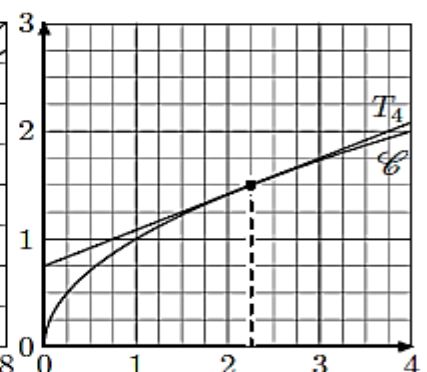
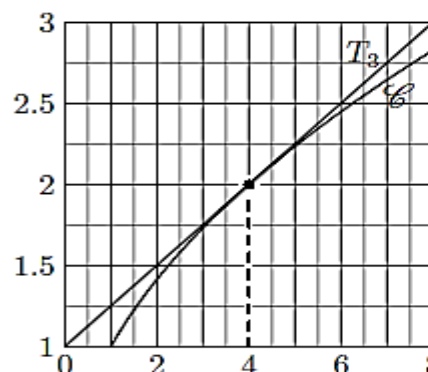
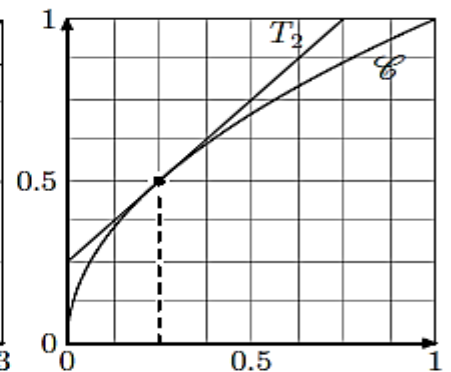
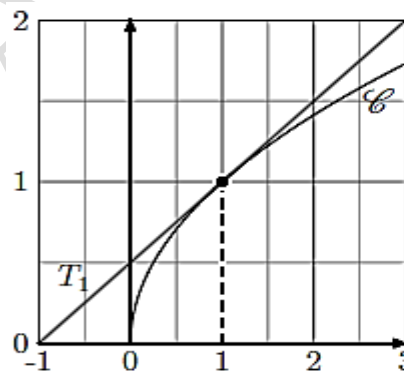
Ci-dessous est représentée, dans des repères orthogonaux, la courbe C représentative de la fonction racine carrée.

Dans chacune de ces représentations, une tangente à la courbe C est tracée :

1. Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$				
Coeff. dir. tangente				

2. Emettre une conjecture quant à l'expression d'une fonction associant au nombre x réel le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x .



Module 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Chapitre 9 : ETUDE DE FONCTIONS

LECON 1 : LES ELEMENTS DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres.

Compétence visée :

Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres

Prérequis:



On donne $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 1}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Situation Problème:



Lucie, la pâtissière veut faire fabriquer le moule pour les gâteaux. Pour cela, elle se rend au marché où elle achète une feuille de tôle carrée de 12 centimètres de côté. Elle découpe dans chaque coin de cette feuille de tôle des carrés de x centimètres de côté. En relevant les bords, elle obtient sa moule. Elle aimerait savoir le volume maximal de ce moule afin d'estimer le nombre maximal de gâteaux qu'elle pourra obtenir à partir d'une certaine quantité de pâte. Pour cela elle sollicite ton aide.

1. Notions d'asymptote

Activité d'apprentissage :

La fonction f ci-dessous est la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) .



1. On donne $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 - b. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
 - c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

RESUME :

b. Asymptote horizontale.

Définition

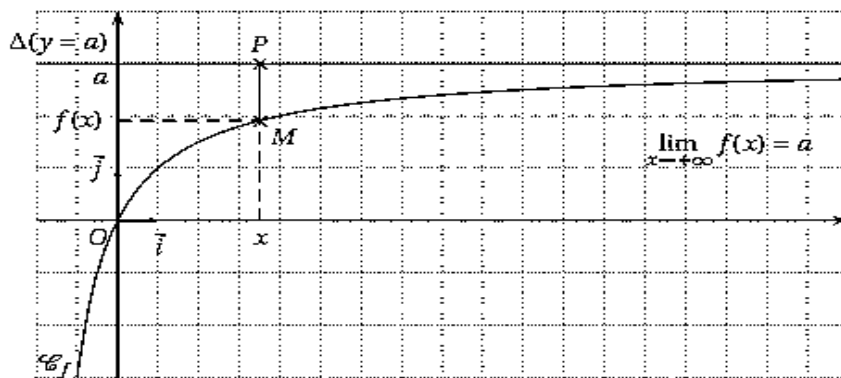
Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

- Lorsque f admet une limite finie a en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ alors $(\Delta): y = a$ asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

- Lorsque f admet une limite finie a en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$.
Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ alors $(\Delta): y = a$ asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$.
- Lorsque f admet une limite finie a en $-\infty$ et en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe (C_f) .
Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ alors $(\Delta): y = a$ asymptote à la courbe (C_f) .

NB : Lorsque le repere est orthogonal ou orthonormé alors on dit que $(\Delta): y = a$ asymptote horizontale à la courbe (C_f) .



Exemple : Le plan est muni d'un repere orthonormé (O, I, J) .

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = \frac{3x^2+x-3}{x^2+1}$. Determinons l'équation de asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+x-3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+x-3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ alors $(\Delta): y = 3$ asymptote horizontale à la courbe (C_f) car le plan est muni d'un repere orthonormé.

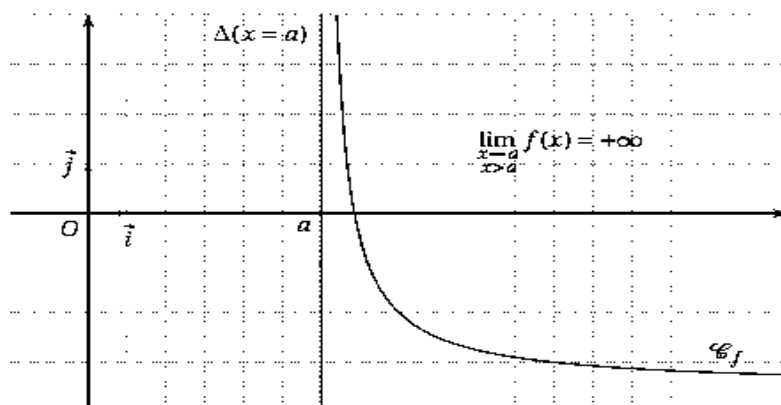
c. Asymptote verticale

Définition

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

- Lorsque f admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0 , on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe (C_f) .
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, alors $(\Delta): x = a$ est asymptote à la courbe (C_f) .

NB : Lorsque le repere est orthogonal ou orthonormé alors on dit que $(\Delta): x = a$ est asymptote verticale à la courbe (C_f) .



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = \frac{3x^2+x-3}{x-1}$. Déterminons l'équation de asymptote verticale à la courbe (C_f).

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2+x-3}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2+x-3}{x-1} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ alors (Δ): $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe (C_f) car le plan est muni d'un repère orthonormé.

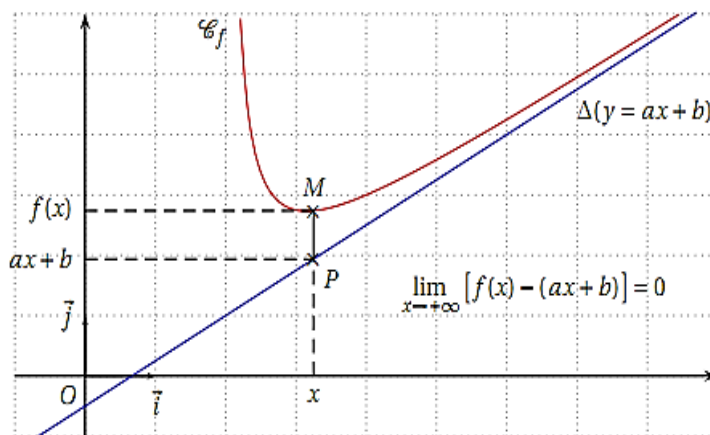
d. Asymptote Oblique

Propriété

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f).

- Lorsqu'il existe une fonction affine $y = ax + b$ tel que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$
- Lorsqu'il existe une fonction affine $y = ax + b$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$
- Lorsqu'il existe une fonction affine $y = ax + b$ tel que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C_f).

NB : Lorsque le repère est orthogonal ou orthonormé alors on dit que (Δ): $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C_f).



Remarque :

- Lorsque le repère est orthogonal ou orthonormé et lorsqu'une fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{dx^n + e}$ avec n un entier naturel non nul alors (Δ): $y = ax + b$ asymptote oblique à la courbe (C_f).
- Lorsque le repère est orthogonal ou orthonormé et lorsqu'une fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = g(x) + \frac{c}{dx^n + e}$ avec n un entier naturel non nul alors la courbe (C_g) de g est une courbe asymptote à la courbe (C_f).

Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x-1}$. Déterminons l'équation de asymptote oblique à la courbe (C_f).

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x^2+x-5}{x-1} = x + 2 - \frac{3}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x - 5}{x - 1} - (x + 2) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{3}{x - 1} - (x + 2) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{3}{x - 1} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + x - 5}{x - 1} - (x + 2) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{3}{x - 1} - (x + 2) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{3}{x - 1} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ alors la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) .

2. Éléments de symétrie

Activité d'apprentissage :



Les fonctions f et g ci-dessous sont des fonctions d'une variable numérique de représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) définies par $f(x) = x^2 + 2x - 5$ et

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$ et $g(x)$ sous la forme $g(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$ avec les réels α , β et k à préciser.

2. Montrer que $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$ puis montrer que $g(\alpha - x) + g(\alpha + x) = 2\beta$

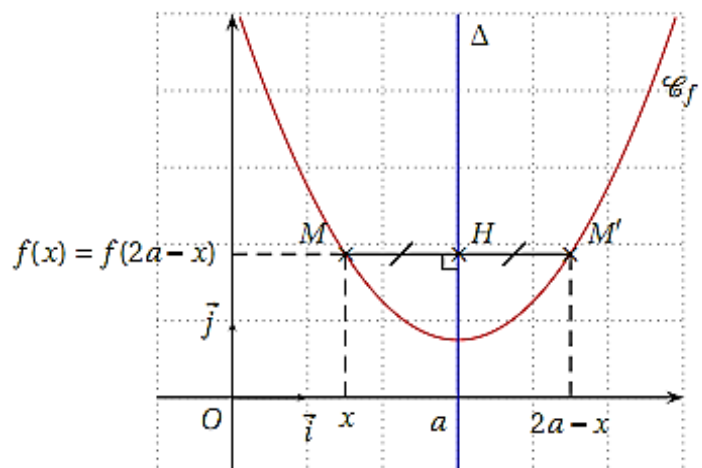
RESUME :

a. Axe de symétrie

Définition

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

- On dit que la droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) lorsque pour tout réel x tel que $a + x \in D_f$ on a : $f(a - x) = f(a + x)$.
- Ou encore la droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) lorsque pour tout réel x tel que $a + x \in D_f$ on a : $f(x) = f(2a - x)$.



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Montrons que la droite $(\Delta): x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f)

On a : $D_f = \mathbb{R}$. pour tout réel x tel que $-1 + x \in \mathbb{R}$ on a :

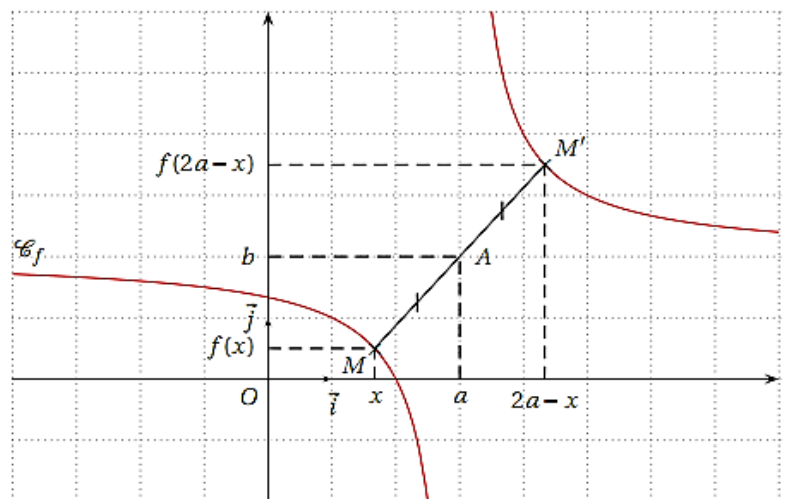
$$\begin{aligned} f(2a - x) &= f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) - 5 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4 - 2x - 5 = x^2 + 2x - 5 = f(x) \end{aligned}$$

b. Centre de symétrie.

Définition

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

- On dit que le point $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f) lorsque pour tout réel x tel que $a + x \in D_f$ on a : $a - x \in D_f$ et $\frac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$.
- On dit que le point $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f) lorsque pour tout réel x tel que on a : $2a - x \in D_f$ et $\frac{f(x) + f(2a-x)}{2} = b$ ou $f(x) + f(2a - x) = 2b$.



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1}. \text{ Montrons que le point } \Omega\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \text{ est un centre de symétrie de } (C_f). \text{ On remarque que}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} = x + 2 - \frac{3}{x - 1}.$$

$$\text{On a : } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ et } f(2 - x) = (2 - x) + 2 - \frac{3}{(2 - x) - 1} = -x + 4 - \frac{3}{-x + 1} = -x + 4 + \frac{3}{x - 1}$$

$$\text{On a : } \frac{f(x) + f(2 - x)}{2} = \frac{x + 2 - \frac{3}{x - 1} - x + 4 + \frac{3}{x - 1}}{2} = \frac{6}{2} = 3. \text{ Donc le point } \Omega\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \text{ est un centre de symétrie de } (C_f).$$

3. Parité et périodicité.

a. parité.

Activité d'apprentissage :



Les fonctions f et g ci-dessous sont des fonctions d'une variable numérique de représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) définies par $f(x) = x^2 - |x| + 3$ et $g(x) = x^3 - 7x$

1. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g de f et g
2. Vérifier que D_f et D_g sont symétriques par rapport à 0.
3. Montrer que $f(-x) = f(x)$ puis $g(-x) = -g(x)$

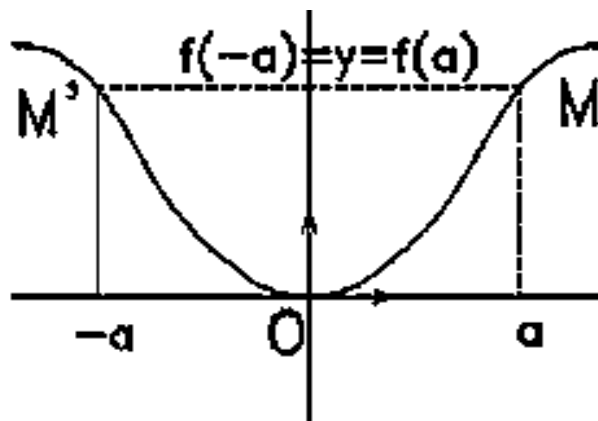
RESUME :

- Fonction paire.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f .

On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout élément x de D_f , on a : $f(-x) = f(x)$.



Remarque : Lorsque la fonction f est paire alors, les deux points $(x, y = f(x))$ et $(-x, f(-x) = f(x) = y)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et ils sont tous les deux sur la courbe de f . La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Donc lorsque la fonction f est paire alors l'on peut se contenter d'étudier et tracer la fonction f pour les $x \geq 0$ puis compléter le reste de la courbe par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

Conséquence

Lorsqu'une fonction f d'ensemble de définition D_f est paire, on peut restreindre son étude sur $D_f \cap \mathbb{R}_+$

La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : Soit f la fonction d'une variable numérique définie par $f(x) = 3x^2 - 7|x| + 2$.

Montrons que f est paire.

On a : $D_f = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro car $\mathbb{R} =]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

On a : $f(-x) = 3(-x)^2 - 7|-x| + 2 = 3x^2 - 7|x| + 2 = f(x)$.

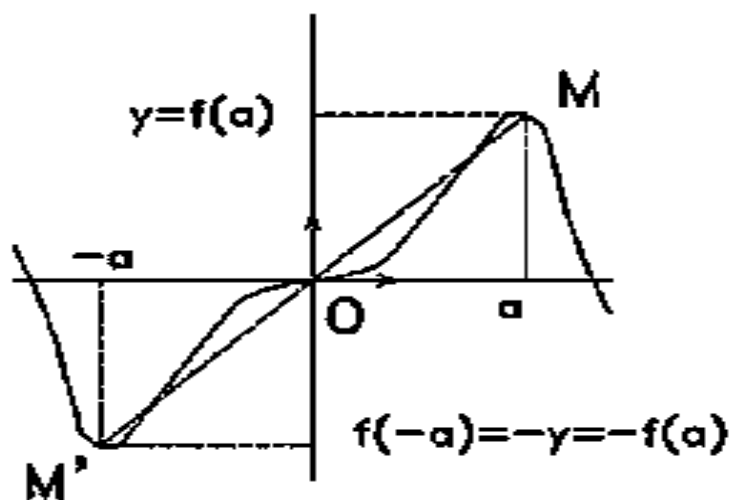
Donc la fonction f est paire car $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = f(x)$.

- Fonction impaire.**Définition**

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f .

On dit que la fonction f est impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout élément x de D_f , on a : $f(-x) = -f(x)$.

Remarque : Lorsque la fonction f est impaire alors, les points de la courbe $(x, y = f(x))$ et $(-x, f(-x) = -f(x) = -y)$ sont symétriques par rapport au point O. Donc lorsque la fonction f est impaire alors l'on peut se contenter d'étudier et tracer la fonction f pour les $x \geq 0$ puis compléter le reste de la courbe par la symétrie de centre O.

**Conséquence**

Lorsqu'une fonction f d'ensemble de définition D_f est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$.

La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exemple : Soit f la fonction d'une variable numérique définie par $f(x) = -2x^3 + 7x$.

Montrons que f est impaire.

On a : $D_f = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro car $\mathbb{R} =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

On a : $f(-x) = -2(-x)^3 + 7(-x) = 2x^3 - 7x = -(-2x^3 + 7x) = -f(x)$.

Donc la fonction f est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

b. Fonction périodique.**Activité d'apprentissage :**

Les fonctions f et g ci-dessous sont des fonctions d'une variable numérique de représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) définie par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(2x)$

1. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g de f et g
2. En utilisant les formules d'additions, montrer que $f(x + 2\pi) = f(x)$ puis $g(x + \pi) = g(x)$

RESUME :**Définition**

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et T un nombre réel non nul.

On dit que la fonction f est périodique de période T ou T -périodique si pour tout élément x de D_f , $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$, on a : $f(x + T) = f(x)$.

Remarque : Lorsque la fonction f est périodique de période T , alors il suffit d'étudier et de tracer une partie de la courbe sur un intervalle de longueur T , puis de la reproduire indéfiniment à gauche et à droite sur les intervalles successifs de longueur T .

Un exemple typique de fonction périodique est la fonction trigonométrique $\sin x$, qui admet pour période (la plus courte) $T = 2\pi$, puisque $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$ ou si l'on préfère à $[-\pi, \pi]$, ou encore à n'importe quel intervalle pourvu qu'il ait pour longueur 2π .

- Si T est une période de f , alors kT ($k \in \mathbb{Z}^*$) est aussi une période de f
- Si f est périodique, de période T , alors on peut restreindre l'étude de f à un intervalle d'amplitude T de son ensemble de définition.

Remarque :

En pratique et suivant la parité de f ou tout autre élément de symétrie (centre ; axe de symétrie) de f ou de sa courbe, il est souhaitable de restreindre l'étude de f à un intervalle d'amplitude T centré autour de(s) axe(s) ou centre(s) de symétrie(s).

Remarque :

La courbe représentative (C) de f , lorsque f périodique de période T , s'obtient en complétant la courbe représentative de la restriction de f à un intervalle d'amplitude T par les translations de vecteur $k(\vec{Ti})$ où $k \in \mathbb{Z}$

Résultats

Soit a un réels non nul.

- Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$; $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique de période $T = \frac{\pi}{|a|}$

Exemple : Soit f la fonction d'une variable numérique définie par $f(x) = -2\cos 2x + \sin x$. Montrons que f est 2π -périodique.

On a : $D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $x - 2\pi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= -2\cos(2(x + 2\pi)) + \sin(x + 2\pi) \\ &= -2\cos(2x + 4\pi) + \sin(x + 2\pi) \\ &= -2(\cos 2x \cos 4\pi - \sin 2x \sin 4\pi) + \cos x \sin 2\pi + \sin x \cos 2\pi \\ &= -2\cos 2x \cos 4\pi + 2\sin 2x \sin 4\pi + \cos x \sin 2\pi + \sin x \cos 2\pi \\ &= -2\cos 2x \times 1 + 2\sin 2x \times 0 + \cos x \times 0 + \sin x \times 1 = -2\cos 2x + \sin x = f(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $x - 2\pi \in \mathbb{R}$, on a : $f(x + 2\pi) = f(x)$ d'où f est 2π -périodique.

LECON 2: ETUDE DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies liées à l'étude de fonction
- Communiquer des informations comportant des nombres ...

Compétence visée :

- Déterminer graphiquement l'image et l'antécédent d'un nombre par une fonction
- Déterminer graphiquement le domaine de définition d'une fonction

Prérequis:



On donne $f(x) = x^2 - 5x + 3$

1. f est-elle paire ? impaire ?
2. Donner la forme canonique de $f(x)$ puis déduire son axe de symétrie
3. f admet-elle un centre de symétrie ?
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

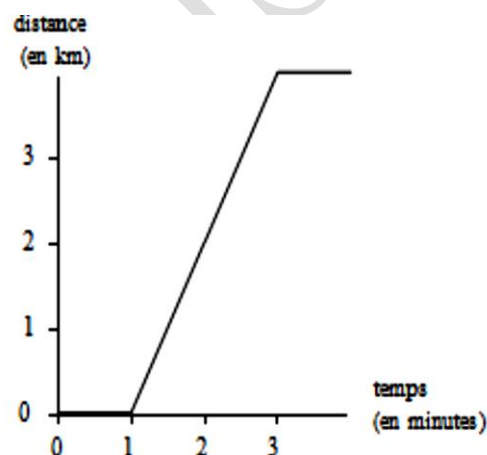
Situation Problème:



La figure ci-contre représente le déplacement de la voiture de M. Ambroise dont le mouvement est uniforme.

En utilisant la figure ci-contre, répond aux questions suivantes :

1. Quelle est l'image de chacun des nombres 1 et 3 ?
2. Sachant que entre les nombres 1 et 3 la courbe obtenue est une droite de la forme $y = ax + b$, déterminer a et b
3. Aide-le à déterminer l'équation de la trajectoire de son véhicule entre les instants 1min et 3min.



1. Intersections

a. Intersections d'une courbe avec les axes du repère

Activité d'apprentissage :



Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x-1}$ et la droite $(\Delta): y = x + 2$. On considère aussi la fonction $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

1. Etudier le signe de $f(x) - y$. Que peut-on dire de la courbe de f par rapport à la droite (Δ) ?
2. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée seconde $f''(x)$
3. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. On notera x_0 sa solution.
4. Etudier le signe de $f''(x)$ puis calculer les coordonnées du point A défini par $A \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{smallmatrix} \right)$

RESUME :

Méthode

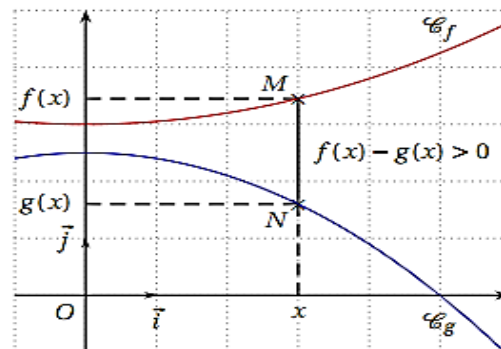
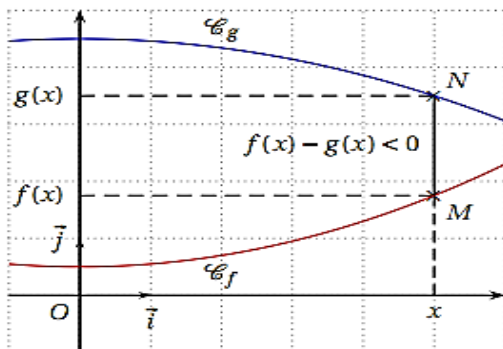
Pour déterminer les intersections d'une courbe (C_f) d'une fonction avec :

- ✓ L'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$.
- ✓ L'axe des ordonnées, on calcule $f(0)$.

b. **Positions relatives de deux courbes.****Propriété**

Pour étudier les positions relatives des courbes des fonctions f et g de représentation graphique respectifs (C_f) et (C_g) on calcule la différence $f(x) - g(x)$ puis on obtient :

- Si $f(x) - g(x) > 0$ alors (C_f) est au dessus de (C_g) .
- Si $f(x) - g(x) < 0$ alors (C_f) est en dessous de (C_g) .
- Si $f(x) - g(x) = 0$ alors les courbes (C_f) et (C_g) sont confondues.



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1}. \text{ Déterminons les positions de la courbe } (C_f) \text{ avec la droite } (\Delta): y = x + 2.$$

$$\text{On a : } f(x) - y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} - (x + 2) = -\frac{3}{x - 1} = \frac{3}{-x + 1}.$$

On obtient le tableau de signe de $\frac{3}{-x+1}$ suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x + 1$	+	0	-
$f(x) - y$	+		-

Donc : $\forall x \in]-\infty ; 1[$ $f(x) - y > 0$ d'où (C_f) est au dessus de (Δ) .

Donc : $\forall x \in]1 ; +\infty[$ $f(x) - y < 0$ d'où (C_f) est en dessous de (Δ) .

2. **Position relative d'une courbe et ses tangentes.**a. **Point d'inflexion.****Propriété**

Lorsqu'une fonction est deux fois dérivable sur un intervalle I et lorsque la dérivée seconde s'anule en x_0 ($f''(x_0) = 0$) en changeant de signe, alors la courbe de f admet un point d'inflexion. Ce point est le point $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Exemple : Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Déterminons le point d'inflexion de (C_f) .

On a : $D_f = \mathbb{R}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

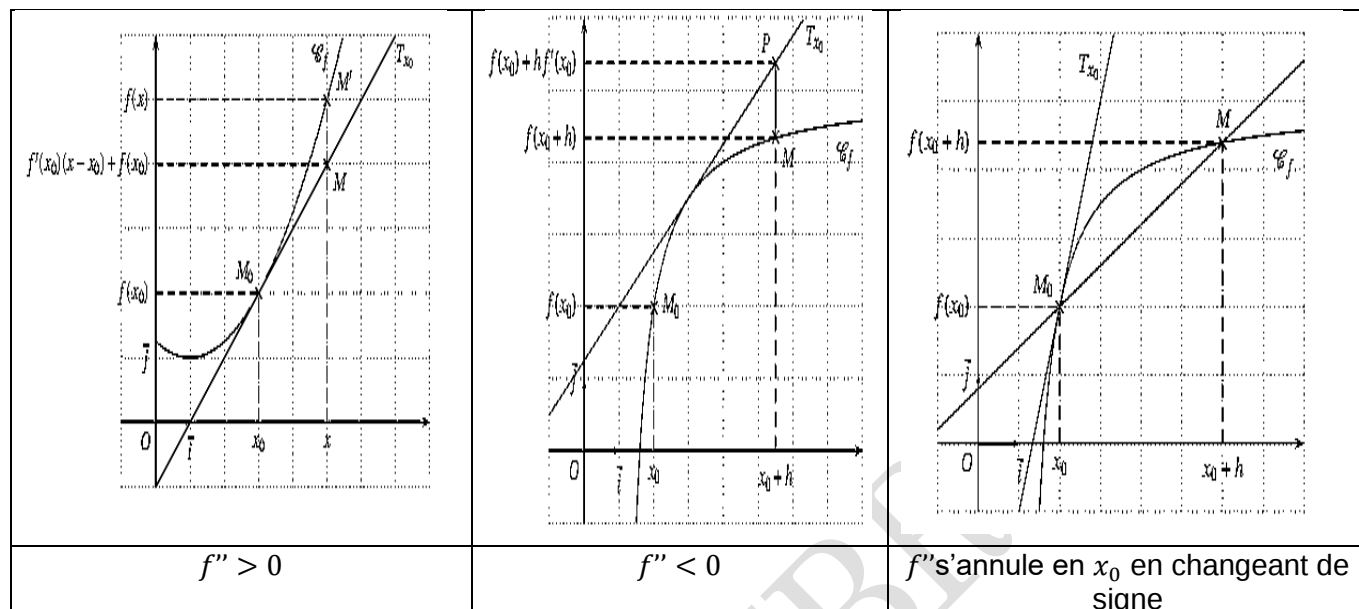
et $f''(x) = 6x - 6$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0$ c'est-à-dire que $x = 1$. On obtient le tableau de signe de $f''(x)$ suivant :

f'' s'annule en 1 en changeant de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion. Ce point est le point $\Omega(\frac{1}{2})$ car $x_0 = 1$ et $f(x_0) = f(1) = 2$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		$\frac{0}{0}$	
	-		+

ILLUSTRATION



3. Plan d'étude d'une fonction.

A moins que l'énoncé ne comporte un ensemble de questions conduisant à l'étude d'une fonction f donnée, on peut adopter la démarche suivante :

1. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f , s'il n'est pas donné explicitement dans l'énoncé.

Attention !

Lorsque l'énoncé précise que la fonction f est définie sur un ensemble E , il faut tout au moins vérifier, au brouillon, les contraintes éventuelles sur $f(x)$ et voir s'il n'y a pas de valeurs à exclure dans E . Si c'est le cas, on doit alors retranscrire sur la copie les contraintes sur $f(x)$ et repréciser l'ensemble de définition de f (E privé des valeurs contraignantes)

2. Ensemble d'étude

Ce sera le cas lorsque la fonction f est périodique, paire ou impaire ou admet un centre ou axe de symétrie

3. Étude des limites

Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition (ou éventuellement du domaine d'étude) et en déduire les équations des asymptotes éventuelles.

4. Sens de variation

- Définir le plus grand sous-ensemble sur lequel f est dérivable
- Déterminer la fonction dérivée de f
- Étudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f
- Calculer les extrema éventuels

5. Tableau de variation

Dresser le tableau de variation de f : il résume tous les résultats précédents. Il importe de vérifier sa cohérence

6. Tableau de valeurs

- Chercher les points de rencontre avec les axes
- Dresser un tableau de valeurs de f
- Choisir de façon judicieuse les unités sur les axes (sauf si elles figurent déjà dans l'énoncé)

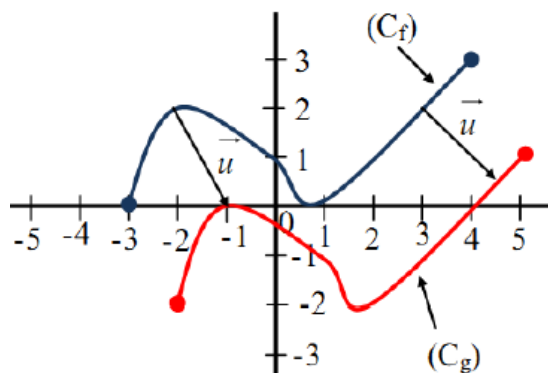
7. Courbe représentative

- Repérer les branches infinies (asymptotes et directions asymptotiques)
- Tracer avec soin la courbe représentative de f .

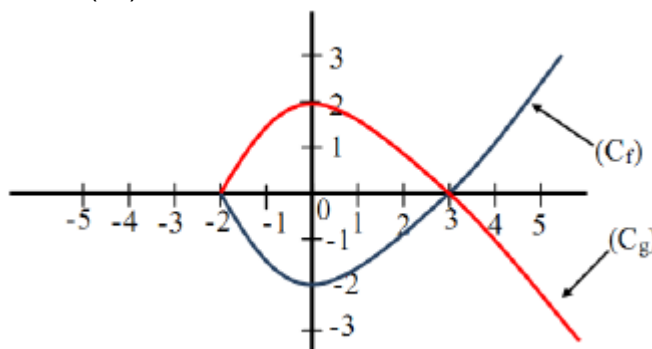
4. Courbes et transformations du plan.**Propriété**

Soit f la fonction d'une variable numérique de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) .

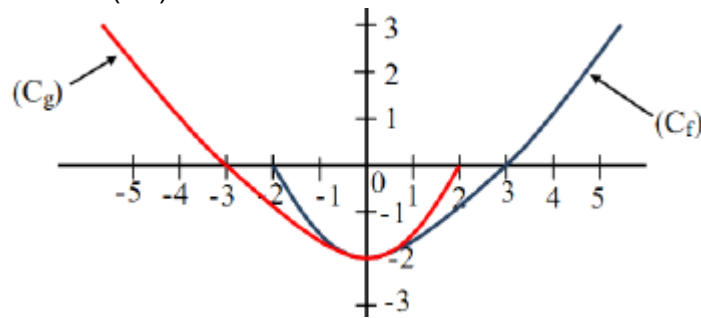
- Lorsque $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f par la translation de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. $((C_g) = t_{\vec{v}}(C_f))$.
 - En particulier lorsque $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de la parabole (C_p) d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. $((C_g) = t_{\vec{v}}(C_p))$.
 - En particulier lorsque $g(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_h) de l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. $((C_g) = t_{\vec{v}}(C_h))$.



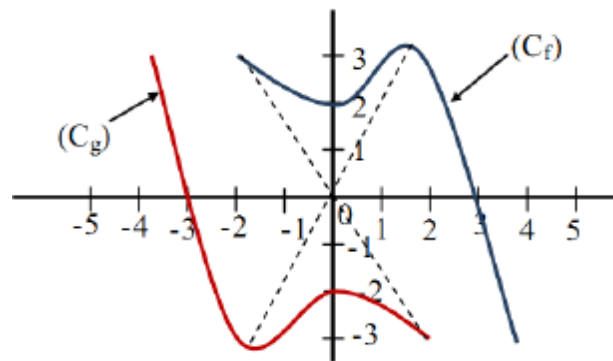
- Lorsque $g(x) = -f(x)$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI) .



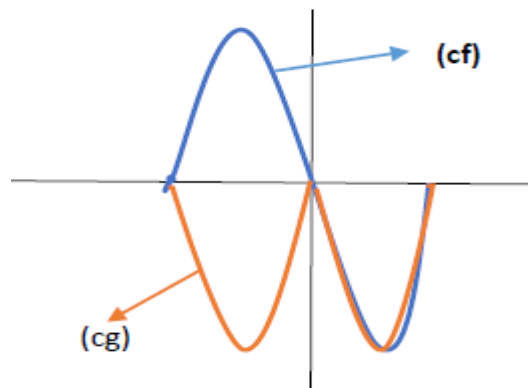
- Lorsque $g(x) = f(-x)$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



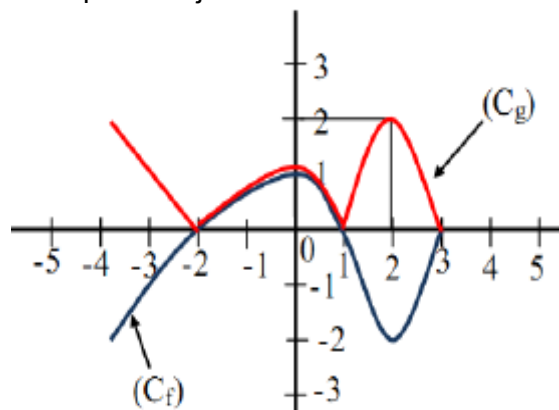
- Lorsque $g(x) = -f(-x)$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f par la symétrie de centre O.



- Lorsque $g(x) = f(|x|)$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f en construisant la partie des abscisses positifs par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) en conservant la partie des abscisses déjà positifs.



- Lorsque $g(x) = |f(x)|$ alors la courbe (C_g) de g se déduit de celle de (C_f) de f en construisant la partie de (C_f) en dessous de l'axe des abscisses par la symétrie orthogonale d'axe (OI) puis en conservant la partie déjà au dessus de l'axe des abscisses.



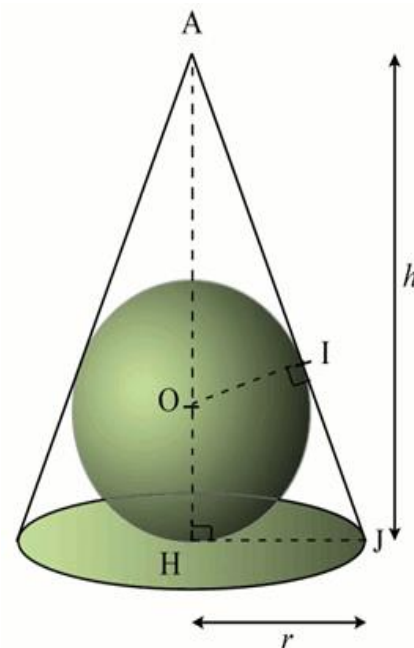
Exercices de consolidation :**Exercice 1 :**

Soit la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2}; 10\right]$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ et soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

1. a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
- b. En déduire que f possède sur I un extremum que l'on précisera.
2. On a représenté ci-contre une sphère de rayon 1 et un cône C circonscrit à la sphère ayant pour rayon r et pour hauteur h avec $h \in \left[\frac{5}{2}; 10\right]$. Les points A, O, I, H et J sont coplanaires, les droites (OI) et (AJ) sont perpendiculaires, de même que les droites (HJ) et (AH) .

On cherche à déterminer pour quelle valeur de h le volume du cône est minimal et quel est ce volume minimal.

1. Démontrer que $r^2 = \frac{h}{h-2}$
2. On rappelle que le volume d'un cône, de hauteur h et dont l'aire de la base vaut B , est $\frac{1}{3}B \times h$
3. Soit $V(h)$ le volume du cône. Exprimer $V(h)$ en fonction de h .
4. Conclure en utilisant la première question.

**Exercice 2 :**

On considère la figure suivante :

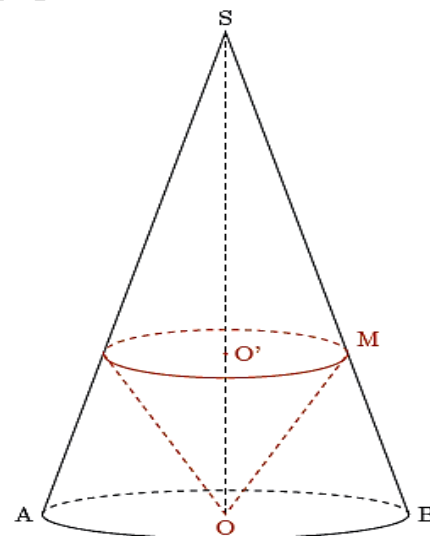
SO = 10 cm.

OB = 3 cm.

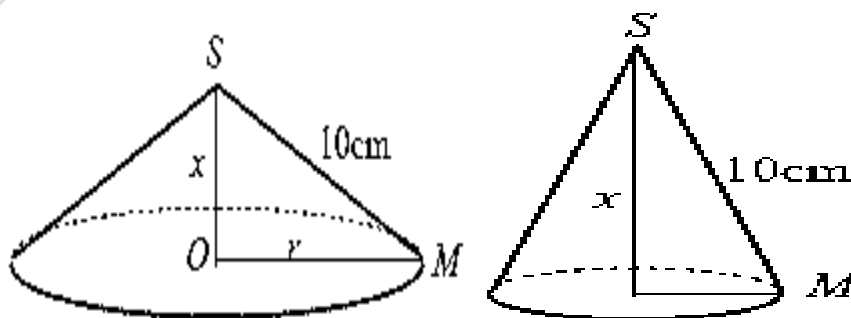
M est un point mobile sur [SB] tel que $MB = x$ cm.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du cône de sommet O est optimal. Pour cela, répondre aux questions suivantes :

1. Calculer SB.
2. Déterminer en fonction de x le rayon de la base ainsi que la hauteur OO' du cône de sommet O.
3. En notant $f(x)$ le volume du cône de sommet O, montrer que
$$f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}} x(\sqrt{109} - x)^2$$
4. Conclure.

**Exercice 3 :**

On considère tous les cônes droits dont la génératrice SM mesure 10cm.



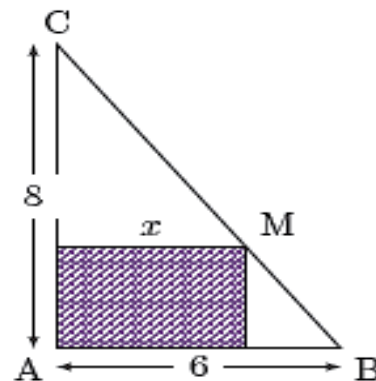
On appelle x la hauteur (variable) en cm de ces cônes ($0 < x < 10$). Soit r le rayon de la base (en cm)

1. Exprimer r^2 en fonction de x^2

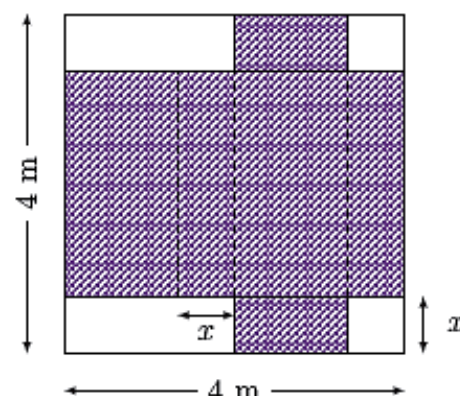
- Montrer que le volume $V(x)$ du cône de hauteur x est $V(x) = \frac{\pi(100-x^2)}{3} \text{ cm}^3$
- Tracer la représentation graphique de la fonction V sur l'intervalle $[0; 10]$
- Déterminer graphiquement la valeur x_m de la variable x pour laquelle le volume du cône est maximal
- Déterminer graphiquement les valeurs x pour laquelle $V(x) \geq 200 \text{ cm}^3$

Exercice 4:

On considère la figure suivante (M est un point de [BC]). Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle hachuré est optimale.

**Exercice 5:**

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma suivant :



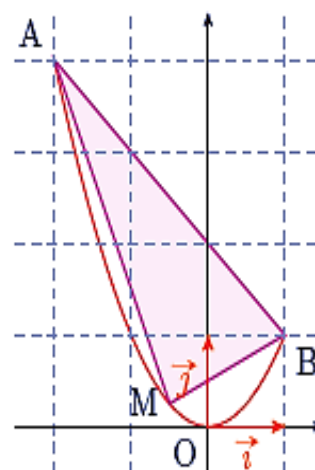
La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

- Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2-x)^2$.
- Étudier les variations de f , puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.

Exercice 6:

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle se trouvent deux points : $A(-2; 4)$ et $B(1; 1)$. Soit M un point de cette parabole d'abscisse a , $-2 \leq a \leq 1$. On cherche à optimiser l'aire du triangle ABM.

- Calculer AB.
- Déterminer une équation de la droite (AB).
- Soit H le pied de la hauteur du triangle ABM issue du sommet M. Déterminer une équation de la droite (MH) en fonction de a .
- Déduire des questions 2 et 3 les coordonnées de H en fonction de a .
- Justifier qu'optimiser l'aire du triangle ABM revient à optimiser MH^2 , et donc à optimiser la fonction f définie par $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + 1$.
- En déduire alors l'abscisse du point M telle que l'aire du triangle ABM soit optimale.

**Exercices d'intégration****Exercice 1:**

Une entreprise malienne décide de fabriquer et de commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production est en tonnes. Le coût, en milliers de francs CFA, d'une production de x tonnes est donné par : $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$

- Étudier les variations de C sur $[0; 20]$ puis tracer la représentation graphique de C dans un repère orthogonal (unité) : 1cm sur l'axe des abscisses pour 1 unité : 1cm sur l'axe des ordonnées pour 200FCFA).

2. En économie, on appelle coût moyen C_M , le coût de fabrication d'une tonne de produit. Donc $C_M = \frac{C(x)}{x}$. Déterminer et étudier la fonction C_M sur l'intervalle $[0; 20]$. En déduire le coût moyen minimum.

3. Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 84 milliers de Francs CFA la tonne. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est donc défini par la fonction B telle que $B(x) = 84x - C(x)$.

Quelle doit être la production x de l'entreprise pour qu'elle réalise le bénéfice maximum ? Est-ce la même valeur qui minimise le coût moyen ?

Exercice 2:

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe.

Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, x étant compris entre 0 et 10. Le coût, exprimé en milliers de francs CFA, de la production journalière de x sacs est donné par : $f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x$

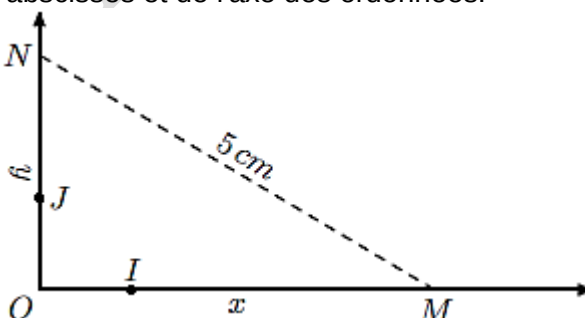
1. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
b. En déduire le sens de variation de f .
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que : 1cm représente 1 sac en abscisse ; 1cm représente 40000francsCFA en ordonnée.
- a. Compléter la table des valeurs suivante :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

- b. Construire la représentation graphique (C) de f .
3. On suppose que toute la production est vendue au prix de 14000francsCFA l'unité. La recette journalière, exprimée en milliers de francs CFA, est alors donnée par : $g(x) = 14x$.
- a. Exprimer le bénéfice journalier total $h(x)$ en fonction de $g(x)$ et $f(x)$.
- b. Vérifier que : pour tout x de $[0; 10]$, $h(x) = -x(x-1)(x-6)$
4. a. Construire sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g .
- b. Par lecture graphique ; déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
- c. Trouver le résultat précédent par calcul.

Exercice 3:

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dont l'unité graphique est le centimètre. On considère un segment $[MN]$ dont les extrémités M et N reposent sur les parties positives respectivement de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.



On considère les deux distances suivantes : $a = OM$; $b = ON$

1. Déterminer l'expression de b en fonction de la valeur de a .

On note A l'aire du triangle OMN .

2. Démontrer que l'aire de OMN s'exprime en fonction de x par : $A(x) = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$

3. Montrer que la fonction A' dérivée de la fonction A admet pour expression : $A'(x) = \frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$

4. a. Etablir le tableau de signes de la fonction A' .
b. Etablir le tableau de variations de la fonction A .

5. En déduire la position du segment $[MN]$ pour laquelle le triangle OMN possède une aire maximale.

Module 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Chapitre 10 : ESPACES VECTORIELS RÉELS

LECON 1 : NOTION D'ESPACES VECTORIELS RÉELS

Introduction

Nous avons vu en 2nde ce que c'est qu'un groupe abélien. L'écriture d'un groupe $(E ; *)$ c'est une structure algébrique (ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne $*$ associative, admettant un élément neutre dans lequel tout élément admet un symétrique). Dans ce chapitre, nous parlerons d'une structure algébrique particulière appelée espace vectoriel réel. Mais comment s'écrit-elle ? quels en sont des exemples ? Quelles sont ses propriétés ?

Les espaces vectoriels permettent de caractériser **tous** les éléments de certains ensembles (même infinis) à partir d'un **petit échantillon** (fini) dudit ensemble. Ils trouvent leur utilisation dans les démonstrations d'autres propriétés mathématiques, notamment les solutions d'une équation différentielle permettant de donner l'équation horaire d'un mobile en physique, la résolution des systèmes linéaires ayant plusieurs inconnues, l'expression analytique de certaines suites récurrentes

Motivation :

- Formaliser et généraliser certains aspects de la géométrie classique.
- S'outiller des prérequis nécessaires à la compréhension des signaux et la cryptographie

Compétence visée :

- Montrer qu'un ensemble est stable pour une loi.
- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Prérequis:



1. Vérifier que le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in (D) : 2x - 3y + 4 = 0$
2. On définit l'opération $\bullet$ sur $\mathbb{R}$ par $a \bullet b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$.
 - a. Calculer $(2 \bullet 3) \bullet 4$ puis $2 \bullet (3 \bullet 4)$. La loi est-elle associative ?
 - b. Montrer que 1 est l'élément neutre pour la loi $\bullet$
3. Soit $E =]-1; 1[$, on définit une loi $*$ dans E par: Pour tout $x; y \in E$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$
 - a. En utilisant la question 1.1) démontrer que $*$ est une loi de composition interne dans E .
 - b. Démontrer que $*$ est associative et commutative dans E .
 - c. Soit $a \in E$. Vérifier que $x * 0 = 0 * x = x$. Conclure.
 - d. Pour tout $a \in E$, déterminer le symétrique de x pour $*$. Que peut-on dire de $(E; *)$?

Situation Problème:

Soit $E = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V / 2x - 3y = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V / x + 2y = 0 \right\}$ deux ensembles constitués de vecteur du plan noté V .



1. Déterminer l'intersection de E et F notée $E \cap F$ puis préciser les vecteurs qui dirigent cette intersection s'ils existent.
2. Déterminer la réunion de E et F notée $E \cup F$ puis préciser les vecteurs qui dirigent cette réunion s'ils existent.

15. Espaces vectoriels

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments $x, y, \dots$ appelés *vecteurs*, sur lequel sont définis les opérations linéaires : une *addition* et une *multiplication* par un scalaire (un nombre réel ou complexe), avec les règles usuelles liées à la notion d'addition et de multiplication :

associativité, commutativité, élément neutre, transitivité,... Dans le jargon mathématicien l'addition désigne une opération interne entre deux vecteurs donnant un vecteur, tandis que la multiplication est une opération externe entre un scalaire et un vecteur donnant encore un vecteur. On parle d'espace vectoriel réel si les scalaires sont les nombres réels.

Activité d'apprentissage :



Soit E l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{D} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E / 2x - 3y = 0 \right\}$ un sous-ensemble de E .

1. Montrer que le vecteur nul de E noté $\vec{0}_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\vec{D}$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout vecteur $\vec{u} \in \vec{D}$, on a $\alpha \vec{u} \in \vec{D}$.
3. Montrer que pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{D}$, on a $\vec{u} + \vec{v} \in \vec{D}$.

RESUME :

Définition

Soit E un ensemble non vide.

1. On dit la loi $\square$ est une loi de composition interne dans E si $\forall (x, y) \in E^2$ on a : $x \square y \in E$.

On dit que la loi $\square$ ou $\bullet$ est une loi de composition externe sur E à opérateur dans $\mathbb{R}$ si $\forall (\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E$ on a : $\alpha \cdot \vec{u} \in E$.

Exemple : Dans l'ensemble W des vecteurs de l'espace, $+$ est une loi de composition interne et $\bullet$ est une loi de composition externe sur W à opérateur dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit E un ensemble non vide muni de loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe à opérateur dans $\mathbb{R}$ noté $\bullet$. $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou espace vectoriel réel noté $\mathbb{R}$ -ev) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $(E; +)$ est un groupe commutatif (ou Abélien).
2. Les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :
3. a. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.
 b. $\forall (\alpha, \mu, x) \in \mathbb{R} \times E; \alpha \cdot (\mu \cdot x) = (\alpha \times \mu) \cdot x$
 c. $\forall (\alpha, \mu, x) \in \mathbb{R} \times E; (\alpha + \mu) \cdot x = \alpha \cdot x + \mu \cdot x$
 d. $\forall (\alpha, \mu, x) \in \mathbb{R} \times E; \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Exemple : $(W; +; \bullet)$ est un espace vectoriel.

Vocabulaire :

- Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ sont scalaires.
- L'élément neutre de $+$ dans E est noté 0_E ou $\vec{0}_E$ et est appelé vecteur nul.

2. Sous-espaces vectoriels

a. Définition et propriétés caractéristique.

Définition

Soit $(E; +; \bullet)$ un espace vectoriel.

1. Une partie A de E est un sous espace vectoriel de E si $(A; +; \bullet)$ est un espace vectoriel.

Définition

2. Une partie A de E est un sous espace vectoriel de E si $(A; +; \bullet)$ est un espace vectoriel.
3. Soit $(E; +; \bullet)$ un espace vectoriel.

Une partie A de E est un sous espace vectoriel de E si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\vec{0}_E \in A$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{u} \in A, \text{ on a } \alpha \vec{u} \in A$
- $\forall \alpha(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{ on a } \vec{u} + \vec{v} \in A$

Exemple : soit E l'ensemble des vecteurs du plan.

Montrons que l'ensemble $\vec{D} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E / 2x - 3y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel.

- On a : $\vec{0}_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$, donc $\vec{0}_E \in \vec{D}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u} \in \vec{D}$, alors $\alpha \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ d'où $2(\alpha x) - 3(\alpha y) = \alpha(2x - 3y) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Donc $\alpha \vec{u} \in \vec{D}$

- Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 / \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et que : $2x - 3y = 0$ et $2x' - 3y' = 0$.

Ainsi on a : $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $2(x+x') - 3(y+y') = 2x + 2x' - 3y - 3y'$

$$= (2x - 3y) + (2x' - 3y') = 0 + 0 = 0. \text{ Donc } \vec{u} + \vec{v} \in \vec{D}.$$

Comme les propriétés a, b et c sont vérifiées, alors $(\vec{D}; +; \bullet)$ est un sous-espace vectoriel réel de E.

Remarque : On peut regrouper a, b et c en ceci : $\forall (\alpha; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \text{ on a : } \alpha \vec{u} + \mu \vec{v} \in E$

b. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.**Définition**

Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ tels que : $E \cap F = \{0_{\mathcal{V}}\}$ alors leur somme $E+F$ est dite directe et on note $E \oplus F$.

Exemple : Soit $E = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / 2x - 3y = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / x + 2y = 0 \right\}$ deux sous-espaces vectoriels réel de $\mathcal{V}$.

1. Déterminons $E \cap F$ puis précisons sa base si elle existe.

On a : $E = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / 2x - 3y = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / x + 2y = 0 \right\}$

On a : $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0. \text{ Donc } E \cap F = \vec{0}_{\mathcal{V}}.$

Comme $E \cap F = \{0_{\mathcal{V}}\}$ alors $E \cap F$ ne possède pas une base.

2. Déterminons $E \cup F = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / 2x - 3y = 0 \text{ ou } x + 2y = 0 \right\}$

On a : $2x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$ ou $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$

Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$

ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } E \cup F = \left\{ \vec{e}_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{e}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Donc une base de $E \cup F$ est $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{e}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

LECON 2: FAMILLE LIBRE, FAMILLE GÉNÉRATRICE, BASE

Motivation :

- Formaliser et généraliser certains aspects de la géométrie classique.
- S'outiller des prérequis nécessaires à la compréhension des signaux et la cryptographie

Compétence visée :

- Montrer qu'une famille finie est une famille génératrice ; libre ; liée d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille finie est une base d'un espace vectoriel.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Prérequis:



On donne trois vecteurs du plan tels que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires
2. Montrer que le système $\{\vec{u}; \vec{v}\}$ forme une base du plan
3. Donner l'écriture vectorielle des coordonnées du point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base.

Situation Problème:



Dans $\mathcal{V}$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système $S = (\vec{u}, \vec{v})$ est lié.
2. Montrer que le système $S' = (\vec{u}, \vec{w})$ est libre.
3. Montrer que $(\vec{u}, \vec{w})$ est une famille génératrice

1. Système de deux vecteurs

Activité d'apprentissage :



Dans $\mathcal{V}$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Montrer que le système $S' = (\vec{u}, \vec{w})$ forme une base de $\mathcal{V}$.
3. Montrer que le vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$

RESUME :

a. Combinaison linéaire

Définition

Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel réel.

- On appelle système de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p$ de E le sous-ensemble $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p\}$.
- On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p$ tout vecteurs $\vec{V}$ de E qui peut s'écrire sous la forme : $\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1, \alpha_2 \vec{u}_2, \alpha_3 \vec{u}_3 \dots \alpha_p \vec{u}_p$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$

Lorsqu'on veut ordonnées les éléments d'un système $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p\}$, on l'appelle dans ce cas une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p$.

Exemple : soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $S = (\vec{u}, \vec{v})$ est un système de vecteurs de $\mathcal{V}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$. De même $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Système générateur

Définition

Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel réel et soit S un système de vecteur de $\mathcal{V}$. Le système S est générateur de l'espace vectoriel réel si tout vecteur de $\mathcal{V}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S .

Montrons que S est un système générateur de $\mathcal{V}$.

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$. Alors il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} x.1+y.0 \\ y.0+y.1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Donc $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de S . Ainsi S est un système générateur.

De même $S' = \{3\vec{i} - 2\vec{j}; -\vec{i} + 5\vec{j}\}$ est un système générateur.

Propriété

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S est un sous espace vectoriel réel de E appelé sous-espace vectoriel réel de E engendré par S et on le note **comb(S)**.

Exemple : soit W l'ensemble des vecteurs de l'espace.

On considère $\vec{i}(1; 0; 0)$ et $\vec{j}(0; 1; 0)$ déterminons $\text{comb}(\vec{i}, \vec{j})$.

On a $\text{comb}(\vec{i}, \vec{j}) = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$

c. Systèmes libres- systèmes liés.

Définition

Le système $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_p\}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$ est :

- Libre** si $\forall (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ on a :
 $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \dots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_p$ (simultanément nuls).
- Lié** si $\forall (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$; $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \dots \alpha_p) \neq (0; 0; 0 \dots 0)$, on a :
- $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \dots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_p$ ne sont pas tous nuls.

Exemple : Dans $\mathcal{V}$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $S = (\vec{u}, \vec{v})$ est lié.
- Montrer que $S' = (\vec{u}, \vec{w})$ est libre.

Solution :

- Soit $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. On a : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. IL suffit de montrer que l'équation $\alpha \vec{u} = \vec{w}$ n'a pas solution.

On a : $\alpha \vec{u} = \vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 1 \\ 5\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{2}{5} \end{cases}$ ce qui est impossible car on a deux valeurs de α .

D'où S est libre.

NB : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés lorsqu'ils sont colinéaires c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres lorsqu'ils sont sécants c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

2. Bases et coordonnées d'un vecteur

a. Définition

Définition

On appelle base d'un espace vectoriel E, toute famille libre et génératrice de E.

Exemple : Dans, $(\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(3; 5)$ est une base de $\mathcal{V}$.

En effet : - D'après ce qui précède $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre.

- Montrons maintenant que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille génératrice.

Soit $\vec{w} \in \mathcal{V}$, montrons que l'équation $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ d'inconnu α et β admet de solution.

$$\text{On a : } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha + 5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 5\beta = y \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc l'équation $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ admet de solution. Ainsi $\forall \vec{w} \in \mathcal{V}$, $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille génératrice de $\mathcal{V}$. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b. Caractérisation d'une base et coordonnées d'un vecteur.

Définition

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{V}$ si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p)$ est une base de $\mathcal{V}$ équivaut à : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, il existe un unique $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ on a : $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p$

Dans ce cas, les réels $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_p$ sont les coordonnées ou les composantes de vecteur $\vec{u}$ et on

note $\vec{u}(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_p)$ ou bien $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$. On dit que : $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p$ où

$\vec{u}(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_p)$ est un vecteur qui dans la base $\mathcal{B}$.

NB : Les $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_p$ sont les réels ordonnées comme les vecteurs $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p$.

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p)$ est une base de $\mathcal{V}$ si et seulement si $\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p) \neq 0$

Exemple : Dans $\mathcal{V}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, il existe un unique couple $(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, donc $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique

On pose $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Trouvons les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On a : $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 4\vec{j}$.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} \vec{e}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{e}_2 = -\vec{i} + 4\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{i} + 3\vec{j} = \vec{e}_1 \\ -\vec{i} + 4\vec{j} = \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow 11\vec{j} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{11}\vec{e}_1 + \frac{2}{11}\vec{e}_2$

Et on a : $\vec{i} = 4\left(\frac{1}{11}\vec{e}_1 + \frac{2}{11}\vec{e}_2\right) - \vec{e}_2 = \frac{4}{11}\vec{e}_1 - \frac{3}{11}\vec{e}_2$

Donc on a : $\vec{i} = \frac{4}{11}\vec{e}_1 - \frac{3}{11}\vec{e}_2$ et $\vec{j} = \frac{1}{11}\vec{e}_1 + \frac{2}{11}\vec{e}_2$. Dans la base $\mathcal{B}$, $\vec{i} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; on parle ici de changement de base.

Remarque: Pour démontrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p)$ est une base, il faut et il suffit que $\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_p) \neq 0$ c'est-à-dire le système constitué par ces vecteurs est libre.

3. Dimension d'un espace vectoriel

Définition

Si un espace vectoriel E a une base composée de n vecteurs, alors toutes les autres bases de E auront aussi n vecteurs et dans ce cas, on dira que l'espace vectoriel E est de dimension n et on note $\dim E = n$.

Cas particuliers

- $\dim \{\vec{0}\} = 0$
- Si $\dim E = 1$, alors E est appelé une droite vectorielle. Dans le plan, elle a une équation de la forme $ax + by = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
- Si $\dim E = 2$, alors E est appelé un plan vectoriel. Dans l'espace, elle a une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Exercice1 :

Soit F le sous espace vectoriel du plan vectoriel de $\mathcal{V}$ engendré par les vecteurs $\vec{e} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G le sous espace vectoriel de $\mathcal{V}$ défini par : $G = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x + y = 0 \right\}$

1. Déterminer le système qui engendre G .
2. Déterminer $F \cap G$ et en donner une base s'il y'a lieu.

Exercice2 :

Soit W l'espace vectoriel.

On considère F le sous-espace vectoriel de W engendré par $\vec{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G un sous-espace vectoriel de

W engendré par $G = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / y = 2x \text{ et } z = 3x \right\}$.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de W , en donner une base.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel de $F \cap G$ et en donner une base s'il y'a lieu.

Exercice3 :

Dans W , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et le sous-espace vectoriel $G = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x = y = z \right\}$

1. Quelles sont les dimensions respectives de F et G .
2. Déterminer $F \cap G$, puis en donner une base si elle existe.
3. Déterminer $\dim F \cap G$ puis $\dim F \cup G$.

Remarque importante

- Si a et b sont deux nombres réels non simultanément nuls, alors $\vec{D} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / ax + by = 0 \right\}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Si a , b et c sont 3 nombres réels non simultanément nuls, alors :
 $\vec{P} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / ax + by + cz = 0 \right\}$ est un plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et elles forment une base de $(\vec{P})$.
- Si a , b et c sont trois nombres réels non nuls,

alors $\vec{P} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \right\}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$. Et si les trois réels $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$ ne sont pas simultanément égaux, le système $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ représente la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$.

LECON 3: APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES

Motivation :

- Formaliser et généraliser certains aspects de la géométrie classique.
- S'outiller des prérequis nécessaires à la compréhension des signaux et la cryptographie

Compétence visée :

- Montrer qu'une application est linéaire
- Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Manipuler les matrices des applications linéaires.

Prérequis:



Dans $\mathcal{V}$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $S = (\vec{u}, \vec{v})$ est lié.
2. Montrer que $S' = (\vec{u}, \vec{w})$ est libre.

Situation Problème:



Soit E un plan vectoriel muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application

$$f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}'\begin{pmatrix} -2x+y \\ 4x-2y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Ecrire la matrice de f dans la base B .
3. Montrer que f est bijective
4. En déduire le noyau $\text{Ker } f$ et l'image $\text{Im } f$.
5. Déterminer la base de $\text{Im } f$.
6. Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base B .

1. Application linéaire

Activité d'apprentissage :



On considère l'application $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}'\begin{pmatrix} -2x+y \\ 4x-2y \end{pmatrix}$$

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V} / \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
Sachant que $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$, montrer que $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in \mathcal{V} / \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Sachant que $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$, montrer $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$.
3. a. Montrer que la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système d'inconnues x et y défini par $\begin{cases} -2x + y = a \\ 4x - 2y = b \end{cases}$ se réduit à l'équation d'une droite définie par $2a + b = 0$.
b. Donner le vecteur directeur de cette droite.
4. a. Montrer que la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système d'inconnues x et y défini par $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ se réduit à l'équation d'une droite définie par $-2x + y = 0$.
b. Donner le vecteur directeur de cette droite.

RESUME :**a. Définition****Définition**

Soient E et E' deux espaces vectoriels. Une application f de E dans E' ($f : E \longrightarrow E'$) est une application linéaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 ; f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $\forall (\alpha; \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E, f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

N.B : Une application f de E dans E' ($f : E \longrightarrow E'$) est une application linéaire si $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

Exemple : On considère l'application $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$
 $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}$; Montrons que f est linéaire

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V} / \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \text{ et par suite on a : } f(\vec{u} + \vec{v}) &= (\vec{u} + \vec{v})' \begin{pmatrix} 2(x+x') \\ (x+x')+(y+y') \end{pmatrix} \\ &= (\vec{u} + \vec{v})' \begin{pmatrix} 2x+2x' \\ (x+y)+(x'+y') \end{pmatrix} \\ &= \vec{u}' \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} + \vec{v}' \begin{pmatrix} 2x' \\ x'+y' \end{pmatrix} \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Donc $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a : $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in \mathcal{V} / \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\alpha\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$. Donc $f(\alpha\vec{u}) = (\alpha\vec{u})' \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ \alpha x + \alpha y \end{pmatrix}$
 $= (\alpha\vec{u})' \begin{pmatrix} 2(\alpha x) \\ \alpha(x+y) \end{pmatrix}$
 $= \alpha\vec{u}' \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}$
 $= \alpha f(\vec{u})$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, et $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$ $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$. Ces deux propriétés étant vérifiées, alors f est linéaire.

Définition

Soient E et E' deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans E' ($f : E \longrightarrow E'$).

- Si $E = E'$, alors f est un **endomorphisme de E** et on note $f = \text{End}(E)$ pour dire que f est un endomorphisme de E .
- Si f est bijective, alors f est appelée **isomorphisme de E** vers E et on note $\text{bij}(E; E')$ ou $\text{iso}(E; E')$.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme** de E et on note $\text{bij}(E)$ ou $\text{Aut}(E)$.
- Si $E' = \mathbb{R}$, alors f est appelé une **forme linéaire**.

Exemple :

1. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

est une forme linéaire.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + y$$

2. $f : E \longrightarrow E$

est une forme automorphisme.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}$$

Remarque :

- Une application linéaire est un endomorphisme.
- Une application f est bijective lorsque $\forall \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ l'équation $f(\vec{u}) = \vec{v}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ admet une unique solution. (ici l'inconnu est $\vec{u}$).

Exemple : Montrons que l'application en 3) est un automorphisme de E . On sait que f est une application linéaire donc f est un endomorphisme de E .

Montrons maintenant que f est bijective.

Soit $\forall \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$, montrons que l'équation $f(\vec{u}) = \vec{v}$ d'inconnu $\vec{u}$ admet une unique solution.

$$\text{On a : } f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a \\ x + y = b \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Donc le système admet une unique solution.}$$

Donc $\forall \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$, il existe un unique $\vec{v} \in \mathcal{V} / f(\vec{u}) = \vec{v}$. Ainsi f est bijective, par suite f est un automorphisme de $\mathcal{V}$.

Notation : Soit $f: E \rightarrow E'$ une application et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ une base de E . Alors $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ il existe un triplet $(\alpha; \beta; \lambda) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \lambda \vec{e}_3$ donc $f(\vec{u}) = \alpha f(\vec{e}_1) + \beta f(\vec{e}_2) + \lambda f(\vec{e}_3)$ car f est linéaire. Ainsi f est parfaitement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E .

- L'ensemble des applications linéaires de $E \rightarrow E'$ est notée $\mathcal{L}_{(E;E')}$
- L'ensemble des endomorphismes de E noté $\mathcal{L}_{(E)}$ ou $\text{End}(E)$.

L'ensemble des automorphismes de E noté $GL_{(E)}$ ou $\text{Aut}(E)$ ou $\text{bij}(E)$ est encore appelé **groupe linéaire de E** .

b. Image d'une application linéaire**Définition**

Soit $f: E \rightarrow E'$ une application linéaire.

L'image de l'application linéaire f noté $\text{Im}f$ est l'ensemble $f(E) = \{f(\vec{u}) / \vec{u} \in \mathcal{V}\}$.

En d'autre terme $\text{Im}f = \{\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E' / f(\vec{u}) = \vec{v}\}$ lorsqu'on est en dimension 2.

Dans le cas générale $\text{Im}f = \{\vec{v} \in E' / f(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Exemple : Soit $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u} \begin{pmatrix} x-y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons $\text{Im}f$.

Déterminons $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{v}$ d'inconnu $\vec{u}$ admette de solution.

$$\text{On a : } f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = b \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b = 0. \text{ Donc } \text{Im}f = \{\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / a + 2b = 0\}$$

2. Déterminons la base de Imf .

On a : $a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$; d'où $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} = b\vec{e}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc Imf est engendrée par $\vec{e}_1$ d'où $\vec{e}_1$ est la base de Imf .

Propriété

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire.

- Imf est un sous-espace vectoriel de E' .
- Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_n)$ est une base de E , alors Imf est engendré par : $(f(\vec{e}_1); f(\vec{e}_2); f(\vec{e}_3); \dots; f(\vec{e}_n))$.

$Imf = E'$ alors f est surjective ; donc f est surjective si et seulement si $\dim Imf = \dim E'$.

Exemple : Considérons l'exemple précédent.

Alors $Imf = \langle \vec{e}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ or $\dim E' = 2$ et $\dim Imf = 1$, donc $\dim Imf < \dim E'$ d'où f n'est pas surjective.

2. Noyau d'une application linéaire

Définition

On appelle noyau d'une application linéaire : $E \rightarrow E'$, l'ensemble noté

$$Kerf = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_{E'}\}.$$

Exemple :

1. Déterminons $Kerf$ de l'application Soit $f : E \rightarrow E$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}'\begin{pmatrix} x-y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{u} \in E$. On a : $\vec{u} \in Kerf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y$. D'où $Kerf = \left\{ \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x=y \right\}$.

2. Déterminons une base de $Kerf$.

On a : $x=y \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\vec{e}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\vec{e}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $Kerf$.

Propriété

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Alors on a :

- $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E .
- f est injective si et seulement si $Kerf = \{\vec{0}_E\}$. Donc f est injective lorsque $\dim Kerf = 0$.

Exemple : f de l'exemple précédent n'est pas surjective du fait que $Kerf \neq \{\vec{0}_E\}$ car $\vec{e}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Kerf$.

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Alors on a :

1. f est bijective si et seulement si $\begin{cases} \text{Ker } f = \vec{0}_E \\ \text{Im } f = E' \end{cases}$.
2. Si $\dim E = E' = n$ et $\mathfrak{B}$ est une base de E . alors on a : $\dim E = \dim \text{Im } f$ et $\dim \text{Ker } f = 0$.

Exemple : On considère l'application linéaire $f : W \longrightarrow W$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Montrons que f est bijective.

$$\text{Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W, \vec{u} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \text{D'où } f \text{ est bijective.}$$

2. Déterminons $\text{Ker } f$.

Comme f est bijective alors $\text{Ker } f = \vec{0}_E$.

Exercice : Soit $\mathfrak{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de W .

On considère l'endomorphisme f de W défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i}; f(\vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}); f(\vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{j} + \vec{k}). \text{ Montrons que } f \text{ est bijective.}$$

Théorème fondamental

1. Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension n dans un espace vectoriel E' . Alors $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$.

Exemple : $f : W \longrightarrow W$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} x+y \\ x+y-z \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et donner une base.
2. En déduire que $\dim \text{Im } f = 2$.
3. Donner une base de $\text{Im } f$.

Solution :

1. Déterminons $\text{Ker } f$ et donnons une base.

$$\text{Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W; \vec{u} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=-2x \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Ker } f = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / z = -x; y = -2x \right\} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Donc une base de } \text{Ker } f \text{ est } \vec{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dédudisons que $\dim \text{Im } f = 2$ et Donnons une base de $\text{Im } f$.

$$\text{On a : } \dim \text{Ker } f = 1. \text{ Ainsi } \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = 3 \Rightarrow \dim \text{Im } f = 3 - 1 = 2.$$

3. Donnons une base de $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f \text{ est engendré par } \{f(\vec{i}); f(\vec{j}); f(\vec{k})\}.$$

$$\text{Or } f(\vec{i}) = \vec{i}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; f(\vec{j}) = \vec{j}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f(\vec{k}) = \vec{k}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ or } \vec{i}' \text{ et } \vec{j}' \text{ sont libres donc } \text{Im } f = \langle \vec{i}'; \vec{j}' \rangle.$$

3. Matrice des endomorphismes

a. Bref aperçu

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension $\dim E = 3$. Et f un endomorphisme de E .

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ une base de E . Or f est parfaitement déterminé par les images des vecteurs de la base, donc il suffit de connaître $(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$. Or $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel de E .

Donc il existe $(a; b; c; a'; b'; c'; a''; b''; c'') \in \mathbb{R}^9$ tel que $f(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.

$$f(\vec{e}_2) = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{e}_3.$$

$$f(\vec{e}_3) = a''\vec{e}_1 + b''\vec{e}_2 + c''\vec{e}_3.$$

Ainsi $\forall \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \quad f(\vec{u}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)$

$$= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3)$$

$$= (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3)x + (a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{e}_3)y + (a''\vec{e}_1 + b''\vec{e}_2 + c''\vec{e}_3)z$$

$$= (ax + a'y + a''z)\vec{e}_1 + (bx + b'y + b''z)\vec{e}_2 + (cx + c'y + c''z)\vec{e}_3$$

Donc si $f(\vec{u}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ alors on a : $\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$ et il en ressort que

de ce dispositif de calcul : si $(\vec{u}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $f(\vec{u}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors on a :

$$f(\vec{u}) = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Le tableau $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est appelé matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Remarque : La $n^{\text{ième}}$ colonne de la matrice représente les coordonnées de l'image du $n^{\text{ième}}$

vecteurs de la base $(f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3))$. $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base de W .

On considère $f : W \longrightarrow W$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} \text{ la matrice de } f \text{ dans la base est } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Opération sur les matrices

- Somme :** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$
- Produit :** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & ac' + cd' \\ a'b + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}.$

c. Matrices et endomorphismes bijectifs

Définition

Soit M une matrice d'un endomorphisme de E telle que $\dim E < \infty$ dans E . On dit que M est inversible s'il existe une matrice N d'un endomorphisme de E telle que $M \times N = I$ où I est la matrice identité définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas N est appelé matrice inverse de M et elle est notée M^{-1} .

Propriété

Soit f un endomorphisme de E de matrice M et $\mathcal{B}$ une base de E , alors on a :

- M inversible $\Leftrightarrow f$ bijectif c'est-à-dire $\det M \neq 0$
- f bijectif $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une base de E .
- Si $\mathcal{B}(\vec{i}; \vec{j})$, alors $f(\mathcal{B}) = (f(\vec{i}); f(\vec{j}))$.

d. Déterminant des matrices carrées d'ordre 2 et 3 et ses applications.

Définition

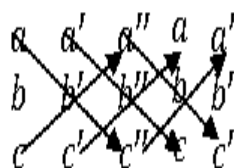
Définition1 : On appelle déterminant de la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, le nombre réel noté $\det M$ définie par $\det M = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Définition2 : On appelle déterminant de la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, le nombre

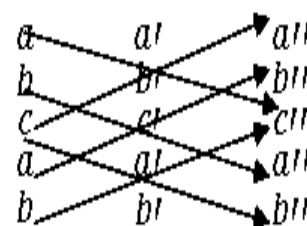
réel noté $\det M$ définie par $\det M = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$

Avec la méthode de SARRUS on a :

Si $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ alors on a :



ou



$$\det M = (ab'c'' + a'b''c + a''bc') - (cb'a'' + c'b''a + c''ba').$$

Activité d'apprentissage :



1) Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$

avec $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Que constatez-vous ?

2) maintenant, on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on suppose que $\det(A) \neq 0$. Calculer les

produits $A \times B$ et $B \times A$ avec $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Que constatez-vous ?

Solution :

1) Calculons $A \times B$ et $B \times A$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -12+12 \\ 1-1 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que $A \times B = B \times A = I_2$.

2) Calculons $A \times B$ et $B \times A$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \text{ Donc } B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ac+ac}{ad-bc} \\ \frac{bd-bd}{ad-bc} & \frac{-bc+da}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da-cb}{ad-bc} & \frac{dc-cd}{ad-bc} \\ \frac{-ba+ba}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que $A \times B = B \times A = I_2$

Propriété

Soit M et N deux matrices des endomorphismes d'un espace vectoriel. Alors on a :

- $\det(M \times N) = \det M \times \det N$.
- Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et si $\det M \neq 0$, alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
- $\det I = 1$. Donc $\det(M \times M^{-1}) = 1$ par suite $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$.
- Si M est la matrice d'un endomorphisme de f , alors f est bijectif si et seulement $\det M \neq 0$.

Exemple :

- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+6 & -3-6 \\ -1+8 & 4+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
- $4 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(1) & 4(-2) \\ 4(3) & 4(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 8 & 2(-6) - 3 \times 5 \\ -1 \times 6 + 4 \times 8 & -1 \times -6 + 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -27 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+6 & -18-24 \\ 16-5 & -24+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -42 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$: le produit des matrices n'est pas commutatif.
- $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - (-1)(-3) = 8 - 3 = 5$

Un endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a : $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

Donc f est bijective et $M_{f^{-1}} = \frac{1}{\det(M_f)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque :

- $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour l'addition des matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: elle est appelée matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $1 \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la multiplication des matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: elle est appelée matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et est souvent notée I_2 .
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un espace vectoriel réel.

4. Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit d'une application linéaire par un réel et de la composée de deux applications linéaires

Activité d'apprentissage 1:



- 1) Soient f et g deux applications linéaires d'un même espace vectoriel E vers un même espace vectoriel F et k un nombre réel.
On pose $(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$ et $(k.f)(\vec{u}) = k.f(\vec{u})$ pour $\vec{u}$ dans E
Justifier que $f + g$ et $k.f$ sont des applications linéaires.
- 2) On suppose maintenant que g est définie de F vers un espace vectoriel G .
On pose $[g \circ f](\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$ pour $\vec{u}$ dans E . Justifier que $g \circ f$ une application linéaire.

Solution :

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$; $a, b \in \mathbb{R}$

- $(f + g)(a\vec{u} + b\vec{v}) = f(a\vec{u} + b\vec{v}) + g(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) + ag(\vec{u}) + bg(\vec{v})$
 $= a[f(\vec{u}) + g(\vec{u})] + b[f(\vec{v}) + g(\vec{v})] = a[f + g](\vec{u}) + b[f + g](\vec{v})$
- $(k.f)(a\vec{u} + b\vec{v}) = k.f(a\vec{u} + b\vec{v}) = k.[af(\vec{u}) + bf(\vec{v})] = (ka).f(\vec{u}) + (kb).f(\vec{v}) = a[k.f(\vec{u})] + b[k.f(\vec{v})]$
- $[g \circ f](a\vec{u} + b\vec{v}) = g[f(a\vec{u} + b\vec{v})] = g[af(\vec{u}) + bf(\vec{v})]$ car f est linéaire
 $= ag[f(\vec{u})] + bg[f(\vec{v})]$ car g est linéaire
 $= a[g \circ f](\vec{u}) + b[g \circ f](\vec{v})$

Activité d'apprentissage 2:



Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soient f et g deux endomorphismes de E et k un réel tels que $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer $[f + g](\vec{i})$ et $[f + g](\vec{j})$ puis écrire une relation entre M_{f+g} , M_f et M_g
- 2) Chercher $M_{(k.f)}$
- 3) Calculer $M_g \times M_f$ et déterminer $M_{g \circ f}$

Définition

Soient f et g deux applications linéaires d'un même espace vectoriel E vers un même espace vectoriel F de matrice respectives M_f et M_g . Soit k un nombre réel.

- On appelle somme de f et g l'application linéaire notée $f + g$ définie pour $\vec{u}$ dans E par $(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$. La matrice de l'application $f + g$ est $M_f + M_g$
- On appelle produit de f par k l'application linéaire notée $k \cdot f$ définie pour $\vec{u}$ dans E par $(k \cdot f)(\vec{u}) = k \cdot f(\vec{u})$. La matrice de l'application kf est $k \cdot M_f$
- Si g est définie de F vers un espace vectoriel G , alors on appelle composée de f par g l'application linéaire notée $g \circ f$ définie pour $\vec{u}$ dans E par $[g \circ f](\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$. La matrice de l'application $f \circ g$ est $M_f \times M_g$

Matrice de la réciproque d'un automorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 2.

f est un automorphisme si et seulement si elle est bijective, ce qui équivaut à dire qu'il existe une application g telle que $g \circ f = f \circ g = id_E$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

$$g \circ f = id_E \Leftrightarrow M_{g \circ f} = M_{id_E}$$

$$\Leftrightarrow M_g \times M_f = I_2$$

$$\Leftrightarrow M_f \text{ est inversible et } (M_f)^{-1} = M_g = M_{f^{-1}}$$

Exemple :

Si $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$, alors :

- $M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $M_{(5 \cdot f)} = 5 \cdot M_f = 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$
- $M_{g \circ f} = M_g \times M_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. Matrices et systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Considérons le système linéaire suivant : $(S): \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vu comme une matrice ayant deux lignes et une colonne (matrice colonne).

En utilisant le procédé de la multiplication de deux matrices, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Si A est inversible, alors $(S) \Leftrightarrow AX = B$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow I_2 X = A^{-1} B \text{ car } A^{-1} A = I_2$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B \text{ car } I_2 X = X$$

Exercice d'application 1:

- 1) Résoudre par combinaison linéaire le système suivant dans $\mathbb{R}^2$ (S): $\begin{cases} 3x - 5y = \alpha \\ -2x + 4y = \beta \end{cases}$
- 2) Dédire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

- 1) Résolution du système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10y = 2\alpha \\ -6x + 12y = 3\beta \end{cases} \text{ Ainsi, } 2y = 2\alpha + 3\beta \text{ et } y = \alpha + \frac{3}{2}\beta$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 20y = 4\alpha \\ -10x + 20y = 5\beta \end{cases} \text{ Ainsi, } 2x = 4\alpha + 5\beta \text{ et } x = 2\alpha + \frac{5}{2}\beta.$$

$$\text{L'ensemble solution est } \left\{ \left(2\alpha + \frac{5}{2}\beta; \alpha + \frac{3}{2}\beta \right) \right\}$$

- 2) Dédution de l'inverse.

$$(S): \begin{cases} 3x - 5y = \alpha \\ -2x + 4y = \beta \end{cases} \text{ Posons } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$(S) \Leftrightarrow X = A^{-1} B. \text{ Or } \begin{pmatrix} 2\alpha + \frac{5}{2}\beta \\ 1\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \text{ Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice d'application 2:

- 1) Résoudre par combinaison linéaire le système suivant (S): $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$
- 2) Retrouver les solutions précédentes en utilisant les matrices.

$$1) (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10y = 22 \\ -6x + 12y = -24 \end{cases} \text{ Ainsi, } 2y = -2 \text{ et } y = -1$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 20y = 44 \\ -10x + 20y = -40 \end{cases} \text{ Ainsi, } 2x = 4 \text{ et } x = 2. \text{ L'ensemble solution est } \{(2; -1)\}$$

$$2) (S): \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases} \text{ Posons } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a vu précédemment que } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(S) \Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(11) + \frac{5}{2}(-8) \\ 1(11) + \frac{3}{2}(-8) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ et } y = -1. \text{ On retrouve l'ensemble solution } \{(2; -1)\}$$

Exercice 1:

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}$

- 1) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Dédire que $\text{Ker } f$, $\text{Inv } f$ et $\text{Opp } f$ sont des sous espaces-vectoriels de E avec
 $\text{Inv } f = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $\text{Opp } f = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
- 3) Maintenant, $B = (\vec{i}; \vec{j})$ est une base de E et $M_{(f;B)} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
- 4) Démontrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$
- 5) Chercher deux vecteurs tous non nuls $\vec{e}_1$ de E_{λ_1} et $\vec{e}_2$ de E_{λ_2} ayant pour abscisse 1.
- 6) Vérifier que $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E
- 7) Déterminer la matrice de f dans la base B'
- 8) Comparer $\det M_{(f;B)}$ et $\det M_{(f;B')}$

Exercice 2:

$B = (\vec{i}; \vec{j})$ est une base d'un espace vectoriel E , $\vec{e}_1(1; -2)$; $\vec{e}_2(-2; 1)$ et $M_{(f;B)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f .

- 1) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ puis une base de chacune d'elles.
- 2) f est-elle un isomorphisme ?
- 3) Vérifier que $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E
- 4) Justifier que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$.
- 5) Déterminer $M_{(f;B')}$

Exercice 3:

Un plan $\mathcal{V}_2$ étant rapporté à une base $(\vec{i}; \vec{j})$, On considère l'application linéaire f de $\mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{V}_2$ définie par :

$$f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

1. On pose $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = f(\vec{u}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Exprimer x' et y' en fonction de x et de y

2. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on dire de f ?
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ est une droite vectorielle dont on donnera une base $\vec{e}_1$
4. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tel que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ est une droite vectorielle dont on donnera une base $\vec{e}_2$

Module 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ELEMENTAIRE DU PLAN

Chapitre 11 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

LECON 1 : Présentation des isométries du plan

Motivation :

Nous devons pouvoir expliquer les transformations qui lient deux objets semblables (de même dimension l'un réduit ou agrandi par rapport à l'autre) et ainsi mieux comprendre des phénomènes physiques qui se produisent dans les miroirs, les loupes, les lunettes astronomiques....

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaître une isométrie
- construire l'image d'une figure par une isométrie
- caractériser une isométrie
- déterminer les expressions analytiques des isométries

Prérequis:



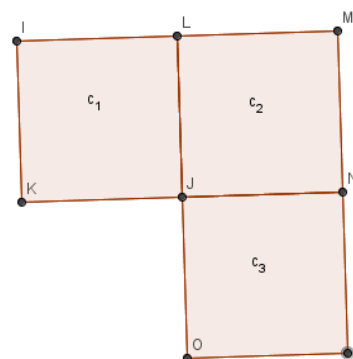
1. Qu'est-ce qu'un mouvement de rotation? Que faut-il pour qu'il y ait rotation?
2. Qu'est-ce qu'un mouvement de translation? Que faut-il pour qu'il y ait translation?
3. Comment construis-tu l'image d'un objet à travers un miroir plan?

Situation Problème:



Sur la figure suivante, c_1 , c_2 et c_3 sont des carrés de même côté.

1. Où doit-on placer un miroir pour que c_1 ait pour image c_3 par ce miroir?
2. Comment doit faire glisser c_1 pour se retrouver à c_3 ?
3. A partir de quel point et de quel angle doit-on tourner c_2 pour avoir c_1 ?

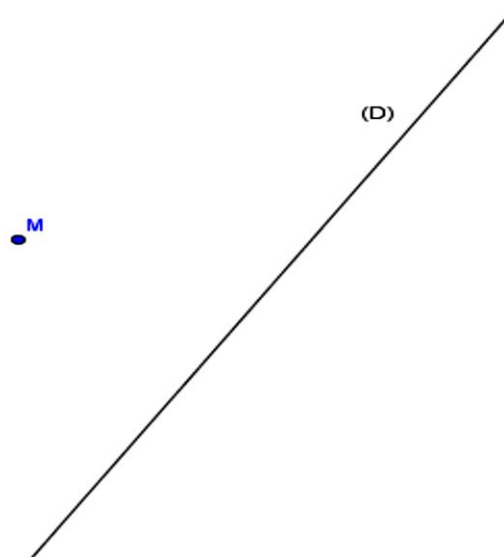


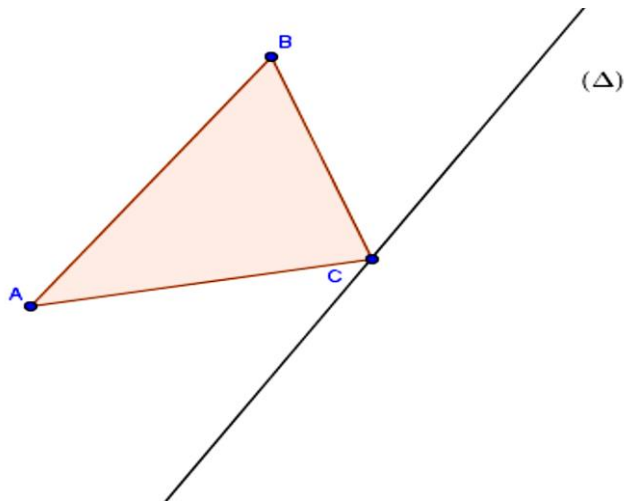
1. Rappels sur les transformations planes

Activité d'apprentissage :



1. Voici un point M et une droite (D).
 - a. Construis un point M' tel que (D) soit la médiatrice de [MM']
 - b. Comment sont les points M et M' par rapport à la droite (D)?
 - c. Soit I le milieu de [MM']. Caractérise le fait que (D) soit la médiatrice de [MM'] par deux propriétés.
2. Soit le triangle ABC suivant:
 - a. Construis les symétriques A', B' et C' respectifs des points A, B et C par la symétrie par rapport à (Δ).
 - b. Compare les propriétés géométriques des deux figures (nature, distances, aires, sens des angles orientés).



**RESUME :****Définition**

Soit f une application du plan dans lui-même.

1. Lorsque f est bijective (à tout point M du plan fait correspondre un et un seul autre point M'), on dit que f est une transformation.
2. On dit qu'un point M est fixe (ou invariant) par l'application f lorsque $f(M) = M$
3. Soit Σ une figure du plan (un ensemble de points quelconques).

On appelle image de Σ par f l'ensemble noté $f(\Sigma)$ défini par : $f(\Sigma) = \{f(M) ; M \in \Sigma\}$

Si $f(\Sigma) = \Sigma$, on dit que Σ est globalement invariante par f .

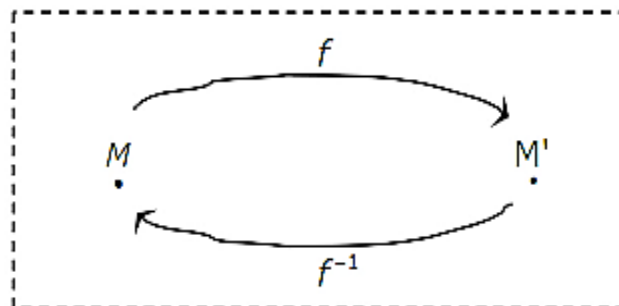
4. On appelle identité du plan la transformation notée Id définie par : $Id(M) = M$
5. Une transformation plane f est dite involutive lorsque $f^{-1} = f$ ou encore une transformation plane f est involutive si et seulement si $f \circ f = Id$.

Remarque

- $f(\Sigma)$ est encore appelé transformé de Σ par f .
- L'application identique (ou identité du plan) laisse invariant point par point toute figure du plan.
- Une figure est dite invariante point par point par une transformation f lorsque pour tout point M de cette figure on a $f(M) = M$.

Théorème et définition

Étant donnée une transformation f , l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $f(M) = M'$ est une transformation. Elle est appelée transformation réciproque de f et est notée f^{-1} .



2. TRANSLATIONS

Motivation :

Une translation permet de faire glisser une figure selon une direction, un sens et une longueur

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Déterminer la composée et l'expression analytique d'une translation.
- Reconnaître et caractériser une translation par son expression analytique.

Prérequis:



ABCD est un carré. Quelle est l'image des points A et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?



Situation Problème:

Monsieur Ambroise a un terrain ayant la forme d'un parallélogramme, lors du terrassement de la route, l'engin a emporté une des quatre bornes. Comment peut-il faire pour retrouver la position exacte où se trouvait cette borne ?

Activité d'apprentissage :



ABCD est un carré de sens direct et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On suppose que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé du plan.

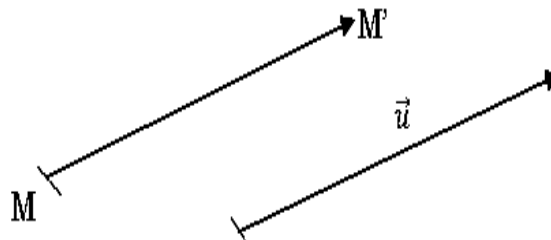
1. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$?
2. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t .
 - a. Justifier que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$
 - b. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

RESUME :

a. Définition

Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On note $t_{\vec{u}}(M) = M'$



On note $t_{\vec{u}}(M) = M'$ pour dire que le point M' est l'image du point M par $t_{\vec{u}}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ est l'application identique ($t_{\vec{0}} = Id$) ; tous les points du plan sont invariants.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point n'est invariant.
- Si f est une application du plan dans lui-même, alors f est une translation si et seulement si, les points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

b. Composée de deux translations.**Définition**

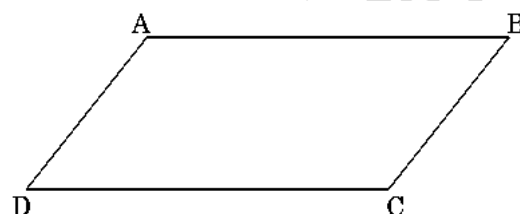
La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

- Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$. On dit que la composition des translations est commutative.
- Si $\vec{v} = -\vec{u}$, on obtient : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = Id$. Cette relation caractérise les bijections réciproques.
- Toute translation est une transformation du plan ; la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$ notée $(t_{\vec{u}})^{-1}$. $((t_{\vec{u}})^{-1})^{-1} = t_{\vec{u}}$

Exemple : Soit ABCD un parallélogramme.

On a : $t_{\vec{AB}} \circ t_{\vec{AD}} = t_{\vec{AC}}$; On a $t_{\vec{BC}} \circ t_{\vec{AB}} = t_{\vec{DC}} \circ t_{\vec{AD}}$;

On a $(t_{\vec{AD}})^{-1} = t_{\vec{CB}}$.

**d. Expression analytique d'une****Définition**

Le plan est muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit t une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t .

Déterminer l'expression analytique de t revient à exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M .

$$\text{On a : } t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

L'écriture $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ est l'expression analytique de translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice d'application

1. Reconnaître et caractériser l'application d'expression analytique $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$
2. ABCD est un parallélogramme. Quelle est la nature des transformations suivantes : $t_{\vec{AB}} \circ t_{\vec{CD}}$; $t_{\vec{AD}} \circ t_{\vec{AB}}$

Solution :

1. L'expression analytique $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ est celle de la translation t de vecteur $\vec{u}(-; 3)$
2. On a : $t_{\vec{AB}} \circ t_{\vec{CD}} = t_{\vec{AB} + \vec{CD}} = t_{\vec{AB} - \vec{DC}} = t_{\vec{AB} - \vec{AB}} = t_{\vec{0}}$ car $\vec{AB} = \vec{DC}$
Et $t_{\vec{AD}} \circ t_{\vec{AB}} = t_{\vec{AD} + \vec{AB}} = t_{\vec{AC}}$ car $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$ (résultante de deux vecteurs)

3. Les Symétries centrales

Motivation :

- Perception des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.
- Production des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Déterminer la composée et l'expression analytique d'une symétrie centrale.
- Reconnaître et caractériser une symétrie centrale par son expression analytique.



Prérequis: ABCD est un carré de centre O. I est un point extérieur au carré.

Détermine l'image A'B'C'D' du carré ABCD de centre O par la symétrie centrale de centre I.

Situation Problème:

Monsieur Ambroise a un hangar près d'un puits ayant la forme d'un pentagone. Ce hangar lui sert de lieu de repos en journée. En journée, il constate que les enfants le trouble avec ses collègues sous son hangar, il décide d'en construire un autre au-delà du puits de telle sorte que ce puits soit le centre de symétrie de ces deux hangars. Comment peut-il faire pour le second hangar ?

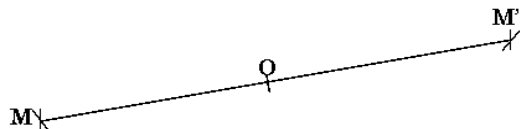
RESUME :

a. Définition

Définition

On appelle **Symétrie centrale** de centre O notée S_O l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. On note $S_O(M) = M'$ et on lit « M' est l'image du point M par S_O ».

M' est l'image du point M par S_O veut dire que O est le milieu de $[MM']$.



b. Expression analytique d'une Symétrie centrale.

Définition

Le plan est muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit S_O une **Symétrie centrale** de centre $O\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ son image par S_O . Déterminer l'expression analytique de S_O revient à exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

$$\text{On a : } S_O(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = -x + a \\ y' - b = -y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

L'écriture $\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$ est l'expression analytique de la symétrie de centre $O\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$

c. Composées de deux Symétries centrales.

Définition

La composée $S_{O'} \circ S_O$ des symétries centrales de centre respectifs O et O' est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ ($S_{O'} \circ S_O = t_{2\overrightarrow{OO'}}$).

4. Symétries orthogonales

Motivation :

- Perception des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.
- Production des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Caractériser la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.
- Déterminer l'expression d'une symétrie orthogonale.

Prérequis:



ABCD est un carré de centre O. Détermine l'image des points B et C par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Situation Problème:

Monsieur Ambroise a un terrain où il a construit une maison ayant la forme d'un pentagone. Il possède un autre terrain au-delà de la route rectiligne qui passe devant sa concession. Il décide d'en construire une autre maison identique à celle qu'il habite au-delà de cette route de telle sorte que cette route soit l'axe de symétrie de ces deux maisons. Comment peut-il faire pour la seconde maison ?



Activité d'apprentissage :

ABCD est un carré de sens direct. Soit M un point du plan, M_1 son symétrique par rapport à la droite (CD) et M' le symétrique de M_1 par rapport à (AB) ; I et J les projetés orthogonaux respectifs de M sur (CD) et (AB).



1. Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{CB}$

2. On pose $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$

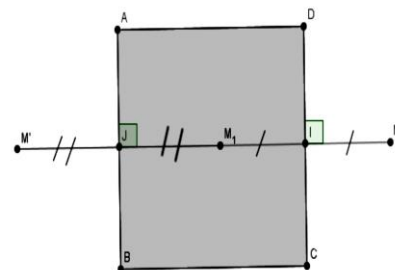
a. Vérifie que $f(M) = M'$

b. Justifie que f est une translation de vecteur

$2\overrightarrow{CB}$

3. On suppose que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé du plan. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son symétrique par rapport à la droite (AB)

c. Justifier que dans ce repère $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$



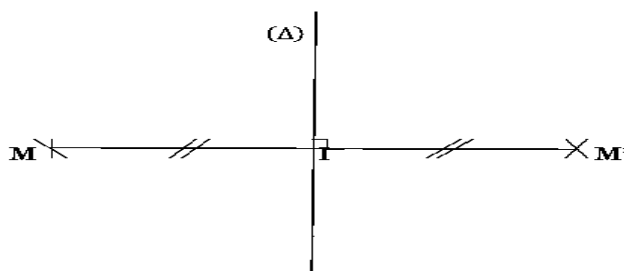
RESUME :

a. Définition

Définition

On appelle **Symétrie** d'axe (Δ) ou **Symétrie orthogonale** d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}$ notée $S_{(\Delta)}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ et le milieu I de $[MM']$ appartient à (Δ). On note $S_{(\Delta)}(M) = M'$ et on lit « M' est l'image du point M par $S_{(\Delta)}$ ».



b. Expression analytique d'une Symétrie orthogonale.**Exemple :**

Le plan est muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (D) la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$ et S_D la symétrie orthogonale d'axe (D) . Déterminons l'expressions analytique de S_D .

La droite (D) a pour vecteur normal $\vec{n}(\frac{1}{-2})$. Soit $M'(\frac{x'}{y'})$ l'image de $M(\frac{x}{y})$ par S_D .

M' est image de M par S_D veut dire que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \text{Les vecteurs } \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} &\Rightarrow \det(\overrightarrow{MM'}; \vec{n}) = \begin{vmatrix} x' - x & 1 \\ y' - y & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow -2(x' - x) - (y' - y) = 0 \\ &\Rightarrow -2x' - y' = -2x - y \quad (1) \end{aligned}$$

Or $I(\frac{\frac{x'+x}{2}}{\frac{y'+y}{2}})$ milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D) donc on a :

$$\frac{x'+x}{2} - 2\left(\frac{y'+y}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow x' + x - 2y' - 2y + 2 = 0 \Rightarrow x' - 2y' = -x + 2y - 2 \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent le système $\begin{cases} -2x' - y' = -2x - y \\ x' - 2y' = -x + 2y - 2 \end{cases}$. En résolvant ce système,

$$\text{on obtient } \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases} \text{ Donc l'expression analytique de } S_D \text{ est } \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

c. Expressions analytiques de symétries orthogonales particulières.

Le plan est muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $S_{(\Delta)}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ) , $M(\frac{x}{y})$ un point du plan et $M'(\frac{x'}{y'})$ son image par $S_{(\Delta)}$. On se propose de déterminer l'expression analytique de $S_{(\Delta)}$ dans les trois cas particuliers.

• (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.**Propriété**

Soit (Δ) la droite d'équation $y = b$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ) .

Les points M et M' ont même abscisse et H est le milieu de $[MM']$.

Donc $x' = x$ et $y + y' = 2b$. l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = b$ est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$

• (Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées.**Propriété**

Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ) .

Les points M et M' ont même ordonnées et H est le milieu de $[MM']$.

Donc $x + x' = 2a$ et $y' = y$. L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = a$ est : $\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$

• **(Δ) est la première bissectrice du repère.**

Propriété

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$

Soit P, Q, et P', Q' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur les axes du repère. Les images respectives par $S_{(\Delta)}$ des points P et Q sont les points P' et Q'.

Donc $x' = y$ et $y' = x$. L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice est : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

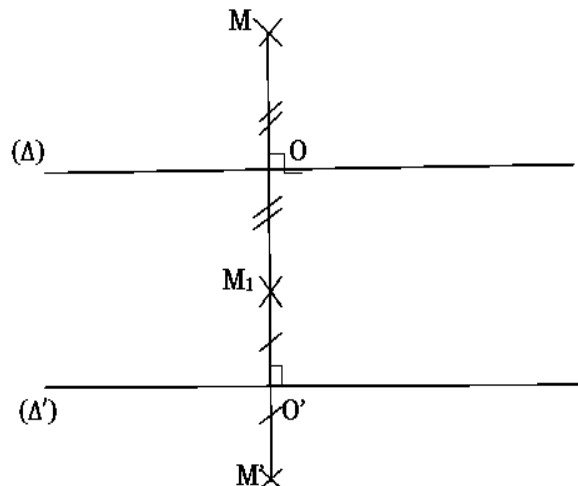
d. Composées de deux Symétries Orthogonales

• **Composées de deux Symétries Orthogonales d'axes parallèles.**

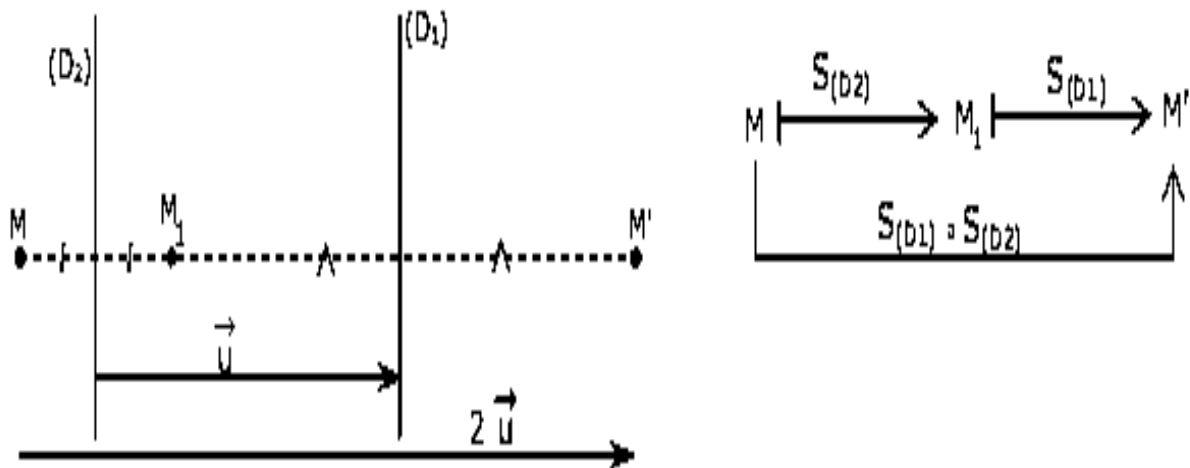
Propriété

Soit $M_1 = S_{(D_1)}(M)$ et $M' = S_{(D_2)}(M_1)$. On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1O'} = 2\overrightarrow{OO'}$

Donc la composée $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ des symétries orthogonales d'axes parallèles respectifs (D_1) et (D_2) est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ ($S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ où O est un point de (D_1) et O' son projeté orthogonal sur (D_2)).



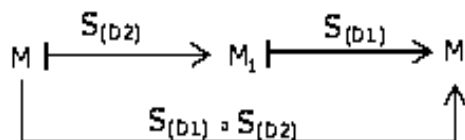
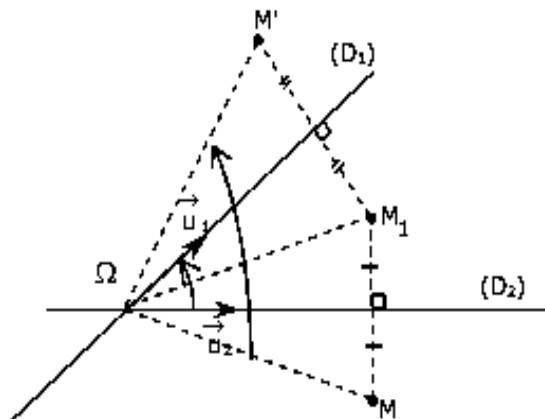
Réciproquement toutes translations $t_{\vec{u}}$ de vecteur non nul $\vec{u}$ est la composée de deux symétries



• Composées de deux Symétries orthogonales d'axes sécants.

Propriété

Soit (D_1) et (D_2) les droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Soit $M_1 = S_{(D_1)}(M)$ et $M' = S_{(D_2)}(M_1)$. Posons $\theta = \text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})$.



On a : $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM'}) = 2(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})$.

Donc la composée $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ des symétries orthogonales d'axes sécants respectifs (D_1) et (D_2) est la rotation de centre O intersection de (D_1) et (D_2) et d'angle de mesure $2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})$.

$(S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}) = r(O, 2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2}))$ où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les vecteurs directeurs respectifs des droites (D_1) et (D_2) .

Remarque :

- Lorsque les axes (D_1) et (D_2) sont confondus, on obtient $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)} = Id$.
- Toute symétrie orthogonale est une transformation du plan ; la transformation réciproque de $S_{(D_1)}$ est $S_{(D_1)}$.
- Si les axes (D_1) et (D_2) sont parallèles alors $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ et $S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)} = t_{2\overrightarrow{O'O}} = t_{-2\overrightarrow{OO'}}$.
- De même si les axes (D_1) et (D_2) sont sécants alors $S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)} = (O, 2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_2; \vec{u}_1}))$ et $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)} = r(O, 2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2}))$ et donc $r(O, 2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})) = r(O, -2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_2; \vec{u}_1}))$.
- Les transformations $S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$ et $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ sont donc réciproque l'une de l'autre c'est-à-dire que $(S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)})^{-1} = (S_{(D_1)})^{-1} \circ (S_{(D_2)})^{-1} = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$.
- Si (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, alors $2(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2}) = \hat{\pi}$ et $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ est la symétrie de centre O.
- Le langage « rotation d'angle α » au lieu de « rotation d'angle $\hat{\alpha}$ » est un abus de langage.

LECON 2 : Les rotations

Motivation :

En géométrie plane, une rotation permet de tourner une figure autour d'un point et d'un certain angle

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Décomposition d'une rotation en composée des symétries orthogonales.
- Reconnaître et caractériser la composée de deux rotations.

Prérequis:

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

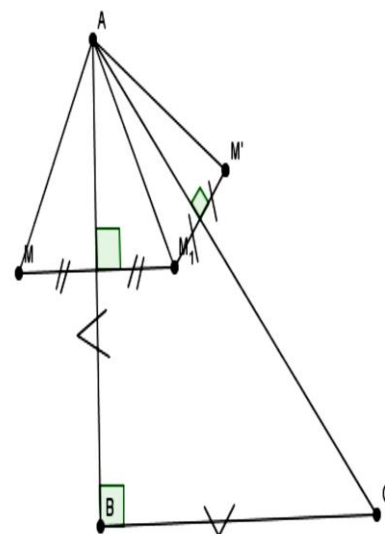
1. Quelle est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
2. Trouve l'image des points A et C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Situation Problème:

Activité d'apprentissage :

ABC est un triangle rectangle isocèle en B de sens direct. Soit M un point du plan, M_1 son symétrique par rapport à la droite (AB) et M' le symétrique de M_1 par rapport à (AC).

1. Démontrer que $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM_1}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM_1})$ et $(\overrightarrow{AM_1}; \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{AM_1}; \overrightarrow{AC})$
2. En déduire que $\text{mes}(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$
3. On pose $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$. Justifier que $f(M) = M'$ puis en déduire que $f = r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$
4. Soit $r_1 = r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = r\left(A; \frac{\pi}{4}\right)$, N un point du plan et N' son image par $r_1 \circ r_2$
 - a. Démontrer que $r_1 \circ r_2(A) = A$
 - b. Démontrer que $\text{mes}(\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AN'}) = \frac{3\pi}{4}$
 - c. En déduire que $r = r_1 \circ r_2$



RESUME :

a. Définition

Définition

On appelle **Rotation** de centre O et d'angle de mesure α notée $r(O, \alpha)$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ \text{Mes}(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \hat{\alpha} \end{cases}$$

On note $r(O, \alpha)^{(M)} = M'$ et on lit « M' est l'image du point M par $r(O, \alpha)$ ».

Propriété**Propriété1 :**

- Soit $r(O, \alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α .

Pour toute droite (D_1) passant par O, il existe une droite (D_2) et une seule telle que :

$S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)} = r(O, \alpha)$ tel que (D_1) est fixé et (D_2) est l'image de (D_1) par $r\left(O, \frac{1}{2}\alpha\right)$ c'est-à-dire $r\left(O, \frac{1}{2}\alpha\right)^{(D_1)} = (D_2)$.

- Soit f une application du plan dans lui-même et $\hat{\alpha}$ un angle non nul. f est une rotation d'angle α si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', on a :

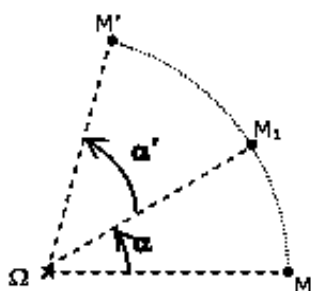
$$\begin{cases} M'N' = MN \\ Mes(\widehat{M\vec{N}; M'\vec{N}'}) = \hat{\alpha} \end{cases}$$

Propriété2 :

- Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (D_1) et (D_2) est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})$.
- Réciproquement toutes rotations de centre O et d'angle α est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants (D_1) et (D_2) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ tel que (D_1) est fixé et (D_2) est l'image de (D_1) par $r\left(O, \frac{1}{2}\alpha\right)$ c'est-à-dire $r\left(O, \frac{1}{2}\alpha\right)^{(D_1)} = (D_2)$.

b. Composée de deux rotations○ **Composée de deux rotations de même centre****Propriété**

Soit $r = r(O, \alpha)$ et $r' = r(O, \alpha')$ deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' . ror' ou $r'or$ est la rotation de centre O d'angle $\alpha + \alpha'$. ($ror' = r'or = r(O, \alpha + \alpha')$.)



$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{r(\Omega, \alpha)} & M_1 & \xrightarrow{r'(\Omega, \alpha')} & M' \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & r(\Omega, \alpha) \circ r'(\Omega, \alpha') & & & \end{array}$$

Cas particulier

- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors ror' et $r'or$ sont des applications identiques
- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{\pi}$, alors ror' et $r'or$ sont des symétries de centre O.
- Pour tout couple (α, α') de nombres réels, on a : $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$; donc : $ror' = r'or$.
On dit que la composition des rotations de même centre est commutative.
- Si $\alpha' = -\alpha$, on obtient $r(O, -\alpha) \circ r(O, \alpha) = r(O, \alpha) \circ r(O, -\alpha) = Id$.

Nous retrouvons la relation caractérisant les bijections réciproques $r(O, -\alpha)$ et $r(O, \alpha)$.

- La rotation réciproque de $r = r(O, \alpha)$ notée r^{-1} est la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\alpha$ et définie par $r^{-1} = r(O, -\alpha)$.

○ **Composée de deux rotations de centre distinct.**

Propriété

Soit r et r' deux rotations de centre distincts et d'angles respectifs α et α' .

- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \widehat{2\pi}$, alors $r' \circ r$ est une translation.
- Si $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' = \hat{\pi}$, alors $r(O, \alpha) = S_O$ et $r'(O', \alpha') = S_{O'}$. De plus $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \widehat{2\pi}$, donc $r' \circ r$ est une translation.
- Soit $O'' = S_{O'}(O)$; on a : $S_{O'} \circ S_O(O) = O''$ et $\overrightarrow{OO''} = 2\overrightarrow{OO'}$. Donc $r' \circ r = t_{\overrightarrow{OO''}}$.
La composée de deux symétries centrales est une translation.

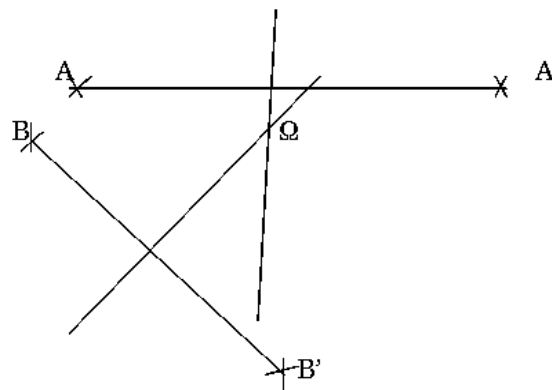
Théorème de la décomposition des rotations

Soit $r = r(O, \alpha)$ et $r' = r(O', \alpha')$. Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{0}$ alors on procède par le théorème de la décomposition des rotations comme suit :

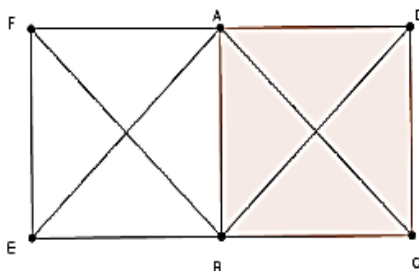
On choisit les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) telles que $r(O, \alpha) = S_{(D_3)} \circ S_{(D_1)}$ et $r(O', \alpha') = S_{(D_2)} \circ S_{(D_3)}$ et on obtient $r' \circ r = S_{(D_2)} \circ S_{(D_3)} \circ S_{(D_3)} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$. On envisage deux cas :

- Si (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point O , de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ alors $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.
- Si (D_1) et (D_2) sont parallèles alors $r' \circ r$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ où O est un point de (D_1) et O' son projeté orthogonal sur (D_2) .
- Dans le cas particulier précédent, on a : $r' \circ r = t_{\overrightarrow{OO''}}$ et $r \circ r' = t_{\overrightarrow{O'O''}}$. La composée de deux rotations de centre distinct n'est pas commutative.

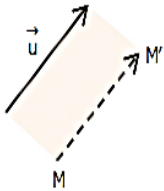
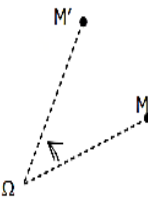
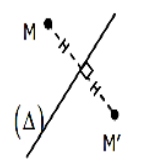
Remarque : Si f est une rotation qui transforme A en A' et B en B' alors le centre de cette rotation est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$.



Exemple : ABCD est un carré de centre O et de sens direct, E et F les symétriques respectifs des points C et D par rapport à la droite (AB) .



Soit $r_1 = r(A, \frac{\pi}{2})$ et $r_2 = r(B, \frac{\pi}{2})$. La composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle π (Symétrie centrale); De plus $r_2 \circ r_1(A) = r_2(A) = E$ et $r_2 \circ r_1(B) = r_2(D) = F$. Donc le centre de cette symétrie centrale est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AE]$ et $[BF]$ c'est-à-dire le centre du carré AFEB.

Transformation f	Définition géométrique $f: M \mapsto M'$	figure	Point(s) invariant(s)	Bijection réciproque f^{-1}	Expression analytique $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	Propriété caractéristique Pour tous points A et B d'image respectives A' et B' ...
$(t_{\vec{u}})$ Translation de vecteur $\vec{u}$	$M' = t_{\vec{u}}(M)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$		Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}} = \text{Id}$ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors aucun pt n'est invariant	$t_{-\vec{u}}$	$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$	$\overline{A'B'} = \overline{AB}$
(S_{Ω}) Symétrie de centre Ω	$M' = S_{\Omega}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ (Ω est le milieu du segment [MM'])		Le centre Ω est le seul point invariant	S_{Ω}	$\begin{cases} x' - \alpha = \alpha - x \\ y' - \beta = \beta - y \end{cases}$	$\overline{A'B'} = -\overline{AB}$
$r_{(\Omega, \theta)}$ Rotation d'angle θ et centre Ω	Si $M \neq \Omega$, M' est tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$ Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$		Le centre Ω est le seul point invariant	$r_{(\Omega, -\theta)}$	$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + k_1 \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + k_2 \end{cases}$ k_1 et k_2 réels	$A'B' = AB$ et $\text{Mes}(\widehat{AB, A'B'})$ $= \theta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$S_{(\Delta)}$ Réflexion d'axe (Δ)	Si $M \in (\Delta)$ alors $M' = M$ Si $M' \notin (\Delta)$ alors (Δ) est la médiatrice de [MM']		L'ensemble des points invariants par $S_{(\Delta)}$ est la droite (Δ)	$S_{(\Delta)}$	Exercice : Étudier les cas particuliers où (Δ) est : 1. une droite d'équation $x = a$ (a réel) 2. une droite d'équation $y = b$ (b réel) 5. la droite d'équation $y = -2x + 3$	

N.B.:

Soient A, A', B et B' quatre points du plan tels que $AB = A'B'$ et (AB) et $(A'B')$ sécantes. Alors il existe une unique rotation qui transforme A en A' et B en B' . L'angle de cette rotation est l'angle $\theta = \text{mes}(\widehat{AB, A'B'})$ et son centre est le point Ω de rencontre des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.

Soient $r = r(\Omega; \theta)$, $\Omega(a; b)$, $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ tels que $r(M) = M'$. Alors on a :

$$\begin{cases} x' - a = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta \\ y' - b = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta \end{cases} \quad \text{c'est son expression analytique.}$$

LECON 3 : ISOMETRIES DU PLAN

Motivation :

- Perception des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.
- Production des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Reconnaître et caractériser la composée deux isométries.
- Reconnaître les déplacements et antidéplacements du plan

Prérequis:



1. Cite quelques transformations du plan qui conservent les distances.
2. Cite quelques transformations du plan qui conservent les angles orientés, puis celles qui ne conservent pas les angles orientés.

Situation Problème:



1. Déterminer l'axe de symétrie composé par ces deux textes
2. Comparer les dimensions de ces deux textes
3. Quels sont les effets que possèdent les isométries planes sur les figures géométriques planes et les solides de l'espace ?

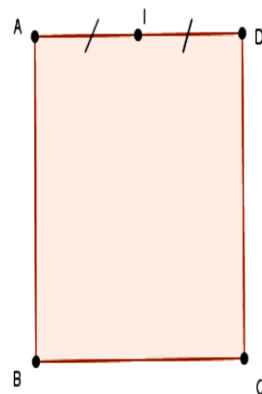
La symétrie axiale
affiche les mots
avec un effet
miroir

La symétrie axiale
affiche les mots
avec un effet
miroir

Activité d'apprentissage :



1. Soit f une application du plan qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$. Soit $N \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ayant pour image le point $N' \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ par f . Comparer les distances MN et $M'N'$
2. ABCD est un carré de centre O et de sens direct, I le milieu du segment [AD]. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$. On pose $f = r \circ t$
 - a. Trouve une droite (Δ_1) telle que $r = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(AB)}$
 - b. Trouve une droite (Δ_2) telle que $t = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta_2)}$
 - c. En déduire que $f = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$
 - d. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f :



RESUME :

1. Définition

Définition

On appelle **isométrie plane**, toute application du plan dans lui-même qui conserve les distances.
Toute isométrie plane est une transformation et sa réciproque est une isométrie plane.

2. Propriété de conservation du produit scalaire

Définition

soit f une isométrie.

- Pour tous points A, B, C , et D d'images respectives A', B', C', D' par f , on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$
- Si le point G est le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$ alors le point G' image du point G par f est le barycentre des points pondérés $(A', a), (B', b), (C', c)$ où A', B', C' sont les images respectives par f des points A, B, C .

3. Isométrie et configurations.

a. Images des figures usuelles.

Propriété

Soit f une isométrie, A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par f . L'image par f :

- de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$. du cercle (C) de centre O et de rayon r est le cercle (C') de centre O' et de rayon r où O' est l'image de O par f .

Vocabulaire : Une figure est dite globalement invariante par une transformation si elle est sa propre image par cette transformation. Ainsi, toute droite perpendiculaire à l'axe d'une symétrie orthogonale est globalement invariante par cette symétrie orthogonale.

b. Conservation des mesures d'angles

Propriété

Soit f une isométrie, ABC un triangle et $A'B'C'$ les images respectives des points A, B, C par f .

On a : $(\widehat{BAC}) = (\widehat{B'A'C'})$. Donc les isométries conservent la mesure des angles orientés.

c. Conservation du contact

Propriété

Soit f une isométrie, (D) une droite, A un point de (D) , (C) un cercle tangent à (D) en A et (D') , $A', (C')$ les images respectives de $(D), A, (C)$ par f . La droite (D') est tangente à (C') en A' .

Remarque : On déduit de cette propriété que deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents. On dit que les isométries conservent le contact entre deux cercles. Plus généralement, admettra que les isométries conservent le contact.

d. Conservation des aires.

Propriété

Soit f une isométrie, ABC un triangle et $A'B'C'$ les images respectives des points A, B, C par f . Les triangles A, B, C et $A'B'C'$ ont les mêmes dimensions (sont isométriques) et ont même aire.

Remarque : L'image d'un cercle étant un cercle de même rayon, les isométries conservent aussi l'aire des cercles. Plus généralement, on admettra que les isométries conservent les aires.

4. Utilisations des isométries

Méthode

Pour résoudre un problème de lieu géométrique à l'aide des transformations, on se ramène à la situation suivante : le point P' , dont on cherche le lieu, est l'image par une transformation d'un point P , décrivant un ensemble connu. La résolution se fait en deux étapes.

- Reconnaître une transformation f qui, au point P , associe le point P' ;
- Déterminer l'image par f de l'ensemble (ζ) décrit par le point P .

5. Isométrie et problème de constructions

Méthode

Pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

6. Isométries et démonstrations de propriétés

Méthode : Configurations géométriques et transformations.

Pour résoudre un problème de géométrie (lieu, construction, démonstration d'une propriété, ...), une transformation s'avère utile. Le choix de cette transformation est suggéré par la configuration géométrique existante ou à construire :

- Points alignés, droites concourantes : toutes isométries et homothétie ;
- Orthogonalité, parallélisme : toutes isométries et homothétie ;
- Triangle isocèle : symétrie orthogonale ;
- Triangle rectangle isocèle : symétrie orthogonale, quart de tour ;
- Triangle équilatéral : symétrie orthogonale, rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$;
- Parallélogramme : symétrie centrale, translation ;
- Rectangle, losange : symétrie centrale, symétrie orthogonale ;
- Carré : symétrie centrale, symétrie orthogonale, quart de tour ;

Configuration de Thalès : homothétie.

7. COMPLEMENT SUR LES ISOMETRIES

1. Reconnaissance des isométries

❖ Composée d'isométries

Propriété

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Vocabulaire : Un groupe de transformation du plan est un ensemble (E) de transformation tel que :

- la composée de deux éléments de (E) est un élément de (E).
- La réciproque d'un élément de (E) est un élément de (E).

❖ **Déplacements et antidéplacements**

Parmi les isométries connues, on constate que certaines, comme les translations, conservent les angles orientés, alors que d'autres, comme les symétries orthogonales, transforment tout angle orienté en son opposé. Ces résultats conduisent à distinguer deux sortes d'isométries.

Définition

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Propriété

Soit f et g deux isométries du plan.

- Si f et g sont des déplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
- Si f et g sont des antidéplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
- Si f est un déplacement et g un antidéplacement, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ est un antidéplacement.
- Si f est un déplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.
- La composée d'un nombre paire d'antidéplacement est un déplacement.
- La composée d'un nombre impaire d'antidéplacement est un antidéplacement.
- Une transformation du plan d'expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = a'x + b'y + q \end{cases}$ est une isométrie (rotations, symétries, translations) lorsque $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ ou $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = -1$.
- Une transformation du plan d'expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = a'x + b'y + q \end{cases}$ est une rotation lorsque $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ et on a : $\cos \alpha = \frac{a+b'}{2}$.
- Une transformation du plan d'expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = a'x + b'y + q \end{cases}$ est une similitude (homothétie) lorsque $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 1$.

Une rotation d'angle α a pour expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + p \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + q \end{cases}$

- Une isométrie d'expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = a'x + b'y + q \end{cases}$ est un déplacement ou une isométrie positive (rotation ou translation) lorsque $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$.
- Une isométrie d'expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = a'x + b'y + q \end{cases}$ est un antidéplacement ou une isométrie négative (symétries) lorsque $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = -1$.

Remarque :

- L'ensemble des déplacements est un groupe de transformations du plan.
- L'ensemble des antidéplacements n'est pas un groupe de transformations du plan car la composée de deux antidéplacements est un déplacement et non un antidéplacement.

2. Triangles isométriques

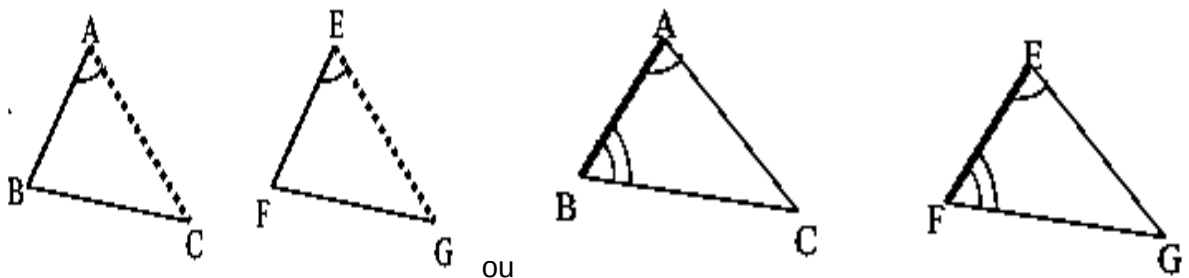
Définition

- On dit que les triangles ABC et A'B'C' sont **isométrique**, ou **superposable**, s'il existe isométrie f telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C'.
- Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont superposables après retournement.

Théorème

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.

Si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.



8. Critères d'isométrie

Méthode

Pour montrer que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques il suffit de montrer que

$$AB = A'B' \quad , \quad BC = B'C' \quad \text{et} \quad AC = A'C'.$$

- Les deux triangles ont leurs côtés deux à deux de mêmes longueurs.
- Les deux triangles ont un angle (non orienté) de même mesure, compris entre deux côtés de mêmes longueurs.
- Les deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures.

LECON 4 : Homothéties

Motivation :

En géométrie, une homothétie est une transformation permettant d'agrandir ou de réduire une figure.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Déterminer l'expression analytique d'une homothétie
- Reconnaître et caractériser la composée de deux homothéties de même centre
- Reconnaître et caractériser la composée d'une homothétie et d'une translation

Prérequis:



ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O, I est le milieu du segment [AD] et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images des points I et O par h ?

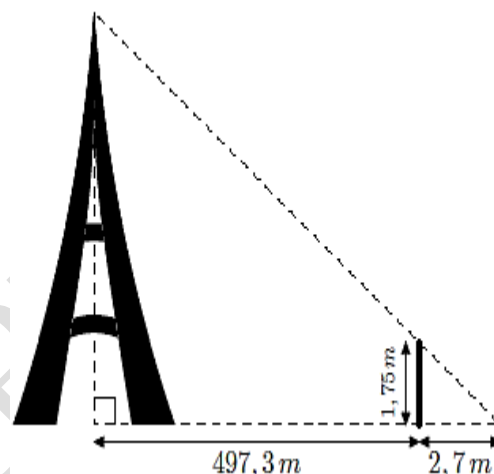
Situation Problème:



Un homme mesurant $1,75m$ se tenant droit aux alentours de la tour Eiffel se place de sorte que l'ombre lui passe juste au-dessus de la tête. Son ombre tombe à $2,7m$ de lui et celle-ci se trouve à $500m$ du centre de la tour Eiffel.

Quel est le rapport qui existe entre la hauteur de la tour Eiffel et la hauteur de cet

homme ?



1. Les homothéties et leurs utilisations.

Activité d'apprentissage :



ABC est un triangle tel que $AB=3cm$; $AC=4cm$. A tout point M, on associe le point M' le barycentre des points (A; 1)(B; 1)(M; 1).

1. Justifier l'existence de M'.
2. Écrire la relation vectorielle liant les points A, B, M et M'.
3. On note f l'application qui à tout point M on associe M'.
 - a. montre qu'il existe un unique point I invariant par f .

- b. Trouver une relation entre $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ puis conclure sur la nature de f

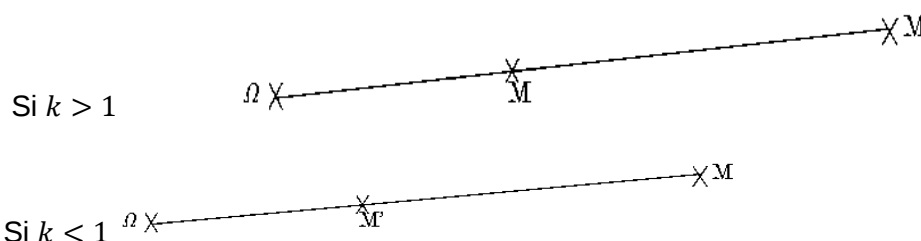
RESUME :

a. définition

Définition

On appelle **homothétie** de centre Ω et de rapport k (k étant un réel non nul) notée $h(\Omega ; k)$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$. On note $h(M) = M'$ pour dire que le point M' est l'image du point M par h .



Propriétés

Soit f une application dans lui-même, k un nombre réel

- Si $k = 1$, alors h est l'application identique ; tous les points du plan sont invariants.
- Si $k = -1$, alors h est une symétrie centrale de centre Ω .
- Si $k \neq \{-1; 1\}$, alors h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Si k un nombre réel différent de 0 et 1.

- f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tout points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
- Si f est une homothétie qui transforme A en A' et B en B' alors le centre de cette homothétie est point d'intersection des droites (AA') et (BB') .

b. Expression analytique d'une homothétie.**Définition**

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit k un nombre réel non nul et Ω le point de coordonnées $(x_0; y_0)$.

- On considère l'homothétie h de centre Ω et de rapport k . soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par h .

$$\text{On a : } M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$$

L'expression analytique de h est : $\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$

- Soit f une application dans lui-même, qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$, où p et q sont des nombres réels.
 - ✓ Si $k = 1$, f est une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
 - ✓ Si $k \neq 1$, considérons deux points $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et leurs images respectives $A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ et $B' \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ par f . on a : $\overrightarrow{A'B'} = (x'_2 - x'_1)\vec{i} + (y'_2 - y'_1)\vec{j} = k(x_2 - x_1)\vec{i} + k(y_2 - y_1)\vec{j} = k\overrightarrow{AB}$.

Cette égalité caractérise une homothétie de rapport k . Son centre est le point invariant, c'est-à-dire

$$\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tel que : } \begin{cases} x = kx + p \\ y = ky + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{1-k} \\ y = \frac{q}{1-k} \end{cases}. \text{ Donc son centre est le point } \Omega \begin{pmatrix} \frac{p}{1-k} \\ \frac{q}{1-k} \end{pmatrix}.$$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit k un nombre réel non nul et f une application dans lui-même, qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$, où p et q sont des nombres réels.

- ✓ Si $k = 1$, f est une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
- ✓ Si $k \neq 1$; f est une homothétie de rapport k .

2. Propriétés de conservation

a. Conservation du barycentre.

On sait que les homothéties conservent le milieu. La propriété suivante est une généralisation de ce résultat.

Propriétés

Soit h une homothétie, (A, a) , (B, b) , (C, c) des points pondérés. A' , B' , C' les images respectives des points A , B , C par h , G un point et G' son image par h .

G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) , (C, c) si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés (A', a) , (B', b) , (C', c) .

b. Conservation du point de contact

Propriétés

Soit h une homothétie, (D) une droite, A un point de (D) , (C) un cercle tangent à (D) en A , (D') , A' et (C') les images respectives de (D) , A et (C) par h . la droite (D') est tangente à (C') en A' .

Remarque : On déduit immédiatement de cette propriété que deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents. On dit que les homothéties conservent le contact entre deux cercles. Plus généralement, on admettra que les homothéties conservent le contact.

3. COMPOSITION D'HOMOTHETIES

a. Composition de deux homothéties de même centre

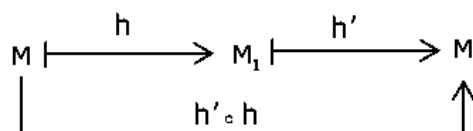
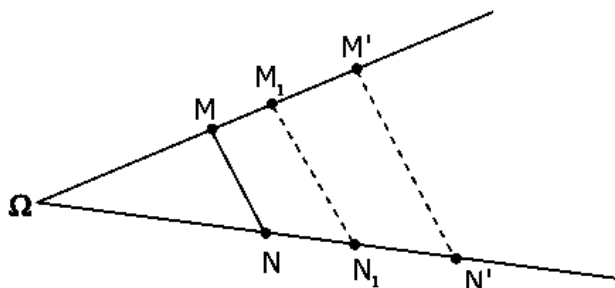
Propriétés

Soit h et h' deux homothéties de centre Ω et de rapport respectifs k et k' . hoh' est l'homothétie de centre Ω et de rapport kk' .

Cas particulier :

Si $kk' = 1$, alors hoh' est l'application identique.

Si $kk' = -1$, alors hoh' est la symétrie de centre Ω .



Remarque : pour tout couple (k, k') de nombres réels ; on a : $kk' = k'k$, donc $hoh' = h'oh$. On dit que, pour tout point Ω , la composée des homothéties de centre Ω est commutative.

b. Composition de deux homothéties de centres distincts**Propriétés**

Soit $h_{(\Omega,k)}$ et $h'_{(\Omega',k')}$ deux homothéties de centres distincts Ω et Ω' .

- ✓ Si $k'k \neq 1$, alors $h'oh$ est une homothétie de rapport $k'k$;
- ✓ Si $kk' = 1$, alors $h'oh$ est une translation.

Remarque : La droite $(\Omega\Omega')$ est globalement invariante par les homothéties h et h' ; elle est donc globalement invariante par les transformations hoh' . Ainsi :

- Si $h'oh$ est une homothétie de centre Ω , alors Ω appartient à la droite $(\Omega\Omega')$.
- Si $h'oh$ est une translation de vecteur $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Cette remarque ne suffit pas pour déterminer le centre de l'homothétie (ou le vecteur de la translation).

- Généralement la composée de deux homothéties de centre distinct n'est pas commutative.

c. Composée d'une homothétie et d'une translation**Propriétés**

Soit h une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation. hot et toh sont des homothéties de rapport k .

Remarque : La droite (D) passant par le centre de l'homothétie h et dirigée par le vecteur de translation t (si ce vecteur est non nul), est globalement invariante par les transformations h et t . Par conséquent, les centres des homothéties hot et toh appartiennent à (D) . Cette remarque ne suffit pas pour déterminer les centres des homothéties hot et toh .

4. Homothéties et isométries**a. Exemples de composées d'homothéties et d'isométries (Similitudes)****Définition**

On appelle similitude toute composée d'une homothétie et d'une isométrie.

- Si l'isométrie est un déplacement, on dit que la similitude est directe.
- Si l'isométrie est un antidéplacement, on dit que la similitude est indirecte.

Cas particulier : L'application identique est à la fois une homothétie et une isométrie. On déduit que :

- Les déplacements et les homothéties sont des similitudes directes.
- Les antidéplacements sont des similitudes indirectes.

Propriétés

- Soit h une homothétie de rapport k et i une isométrie.
Les similitudes hoi et ioh multiplient les distances par $|k|$.
 $|k|$ est appelé rapport des similitudes hoi et ioh .

- Les similitudes directes conservent angles orientés.
- Les similitudes indirectes transforment tout angle orienté en son opposé.

En effet, les homothéties et les déplacements conservent les angles orientés, et les antidéplacements transforment les angles orientés en leurs opposés.

- Soit S une similitude directe, composée d'une homothétie et d'une rotation d'angle α .

Pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $(\widehat{MN, M'N'}) = \hat{\alpha}$.

α est appelé angle de la similitude directe S.

Remarque : Les similitudes étant des composées d'homothéties et d'isométries, elles vérifient les propriétés communes à ces deux transformations :

- Les similitudes conservent l'alignement.
- Les similitudes conservent le milieu.
- Les similitudes conservent le parallélisme et l'orthogonalité.
- Les similitudes conservent le contact.

5. Triangles semblables.

Définition

On dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables s'il existe une similitude s telle que les points A, B, C ont respectivement pour images A', B' et C' par S.

Propriétés

- Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

N.B : Pour montrer que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables il suffit de montrer qu'il existe un réel k non nul tel que : $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$, $A'C' = kAC$.

Module 24 : GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Chapitre 12 : Orthogonalité dans l'espace

Motivation :

Les objets autour de nous ont des formes volumiques et ne peuvent être entièrement décrits que suivant leur épaisseur, hauteur, mais aussi par des objets géométriques tels que les droites et les plans. Ce cours nous permettra de mieux décrire les objets de notre environnement mais aussi nous aidera à construire facilement certains objets dont nous avons besoin pour la décoration ou pour d'autres utilités.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Réalisation d'une maquette d'un solide
- Assembler les pièces d'un meuble
- Décrire un solide
- Produire des objets

LECON 1 : Droites Orthogonales

Motivation :

La conception et la construction des charpentes par exemple utilisent la notion d'orthogonalité de droites. Cette leçon nous donne des outils pour mieux comprendre et décrire ces objets.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Montrer que deux droites sont coplanaires
- Montrer que deux droites sont orthogonales ou perpendiculaire

Prérequis:

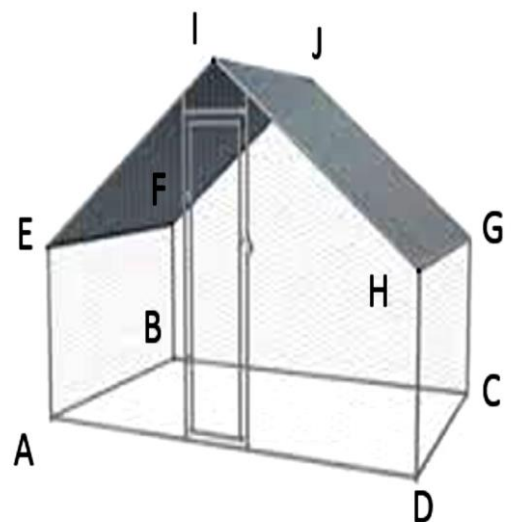
- Construire deux droites perpendiculaires.
- Construire un pavé droit.

Situation Problème:

Pour réaliser la case de son petit chien M. AMBROISE fait appel à un technicien qu'il lui propose le schéma ci-contre.

Pour que les gouttes de pluie ne fassent pas trop de bruit, le technicien affirme que la pente du toit est telle que si l'on rapproche les droites (IH) et (BA) elles seront perpendiculaires. Son schéma est-il conforme à cette affirmation ?

seront perpendiculaires. Son schéma est-il conforme à cette affirmation ?



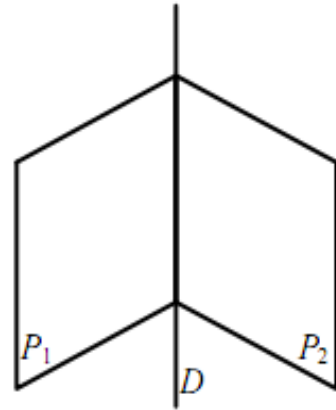
Activité d'apprentissage :

On considère la figure ci-dessus.

1. Justifier que les droites (EF) et (AB) appartiennent au même plan.
2. Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
3. Comment sont les droites (IH) et (IJ) ?
4. Que peut-on dire des droites (IH) et (AB) ? Justifier.

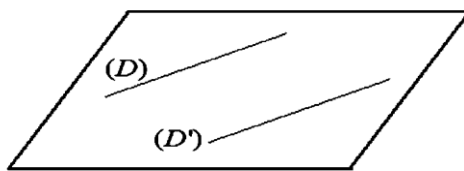
Règles de bases de la géométrie dans l'espace

- Il existe une et une seule droite de l'espace passant par deux points distincts.
- Il existe un et un seul plan de l'espace passant par trois points non alignés.
- Quand tous les éléments (points, droites, ...) d'un problème de l'espace sont coplanaires, toutes les règles (Thalès, Pythagore, etc. ...).
- Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

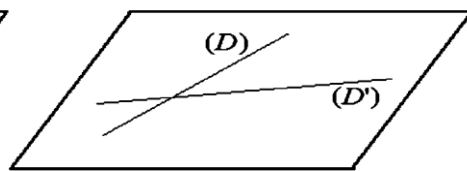


Définition

- On dit que deux droites (D) et (L) sont coplanaires si elles appartiennent au même plan.

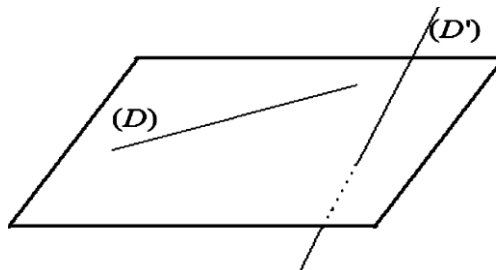


$(D) \parallel (D')$



(D) et (D') sécantes

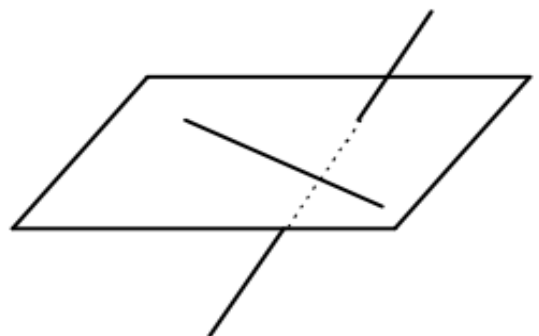
(D) et (D') sont coplanaires



(D) et (D') sont Non coplanaires

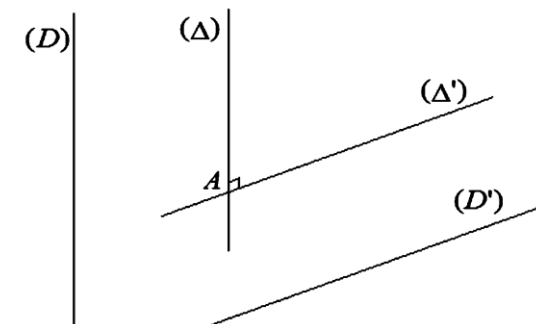
- Quatre points (ou plus) appartenant à un même plan sont dits "coplanaires"
- Deux droites (ou plus) incluses dans un même plan sont dites "coplanaires"
- Deux droites de l'espace sont :
 - ✓ soit coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles).
 - ✓ soit non coplanaires.

Attention : Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas nécessairement sécantes



Définition

On dit que deux droites (D) et (D') sont orthogonales lorsque les droites parallèles à (D) et à (D') passant par un même point sont perpendiculaires.
Lorsque (D) et (D') sont orthogonales. On note $(D) \perp (D')$.



$(D) \perp (D')$ si, A étant un point quelconque, les droites (Δ) et (Δ') passant par A , respectivement parallèles à (D) et (D') , sont perpendiculaires.

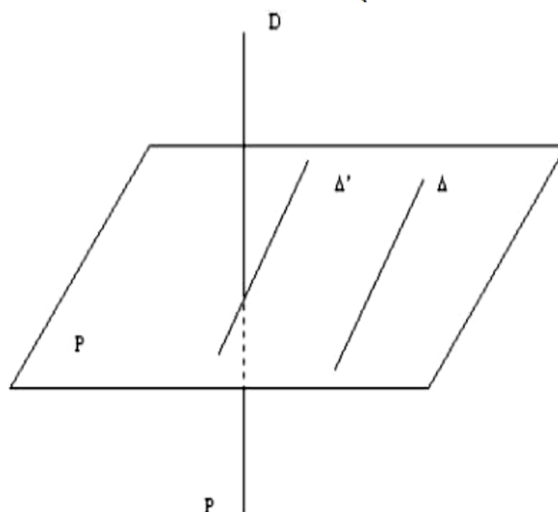
Remarque :

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

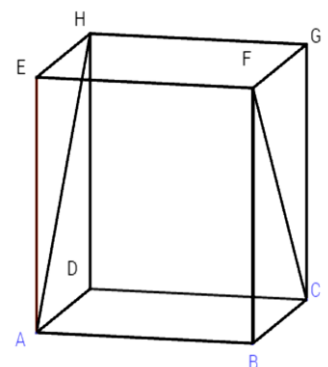
Propriété

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. (D) , (D') et (Δ) sont des droites contenant des arêtes du pavé droit.

$$\begin{cases} (D') // (D) \text{ et} \\ (\Delta) \perp (D) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$$



Il est clair que D et Δ ne sont pas coplanaires mais elles sont orthogonales car $\Delta' // \Delta$ et $\Delta' \perp D$.

**Remarque :**

Dans l'espace deux droites orthogonales à une même droite ne sont pas forcément parallèles.

$(EF) \perp (AH)$ et $(EF) \perp (FC)$ alors que (AH) et (FC) ne sont pas parallèles.

Exemple : ABCDEFGH est un cube. Démontrer que les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

Solution : (AB) et (GH) sont parallèles et distinctes donc déterminent le plan (ABG).

Dans le plan (ABG), (GH) // (AB) et $GA = AB$. ABGH est donc un parallélogramme d'où (AH) // (BG).

Dans (BCG) les diagonales [CF] et [BG] du carré BCGF ont des supports perpendiculaires. Donc $(BG) \perp (CF)$.

On a : (AH) // (BG) et $(BG) \perp (CF)$ donc $(AH) \perp (FC)$.

Exercice d'application :

Soit ABCDEFGH un pavé droit.

1. Justifier que les droites (BF) et DH sont dans le même plan et préciser ce plan.

2. Comment sont les droites (DH) et (EH) ?

3. Que peut-on dire des droites (EH) et (BF) ?

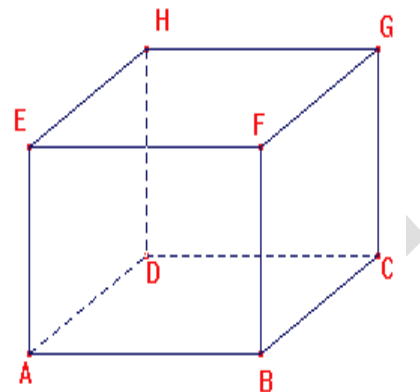
Solution :

1. Justifions que (BF) et (DH) sont dans le même plan et précisons ce plan.

Les droites (BF) et (DH) sont strictement parallèles donc définissent le plan (DBF).

2. Les droites (DH) et (EH) sont perpendiculaires.

3. Les droites (EH) et (BF) sont orthogonales car les parallèles à ces deux droites sont perpendiculaires.



LECON 2 : Droites et Plans Orthogonaux

Motivation :

Pour couler une dalle, les ingénieurs en bâtiment doivent placer des supports orthogonaux au plan de la dalle. Il est donc important de bien positionner les supports pour pouvoir supporter la masse de la dalle. Cette leçon donne les outils de base pour réaliser ces ouvrages.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

Prérequis:



- Construire deux droites perpendiculaires.
- Construire un pavé droit.
- Justifier que deux droites sécantes définissent un plan.

Activité d'apprentissage :



On considère la figure ci contre.

1. Justifier que $(EG) \perp (HF)$ et que $(HF) \perp (AE)$.
2. Justifier que les droites (AE) et (EG) sont deux droites sécantes du plan (EGC).
3. Que peut-on dire des droites (HF) et (CG) ? Justifier.

4. Comment est la droite (HF) par rapport au plan (EGC) ?

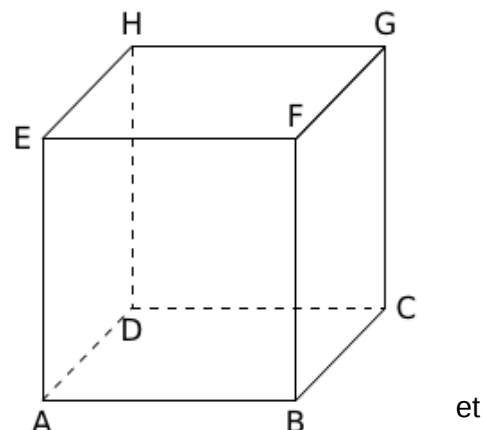
Solution :

1. (EG) et (HF) sont les diagonales du carré EFGH donc elles sont perpendiculaires.

(AE) est parallèle à (FB) et $(FB) \perp (HF)$ d'où $(HF) \perp (AE)$.

2. Les droites (AE) et (EG) sont deux droites sécantes au point E et définissent ainsi le plan (EGC).

3. Les droites (HF) et (CG) sont orthogonales car $(CG) \parallel (AE)$

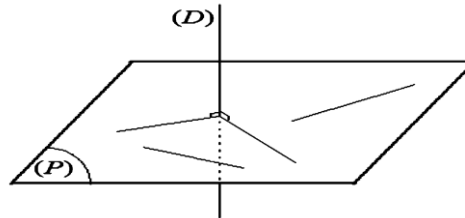


$(HF) \perp (AE)$ donc $(HF) \perp (CG)$.

4. La droite (HF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EGC) .

Résumé :

On dit qu'une droite (D) et un plan (P) sont orthogonaux lorsque la droite (D) est orthogonale à toutes les droites du plan (P) .



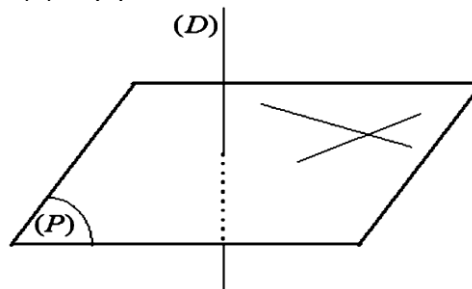
Si $(D) \perp (P)$ alors (D) est orthogonale

Propriété

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

(D) et (D') sont deux droites sécantes d'un plan (P) .

Si $(L) \perp (D)$ et $(L) \perp (D')$ alors $(L) \perp (P)$.



$(D) \perp (P)$ si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P)

Il existe une droite et une seule passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.

Il existe un plan et un seul passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

Exercice d'application :

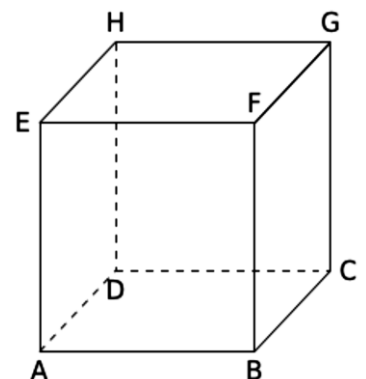
ABCDEFGH est un cube.

- Justifier que les droites (BF) et (BC) sont coplanaires et sécantes.
- Quelle est la position relative de la droite (AB) par rapport aux droites (BF) et (BC) ?
- Justifier que la droite (AB) est orthogonale au plan (CBF) .
- Que peut-on dire des droites (AB) et (CF) ? Conclure.

Solution :

- Les droites (BF) et (BD) sont sécantes et les points B , F et D sont trois points non alignés et donc définissent un plan contenant les droites (BF) et (BD) . D'où ces droites sont coplanaires et sécantes.
- La droite (AB) est perpendiculaire aux droites (BF) et (BD) .
- La droite (AB) est orthogonale au plan (CBF) car orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- (AB) est parallèle à (EF) et (EF) est orthogonale à (CF) d'où $(AB) \perp (CF)$.

On conclut que la droite (AB) est orthogonale à toutes les droites du plan (CBF) .



Exercice : ABCD est un tétraèdre régulier. On se propose de démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

1. Soit I le milieu du segment [CD]. Démontrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).
2. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

LECON 3 : Plans perpendiculaires

Motivation :

En général, dans la construction des bâtiments, les murs doivent être perpendiculaire au plan du sol. C'est ce que nous remarquons en regardant les murs de la classe. Cette précaution permet d'éviter les fissures sur les murs. Cette leçon permet d'aborder la notion de plans perpendiculaires.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de montrer que deux plans sont perpendiculaires.

Prérequis:



- Construire deux droites perpendiculaires.
- Construire un cube.
- Quelles sont les positions possibles de deux plans dans l'espace ?

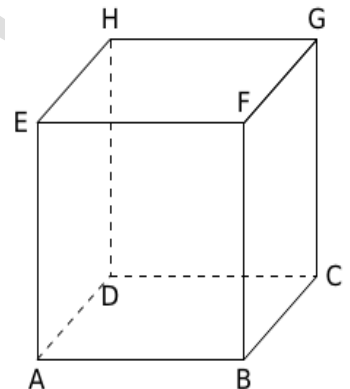
Activité d'apprentissage :



On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

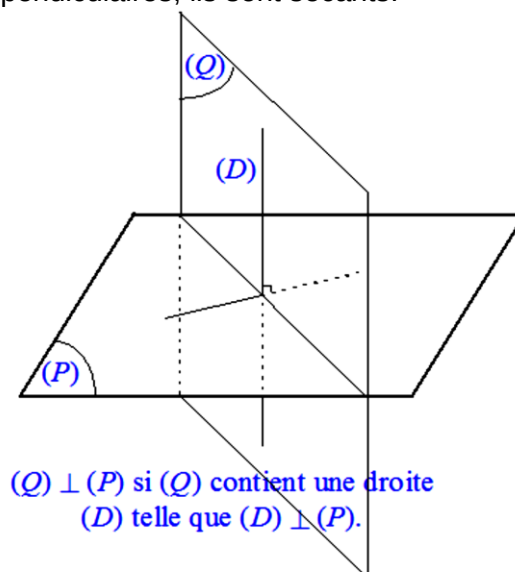
1. Citer une droite du plan (BFG) orthogonale à (ABC).
2. Citer une droite du plan (ABC) orthogonale à (BFG).
3. Justifier que le plan (EFG) est parallèle au plan (ABC).
4. Citer sur la figure une droite strictement parallèle à (BFG) et donner la position relative de cette droite par rapport au plan (ABC).

plan (ABC).



Résumé :

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.
Si deux plans sont perpendiculaires, ils sont sécants.

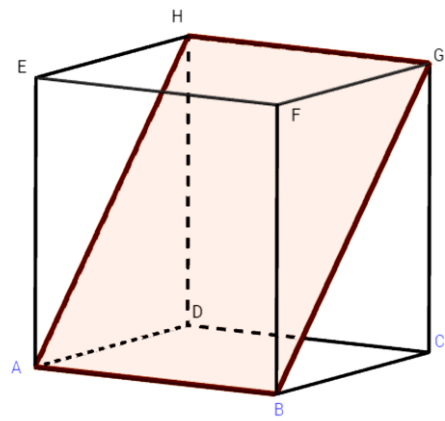
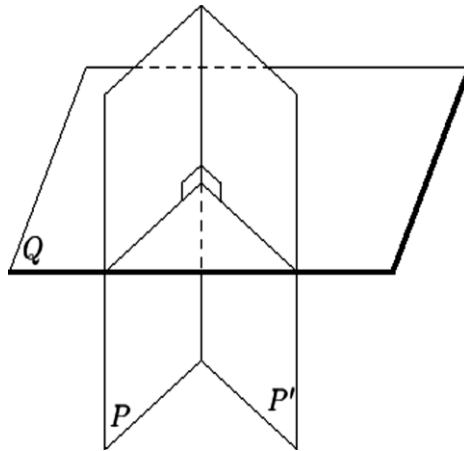


Conséquences :

1. Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P), tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).
2. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété

Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite d'intersection.

**Exercice d'application :**

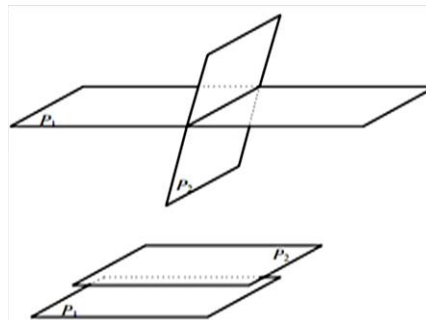
ABCDEFGH est un cube. Démontrer que les plans (AED) et (ABG) sont perpendiculaires.

Exercice : ABC est un triangle, H son orthocentre. Soit (Δ) la droite orthogonale en H au plan (ABC) et D un point de (Δ) différent de H. Démontrer que les plans (ADH) et (BCD) sont perpendiculaires.
Faire une figure.

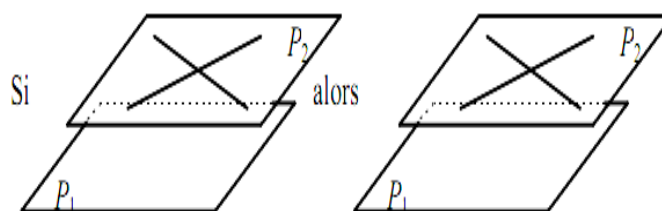
Propriété

Deux plans de l'espace sont :

- ✓ Soit sécants
- ✓ Soit parallèles
- ✓ Soit confondus

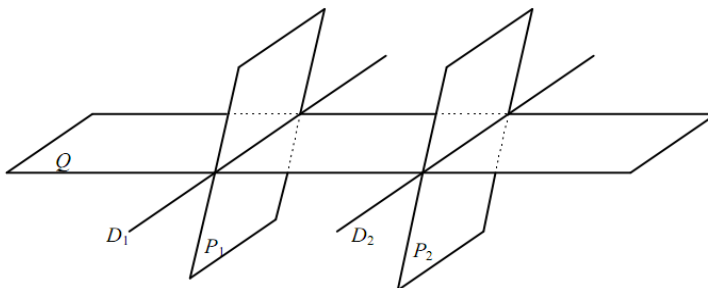


Si deux droites sécantes (d'un plan) sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

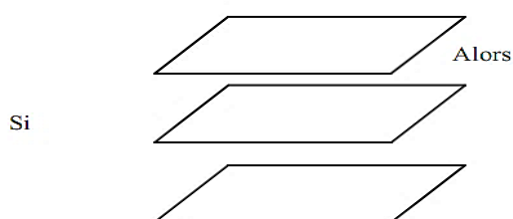


Propriété

Un plan Q sécant à deux plans (strictement) parallèles P1 et P2 les coupe suivant deux droites parallèles (D1) et (D2).



Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

**Récapitulatif des théorèmes**

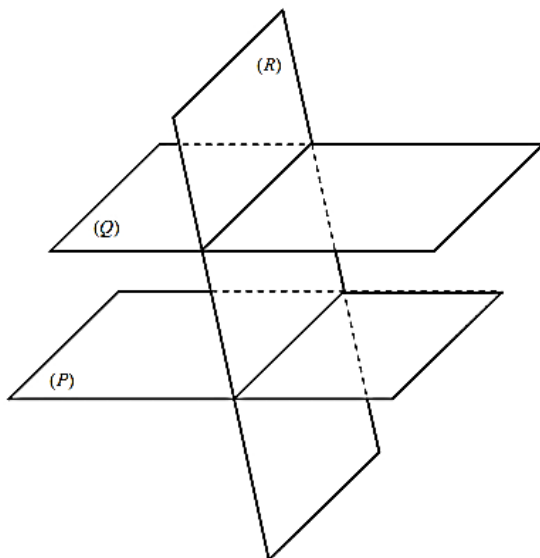
- ✚ Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
On écrit : $\begin{cases} (D) \perp (D') \\ (\Delta) // (D') \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D)$
- ✚ Si deux sont parallèles, toute orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
On écrit : $\begin{cases} (\Delta) // (D') \\ (D) \perp (D') \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$
- ✚ Etant donné un point A et un plan (P) il existe une unique droite passant par A et orthogonale à P.
- ✚ Etant donné un point A et une droite (D) il existe un unique plan passant par A et orthogonale à (D).
- ✚ Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- ✚ Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, tout plan (P) orthogonal à (D) est orthogonal à (D').
On écrit : $\begin{cases} (\Delta) // (D') \\ (D) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (D') \perp (P)$.
- ✚ Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, toute droite (D) orthogonale à (P) est orthogonale à (P'). On écrit : $\begin{cases} (P) // (P') \\ (D) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (D) \perp (P')$.
- ✚ Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales à un même plan (P), alors elles sont parallèles.
On écrit : $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (D') \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (D) // (D')$.
- ✚ Si deux plans (P) et (P') sont orthogonaux à une même droite (D), alors ils sont parallèles. On écrit : $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (D) \perp (P') \end{cases} \Rightarrow (P) // (P')$.
- ✚ Soit (D) une droite orthogonale à un plan (P). Toute droite (D') orthogonale à (D) est parallèle à (P).

Récapitulatif des théorèmes

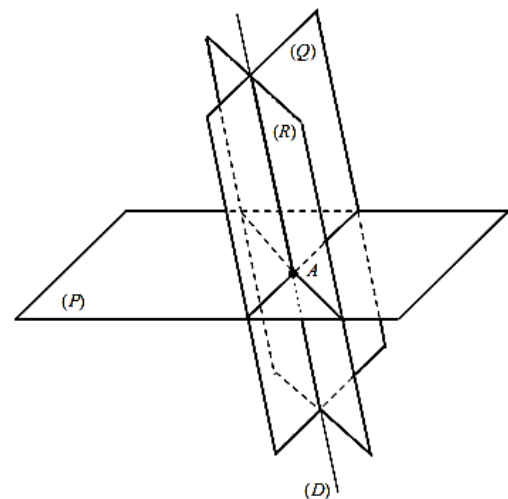
- ✚ Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) , tout plan (P') parallèle à (D) est perpendiculaire à (P) . On écrit : $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (P') \parallel (D) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (P')$.
- ✚ Si deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires, toute droite (D) perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. On écrit : $\begin{cases} (P) \perp (P') \\ (D) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (D) \perp (P')$.
- ✚ Si deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires, tout plan (Π) parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre. On écrit : $\begin{cases} (P) \perp (P') \\ (P) \perp (\Pi) \end{cases} \Rightarrow (P') \perp (\Pi)$.
- ✚ Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si, il est orthogonal à leur droite d'intersection.

SITUATION A

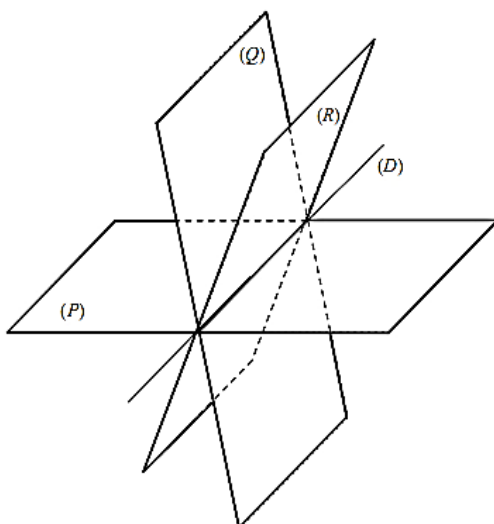
Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles

SITUATION B :

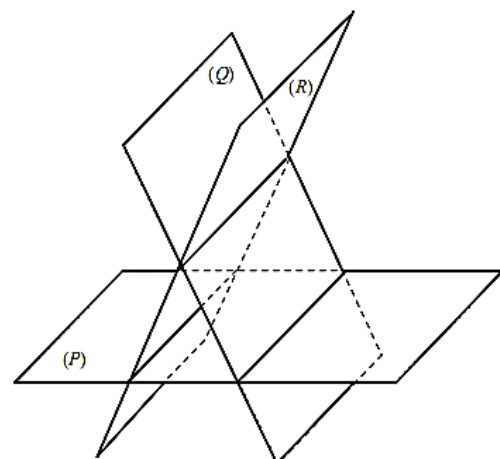
Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P)

SITUATION C

Trois plans sécants suivant une même droite (D)

SITUATION D

Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles



Module 24 : GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Chapitre 13 : GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Motivation :

L'apprentissage de la géométrie en général et de la géométrie dans l'espace en particulier concourt à la construction du raisonnement à la familiarisation avec des techniques calculatoires telles que les calculs d'aires et des volumes. De plus la géométrie dans l'espace participe à la conception, à la représentation, et à la réalisation des chefs d'œuvres architecturaux et de tous les objets technologiques qui nous entourent

LECON 1 : VECTEURS DE L'ESPACE

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Montrer que deux droites sont coplanaires
- Montrer que deux droites sont orthogonales ou perpendiculaire

Prérequis:

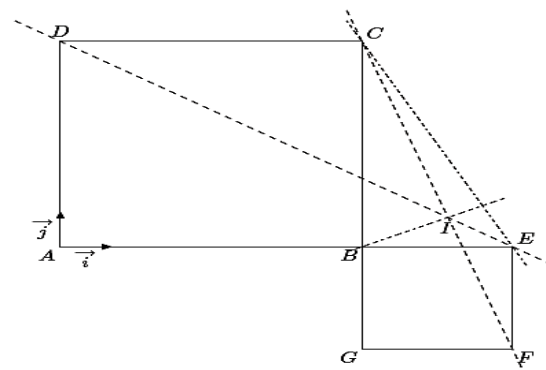


1. ABCDEFGH est un cube. Démontrer que les plans (AED) et (ABG) sont perpendiculaires.
2. ABC est un triangle, H son orthocentre. Soit (Δ) la droite orthogonale en H au plan (ABC) et D un point de (Δ) différent de H. Démontrer que les plans (ADH) et (BCD) sont perpendiculaires.
3. Faire une figure.

Situation Problème:



Dans l'espace, on considère les deux carrés ABCD et BEFG puis le trièdre CBIE de sommet C représentés ci-dessous : Démontrer que le système de vecteurs $S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ est un système de vecteurs non coplanaires et forment en même temps une base de l'espace euclidien.



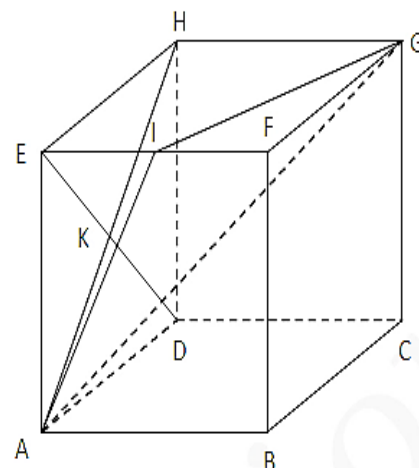
1. Extension à l'espace de la notion de vecteur

Activité d'apprentissage :



Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1 cm représenté par la figure ci-contre. I est le milieu de [EF] et K est le centre du carré ADHE. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I et K et des vecteurs $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IA}$
3. En déduire que la droite (BK) est orthogonale au plan (IGA) .



Propriété

Les énoncées suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un réel et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Pour tous points A, B, C de ξ , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{W}$ et tous les nombres réels λ, μ on a :

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	(5) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(2) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$	(6) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
(3) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\vec{u}$	(7) $1\vec{u} = \vec{u}$
(4) $\ \vec{u} + \vec{v}\ \leq \ \vec{u}\ + \ \vec{v}\ $. (Inégalité triangulaire).	(8) $\ \lambda\vec{u}\ = \lambda\ \vec{u}\ $.

Remarque :

- De même que le parallélogramme est la configuration géométrique associée à la somme de deux vecteurs du plan, le pavé est la configuration associée à la somme de trois vecteurs de l'espace.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$
- Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace ; tout vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \alpha\vec{w}$ où λ, μ, α sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

2. Barycentre**Propriété**

La définition et les propriétés du barycentre des points pondérés du plan se généralisent à l'espace. Ainsi étant donné des points A, B, C et D de ξ a, b, c, d des nombres réels tels que $a + b + c + d \neq 0$, il existe un unique point G de ξ tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Le point G est appelé barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$ et (D, d) .

3. Repères de droites et de plan de l'espace.**a. Repères d'une droite de l'espace****Propriété**

1. Soit A un point de ξ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.

L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite de repère $(A, \vec{u})$.

2. Soit A et B deux points de ξ .

- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) .
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in [0; +\infty[$, est la demi-droite $[AB)$.
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in [0; 1]$, est le segment $[AB]$.

b. Repère d'un plan de l'espace

Soit A un point de ξ et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$. on désignent par B et C les points de ξ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les points A, B, C définissent un plan $(\mathcal{P})$.

- D'après les résultats établis en géométrie plane, le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $(\mathcal{P})$ et, pour tout M de $(\mathcal{P})$, il existe un unique (λ, μ) de nombre réels tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

- Réciproquement, soit (λ, μ) un couple de nombre réels et M le point de ξ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, on admet que M appartient à $(\mathcal{P})$.

c. Repères d'une droite de l'espace

Propriété

Soit A un point de ξ et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$. L'ensemble des points M de ξ tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$; $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, est plan de l'espace.

Ce plan est appelé plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$. On le note : $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

d. vecteurs coplanaires.

Définition

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$, O et O' deux points de ξ . On désigne par A, B, C, A', B', C' les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'} = \vec{w}$. On suppose que les points O, A, B, C appartiennent à un même plan $(\mathcal{P})$. De repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Il existe deux nombres réels λ et μ tels que : $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$. Donc $\overrightarrow{O'A'} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$; A' appartient au plan $(\mathcal{P}')$ de repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. On démontre de même que les points B' et C' appartiennent à $(\mathcal{P}')$. Ainsi, les points O', A', B' et C' sont coplanaires. On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. On peut généraliser l'étude précédente à un nombre quelconque de vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$ et $\vec{u}_n$ de l'espace sont dits coplanaires si, étant donné un point O de ξ et les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ définis par $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u}_1$; $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u}_2$... $\overrightarrow{OA_n} = \vec{u}_n$, les points O, $A_1, A_2, \dots$ et A_n sont coplanaires. Cette définition est indépendante du choix du point O.

Remarque :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours coplanaires, puisque, étant donné un point o et les points A, B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, il existe au moins un plan contenant les points O, A et B.
- Trois vecteurs peuvent être non coplanaires, les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ sont coplanaires si et seulement si les points O, A, B, C sont les sommets d'un tétraèdre.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors pour tout vecteurs $\vec{w}$, les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Propriété

- Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$. $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que les coefficients soient tous nuls.
- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ sont **non coplanaires** si et seulement si le seul triplet (α, μ, λ) de nombres réels tels que : $\alpha \vec{u} + \mu \vec{v} + \lambda \vec{w} = \vec{0}$ est le triplet $(0; 0; 0)$.

4. BASES ET REPERES

a. Base de $\mathcal{W}$

Propriété fondamentale des coordonnées d'un vecteur

Soit $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteurs $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition

- Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **coplanaires** est **appelé base de $\mathcal{W}$**
- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}$ un vecteur. L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque : Dire « on munit $\mathcal{W}$ de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ » signifie que les coordonnées (x, y, z) de tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ ont exprimées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On écrit simplement : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u} + \vec{u}') \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $(\lambda\vec{u}) \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

b. Base orthogonale, base orthonormée**Définition**

- Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.
- Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$.
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$

c. Repère de l'espace**Définition**

- On appelle repère de l'espace ξ :
 - Ou bien un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de point non coplanaires ;
 - Ou bien un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où O est un point de ξ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.
- Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère et M un point de ξ .
- L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = c$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\xi(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vocabulaire :

- Le point O est appelé origine du repère.
- Les nombres réels x, y, z sont appelés respectivement abscisse, ordonnée et cote du point M.
- Les droites de repère $(O, \vec{i})$, $(O, \vec{j})$ et $(O, \vec{k})$ sont appelés axes des coordonnées du repère.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonal lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

d. Représentation d'un point dans un repère.

E est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M le point de coordonnées (x, y, z) .
Pour placer le point on peut utiliser la construction suivante.

- On place sur la droite de repère $(O, \vec{i})$ le point P_1 tel que : $\overrightarrow{OP_1} = x\vec{i}$
- On place sur la droite de repère $(O, \vec{j})$ le point P_2 tel que : $\overrightarrow{OP_2} = y\vec{j}$
- On place sur la droite de repère $(O, \vec{k})$ le point P_3 tel que : $\overrightarrow{OP_3} = z\vec{k}$
- On construit le point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$
- On construit le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_3}$

On a : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le dernier point construit est le point cherché.

e. Calculs dans un repère

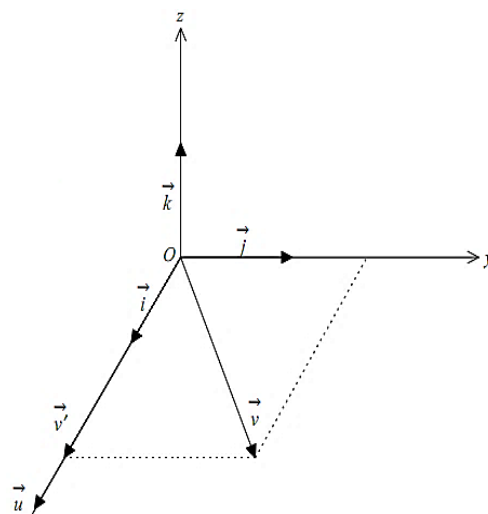
Propriété

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et a, b, c trois nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$.

- On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

- Le milieu de $[AB]$ est $I \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ est $G \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{a + b + c} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{a + b + c} \\ \frac{z_A + z_B + z_C}{a + b + c} \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



5. PRODUIT SCALAIRE

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}$, si les $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs sont non nuls.

Remarque:

1. Le produit scalaire de par lui-même est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$.
On a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; d'où : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété

Pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{W}$, pour tout nombre réel k, on a :

- | | |
|--|---|
| (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ | (3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ |
| (2) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ | (4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ |

Expressions du produit scalaire et la norme d'une base orthonormée.**Propriété**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarque : cette propriété n'est pas applicable si la base n'est pas orthonormée.

Conséquence : soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

LECON 2 : ÉQUATION CARTÉSIENNE ET REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE**1. EQUATION CARTESIENNES D'UN PLAN****a. Vecteur normal à un plan****Propriété**

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace, de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle vecteur normal à $(\mathcal{P})$ tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Cette définition est indépendante du choix des vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$.

Remarque :

- $\vec{n}$ est un orthogonal à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il est vecteur directeur d'une droite (D) orthogonale à $(\mathcal{P})$.
- Si $\vec{n}$ est un orthogonal à un plan $(\mathcal{P})$ et M, N deux points de $(\mathcal{P})$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$.
- Un plan possède une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires.

Propriété

1. Soit A point de ξ et $\vec{n}$ un vecteur non nul de .
Il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $(\mathcal{P})$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ et A un point de $(\mathcal{P})$.
3. Pour tout point M de ξ , on a : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Remarques : Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, on a :

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

b. Equation cartésienne d'un plan

Propriété

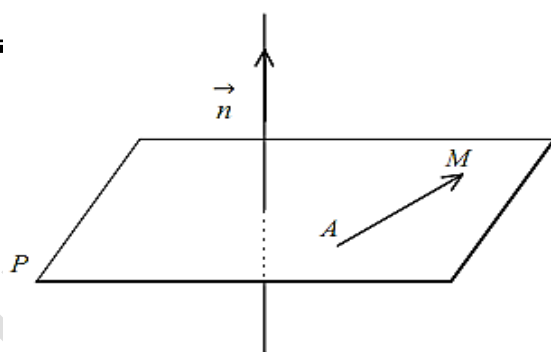
Soit a, b, c des nombres réel tels que $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$.

1. Tout plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ de , on a : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
2. Toute équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
3. Toute équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.
4. Réciproquement, tout plan de vecteurs directeurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Exemple : Déterminons l'équation cartésienne du plan passant par $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On sait que tout plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne de la forme
 $(P): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): 3x - 2y + 5z + d = 0$.
 Or $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in (P)$ donc $3 \times 3 - 2 \times 1 + 5 \times (-2) + d = 0$
 $\Rightarrow d = -3$.

Donc l'équation cartésienne du plan passant par $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est :
 $(P): 3x - 2y + 5z - 3 = 0$.

**Remarque:**

- Dans n'importe quel repère, même non orthonormé tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation de cette forme est l'équation cartésienne d'un plan, lorsque a, b et c ne sont pas tous nuls. Mais, lorsque le repère n'est pas orthonormé, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ n'est généralement pas un vecteur normal au plan.
- Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de (), pour tout nombre réel k non nul, $k(ax + by + cz + d) = 0$ est aussi une équation cartésienne de ().

Exemple :

$3x - y - 2z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Le plan passant par l'origine du repère et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, a pour équation cartésienne : $3x - y + 2z = 0$.

c. Représentation paramétrique d'un plan

Définition

La représentation paramétrique du plan passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et

$$\vec{e}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ est } \begin{cases} x = x_0 + a\alpha + a'\gamma \\ y = y_0 + b\alpha + b'\gamma \\ z = z_0 + c\alpha + c'\gamma \end{cases} (\alpha; \gamma) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement toute représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_0 + a\alpha + a'\gamma \\ y = y_0 + b\alpha + b'\gamma \\ z = z_0 + c\alpha + c'\gamma \end{cases} (\alpha; \gamma) \in \mathbb{R}^2$

est celle du plan passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

d. Distance d'un point à un plan**Définition**

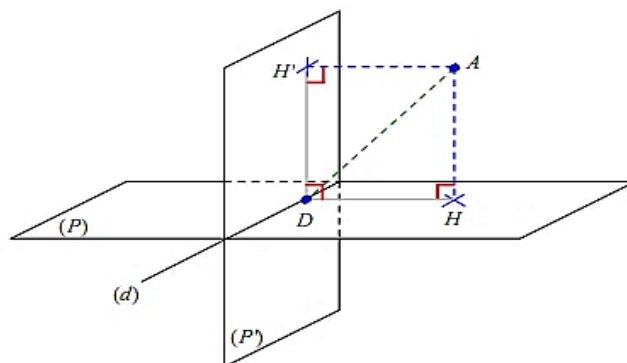
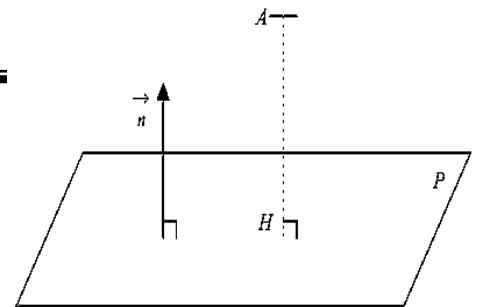
La distance d'un point A à un plan (P) notée $d(A, (P))$ est le plus court chemin AH où H est projeté orthogonal de A sur (P) .

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point de ξ et un d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. La distance du point A au plan (P) est : $d(A, (P)) = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemple : Soit $(P) : -x + 3y + 2z + 5 = 0$ et $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$\text{On a : } d(A, (P)) = \frac{|-3 + 3 \times (-1) + 2 \times 4 + 5|}{\sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2}} = \frac{|-3 - 3 + 8 + 5|}{\sqrt{14}} = \frac{|7|}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

D'où $d(A, (P)) = \frac{\sqrt{14}}{2}$.



2. a. Equation cartésienne d'une droite

Définition

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $(a, b, c, a', b', c') \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

- Toute droite dans l'espace est l'intersection de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
- Si une droite dans l'espace est l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ alors cette droite a pour équation cartésienne de la forme : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$
- Tout plan a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

a. Représentation paramétrique d'une droite

Définition

- La représentation paramétrique de la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x = x_0 + a\alpha \\ y = y_0 + b\alpha \\ z = z_0 + c\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$.
- Réciproquement toute représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_0 + a\alpha \\ y = y_0 + b\alpha \\ z = z_0 + c\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$ est celle de droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple : Déterminons l'équation cartésienne de la droite passant par $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On sait que toute droite du plan de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique de la

$$\begin{aligned} \text{forme } \begin{cases} x = x_0 + a\alpha \\ y = y_0 + b\alpha \\ z = z_0 + c\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) &\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -2 + 5\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 3 \\ y = 1 - 2(x - 3) \\ z = -2 + 5(x - 3) \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 3 \\ y = 1 - 2x + 6 \\ z = -2 + 5x - 15 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 3 \\ y + 2x - 7 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} y + 2x - 7 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc l'équation cartésienne du plan passant par $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est :

$$(D): \begin{cases} y + 2x - 7 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}).$$

LECON 3: POSITIONS RELATIVES DES DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

Activité d'apprentissage :



Soient (P_1) le plan d'équation $2x + y + z = 1$, (P_2) le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = -\alpha - 5\beta \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ et $(D) : \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

1. Détermine un vecteur normal $\vec{n}_2$ de (P_2) et $\vec{1}$ de (P_1) et vérifie s'ils sont colinéaires.
2. Résous le système de trois équations à trois inconnues formé par les équations de (D) et (P_1) .
3. Détermine une représentation paramétrique de (D) .
4. En remplaçant les valeurs de la coordonnée d'un point de D dans l'équation de (P_1) , on trouve une équation de premier degré. Détermine cette équation et résous là.

1. Positions relatives de deux plans

Propriété

Soit (P_1) et (P_2) deux plans ayant pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. Les plans (P_1) et (P_2) sont :

- Parallèles si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires ($\vec{n}_1 = \alpha \vec{n}_2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$)
- Sécantes si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont non colinéaires.
- Perpendiculaires si et seulement si ils sont orthogonaux ($\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$).

Exercice : Soit (P_1) et (P_2) deux plans d'équations cartésiennes respectives $(P_1): 2x + y + 2z - 6 = 0$ et $(P_2): 2x - 2y - z + 3 = 0$

1. Démontre que (P_1) et (P_2) sont sécants et détermine une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d_0) des deux plans.
2. Démontre que $(P_1) \perp (P_2)$
3. Détermine une équation paramétrique et cartésienne du plan (P_3) passant par $A(0; 2; 1)$ et parallèle à (P_1) .

2. Position relative de deux droites

Propriété

Soit (D_1) et (D_2) deux droites ayant pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Les droites (D_1) et (D_2) sont :

- Parallèles si et seulement si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires ($\vec{u}_1 = \alpha \vec{u}_2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$)
- Sécantes si et seulement si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont non colinéaires.
- Perpendiculaires si et seulement si ils sont orthogonaux ($\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$).

Remarque :

- Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.
- Si deux droites ont leurs vecteurs directeurs non colinéaires alors ces deux droites sont non coplanaires ou sécantes
- Pour démontrer que deux droites sont non coplanaires, il suffit de montrer qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Exercice :

Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) les droites de représentations paramétriques et cartésiennes respectives :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \alpha, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = -2\alpha \end{cases} ; (D_2) : \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases} ; (D_3) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\beta, (\beta \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 4\beta \end{cases}$$

1. Démontre que les droites (D_1) et (D_3) sont strictement parallèles.

- Démontre que les droites (D_2) et (D_3) sont sécantes en un point A dont on précisera les coordonnées.
- Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.
- Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

3. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}) \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
- $(\mathcal{D})$ est contenue dans $(\mathcal{P}) \iff \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ et $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$
- $(\mathcal{D})$ se coupe avec $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{M\}$

Remarque :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires alors D et P sont orthogonaux
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires alors D et P sont sécants et non orthogonaux

Exercice : Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - 2\beta \\ y = 2\beta \\ z = 2 - 3\beta \end{cases}, (\beta \in \mathbb{R}).$

- Démontre que la droite (D) et le plan (P) d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$ sont sécants en un point A dont on précisera les coordonnées.
- Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P).

4. Projeté orthogonal

Définition

- M étant un point de l'espace et P un plan de l'espace, on appelle projeté orthogonal de M sur P le point M' d'intersection de P avec la droite passant par M et perpendiculaire à P.
- M étant un point de l'espace et D une droite de l'espace, on appelle projeté orthogonal de M sur D le point M' d'intersection de D avec le plan passant par M et perpendiculaire à D

Exercice d'application :

Soit $A(2; -3; 4), B(-3; 1; 2)$ et $\vec{u}(-1; 2; 3)$. (D) est une droite de repère (A; $\vec{u}$) et (P) est le plan perpendiculaire à (D) et passant par B.

- Donne une représentation paramétrique de (D).
- Détermine une équation cartésienne de (P).
- Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan P.
- Calcule la distance du point A au plan (P)
- Détermine les coordonnées du projeté orthogonal B' de B sur (D) et en déduire $d(B; D)$.

Solution : (a) La représentation paramétrique de (D) est $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}).$

(b) P étant perpendiculaire à D le vecteur directeur de D est un vecteur normal de P. Ainsi : (P) : $-x + 2y + 3z + d = 0$. Comme P passe par B alors $-(-3) + 2(1) + 3(2) + d = 0 \implies d = -11$. D'où (P) : $-x + 2y + 3z - 11 = 0$

(c).i H est le point d'intersection de P et D donc les coordonnées de H vérifient les équations de D et P. On a $-(2 - \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 3(4 + 3\lambda) - 11 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}$ Ainsi $H(\frac{3}{2}, -2, \frac{11}{2})$

(c).ii. $d(A, P) = AH = \frac{\sqrt{14}}{2}$

(d) B' est le point d'intersection du plan (P) et de la droite (D) et d'après ce qui précède $B' = H$. $d(B, D) = BH$

LECON 4 : Équation cartésienne d'une sphère et positions relative d'une et d'un plan puis d'une sphère et d'une droite.

Motivation :

Plusieurs objets de notre entourage ont la forme sphérique. La détermination des éléments caractéristiques de ces objets, ainsi que leurs positions relatives avec des plans et des droites restent très préoccupante. À la fin de cette leçon, nous aurons les ressources nécessaires pour répondre à ces différentes préoccupations.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- Montrer que deux droites sont coplanaires
- Montrer que deux droites sont orthogonales ou perpendiculaire

Prérequis:

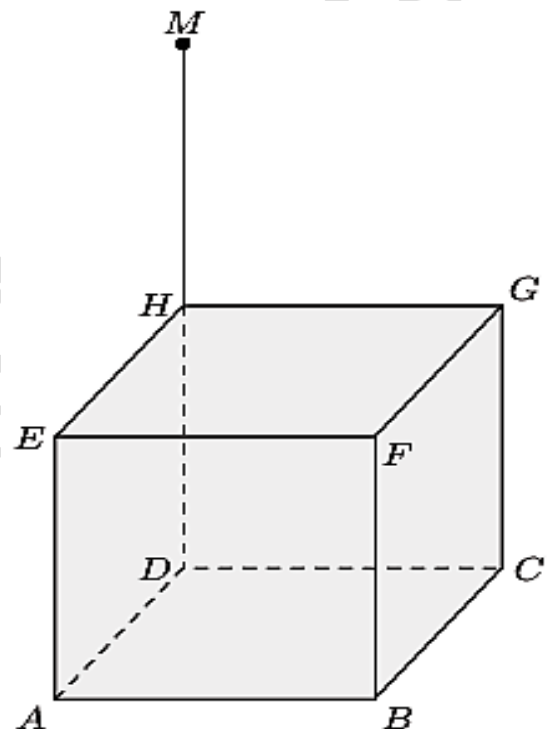


- Distance
- Cercles
- Rappel sur la projection orthogonale.

Situation Problème:



Soit $ABCDEFGH$ un cube. On considère une source lumineuse M placé au-dessus du cube tel que :
 $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HM}$
 Dessiner l'ombre créée par cette source lumineuse autour du cube.



Activité d'apprentissage :



Dans le laboratoire de votre établissement, votre camarade Abena a une pastèque de forme sphérique, dans le repère du laboratoire et par une méthode appropriée il détermine les coordonnées $\Omega(a, b, c)$ du centre de la pastèque et son rayon r .

1. a. Soit $M(x, y, z)$ un point de la surface de la pastèque. Vérifier que
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

b. comment appelle – t – on ce type d'équation ?

2. Soit (P) un plan de l'espace, H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P)

Faire une figure et donner la position relative de (S) et (P) dans chacun des cas suivants :

a) $d > r$; b) $d = r$; c) $d < r$

1. Equation d'une sphère

a. Sphère définie par son centre et son rayon

Définition

On appelle sphère de centre Ω et de rayon r , l'ensemble des points vérifiant $OM = r$.

Propriété

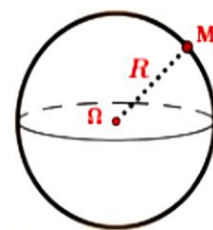
Toute équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'une sphère.

Toute sphère de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r a pour équation de la forme:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Réciproquement toutes équations pouvant s'écrire sous la forme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \text{ est l'équation de la sphère de centre } \Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ et de rayon } r.$$



Exemple : Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y + 10z + 3 = 0$

$$\text{On a : } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y + 10z + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2y^2 + 6y + 2z^2 + 10z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x) + 2(y^2 + 3y) + 2(z^2 + 5z) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(x - 1)^2 - 1^2] + 2\left[\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 2\left[\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 2\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

Donc M décrit la sphère de centre $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

b. Sphère définie par un diamètre

Soit (S) la sphère de diamètre $[AB]$. $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété

Soient A et B deux points distincts dans l'espace (ε) . La sphère de diamètre $[AB]$ a pour ensemble de points M dans l'espace qui vérifie $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

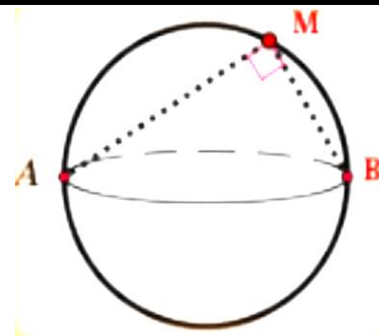
z. Position relative d'un plan et d'une sphère

(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan de l'espace H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P) .

- $d(H, (P)) = \Omega H > R$

Dans ce cas le plan ne coupe pas la sphère

$$(S) \cap (P) = \emptyset$$



- $d(H, (P)) = \Omega H = R$

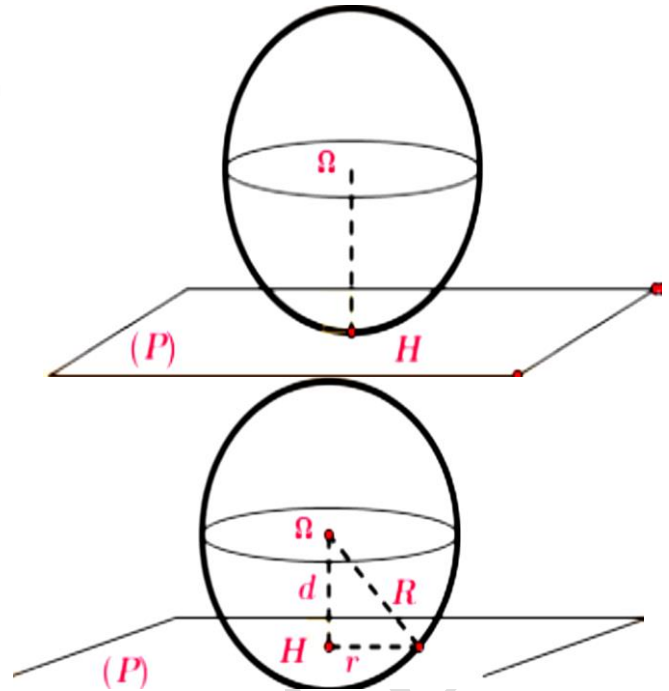
Dans ce cas le plan est tangent à la sphère en un point H

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

- $(H, (P)) = \Omega H < R$ Dans ce cas le plan coupe la sphère suivant un cercle.

$$(S) \cap (P) = (\Gamma)$$

Où (C) est un cercle de centre H et de centre r tel que $r^2 = R^2 - d^2$



3. Position relative d'une droite et d'une sphère

(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) une droite de l'espace H est la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) et d est la distance entre le point Ω et la droite (Δ) .

- $(H, (\Delta)) = d > R$

Dans ce cas la droite ne coupe pas la sphère

$$(S) \cap (\Delta) = \emptyset$$

- $(H, (\Delta)) = d = R$

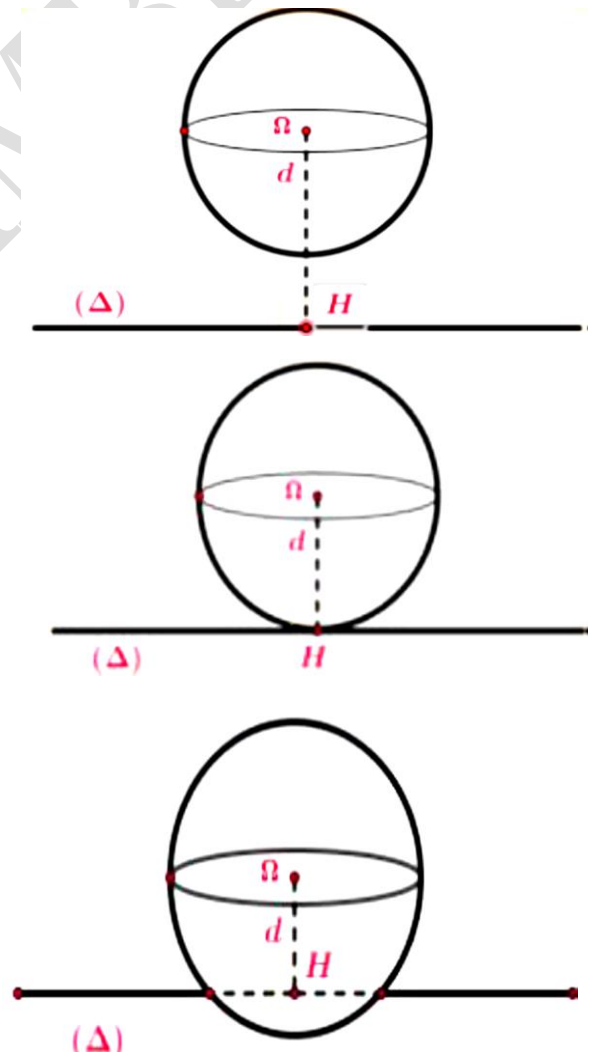
Dans ce cas la droite est tangente à la sphère en un point H

$$(S) \cap (\Delta) = \{H\}$$

- $(H, (\Delta)) = d < R$

Dans ce cas la droite coupe la sphère en deux points A et B

$$(S) \cap (\Delta) = (A, B)$$



Exercice d'application :

I. Soit (D) la droite passant par $(1, -1, 0)$ et vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 3)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $(1, 0, 3)$ tangente à la droite (D) .

II. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1, 2, -1)$ et de rayon $r = 3$.

On considère le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z = 0$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (S) .

2) La sphère S coupe-t-elle le plan (P) ?

3) Nature et éléments caractéristiques de $S \cap P$.

III.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soit les points $(-2, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ et $(-2, 2, 2)$.

a) Montrer que les points A, B et définissent un plan.

b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite D dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

3. Démontrer que la droite D et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

4. Soit S la sphère de centre $\Omega(1, -3, 1)$ et rayon $r = 3$.

a) Étudier les positions relatives de la sphère S et de la droite D .

b) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S .

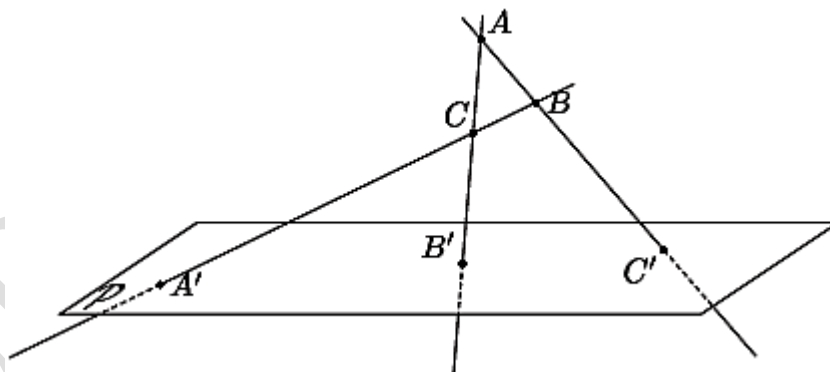
Exercice:

On considère dans l'espace un plan (P) et A, B, C n'appartenant pas à ce plan et non-alignés. On note :

A' le point d'intersection de la droite (BC) avec (P) ;

B' le point d'intersection de la droite (AC) avec (P) ;

C' est le point d'intersection de la droite (AB) avec (P) ;



Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice:

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ dont la représentation est donnée ci-dessous :

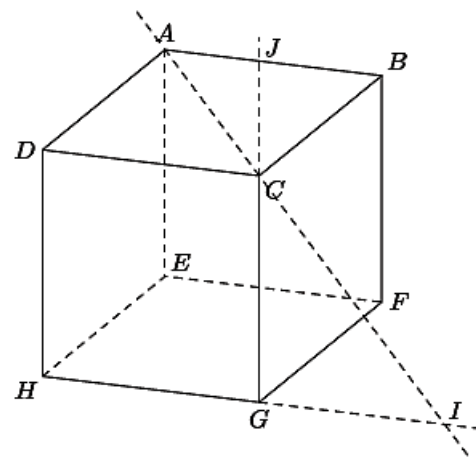
Dans la représentation suivante, I est un point appartenant à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB) . Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vraie ou fautive en justifiant votre réponse.

1. Le triangle EHD rectangle en H .

2. Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I .

3. Le quadrilatère $BCHE$ est un rectangle.

4. J est le point d'intersection de (CG) et (AB) .



Module 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

Chapitre 16 : INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHS

Motivation :

La planification des routes dans les grandes métropoles est d'une importance capitale car celle-ci peut selon qu'elle est faite, empêcher le problème d'embouteillages. Des outils mathématiques peuvent nous aider dans cette difficulté.

Compétence visée :

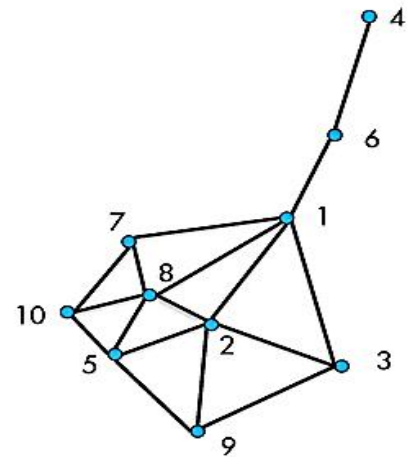
- Présenter un graphe et donner son ordre;
- Reconnaître les sommets adjacents et isolés, déterminer le degré d'un sommet;
- Reconnaître un graphe simple, orienté et complet.

Prérequis:



- Utilisation de la notion d'échelle de réduction ;
- Représenter un itinéraire sur dessin.

Situation Problème: Quelle relations faites-vous entre ces deux images ?



Activité d'apprentissage :

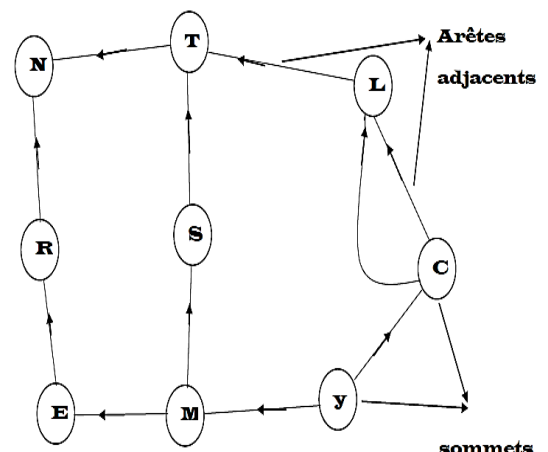


Considérons le dessin ci-dessous ;

1. Combien de sommets compte ce dessin ?
2. Combien d'arrêts adjacents ou incidents compte ce dessin ?
3. Y a-t-il plusieurs arêtes reliant deux mêmes sommets ?

4. Est-il possible sur ce dessin de rejoindre tous les autres sommets à partir de n'importe quel sommet ?
5. Est-ce que chaque sommet de ce dessin est relié directement à tous les autres sommets ?
6. Combien d'arrêts adjacents passent par le sommet M ?
7. Combien d'arrêts adjacents compte le dessin ?

Déterminez également la somme des degrés des différents sommets et établissez la relation entre le nombre d'arêtes adjacents et cette somme ?



8. Quel nombre d'arêtes maximal passe par un sommet ?

Solution :

1. Ce dessin compte 9 sommets ; donc l'ordre de ce dessin est 9.
2. Ce dessin compte 11 arêtes adjacentes ou incidentes.
3. Oui, les sommets **R** et **C** sont reliés par 02 arêtes différents. Ceci donne à notre dessin d'être appelé **multi-graphes** qui est différent de **graphe simple**.
4. Il est possible de rejoindre tous les autres sommets à partir de n'importe quel sommet. Donc le graphe est dit **connexe**.
5. Chaque sommet de ce graphe ne permet pas de relier directement tous les autres sommets. Donc ce graphe n'est pas **complet**.
6. Exactement **03** arêtes passent par le sommet **M** donc le degré du sommet **M** est **03**.
7. Le dessin compte **11 arêtes**. Et $d(R) = d(T) = d(M) = d(C) = 3$; $d(D) = d(S) = d(E) = d(N) = d(Y) = 2$ d'où **somme des degrés = 22**.

D'où la relation, **somme des degrés = 2 fois nombre d'arêtes adjacents**.

8. Le nombre d'arêtes maximal passant par un sommet est **03**, et **03** représente donc le **degré du graphe**.

Note :

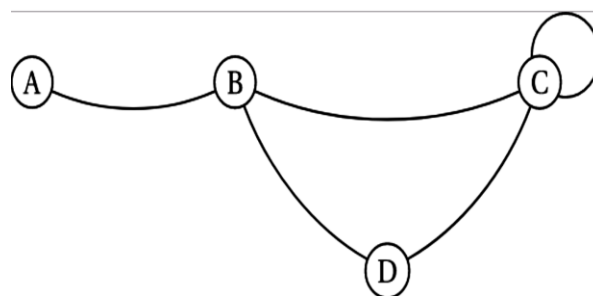
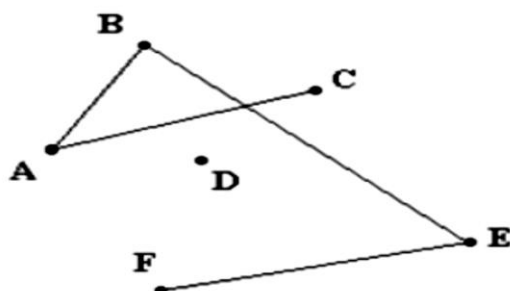
1. Cette activité répond d'une manière ou d'une autre à la situation problème. Il suffit de considérer Y=yassa, R=carrefour Rail, C=château, T=total Logbaba, N=Ndokoti, D=Dakar, S=Saint Nicolas, M=marche Ndogpassi, E=Elf village.
2. Dans la suite de ce cours on utilisera graphe à la place de dessin.

RESUME :

Définition

- Un **Graphe (non orienté)** G est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ de points appelés **Sommets** et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ d'**arêtes** tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S , appelés ses extrémités.
- Un **sommet du graphe** est point du graphe. Le nombre de sommets est l'ordre du graphe.
- Une **arête du graphe** est une ligne reliant deux sommets. Une **boucle** est une ligne reliant un sommet à lui-même.
- Un **sommet est isolé** lorsque aucune arête de ce graphe ne le relie aux autres sommets.
- Un **graphe simple** est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.
- Le **degré d'un sommet** est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Le degré d'un graphe est donné par le degré du sommet à valeur maximale.
- Un **graphe est connexe** s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en **composantes connexes**.
- Un **graphe complet** est un **graphe simple** dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

Exemple 1: Le diagramme ci-dessous représente un graphe comportant 4 sommets et 5 arêtes.



Exemple 2:

A est un sommet, le segment $[AB]$ est une arête reliant A à B (ou B à A).

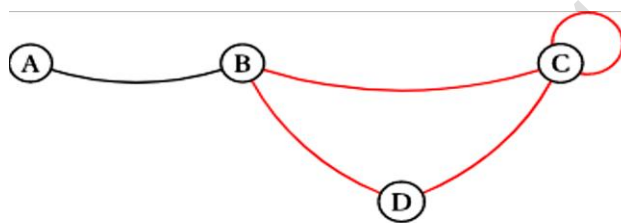
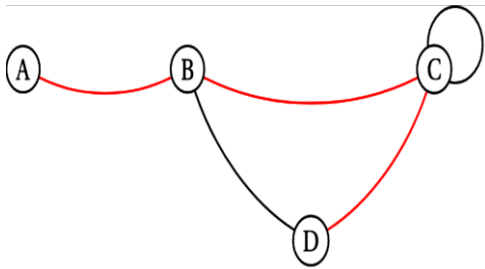
D est un sommet isolé, non relié à un autre sommet.

- Le graphe représenté ci-contre est d'ordre 4.
- Le degré du sommet B est 3. Celui de C est 4 (la boucle compte 2 fois).
- A et B sont adjacents. A et D ne le sont pas.
- A et B sont adjacents, A et E ne le sont pas.

Exemple 3:

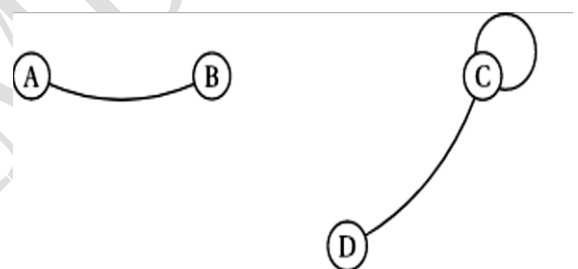
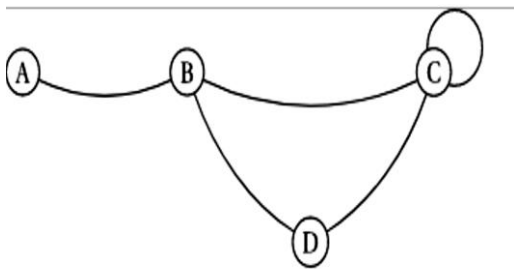
$(A; B; C; D)$ est une chaîne de longueur 3.

$(B; C; C; D; B)$ est un cycle.

**Exemple 4:**

Graphe connexe

Graphe non connexe



Graphe 1

Graphe 2

Propriété

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.

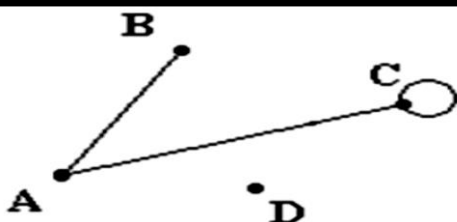
• **Pour le graphe 1**, le degré de chaque sommet est $A(2)$, $B(2)$, $C(1)$, $D(0)$, $E(2)$, $F(1)$, la somme vaut $2 + 2 + 1 + 0 + 2 + 1 = 8$.

Le nombre d'arêtes étant 4, la somme est bien le double du nombre total d'arêtes.

• **Pour le graphe 2**, le degré de chaque sommet est $A(2)$, $B(2)$, $C(3)$ car la boucle correspond à deux liaisons, $D(0)$, $E(2)$, $F(1)$, la somme vaut $2 + 2 + 3 + 0 + 2 + 1 = 10$.

Le nombre d'arêtes étant 5, la somme est bien le double du nombre total d'arêtes.

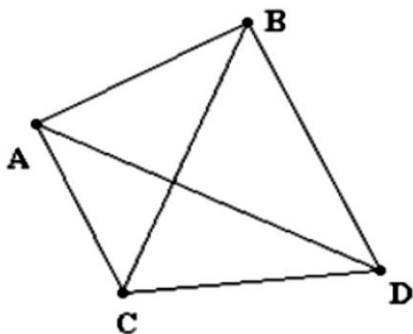
Un sous graphe d'un autre graphe est un graphe composé de certains de ses sommets avec toutes les arêtes qui les relient.



Graphe 3 est un sous graphe du graphe 2.

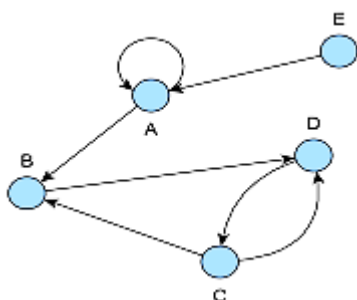
Graphe 3

Un graphe est **complet** si tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.



Graphe 4

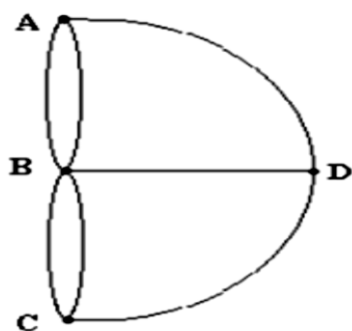
Ci-contre, graphe 4 est un graphe complet d'ordre 4.



Le graphe 1 n'est pas complet car par exemple B et C ne sont pas reliés.

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées. Elles ont une origine et une extrémité. Elles ne peuvent être parcourues que dans un sens.

NB: Rien n'oblige à « circuler » sur le graphe (aller obligatoirement d'un point à un autre).



La modélisation de ce problème (graphe ci-contre) a l'intérêt de se généraliser, c'est l'un des points de départ de la théorie des graphes.

Pour que l'on puisse faire une promenade ramenant le promeneur au point de départ, il faudrait que le nombre de ponts pour chaque île et chaque rive soit pair.

Si on enlève la contrainte de revenir au point de départ, il faudrait que deux des sommets au plus (le départ et l'arrivée) aient un nombre impair de ponts.

Le problème des sept ponts de Königsberg est l'exemple type de graphe eulérien.

Théorème :

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.

Exercices d'applications :

1. Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ?
Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?

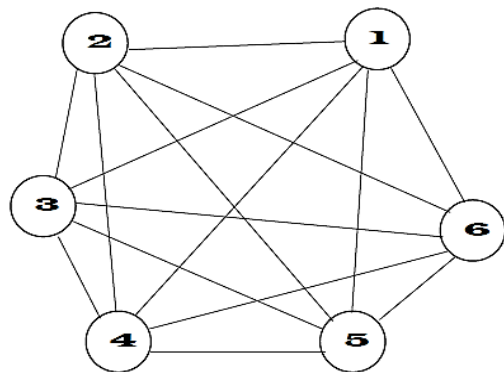
Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Solution :

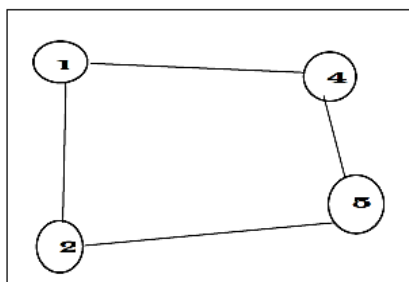
Il faudra 5 jours de tournoi. Voici un calendrier

On obtient un graphe **complet**. Il est complet parce qu'il est un **graphe simple** dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

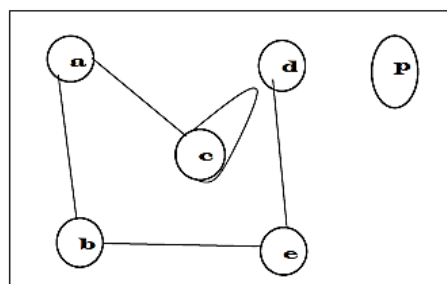
Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5



2. Identifier des schémas suivants, deux sommets adjacents, une boucle et un sommet isolé.



G1



G2

Solution

- a. Les sommets 1 et 4 ; 2 et 5 ; 4 et 5 ...sont **adjacents**
- b. Le sommet c présente une **boucle**.
- c. Le sommet **p** est **isolé**.

Remarque :

Le graphe G1 est **simple** (car il est sans boucle et, entre deux sommets, il y a au plus une arête) et **connexe** (car il est possible, à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes).

3. utilisez le graphe suivant pour justifier que la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre total d'arêtes.

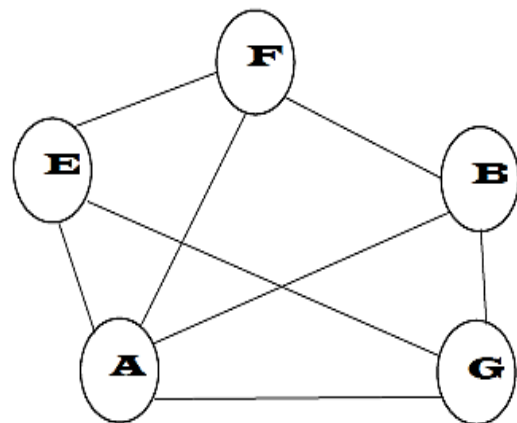
SOLUTION

Degré de F = 3 ; Degré de E = 3 ; Degré de A = 4 ; Degré de B = 3 ;

Degré de G = 3. D'où la somme des degrés = **16**

Le nombre total d'arêtes est bel et bien égal à : **8**

Ainsi, nous observons très bien que la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre total d'arêtes.



RESOLUTION DE PROBLEME

Une école doit faire passer des tests écrits à quatre élèves : Adrien, Sophie, Charlotte et Matthieu. Sept disciplines sont concernées : les mathématiques, la physique, la biologie, le français, l'anglais, l'espagnol et l'histoire. Adrien doit passer les mathématiques, la physique et l'anglais, Sophie les mathématiques, la biologie et le français, Charlotte les mathématiques, l'anglais et l'espagnol et Matthieu la physique, le français et l'histoire.

Module 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

Chapitre 17 : STATISTIQUES : REGROUPEMENT EN CLASSE

LECON 1 : Caractéristiques de position.

Motivation :

Les Etats et les sociétés ayant une taille importante ont besoin d'informations chiffrées objectives en vue des décisions raisonnables, ainsi l'organisation des données est au cœur des processus de prise de décision dans les organisations économiques, politiques et sociales désireuses de prospérer.

Lorsque les données statistiques sont nombreuses ou continues, elles peuvent être regroupées dans des intervalles pour faciliter leur lecture.

Compétence visée :

- Calculer la moyenne, déterminer la classe modale, le mode, la médiane d'une série regroupée en classes
- Interpréter dans des situations contextuelles la signification des différents paramètres (de position ou de dispersion)



Prérequis:

Population : C'est l'ensemble étudié.

Individu : C'est un élément de la population.

Effectif total : C'est le nombre total d'individus.

Caractère : C'est la propriété étudiée. On distingue les caractères discrets qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs et les caractères continus dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute, ...).

1. Séries statistiques présentant un regroupement en classes.

Situation Problème:



A la fin du deuxième trimestre dans une classe de première, les moyennes sur 20 arrondies à l'entier directement inférieur des 60 élèves de cette classe sont les suivantes : 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 5 ; 7 ; 7 ; 11 ; 15 ; 13 ; 11 ; 10 ; 7 ; 8 ; 13 ; 5 ; 9 ; 8 ; 4 ; 8 ; 10 ; 10 ; 14 ; 12 ; 10 ; 12 ; 13 ; 12 ; 11 ; 15 ; 6 ; 12 ; 10 ; 15 ; 10 ; 13 ; 11 ; 11 ; 10 ; 17 ; 16 ; 10 ; 16 ; 10 ; 10 ; 15 ; 11 ; 6 ; 13 ; 12 ; 4 ; 9 ; 9 ; 8 ; 8 ; 15 ; 15 ; 13 ; 14 ; 17. Le professeur principal doit classer ces notes en quatre catégories : Faible dans $[0; 8[$; insuffisante $[8; 10[$; Encouragement $[10; 14[$; Félicitations $[14; 20[$. Au terme de ce classement, le professeur affirme que 20% des élèves ont moins de 10/20. Est-ce-que cette affirmation est vraie ? Justifier votre réponse

Activité d'apprentissage :

Le temps passé devant la télévision par 50 élèves pendant une certaine journée.

Temps en mn	5	8	10	15	18	25	30	38	45	50	55	59
Nombre d'élèves	2	7	5	4	10	2	6	5	3	1	2	3

1. Compléter ce tableau par les fréquences, effectifs cumulés croissants et décroissants

2. Calculer la moyenne, l'écart type et la variance de cette série.
3. Compléter le tableau suivant :

Intervalle de temps $[a; b[$	$[0 ; 15[$	$[15 ; 20[$	$[20 ; 40[$	$[40 ; 50[$	$[50 ; 60[$
Nombres d'élèves (n)					
$C = \frac{a + b}{2}$					
$A = b - a$					

RESUME :**Définition**

- On appelle **caractère quantitatif** lorsque les modalités sont des nombres, dans le cas contraire on dire que le **caractère est qualitatif**.
- Lorsque les modalités sont des nombres **isolés**, il s'agit d'un caractère **quantitatif discret**.
- Lorsque les modalités sont des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a_{k-1}; a_k[$, il s'agit d'un caractère **quantitatif continu**.
- L'ensemble sur lequel on travaille en statistique est appelé **population**.
- Si cet ensemble (la population étudiée) est trop vaste, on en restreint l'étude à une partie appelé **échantillon**.
- Un élément de cet ensemble (la population ou l'échantillon étudiée) est appelé **individu**.
- La particularité commune que l'on étudie sur une population donnée est appelée **caractère**.
- Les valeurs prises par le caractère étudié sont aussi appelées **les modalités**.

L'effectif cumulé croissant (E_{CC}) d'une **modalité** est la somme des effectifs des modalités supérieurs ou égale à l'effectif de cette modalité. Pour la classe $[a_{k-1}; a_k[$ l'effectif cumulé est

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

- **L'effectif cumulé décroissant (E_{CD})** d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieurs ou égale à l'effectif de cette modalité. Pour la classe $[a_{k-1}; a_k[$ l'effectif cumulé est

$$\sum_{i=k}^p n_i = n_k + n_{k+1} + \dots + n_p$$

On appelle **amplitude a_i** de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ de rang i avec ($a_{k-1} < a_k$), la longueur de cet intervalle c'est-à-dire le nombre réel **$a_i = a_k - a_{k-1}$** .

- On appelle centre **C_i** de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ avec ($a_{k-1} < a_k$), la moyenne des bornes de cette classe c'est-à-dire le nombre réel **$C_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{2}$** .
- La densité d'une classe $[a_{k-1}; a_k[$ est le quotient : **$d_i = \frac{n_i}{a_i} = \frac{n_i}{a_k - a_{k-1}}$** .
- L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et plus petite valeur des modalités de cette série.
- On appelle **fréquence (f_i)** d'une modalité le rapport de l'effectif **n_i** de cette modalité par l'effectif total **N** . On a : **$f_i = \frac{n_i}{N}$** .
-

NB : Il est d'une importance capitale de regrouper les modalités d'une série statistique à caractère quantitatif discret par ordre croissant.

Remarque :

- ✓ f_i est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
- ✓ Souvent, les nombres f_i s'expriment par un pourcentage.
- ✓ La somme des nombres f_i est toujours égale à 1.

Exemple : On considère la série statistique suivante :

1. Quelle est l'amplitude des classes $[20; 30[$ et $[60; 70[$
2. Quelle est la fréquence en % des classes $[20; 30[$ et $[60; 70[$
3. Quelle sont les centres des classes $[20; 30[$ et $[60; 70[$
4. Donner la densité des classes $[20; 30[$ et $[60; 70[$
5. Donner l'étendue de cette série statistique.

Nombre d'employé	$[20; 30[$	$[30; 40[$	$[40; 50[$	$[50; 60[$	$[60; 70[$	Total
Nombre d'entreprise	19	14	7	6	4	50

Solution :

1. L'amplitude de $[20; 30[$ est : $30 - 20 = 10$ et L'amplitude de $[60; 70[$ est : $70 - 60 = 10$
2. La fréquence en % de $[20; 30[$ est $f_1 = \frac{n_1}{N} \times 100 = \frac{19}{50} \times 100 = 38\%$ et fréquence en % de $[60; 70[$ est $f_5 = \frac{n_5}{N} \times 100 = \frac{4}{50} \times 100 = 8\%$.
3. Le centre de $[20; 30[$ est $c_1 = \frac{20+30}{2} = 25$ et le centre de $[60; 70[$ est $c_5 = \frac{60+70}{2} = 65$
4. La densité de $[20; 30[$ est $d_1 = \frac{n_1}{a_1} = \frac{19}{25} = 0,76$ et le centre de $[60; 70[$ est $d_5 = \frac{n_5}{a_5} = \frac{4}{65} = 0,0615$
5. L'étendue de cette série statistique est $e = 70 - 20 = 50$.

Définitions :

- On appelle **mode** d'une série statistique toute modalité ayant une densité maximale.
- On appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif.
- La **moyenne** $\bar{x}$ d'une série statistique à caractère quantitatif discret est égale à la somme des produits des modalités par son effectif divisé par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i \quad \text{où } N = \sum_{i=1}^p n_i \text{ (Effectif total)}$$

$$\bar{X} = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_p X_p$$

- La **moyenne** $\bar{x}$ d'une série statistique à caractère quantitatif continu est égale à la somme des produits des centres de classe par son effectif divisé par l'effectif total. $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n C_i n_i$.

NB: Pour une série statistique regroupée en classe on ne l'appellera plus mode mais **classe modale** et dans ce cas le **mode** est le centre de la classe modale.

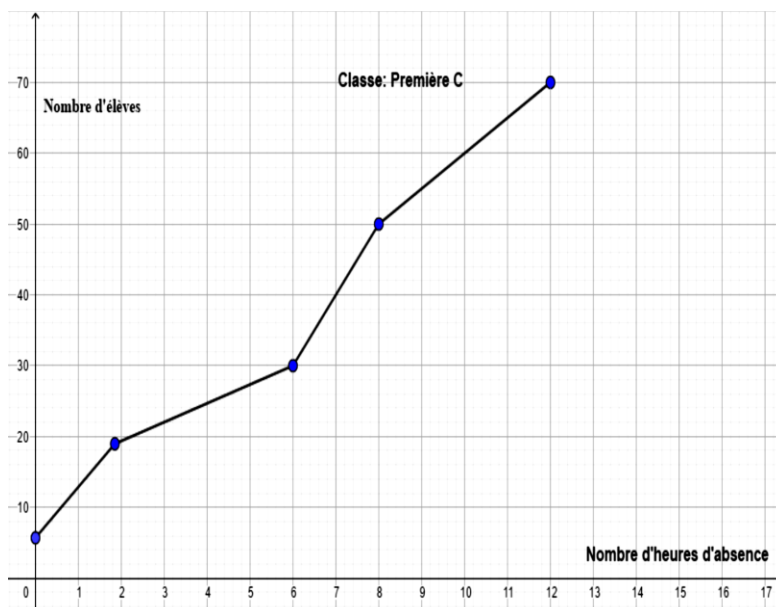
Si une série statistique présente deux modalités d'effectif maximal, on dira qu'elle est **bimodale**.

2. Représentation graphique**Objectifs :**

- Construire et interpréter un histogramme
- Construire et interpréter la courbe des effectifs ou des fréquences cumulés.
- Déterminer la valeur exacte de la médiane par la méthode d'interpolation linéaire

Introduction : Pour un caractère continu, la série statistique peut être représentée par un histogramme, un polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulés.

Situation de vie : Un surveillant vient d'être affecté dans un établissement scolaire. Il veut connaître l'état disciplinaire des élèves de la classe de première C. Le seul papier qu'il trouve dans le bureau de son prédécesseur est un papier comportant la figure ci-après. Utilise ce tableau pour reconstituer un tableau des absences de cette classe.



a. Polygone des effectifs croissants et décroissants

Activité : On considère la série statistique de la leçon précédente :

Notes	[2,5[	[5,8[	[8,10[	[10,14[	[14,18[	[18,20[
Nombres d'élèves	5	14	17	9	3	2

1. Compléter le tableau suivant :

Notes (n_i)	2	5	8	10	14	18	20
Effectifs cumulés croissant (ECC_i)							
Effectifs cumulés décroissant (ECD_i)							

- Dans un repère orthogonal, Placer les points $A_i (x_i ;)$ puis relier ces points par des segments de droites
- Dans un repère orthogonal, Placer les points $B_i (x_i ;)$ puis relier ces points par des segments de droites.

Propriété

- Le **polygone des effectifs** s'obtient en joignant par des segments les différents points consécutifs de coordonnées $(x_i; n_i)$.
- Le **polygone des fréquences** s'obtient en joignant par des segments les différents points consécutifs de coordonnées $(x_i; f_i)$.
- Le **polygone des effectifs cumulés croissants** ou **décroissants** est une ligne brisée qui s'obtient en joignant tous les points de coordonnées $(x_i; ECC)$, $(x_i; ECD)$, où ECC et ECD représente respectivement les effectifs cumulés croissant et décroissant de la modalité x_i .
- A l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on détermine la **médiane** d'une série statistique. En effet la médiane est l'abscisse du point de l'effectif cumulé croissant ou décroissant dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total $\left(\frac{N}{2}\right)$. La valeur exacte de cette médiane se détermine par interpolation linéaire : on utilise les points alignés de l'un des polygone de effectifs cumulés $A \left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$, $M \left(\begin{smallmatrix} x_e \\ y_e = \frac{N}{2} \end{smallmatrix}\right)$ et $B \left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix}\right)$ et la relation

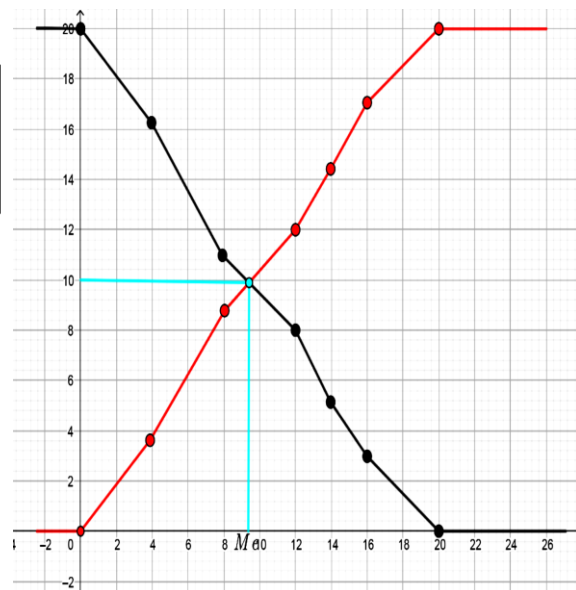
$$\frac{x_A - x_e}{y_A - \frac{N}{2}} = \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} \text{ puis on tire la médiane } x_e.$$

Exemple 1: Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants de la série suivante:

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[	Total
Effectifs	38	50	32	24	26	30	200
ECC	38	88	120	144	170	200	
ECD	200	162	112	80	56	30	

Remarque :

On peut aussi remplacer les effectifs par les fréquences et on obtient le polygone de fréquences cumulées. Pour calculer la médiane, on remplace $\frac{N}{2}$ par 50 ou 0,5.



Exemple 2: Le tableau statistique suivant présente la distribution des retards (en minutes) de 200 élèves du Lycée de Rabinha un lundi matin.

Modalités	[0 , 4[	[4 , 8[	[8 , 12[	[12 , 14[	[14 , 16[	[16 , 20[	Total
Effectif (n_i)	38	50	32	24	26	30	

Calculons par interpolation linéaire la valeur de la médiane de cette série.

On sait que $y_{Me} = \frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$. Cherchons x_{Me} . On a : $x_{Me} \in [8; 12[$. Par interpolation linéaire on a :

$$\frac{12-8}{120-88} = \frac{12-x_{Me}}{120-100} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{12-x_{Me}}{20} \Rightarrow 20 = 8(12-x_{Me}) \Rightarrow 20 = 96 - 8x_{Me} \Rightarrow x_{Me} = \frac{76}{8} \Rightarrow x_{Me} = 9,5$$

Donc la valeur de la médiane de cette série est 9,5.

b. Histogramme

Motivation : Trouver un moyen rapide de comparer et de visualiser la répartition d'une variable ou d'estimer la densité d'une variable statistique.

Compétences : Construire et interpréter un histogramme et/ou Construire et interpréter la courbe des effectifs ou des fréquences cumulés

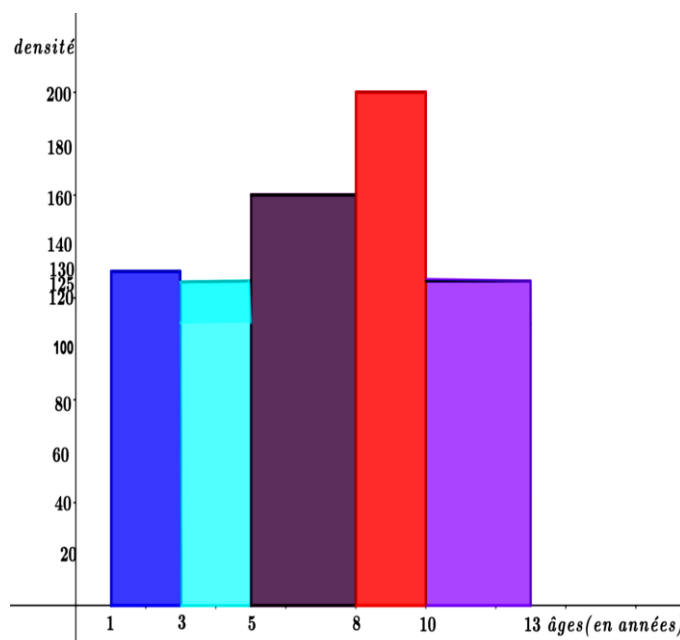
Prérequis : repérer un point par ses coordonnées dans un repère.

Situation de vie.

Gaston est un vendeur de chaussures pour enfants au marché Mokolo à Yaoundé. Après avoir acheté une quantité de marchandise, il a invité son ami Léopold à l'effet de l'aider à classer le stock qu'il a alors dans son magasin. Après ce travail particulièrement pénible, son ami lui propose de se doter d'un ordinateur pour faciliter sa gestion. Ayant pris soin de consigner les quantités de paires de chaussures par tranche d'âges, une fois de retour chez lui, Léopold utilise son ordinateur pour effectuer la représentation ci-dessous, puis il imprime et va remettre à

Gaston pour soutenir le conseil qu'il lui a donné à la fin de leur travail.

Aidez Gaston à extraire de cette représentation le maximum d'informations possibles.



Activité : Complète le tableau de la série statistique de la leçon précédente :

Notes	[2,5[	[5,8[	[8,10[	[10,14[	[14,18[	[18,20[
Nombres d'élèves	5	14	17	9	3	2
Amplitude						
Densité						
<i>Hauteur = densité × 10</i>						

Dans un repère orthogonal, représente des rectangles juxtaposés dont en abscisse on a les bases qui sont les classes et en ordonnées les hauteurs de classes.

Résumé :

L'histogramme d'une série statistique est un ensemble de rectangles juxtaposés dont les bases sont les amplitudes et les hauteurs sont proportionnelles aux densités des classes.

Exemple :

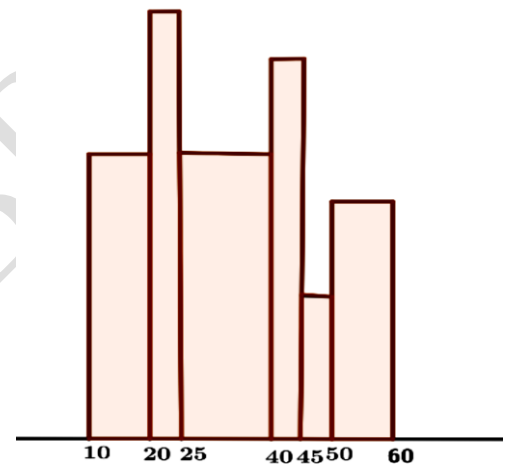
Compléter le tableau suivant et représenter l'histogramme de cette série

Classes	[10; 20[	[20; 25[	[25; 40[	[40; 45[	[45; 50[	[50; 60[	Total
Effectifs	60	45	90	40	15	50	
Amplitudes							
Densités							

Echelle : 1cm² pour 10 individus

N.B La médiane Me est telle que la droite d'équation $x = Me$ partage l'histogramme en deux domaines de même aire.

Dans un histogramme, la classe modale correspond au rectangle ayant la plus grande « hauteur ».

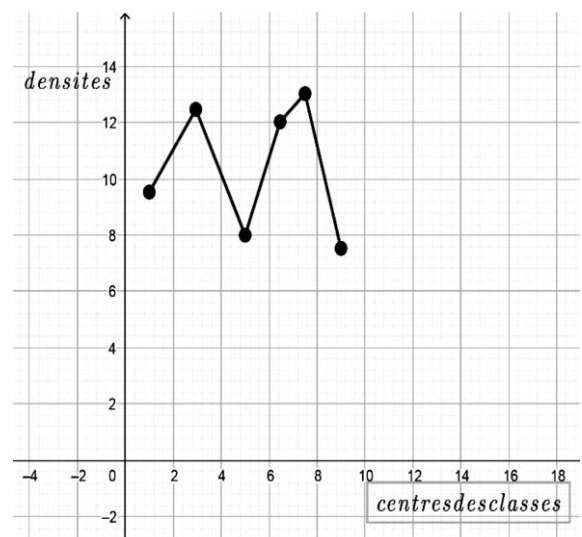
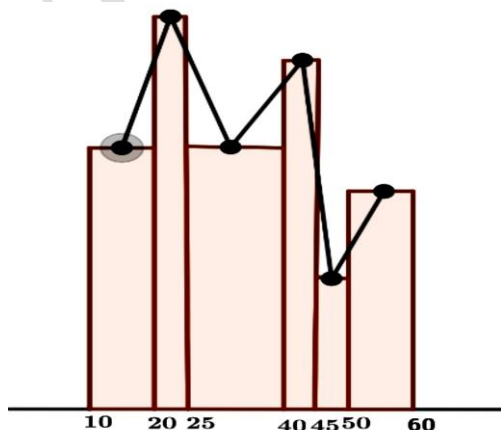


c. Polygone des effectifs

Le polygone des effectifs est une ligne brisée obtenue en joignant dans un repère orthogonal, les points dont les abscisses sont les milieux des classes et les ordonnées sont proportionnelles aux densités des classes correspondantes.

Exemple Construire le polygone des effectifs de la série statistique suivante.

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[	Total
Effectifs	38	50	32	24	26	30	



Remarque :

Le polygone des effectifs se déduit de l'histogramme en joignant les milieux des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme

Exemple :

Polygone des effectifs construit à partir de l'histogramme de précédant.

LECON 2 : Caractéristique de dispersion.

Motivation :

Permettre de décrire l'étalement des valeurs du caractère autour de la moyenne.

Compétence visée :

- Calculer l'écart moyen, la variance, l'écart-type d'une série regroupée en classes
- Interpréter dans des situations contextuelles la signification des différents paramètres (de position ou de dispersion)

Prérequis:



Population : C'est l'ensemble étudié.

Individu : C'est un élément de la population.

Effectif total : C'est le nombre total d'individus.

Caractère : C'est la propriété étudiée. On distingue les caractères discrets qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs et les caractères continus dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute, ...).

Situation Problème:



Jean et Mathieu sont deux candidats à un concours de bourse lancé par le ministère des relations extérieures pour une place disponible. Voici ci-contre données leurs fiches de notes :

Fiche de TEBAYA :

Matières	Mathématiques	Français	Anglais
Notes/20	18	12	4
Coefficients	4	3	3

Fiche d'Ambroise:

Matières	Mathématiques	Français	Anglais
Notes/20	11.25	16	9
Coefficients	4	3	3

Lequel des deux sera retenu pour l'attribution de la bourse ?

Activité d'apprentissage :



En utilisant les données du tableau de l'activité de la leçon 2, déterminer : l'écart-moyen, la variance et l'écart-type de cette série statistique.

RESUME :

Définition

- La **variance** d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère. C'est le nombre positif noté V et définit par :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$$

la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

$$V = \frac{1}{N} \left(n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^p n_k (x_k - \bar{x})^2$$

Ou encore donné par la formule de KÖENIG

La variance d'une série statistique $(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ peut se calculer avec la relation suivante :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

la variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

- L'écart type σ est la racine carrée de la variance. $\sigma = \sqrt{V}$ ou $\sigma^2 = V$.
L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère. L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries : plus elle est petite plus la série statistique est fiable.
- L'écart-moyen d'une série statistique est le nombre positif noté e_m et définit par :

$$e_m = \frac{1}{N} \left(n_1 |x_1 - \bar{x}| + n_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + n_p |x_p - \bar{x}| \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^p n_k |x_k - \bar{x}|$$

Interprétation de l'écart-type :

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère. L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère. L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries. Contrairement à l'interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.

Exemple : Le tableau statistique suivant présente la distribution des retards (en minutes) de 200 élèves du Lycée de Rabingha un lundi matin.

Modalités	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 14[	[14, 16[	[16, 20[	Total
Effectif (n_i)	38	50	32	24	26	30	

Calculons la moyenne $\bar{x}$, l'écart moyen e_m , la variance V et l'écart type σ de cette série.

Modalités	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 14[	[14, 16[	[16, 20[	Total
Effectif (n_i)	38	50	32	24	26	30	200
Centres (C_i)	2	6	10	13	15	18	
$n_i C_i$	76	300	320	312	390	540	1938
$n_i C_i^2$	152	1800	3200	4056	5850	9720	24328
$n_i C_i - \bar{x} $	292,22	184,5	9,92	79,44	138,06	249,3	853,44

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1938}{200} = 9,69; \quad e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |C_i - \bar{x}| = \frac{853,44}{200} = 4,2672$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{24328}{200} - 9,69^2 = 27,4739$$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{27,4739} = 5,24$$

Module 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

Chapitre 18 : DENOMBREMENT

LECON 1 : LES ENSEMBLES.

Motivation :

Dans la vie courante, on est souvent appelé à travailler sur des groupes de personnes, d'animaux ou d'objets, voir s'ils appartiennent au même ensemble ou même encore voir s'ils sont compatibles...cette leçon aide donc les apprenants à résoudre ces problèmes ou exercices avec une certaine aisance.

Compétence visée :

A la fin de cette leçon, l'élève devra :

- Déterminer le cardinal d'un ensemble.
- Déterminer les éléments de la réunion, de l'intersection ou encore du complémentaire d'un ensemble.

Prérequis:

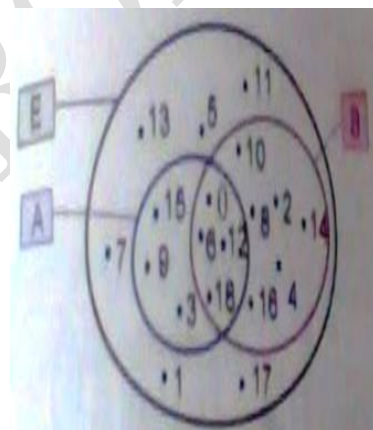


Soit la représentation sagittale des ensembles E, A et B suivante.

1. Ecrire en extension les ensembles E, A et B puis préciser le cardinal de chacun d'eux.

2. Existe-t-il des éléments de A qui ne sont pas dans E ? que dit-on des ensembles A et E ?

3. Ecrire l'extension des éléments de E qui ne sont pas dans A. comment nomme-t-on cet ensemble ? Quel est le nombre de ces éléments ?



Situation Problème:

L'enseignant d'Ambroise lui propose le problème suivant: "dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun des deux sports. Combien de personnes pratiquent-elles à la fois le tennis et la natation?". En cas de solution juste, l'enseignant promet à Ambroise un menu dans un restaurant où on propose les plats suivants:

- Entrées: une salade (S), une purée d'avocats (P) comme entrées
- Résistance: Patate (Pat), Poulet (Pou) et Igname (Ign)
- Desserts: Ananas (A), Orange (O) et Mangue (M).

1. Quelle solution doit proposer Ambroise pour avoir cette récompense?

2. Quel est le nombre de menus possibles en cas de solution juste pour Ambroise?

1. Relation entre les parties d'un ensemble fini

Activité d'apprentissage :



On donne les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 5, 9, 8\}$ et $B = \{2, 5, 8, 0, 4\}$.

1. Quels sont les cardinaux de chacun de ces ensembles? Que représentent les ensembles A et B pour l'ensemble E.

2. Déterminer l'ensemble $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B.

3. Déterminer l'ensemble $A \cap B$ des éléments qui sont dans A et dans B.

4. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ avec $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

5. Déterminer l'ensemble $\bar{A}$ des éléments qui ne sont pas dans A et l'ensemble $A - B$ des éléments de A qui ne sont pas dans B.

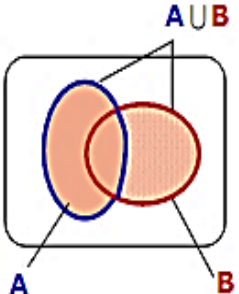
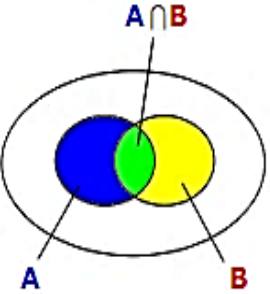
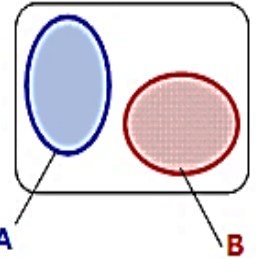
6. Comparer $\text{card}(\bar{A})$ et $\text{card}(E) - \text{card}(A)$, puis $\text{card}(A - B)$ et $\text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.

RESUME :**Définition**

Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E .

- On appelle **cardinal** d'un ensemble E , le nombre d'éléments de E ; on note $Card(E)$.
- On appelle **ensemble de parties** d'un ensemble E , l'ensemble noté P_E dont les éléments sont les parties de E . Si E est un ensemble fini, alors $Card(P_E) = 2^{Card E}$.
- A est une partie de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E et dans ce cas $card(A) \leq card(E)$.
- On appelle **réunion de A et B** , l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B . On note $A \cup B$ et on lit « A union B » et on écrit $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- On appelle **intersection de A et B** , l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B . On note $A \cap B$ et on lit « A inter B » et on écrit $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- On appelle **différence de l'ensemble A et de l'ensemble B** , l'ensemble des éléments de E appartenant à A et n'appartenant pas à B . On note $A - B$ et on lit « A moins B ».
 $A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- On appelle **complémentaire de A dans E** , l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A . on note $\bar{A}$ ou C_E^A et on lit « complémentaire de A dans E »
- Ces définitions peuvent se représenter par le diagramme suivant appelé : **diagramme de Venn**

angage des ensembles

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E	A et B sont disjoints
			
La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B . On la note $A \cup B$. $x \in A \cup B$ signifie $x \in A$ ou $x \in B$	L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B . On la note $A \cap B$. $x \in A \cap B$ signifie $x \in A$ et $x \in B$	Soit E un ensemble et A une partie de E . Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note $E \setminus A$ ou $\bar{A}$ ou encore C_E^A . Remarque : $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$	lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints

On a les propriétés suivantes sur les parties d'un ensemble fini:

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$.

Remarque : Si E possède un nombre fini d'éléments, on dit que E est un ensemble fini et dans le cas contraire, on dit que E est infini.

Par exemple, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est infini ; les chiffres de la numérotation décimale est finie car il y a que dix chiffres dans la numérotation décimale. On convient que $Card \emptyset = 0$.

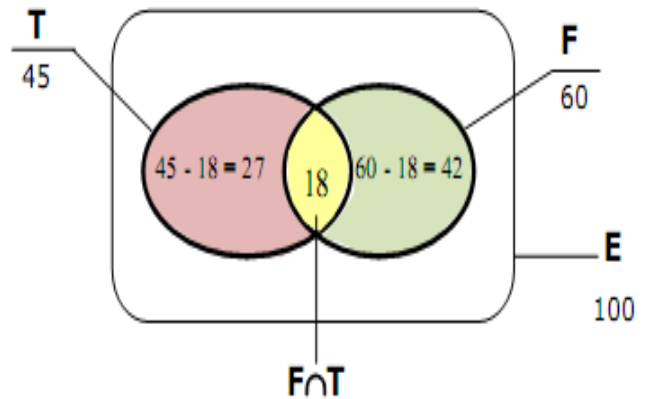
Attention : Si l'intersection des ensembles A et B est vide, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Exemple1 : Un centre de loisirs accueille 100 enfants. Deux sports sont proposés : le football et le tennis.

A la question : Aimez-vous le football ?
60 enfants lèvent la main.

A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.

A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.



On peut illustrer ces données à l'aide d'un diagramme dans lequel E, F et T désignent respectivement l'ensemble de tous les 100 enfants, l'ensemble des enfants qui aiment le football et l'ensemble des enfants qui aiment le tennis.

On complète ensuite les effectifs des différentes parties en utilisant les données : 18 enfants aiment à la fois le tennis et le football : On place le nombre 18 dans la partie commune à F et T.

60 enfants aiment le football, mais parmi ces 60 enfants on sait qu'il y en a 18 qui aiment aussi le tennis.

Il y a donc $60 - 18 = 42$ enfants qui aiment le football sans aimer le tennis.

De même, $45 - 18 = 27$ enfants qui aiment le tennis sans aimer le football.

Il y a donc $27 + 18 + 42 = 87$ enfants qui aiment le tennis ou le football (ou les deux).

Il reste donc $100 - 87 = 13$ enfants qui n'aiment aucun des deux sports : On place le nombre 13 dans la partie non coloriée.

Exemple 2 : (avec trois ensembles)

Un club compte 35 adhérents en natation ; 28 en athlétisme et 29 en gymnastique. Chaque adhérent pratique au moins un sport.

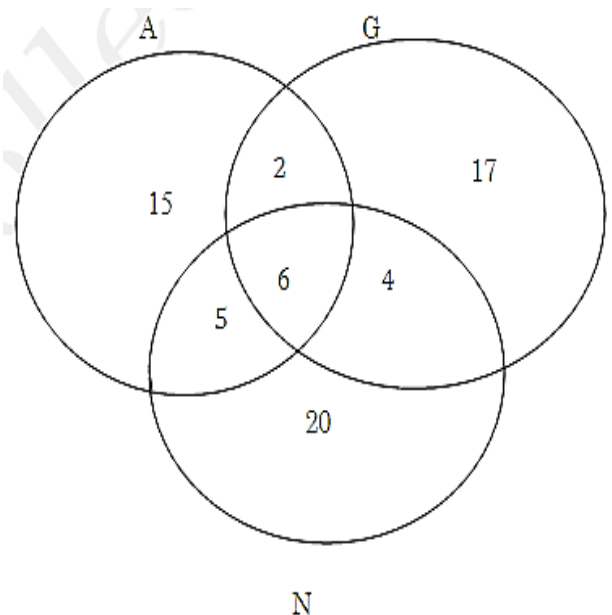
Sachant que 11 adhérents font la natation et l'athlétisme, 10 la natation et la gymnastique, 6 font les trois sports à la fois et 17 font seulement la gymnastique :

On appelle G ; A et N les ensembles respectifs des adhérents de Gymnastique; Athlétisme et Natation.

1. Dresser un diagramme caractérisant cette situation
2. Combien d'adhérents font seulement G et A ?
3. Combien d'adhérents pratiquent un seul sport ?
4. Combien d'adhérents pratiquent au moins deux sports ?
5. Combien d'adhérents y a-t-il dans le club ?

Solution :

1. Dressons un diagramme caractérisant cette situation. On a le diagramme de **VENN** suivant :



Il y a autant d'adhérent en natation qu'en gymnastique.

2. Déterminons le nombre d'adhérents qui font seulement G et A.
Soit x le nombre de ceux qui font seulement la gymnastique et l'athlétisme.

On a : $29 - 4 - 6 - x = 17 \Leftrightarrow x = 2$ adhérents.

3. Déterminons le nombre d'adhérents qui pratiquent un seul sport.
Le nombre de ceux qui font seulement A est : $28 - 5 - 6 - 2 = 15$ adhérents.

Le nombre de ceux qui font seulement G est : $29 - 4 - 6 - 2 = 17$ adhérents.

Le nombre de ceux qui font seulement N est : $35 - 4 - 6 - 5 = 20$ adhérents.

Donc le nombre d'adhérent pratiquent un seul sport est : $15 + 17 + 20 = 42$ adhérents.

4. Déterminons le nombre d'adhérent qui pratiquent au moins deux sports.
Pratiquer au moins deux sports veut dire faire deux sports et plus.

Le nombre de ceux qui font seulement A et N est : $11 - 6 = 5$ adhérents.

Le nombre de ceux qui font seulement A et G est : 2 adhérent.

Le nombre de ceux qui font seulement G et N est : $10 - 6 = 4$ adhérents.

Le nombre de ceux qui font à la fois A, G et N est : 6 adhérents.

Donc le nombre d'adhérent pratiquent un seul sport est : $5 + 2 + 4 + 6 = 17$ adhérents.

5. Déterminons le nombre total d'adhérent dans le club.

On a : $15 + 17 + 20 + 5 + 4 + 2 + 6 = 69$ adhérents.

Remarque : Lorsqu' on étudie simultanément deux caractères sur une population, on peut présenter les résultats du dénombrement sous forme de tableau à double entrée (on parle aussi de tableau de contingences).

2. Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles non vides. Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (a, b) tels que a est un élément de E et b est un élément de F . On note $E \times F$ et on lit « E croix F ».

- Plus généralement le produit cartésien de p ensemble $E_1, E_2, \dots, E_p$ est l'ensemble des éléments de $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$. Il est noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est noté E^p
- Un élément du produit cartésien de p ensembles $p \geq 2$ est appelé une p -liste ou un p -uplet.
- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Propriété

Des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'un ensemble E constituent une partition de E si :

- Elles sont deux à deux disjointes.
- Leur réunion est égale à E .

Exemple : Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

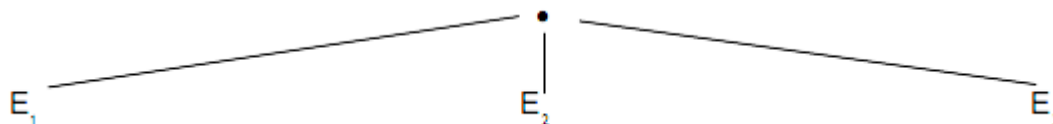
- d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : E_1, E_2, E_3

- d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : P_1, P_2, P_3, P_4
 - d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : D_1, D_2, D_3, D_4
1. Dresser un diagramme présentant tous les menus possibles.
 2. Combien un client peut-il composer de menus différents ?
 3. Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?

Solution :

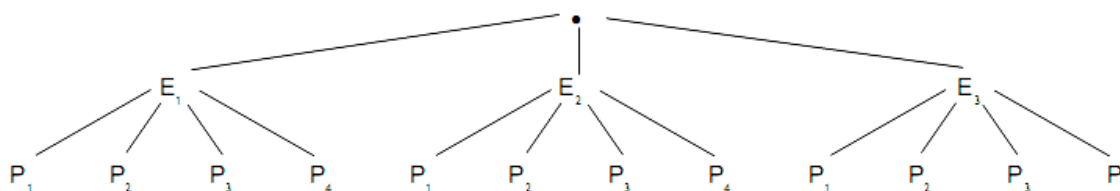
1. On peut illustrer ces données à l'aide d'un arbre de choix.

Chaque client a le choix entre 3 entrées possibles E_1, E_2, E_3 , ce que l'on peut représenter sous la forme :



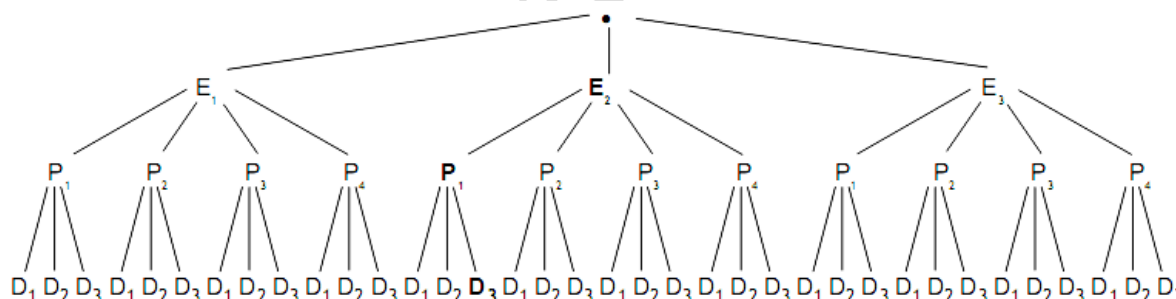
Une fois l'entrée choisie, il peut choisir le plat principal de 4 façons différentes.

On peut alors poursuivre l'arbre sous la forme :



Il reste alors à choisir un dessert parmi trois desserts possibles.

On obtient alors :



2. Chacun des "chemins" choisis correspond à un des menus possibles. On peut alors compter le nombre de menus qui est égal à 36.

Remarque : Ce nombre correspond à $3 \times 4 \times 3$.

En effet on dispose de 3 possibilités pour choisir l'entrée.

Pour chaque entrée choisie, il y a 4 possibilités de choisir le plat principal, ce qui donne donc $3 \times 4 = 12$ possibilités pour le choix d'une entrée et d'un plat. Enfin pour chacune de ces 12 possibilités, il y a 3 possibilités pour choisir le dessert, ce qui donne finalement $12 \times 3 = 36$ possibilités de menus différents.

3. Il y a 3 choix pour l'entrée, 1 choix pour le plat (le plat P_2) et 3 choix pour le dessert, ce qui donne donc $3 \times 1 \times 3 = 9$ possibilité de composer un menu comportant le plat P_2

(On peut répondre à cette question en comptant directement sur l'arbre de choix ci-dessus)

Propriété**Principe additif (ou principe de la somme).**

Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E , alors :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E . On a : $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(E)$

Remarque:

✓ Pour tout ensemble finis $E_1, E_2, \dots, E_p$ on a :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$$

✓ Si E est un ensemble fini, alors $\text{Card} E^p = (\text{Card}(E))^p$.

Propriété**Principe multiplicatif (ou principe du produit).**

Si une situation comporte k étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités, où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i , alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$. C'est la règle utilisée lorsque nous dressons un arbre.

Exemple : Combien peut-on former de codes comportant trois lettres distinctes de l'alphabet autre que la lettre O suivie de quatre chiffres quelconques pris parmi 0, 1 et 2 ?

Solution : Il y a 7 étapes pour constituer un code :

- 1^{ère} étape : le choix de la première lettre offre $n_1 = 25$ possibilités.
- 2^{ème} étape : le choix de la deuxième lettre offre $n_2 = 24$ possibilités.
- 3^{ème} étape : le choix de la troisième lettre offre $n_3 = 23$ possibilités.
- 4^{ème} étape : le choix du premier chiffre offre $n_4 = 3$ possibilités.
- 5^{ème} étape : le choix du deuxième chiffre offre $n_5 = 3$ possibilités.
- 6^{ème} étape : le choix du troisième chiffre offre $n_6 = 3$ possibilités.
- 7^{ème} étape : le choix du quatrième chiffre offre $n_7 = 3$ possibilités.

Conclusion :

Le nombre total de codes possibles est $25 \times 24 \times 23 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1\,117\,800$.

LECON 2 : DIFFERENTS TYPES DE DENOMBREMENTS



Situation Problème:

Pour ouvrir un coffre-fort urgemment, Ambroise doit utiliser un code de 4 chiffres en se servant de 3 indices qui lui arrivent avant chaque tentative ratée:

- indice 1: les chiffres peuvent se répéter dans le code
- indice 2: les chiffres ne peuvent pas se répéter dans le code
- indice 3: les chiffres qui composent le code sont 1;4; 7 et 9.

1. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 1?
2. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 2?
3. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 3?

a. Dénombrement des P-listes avec ou sans répétition

Activité d'apprentissage :



Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Détermine tous les couples $(x; y)$ tels que $x, y \in E$. Quel est le nombre total de couples obtenu?
2. Dans ces couples: l'ordre importe-t-il? Peut-il avoir répétition?
3. (a) Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de x ?
- (b) Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de y ?
- (c) En déduire une astuce pour déterminer le nombre de couples $(x; y)$.

RESUME :

Définition

Soit E un ensemble à n élément et p un nombre entier naturel non nul

On appelle **p-liste** d'éléments de E tout **p-uplet** du produit cartésien p fois $E \times E \times \dots \times E$ (Ou encore noté E^p).

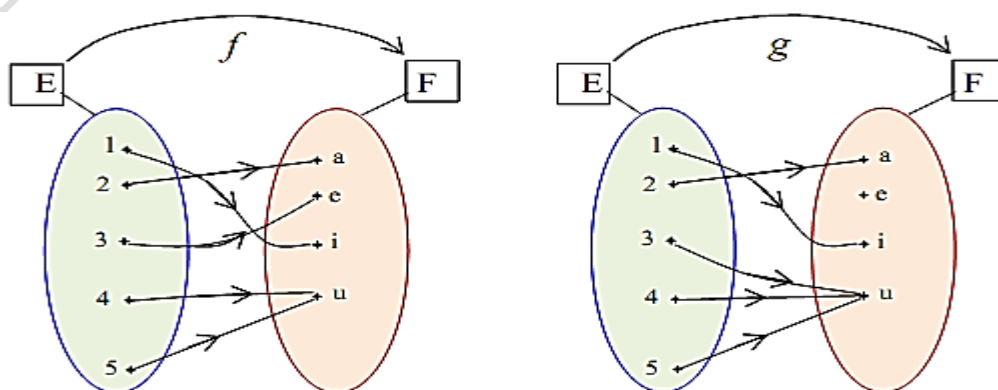
On déduit du paragraphe sur le produit cartésien que **le nombre total de p-liste d'un ensemble à n éléments est n^p** .

Remarque : 2-liste est un doublet, 3-listes est un triplet,...

Lorsqu'on inverse deux ou plusieurs éléments d'une p -liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ des éléments d'un ensemble E , on obtient une autre p -liste.

P-liste et application

Considérons les applications f et g , de E vers F , illustrées par les diagrammes ci-dessous.



- L'application f peut être simplement représentée par la 5-liste suivante : $(i; a; e; u; u)$.

- La 5-liste $(i ; a ; e ; u ; u)$ véhicule les informations suivantes : l'image du 1er élément de l'ensemble de départ est i ; celui du 2^{ème} est a , ..., et celui du 5^{ème} est u .
- Quelle est la 5-liste qui représente l'application g ?
- Définir par un diagramme les applications h et t , de E vers F , représentées par les 5-listes suivantes : $(a ; a ; u ; i ; e)$; $(a ; e ; u ; i ; e)$
- En utilisant le principe multiplicatif, dire quel est le nombre total d'applications de E vers F . Quel constat peut-on faire ?

Exemple : Des 8-listes des éléments de l'ensemble $\{0 ; 1\}$ sont : 01010101 ; 11110011 ; 00110011 ; ...

Le nombre total d'octets est alors : $2^8 = 256$ (En informatique, ces 8-listes sont appelées "octets")

Conséquence : Soit E un ensemble de p éléments et F un ensemble de n éléments. Une application de E vers F peut être assimilée à une p -liste des éléments de F , et réciproquement. Le nombre total d'application de E vers F est n^p .

b. Dénombrement des arrangements

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre total d'arrangements de p éléments de E est le nombre noté A_n^p , défini par :

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$

Remarque :

- ✓ Un arrangement de p éléments de E est une p -liste où les éléments ne se répètent pas.
- ✓ Si l'on impose à une p -liste d'éléments d'un ensemble E de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$) de ne contenir que des éléments deux à deux distincts, on a nécessairement $1 \leq p \leq n$.

Définition (factorielle)

Soit n un entier naturel. On appelle factoriel n , l'entier naturel noté $n!$ et défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \text{ et par convention : } 0! = 1 \text{ et } A_n^0 = 1$$

Le nombre total d'arrangements de p éléments de E est donc aussi défini par :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Définition (Permutation)

Soit E un ensemble à n éléments.

On appelle permutation des éléments de E tout arrangement des n éléments de E .

Le nombre total de permutations des éléments de E est $A_n^n = n!$

4. Dénombrement des combinaisons

Définition (Permutation)

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E (ou p-combinaison d'éléments de E), tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Le nombre total de combinaison de p éléments de E est défini par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque :

- Un arrangement et une combinaison de p éléments de E ont en commun le fait que : les éléments sont deux à deux distincts (pas de répétition d'un même élément).
- La différence fondamentale entre un arrangement et une combinaison de p éléments de E est la suivante :
✓ Lorsqu'on inverse deux ou plusieurs éléments d'un p-arrangement $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ des éléments d'un ensemble E, on obtient un autre p-arrangement.

Lorsqu'on inverse deux ou plusieurs éléments d'une p-combinaison $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ des éléments d'un ensemble E, on obtient la même p-combinaison.

- Les nombres C_n^p avec $0 \leq p \leq n$ peuvent être déterminés à l'aide du tableau ci-dessous encore appelé **triangle de Pascal** :

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	...
n=0	1								
n=1	1	1							
n=2	1	2	1						
n=3	1	3	3	1					
n=4	1	4	6	4	1				
n=5	1	5	10	10	5	1			
n=6	1	6	15	20	15	6	1		
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$$

Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

Propriété : Formule du binôme

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. Nous admettons le résultat suivant encore appelé "formule du binôme" : (la ligne " $n = 5$ " du triangle de Pascal permet de retrouver rapidement les coefficients C_n^p).

Point Méthode : Quand faut-il utiliser des p-listes, des arrangements ou des combinaisons ?

Pour cela, on doit répondre aux questions suivantes :

- Les éléments peuvent-ils être répétés ?
- L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?
- Suivant les réponses obtenues aux questions ci-dessus on a les cas suivants :

critères	Les éléments peuvent être répétés	Les éléments sont distincts (pas de répétition)
On ne tient pas compte de l'ordre des éléments	Hors programme	Combinaison C_n^p
On tient compte de l'ordre des éléments	p-liste n^p	Arrangement A_n^p

Modèles de base : Soit n et p deux entiers naturels.

Les tirages de p boules dans une urne qui contient n , modélisent de nombreux problèmes de dénombrement. Le tableau ci-dessous dresse un bilan des types de tirage.

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p -listes)
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p (arrangements)
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p (combinatoires)

Principes de dénombrements

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p -listes)
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p (arrangements)
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p (combinatoires)

Point Méthodes : Quand on utilise plusieurs arrangements ou combinaisons, faut-il les additionner ou multiplier ?

Ceci dépend de la situation. Concrètement :

- ✓ Si les différentes étapes sont reliées par la conjonction "et" : on multiplie.
- ✓ Si les différentes étapes sont reliées par la conjonction "ou" : on additionne.