

Similitudes directe planes

1-Transformations du plan

Définition 1 :

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une transformation si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(M) = N$.

Exemples : une translation, une homothétie, une rotation, une symétrie axiale, une identité du plan, sont des transformations du plan.

Contre-exemple : Projection orthogonale sur une droite.

Propriétés 1

Soit f une transformation du plan, l'application du plan dans lui-même qui à tout point N associe l'unique point M tel que $f(M) = N$ est aussi une transformation du plan, elle est appelée transformation réciproque de f et notée f^{-1} on a alors $f(M) = N \Leftrightarrow f^{-1}(N) = M$

Exemples : une translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

-Une rotation de centre O et d'angle α non nul est une transformation, et sa réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.

-Une homothétie de centre O et de rapport k est une transformation et sa réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

Généralité

Définition 2

On appelle similitude du plan toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan par laquelle pour tout point M, N, P, Q

$$(M \neq N \text{ et } P \neq Q) \text{ On a : } \frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$$

Propriété 2

Soit f une transformation du plan, f est une similitude si et seulement si il existe un réel $k > 0$, tels que f multiplie les distances par k c'est-à-dire pour tout point M et N dont les images par f sont notées M' et N' on a :

$$M'N' = kMN$$

Le nombre réel k strictement positif est appelé rapport de la similitude.

Exemples : Les translations, les symétries axiales, les rotations, l'application identique sont des similitudes de rapport 1, car elles conservent les distances.

-Une similitude de rapport 1 est appelée une isométrie.

-Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Propriété 3

-Si f est une similitude de rapport k , alors sa réciproque f^{-1} est une similitude de rapport k^{-1} .

-g Une similitude de rapport k' alors les composées $f \circ g$ sont des similitudes de rapport kk' .

-L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.

- f est une similitude de rapport k alors

$\underbrace{f \circ f \circ f \dots f}_{n \text{ fois}}$ est une similitude de rapport k^n

NB : dans le cas d'une isométrie l'image d'un triangle est un triangle isométrique.

Exemples : La composée d'une rotation de rapport toujours égal à 1 et d'une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une similitude de rapport $|k|$.

Classification des similitudes

Définition 3

Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.

Une similitude indirecte est une similitude qui transforme un angle orienté en son opposé.

L'image d'un triangle par une similitude directe est un triangle directement semblable et l'image par une similitude indirecte est un triangle inversement semblable.

Exemple : une translation, une rotation et une homothétie sont des similitudes directes, or une réflexion est une similitude indirecte.

Propriété 4

-La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

-La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

-La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Similitude fixant trois points

Théorème 1

Soit A,B et C trois points non alignés ,si f est une similitude telle que :

$f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$,alors f est l'application identique .

Démonstration

Soit A,B et C trois points non alignés et f une similitude telle que :

$$f(A) = A , f(B) = B , f(C) = C$$

Le rapport de la similitude f est :

$$k = \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

Donc f est une similitude de rapport 1 donc f est une isométrie du plan.

f une isométrie du plan A,B et C trois points du plan, non alignés.

Pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

Prenons A',B' , C' et M' les images respectives des points A,B,C et M

$$\text{Alors } \varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC})$$

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = x\varphi(\overrightarrow{AB}) + y\varphi(\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = x\overrightarrow{f(A)f(B)} + y\overrightarrow{f(A)f(C)}$$

$$\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$$

Etant donné que les points A, B et C sont fixes alors :

$$\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

D'après (1) et (2) cela traduit : $M'=M$

Théorème 2

Soit A, B deux points distincts, si f est une similitude telle que : $f(A) = A$, $f(B) = B$ alors f est une symétrie axiale d'axe (AB) .

Démonstration

Soit A, B et C trois points non alignés et f une similitude telle que :

$$f(A) = A \text{ , } f(B) = B \text{ ,}$$

Le rapport de la similitude f est :

$$k = \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

Donc f est une similitude de rapport 1 donc f est une isométrie du plan.

f une isométrie du plan A, B deux points fixes du plan non alignés.

Soit $C \notin (AB)$ et $f(C) = C'$ alors $C \neq C'$

Or $AC=AC'$ et $BC=BC'$ donc (AB) est la médiatrice du segment CC' , il s'ensuit que l'image de C par la réflexion d'axe (AB) est C' d'où $S_{(AB)} \circ f$ est une isométrie de même que $S_{(AB)} \circ f$.

$$\text{Par ailleurs : } \begin{cases} S_{(AB)} \circ f(A) = S_{(AB)}(A) = A \\ S_{(AB)} \circ f(B) = S_{(AB)}(B) = B \\ S_{(AB)} \circ f(C) = S_{(AB)}(C') = C \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } S_{(AB)} \circ f = Id \Rightarrow f = S_{(AB)}^{-1}$$

NB : Toute réflexion est involutive, c'est-à-dire qu'elle a pour réciproque elle-même.

$$\text{En effet : } S_{(AB)}^{-1} = S_{(AB)}$$

$$\text{D'où : } f = S_{(AB)}$$

Forme réduite de la similitude directe :

$S = roh = hor$ Ou h homothétie et r rotation

Propriété 5

Soit S similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ .

Pour tout points M et M' du plan, distincts de

$$\Omega \text{ on a : } S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

Propriété 6

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tel que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

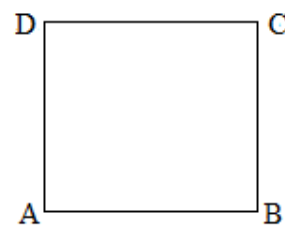
Application 1

Dans le plan orienté $ABCD$ est un carré de côté 1 et de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$, I est le milieu du segment $[AO]$.

1) justifier qu'il existe une unique similitude S telle que : $S(A)=O$ et $S(B)=I$

2) Déterminer le rapport et l'angle de S .

Proposition de correction



1.

Soient A, B, O et I quatre points du plan tel que $A \neq B$ et $O \neq I$ alors il existe une unique similitude directe transformant A en O et B en I .

2.

$$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OI = kAB \quad (1) \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) \equiv \theta[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

Le rapport en partant de (1)

$$OI = kAB \Rightarrow k = \frac{OI}{AB}$$

$$AC = \sqrt{2} \text{ (d'après pythagore) } OI = \frac{1}{4}AC$$

$$OI = \frac{\sqrt{2}}{4} ; AB = 1 \text{ Ainsi } k = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'angle de S en partant de (2)

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA})$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AO})$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, -\overrightarrow{AO})$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{4} + \pi \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Conclusion : S similitude de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

Ecriture complexe d'une similitude directe plane

Une transformation S est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ ou a et b sont des nombres complexes (a non nul)

Le rapport de S est égal : $k = |a|$

L'angle de S : $\theta \equiv \text{Arg}(a)[2\pi]$

Le centre de S : $\omega = \frac{b}{1-a}$

Propriété 7

Toute similitude plane directe, autre qu'une translation admet un point fixe unique ce point fixe est appelé centre de la similitude.

Théorème 3

Soit S une similitude directe plane de rapport k et d'angle θ est :

Soit une translation si $k = 1$ et $\theta = 0$

Soit la composé dans un ordre quelconque d'une rotation de centre Ω puis d'angle θ et d'une homothétie de même centre Ω et de rapport k .

Elle admet une écriture complexe de la forme :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = a(z - \omega)$$

$$\text{Avec } a = ke^{i\theta}$$

Le rapport $k = |a|$; L'angle : $\theta \equiv \text{Arg}(a)[2\pi]$

Remarque

Les translations et homothétie de rapport positif ont pour angle nul ; $\theta \equiv 0[2\pi]$

Exemple : $h(M) = M' \Leftrightarrow z' = 3z + 3 + i$;

$$T(M) = M' \Leftrightarrow z' = z - 2i$$

$$\text{L'angle de } h : \theta = \text{Arg}(3) = 0$$

$$\text{L'angle de } T : \theta_1 = \text{Arg}(1) = 0$$

Les homothéties de rapport négatif ont pour angle π , $\theta \equiv \pi[2\pi]$

Exemple : $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = -5z + 3 + i$;

$$g(M) = M' \Leftrightarrow z' = -2z - 2i$$

$$\text{L'angle de } f : \theta' = \text{Arg}(-5) = \pi$$

$$\text{L'angle de } g : \theta'_1 = \text{Arg}(-2) = \pi$$

Définition 3

On dit que f est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ .

On note $f = S(\Omega, k, \theta)$, $k > 0$

Cas particulier

Si $k = 1$, la similitude f est une rotation

$$f = S(\Omega, 1, \theta) = r(\Omega, \theta)$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ la similitude directe f est une homothétie de rapport k .

$$f = S(\Omega, k, 0) = h(\Omega, k)$$

Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$ la similitude directe f est une homothétie de rapport $-k$.

$$f = S(\Omega, k, \pi) = h(\Omega, -k)$$

Déplacements

Une similitude directe de rapport 1 est appelé un déplacement.

Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation, ou soit une identité du plan.

Si l'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

Pour un déplacement $|a| = 1$

Si $b = 0$ et $a = 1$ le déplacement est l'identité du plan c'est à dire soit une translation de vecteur nulle ou une rotation de centre O et d'angle 2π .

$$\begin{cases} t_{\vec{O}}(M) = M' \Leftrightarrow id_p \\ r(O; 2\pi)(M) = M' \Leftrightarrow id_p \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ et $a = e^{i\theta}$ alors le déplacement est une rotation d'angle θ et de centre $\Omega(\omega)$.

Similitudes planes indirectes

Propriété 8

Etant donné une droite Δ , toute similitude indirecte f est la composée d'une réflexion σ d'axe Δ et d'une similitude directe S

D'où forme réduite : $f = So\sigma = SoS_{\Delta}$

Propriété 9

Une transformation est une similitude indirecte si et seulement si, son écriture complexe est sous la forme :

$$z' = a\bar{z} + b(a \neq 0)$$

Effet d'une similitude sur les configurations

Propriété 10

Toute similitude de rapport $k > 0$

-Multiplie les distances par k , et les aires par k^2

-Conserve les angles géométriques on le parallélisme et l'orthogonalité

-Conserve les alignements, les milieux et les intersections

-Conserve le barycentre d'un système de n points pondérés

-Transforme une droite en une droite, un segment en un segment et un cercle en un cercle.

Application 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$$

1) Démontrer que f est une similitude directe dont on donnera le centre Ω , le rapport k et l'angle θ .

2) Soit M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$, pour tout entier naturel n , le point M_{n+1} est définie par :

$$M_{n+1} = f(M_n)$$

2.a) Calculer ΩM_n en fonction de n

2.b) Placer les points M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4

2.c) A partir de quel rang n_0 a-t-on pour tout

$n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon 0,05 ?

3.a) calculer $M_0 M_1$

3.b) Pour tout entier naturel n , on note

$$d_n = M_n M_{n+1}$$

Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3.c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$

Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4.) Pour tout entier naturel non nul n , on note G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, \dots, M_n$

4.a) Montrer que pour tout $n > 0$, $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$

4.b) En déduire la limite du point G_n lorsque n Tend vers $+\infty$

Proposition de correction

f est écrit sous la forme : $z' = az + b$ avec

$$a = \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^* ; b = \frac{1-3i}{2}$$

De ce fait f est une similitude directe.

Eléments caractéristiques :

Soit k le rapport de f : $k = |a|$

$$k = \left| \frac{1}{2}i \right|$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Soit θ un argument de f . $\theta = \text{Arg}(a)$

$$\theta = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}i\right)$$

Rappel : $\text{Arg}(zz') \equiv \text{Arg}(z') + \text{Arg}(z) [2\pi]$

$$\theta = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arg}(i)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le centre : soit point Ω d'affixe ω est solution de l'équation $f(M) = M \Leftrightarrow \omega - \frac{1}{2}i\omega = \frac{1-3i}{2}$

$$\omega = \frac{1-3i}{1+i}$$

$$\omega = 1 - i$$

Conclusion : f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre ω .

2.

$$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(M_n) = M_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \Omega M_n \quad (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M_n}, \overrightarrow{\Omega M_{n+1}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{En partant de (1) : } \Omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \Omega M_n$$

$$\text{Posons } U_n = \Omega M_n \Rightarrow U_{n+1} = \Omega M_{n+1}$$

$$\text{D'où : } U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$$

De ce fait (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
et de 1^{er} terme $U_0 = \Omega M_0 = |z_0 - z_\Omega| = 8$.

Formule explicite : $U_n = q^{n-k} U_k$ le premier
terme vaut 0 donc $k = 0$

$$\text{Ainsi : } U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0 \Rightarrow \Omega M_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

b.

$$f(M_0) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}iz_0 + \frac{1-3i}{2} = -1 + i(2\sqrt{3}-1)$$

$$f(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = \frac{1}{2}iz_1 + \frac{1-3i}{2}$$

$$f(M_2) = M_3 \Leftrightarrow z_3 = \frac{1}{2}iz_2 + \frac{1-3i}{2}$$

Après avoir donné la forme algébrique placez les
points.

c.

$$M_n \in D(\Omega, 0,05) \Leftrightarrow \Omega M_{n_0} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \times 8 \leq 0,05$$

$$n_{n_0} \geq \frac{\ln\left(\frac{0,05}{8}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 7,32 \text{ d'ou : } n_0 = 8$$

3.a

1^{er} Démarche

Calculons $M_0 M_1$

$$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(M_0) = M_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \Omega M_n \quad (1) \\ (\overline{\Omega M_n}, \overline{\Omega M_{n+1}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

De ce fait le triangle $M_0 \Omega M_1$ est rectangle en Ω
ainsi d'après Pythagore :

$$M_0 M_1^2 = M_0 \Omega^2 + \Omega M_1^2$$

$$\text{Par ailleurs : } \begin{cases} M_0 \Omega = |z_\Omega - z_0| = 8 \\ \Omega M_1 = |z_1 - z_\Omega| = 4 \end{cases}$$

$$\text{Par suite : } M_0 M_1^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow M_0 M_1 = 4\sqrt{5}$$

2^{eme} Démarche

$$M_0 M_1 = |z_1 - z_0|$$

$$M_0 M_1 = |-1 + i(2\sqrt{3}-1) - 1 - 4\sqrt{3} - 3i|$$

$$M_0 M_1 = 4\sqrt{5}$$

3.b

$$d_n = M_n M_{n+1}$$

$$\begin{cases} f(M_n) = M_{n+1} \\ f(M_{n+1}) = M_{n+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{n+1} M_{n+2} = \frac{1}{2} M_n M_{n+1} \quad (1) \\ (\overline{M_n M_{n+1}}, \overline{M_{n+1} M_{n+2}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{En partant de (1). } M_{n+1} M_{n+2} = \frac{1}{2} M_n M_{n+1} \quad (1)$$

$$\text{Posons } d_n = M_n M_{n+1} \Rightarrow d_{n+1} = M_{n+1} M_{n+2}$$

$$\text{D'où : } d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$$

De ce fait (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
et de 1^{er} terme $d_0 = M_0 M_1 = 4\sqrt{5}$.

Formule explicite : $d_n = q^{n-k} d_k$ le premier
terme vaut 0 donc $k = 0$

$$\text{Ainsi : } d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \Rightarrow d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4\sqrt{5}$$

3.c

$$l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

$$l_n = 4\sqrt{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times 4\sqrt{5} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4\sqrt{5}$$

$$l_n = 4\sqrt{5} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\text{Posons : } k_n = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

On constate que k_n est la somme de $n+1$ termes
consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
et de premier terme 1.

$$\text{De ce fait : } k_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Par suite : $l_n = 8\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

On a : $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Au final $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 8\sqrt{5}$

4.a

$$G_n = \text{bar}\{(M_0, 1); (M_1, 1) \dots (M_n, 1)\}$$

$$\text{En effet : } \overrightarrow{G_n M_0} + \overrightarrow{G_n M_1} + \overrightarrow{G_n M_2} + \dots + \overrightarrow{G_n M_n} = \vec{0}$$

Introduisons Ω on a :

$$\overrightarrow{G_n \Omega} + \overrightarrow{\Omega M_0} + \overrightarrow{G_n \Omega} + \overrightarrow{\Omega M_2} \dots + \overrightarrow{G_n \Omega} + \overrightarrow{\Omega M_n} = \vec{0}$$

Par ailleurs

$$\begin{cases} \overrightarrow{G_n \Omega} + \overrightarrow{G_n \Omega} + \dots + \overrightarrow{G_n \Omega} = (n+1) \overrightarrow{G_n \Omega} \\ \overrightarrow{\Omega M_0} + \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega M_2} + \dots + \overrightarrow{\Omega M_n} = \sum_{p=0}^n \overrightarrow{\Omega M_p} \end{cases}$$

$$\text{Par suite on a : } (n+1) \overrightarrow{G_n \Omega} + \sum_{p=0}^n \overrightarrow{\Omega M_p} = \vec{0}$$

$$(n+1) \overrightarrow{\Omega G_n} = \sum_{p=0}^n \overrightarrow{\Omega M_p}$$

$$(n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| = \sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\|$$

Cependant on sait que : $\Omega M_p = \left(\frac{1}{2}\right)^p \times 8$

$$\sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\| = 8 \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

$$\sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\| = 8 \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

Or d'après ce qui précède :

$$\sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

On constate que $\sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p$ est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

$$\text{De ce fait : } \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Par suite :

$$(n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| = \sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\|$$

$$(n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| = 8 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$(n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On remarque que pour tout entier naturel n on a :

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 0$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 1$$

$$16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 16$$

$$\sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\| \leq 16 \text{ Or } (n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| = \sum_{p=0}^n \|\overrightarrow{\Omega M_p}\|$$

$$(n+1) \|\overrightarrow{\Omega G_n}\| \leq 16$$

Rappel : $\|\vec{U}\| = U$

$$\text{D'où : } \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$$

4.b

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega G_n = 0$, par comparaison cela traduit que les points Ω et G_n sont confondus.

Application 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la transformation f du plan qui à tout point $M(Z)$ associe le point $M'(Z')$ tel que :

$$Z' = (-\sqrt{3} + i)Z$$

Et on définit une suite de points (M_n) de façon suivante : M_0 a pour affixe $Z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n :

$M_{n+1} = f(M_n)$ on appelle Z_n l'affixe du point M_n

1-Determiner la nature et les éléments caractéristiques de f .

Placer les points $M_0; M_1$ et M_2 sur la figure .

1. b-Justifier que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables.

2-Montrer que pour entier naturel n , on a l'égalité : $Z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$

Soient deux entiers n et p tels que $n \geq p$

3-Determiner une condition nécessaire et suffisante portant sur n et p pour que les points soient alignés.

Soit k un entier relatif, on considère l'équation $(E_k) : 12x - 5y = k$

4. a-Justifier que l'équation (E_k) admet au moins une solution et indiquer une méthode.

4. b-Résoudre l'équation $(E_3) : 12x - 5y = 3$

4. c-En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que (M_n) appartienne à la demi droite $[Ox)$

Proposition de correction

1.

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = (-\sqrt{3} + i)z$$

f s'écrit sous la forme de $z' = az + b$ avec

$$a = -\sqrt{3} + i, \text{ et } b = 0 \text{ de plus } -\sqrt{3} + i \in \mathbb{C}^*$$

Donc f est une similitude directe

-Eléments caractéristiques de f

soit k le rapport de f :

$$k = |a|$$

$$k = |-\sqrt{3} + i|$$

$$k = 2$$

L'angle de f

Soit θ l'angle de f

$$\theta \equiv \text{Arg}(-\sqrt{3} + i)[2\pi]$$

$$\theta = \text{Arg}\left(2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)$$

Rappel : $\text{Arg}(zz') \equiv \text{Arg}(z') + \text{Arg}(z)[2\pi]$

$$\theta = \text{Arg}(2) + \text{Arg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\theta = \text{Arg}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\theta = \text{Arg}\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$

$$\theta \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Soit le centre Ω le point d'affixe ω

Rappel : $\omega = \frac{b}{1-a}$ vu que l'écriture complexe de f est sous la forme $f(z) = az$ de ce fait $b=0$ cela traduit que $\omega = 0$ d'où : $\Omega = O$

Conclusion : f est une similitude directe de

Centre O d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et de rapport 2 .

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i)z_0 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = (-\sqrt{3} + i)z_1$$

Après avoir calculé les affixes des points placez les points .

b.

Justifions que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

$$\begin{cases} f(O) = O \\ f(M_0) = M_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = 2OM_0 \\ (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(O) = O \\ f(M_1) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_2 = 2OM_1 \\ (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

Par suite : $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{M_1M_2}{M_0M_1} = 2$

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

Conclusion : les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

2.

Soit $p(n)$ la proposition « $z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$ »

Initialisation, vérifions que $p(0)$ est vraie

$$p(0) : z_0 = 2^0 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc $p(0)$ est vraie

Hérédité pour tout entier n supposons que $p(n)$ soit vraie c.-à-d.

$$z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie

C.-à-d. : $z_{n+1} = 2^{n+1} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$ **BUT**

D'après l'hypothèse on a : $z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$

En multipliant de part et d'autre par $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ on a :

$$2e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n = 2^{n+1} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$$

Soit encore : $z_{n+1} = 2^{n+1} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$

Donc $p(n+1)$ est vraie la proposition est héréditaire

Conclusion : par initialisation et hérédité pour tout n entier naturel on a :

$$z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$$

3.

Si les points M_n, M_p et O sont alignés

$$(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par ailleurs $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}) = \text{Arg} \left(\frac{z_n}{z_p} \right)$

$$\text{Arg} \left(\frac{2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}}{2^p e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6})}} \right) = \text{Arg} \left(2^{n-p} e^{i(\frac{5\pi n}{6} - \frac{5p\pi}{6})} \right)$$

$$\text{Arg} \left(\frac{2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}}{2^p e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6})}} \right) = \text{Arg}(2^{n-p}) + \text{Arg} \left(e^{i(\frac{5\pi n}{6} - \frac{5p\pi}{6})} \right)$$

Rappel : $\text{Arg}(e^{i\theta}) = \theta$ $\text{Arg}(Z) = 0$, si $Z \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{Arg} \left(\frac{2^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}}{2^p e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6})}} \right) = \frac{5\pi}{6} (n - p)$$

$$\text{Arg} \left(\frac{z_n}{z_p} \right) = \frac{5\pi}{6} (n - p)$$

Par suite : Par ailleurs $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}) = \frac{5\pi}{6} (n - p)$

Cela implique : $\frac{5\pi}{6} (n - p) = k\pi$

$$n = 6k + p \Leftrightarrow n \equiv p[6]$$

4.

$$(E_k): 12x - 5y = k$$

$$\text{pgcd}(12; 5) = 1 \Leftrightarrow 12u + 5v = 1, (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Soit k un entier en multipliant par k on obtient :

$$12ku + 5kv = k, \text{ En posant } \begin{cases} x = ku \\ -y = kv \end{cases} \text{ on a :}$$

$12x - 5y = k$ De ce fait k est multiple du $\text{pgcd}(12; 5)$ donc l'équation (E_k) admet au moins une solution

$$12 = 5 \times 2 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

Méthode algorithmique d'Euclide

$$1 = 5 \times 1 - 2 \times 2$$

$$1 = 5 - 2(12 - 5 \times 2)$$

$$1 = 5(1 + 4) - 2 \times 12$$

$$1 = 12(-2) + 5(5)$$

$$1 = 12(-2k) - 5(-5k)$$

$$\text{D'où : } x = -2k ; y = -5k$$

Donc le couple $(-2k; -5k)$ est une solution de (E_k)

b.

$$\text{Résoudre } (E_3): 12x - 5y = 3 \text{ ici } k = 3$$

Ainsi le couple $(-6; -15)$ est une solution particulière.

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12(6) - 5(15) = -3 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on obtient

$$12(x + 6) = 5(y + 15)$$

12 divise $5(y + 15)$ comme $\text{pgcd}(12; 5) = 1$ alors 12 divise $y + 15$, d'après GAUSS il existe un entier relatif k' tel que : $y + 15 = 12k'$

$$y = 12k' - 15$$

$$12(x + 6) = 5 \times 12k'$$

$$x = 5k' - 6$$

$$\text{D'où : } S = \{(5k' - 6; 12k' - 15), k' \in \mathbb{Z}\}$$

Application 4(extrait BAC GABON 2013)

ABCD est un carré de sens direct e de centre I. Soit M un point du plan tel que : $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DC}$.

N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire (L) a la droite (AM) passant par A. de plus J le milieu du segment $[MN]$ et E le symétrique de C par rapport a B.

1. Faire une figure que l'on complétera.
2. On considère la rotation r de centre A telle que que : $r(D) = B$
 2. a-justifier que le triangle AEC est isocèle rectangle en A.
 2. b-Déterminer les images des droites (DC) et (AM) par la rotation r :
 2. c-En déduire que $r(M) = N$.
3. On considère la similitude plane directe S telle que : $S(D) = I$ et $S(C) = B$
 3. a- Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude.
 3. b-Démontrer que le centre de cette similitude est le point A.
 3. c-En déduire que : $S(M)=J$
 3. d-Démontrer que : $I = \text{bar}\{(J; 1); (B; -2)\}$

Proposition de correction

1 .

Figure ici

2.a

On considère la rotation r

$$\begin{cases} r(A) = A \\ r(D) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AD \\ (\widehat{AD, AB}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } r\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$$

Par suite on a $S_B(C) = E \Leftrightarrow BC = BE$ vu que ABCD est un carré direct alors :

$$r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)(C) = E \Leftrightarrow \begin{cases} AE = AC \\ (\widehat{AC, AE}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cela traduit que le triangle AEC est rectangle isocèle en A.

2.b

$\begin{cases} r(A) = A \\ r(D) = B \end{cases}$ On constate que $r((AD))$ est la droite orthogonale à (AD) passant par $r(A)$, en effet $r((AD)) = (AB)$

NB : une isométrie conserve l'orthogonalité et transforme une droite en une droite.

Par suite $r((DC))$ est la droite orthogonale à (DC) passant par $r(D)$, en effet $r((DC)) = (BE)$

De même $r((AM))$ est la droite orthogonale à (AM) passant par $r(A)$, en effet $r((AM)) = (AN)$.

2.c

D'après ce qui précède on a :

$$(r(A)r(M)) = (AN) \text{ or } r(A) = A$$

$$(Ar(M)) = (AN)$$

$$\text{Par identification : } r(M) = N$$

3.

$$\begin{cases} S(D) = I \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IB = kDC \quad (1) \\ (\widehat{DC, IB}) = \theta \quad (2) \end{cases}$$

Le rapport en partant de (1) on a :

$$k = \frac{IB}{DC} \Rightarrow k = \frac{\frac{1}{2}BD}{DC} = \frac{\frac{1}{2}DC\sqrt{2}}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle en partant de (2) :

$$(\widehat{DC, IB}) = (\widehat{DC, DI}) = -\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : S est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. b

$$\text{D'une part A : } \begin{cases} \frac{AI}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \\ (\widehat{AD, AI}) = -\frac{\pi}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{D'autre part B : } \begin{cases} \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \\ (\widehat{AD, AI}) = -\frac{\pi}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{D'après A et B on a } \Leftrightarrow S(A) = A$$

3.c

D'après ce qui précède $r(M) = N \Rightarrow$ AEC est isocèle rectangle en A. de plus [AJ] hauteur (médiatrice) de [MN] ce qui traduit que

$$\begin{cases} \frac{AJ}{AM} = \frac{\frac{1}{2}AM\sqrt{2}}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{AM, AJ}) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

3. d

S conserve le barycentre ou l'alignement

$$\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow D = \text{bar}\{(M; 1), (C; -2)\}$$

$$S(D) = \text{bar}\{(S(M); 1), (S(C); -2)\}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} S(D) = I \\ S(C) = B \\ S(M) = J \end{cases}$$

$$I = \text{bar}\{(J; 1), (B; -2)\}$$