Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

2e S

MATHÉMATIQUES

4070

EDICEF

M^r SOH VOUTSA ARNOLD 2nd C3

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

2e
SCIENTIFIQUE

Anne MAS-GALAUP
Jean-Luc NEULAT
Georgette HADDAD-OUÉDRAOGO
Émile RAKOTOARIVONY
Odette ROUSSET
Joseph SARR
Soma TRAORÉ
Joseph TSOUMTSA

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, la premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RWANDA
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	SÉNÉGAL
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	TCHAD
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TOGO
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	ZAÏRE

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

M. Valère BONNET
M. Jacques BOUBILA
Mme Anne MAS-GALAUP
M. Jean-Luc NEULAT
M. Paul REY
M. Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999 et à Ouagadougou en 2000.

ISSN 1248-587-X
ISBN 2-84-129216-9

PRÉFACE

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

– l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

– l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;

– la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

Saliou Touré

SOMMAIRE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

PLATON (428-347 av. J.-C., Athènes)

ALPHABET GREC

Majuscule	Minuscule	Appellation
Α	α	alpha
Β	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	dzêta
Η	η	êta
Θ	θ	thêta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
Χ	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

INDEX
des notions abordées

Imprimé en Italie par «La Tipografica Varese S.p.A.»
Dépot légal: 44505 - 03/2004 - Collection 61 - Édition 09
59/4704/9

Fruits de la collaboration entre les mathématiciens des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) reposent sur un profond travail d'investigation et d'expérimentation.

Cette collection a pour objectifs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socio-culturel africain en tant que support [illegible] privilégiés des concepts [illegible]tiques ;
- l'acquisition par les [illegible] bases d'une formation [illegible] solide qui leur permette [illegible] une situation de comp[illegible] thèses et de les valider [illegible] l'épreuve des faits [illegible] nément du recours aux résultats mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;
- la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un [illegible] rêve : un élève, un livre.

DIFFUSION
R.C.I. : NOUVELLES ÉDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.4704.9

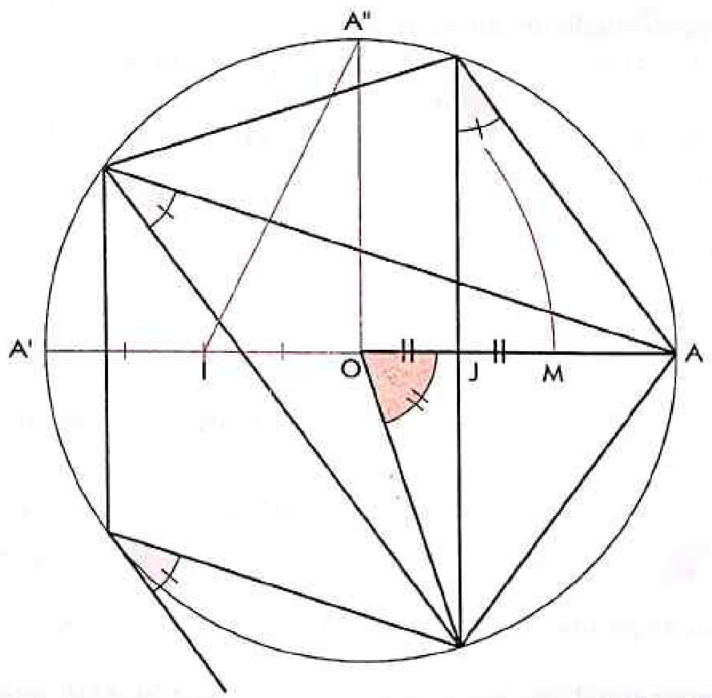
1

Angles inscrits et polygones réguliers

L'objet de ce chapitre est de compléter la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé vue en classe de 3e, puis de l'exploiter dans de nombreuses situations, notamment pour réaliser des constructions et rechercher des lieux géométriques.

On établira un résultat important : le théorème des sinus.

Enfin, une brève étude des polygones réguliers débouchera sur quelques applications trigonométriques.

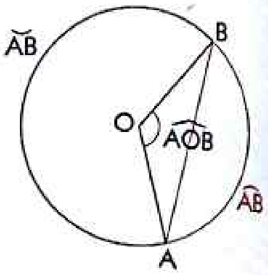


SOMMAIRE

1 Angles inscrits

1.1. Angle inscrit défini par une corde et un point

Angle au centre et arc de cercle intercepté



- Sur un cercle, une corde [AB], qui n'est pas un diamètre, détermine deux arcs :
  – celui dont la longueur est la plus petite est noté $\overset{\frown}{AB}$;
  – l'autre est noté $\overset{\smile}{AB}$.

  L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre. On dit qu'il intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
- Lorsque [AB] est un diamètre, l'angle $\widehat{AOB}$ est plat ; on dit qu'il intercepte l'un ou l'autre des demi-cercles d'extrémités A et B.

Angle inscrit et angle au centre associé

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, [AB] une corde, M un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B.

- $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$.
- L'arc de cercle d'extrémités A et B ne contenant pas M est appelé arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.
- L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

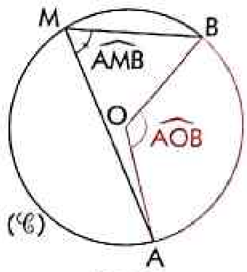


Fig. 1

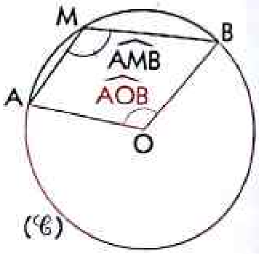


Fig. 2

Remarques

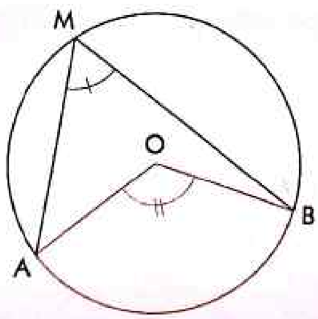
- *L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte :*
  – *l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est aigu (figure 1) ;*
  – *l'arc $\overset{\smile}{AB}$ lorsqu'il est obtus (figure 2).*
- *L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte dans tous les cas de figure l'arc $\overset{\frown}{AB}$.*

Relation entre angle inscrit et angle au centre associé

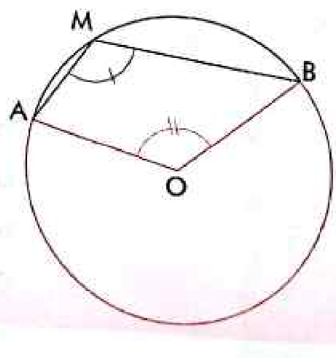
Théorème[1]

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O.

- **Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.**



- **Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors mes $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.**



Ce théorème a été démontré en classe de troisième.

1. Le terme « théorème » est communément utilisé pour désigner « une propriété importante ».

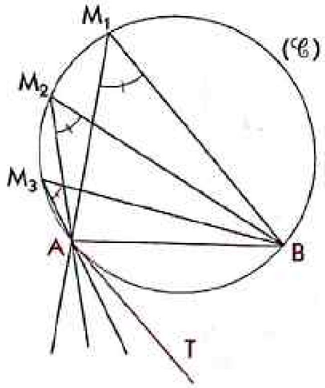
1.2. Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

Introduction

Soit [AB] une corde d'un cercle ($\mathscr{C}$) et M un point variant sur $\overset{\frown}{AB}$.

Lorsque M prend des positions M_1, M_2, M_3, etc. de plus en plus proches de A, la figure ci-contre suggère que la demi-droite [MA) « s'approche de plus en plus » de la demi-tangente [AT) en A au cercle ($\mathscr{C}$). L'angle $\widehat{AMB}$ garde une mesure constante et « semble s'approcher » de $\widehat{TAB}$.

Nous allons démontrer que l'angle $\widehat{TAB}$ a la même mesure que les angles $\widehat{AM_1B}$, $\widehat{AM_2B}$, $\widehat{AM_3B}$, etc., ce qui nous permettra d'étendre la notion d'angle inscrit à cette position limite.



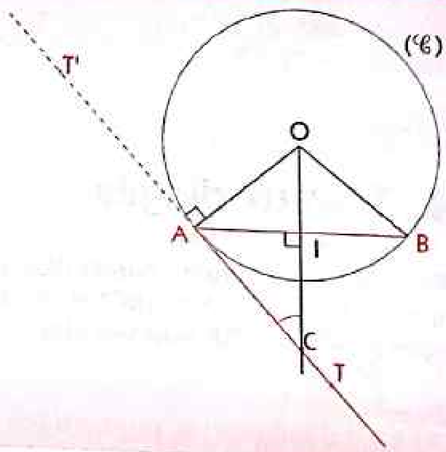
Extension de la notion d'angle inscrit

Propriété

Soit [AB] une corde d'un cercle ($\mathscr{C}$), qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à ($\mathscr{C}$) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O, [AT') l'autre demi-tangente en A.

On a : mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

et mes $\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.



Démonstration guidée

Soit I le milieu de [AB].

- Démontrer que (OI) coupe (AT) en un point C.
- En utilisant les triangles AOC et AIC, démontrer que $\widehat{AOI}$ et $\widehat{CAB}$ admettent un même angle pour complémentaire.
- En déduire que mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
- Comparer les mesures des angles $\widehat{T'AB}$ et $\widehat{TAB}$. Conclure.

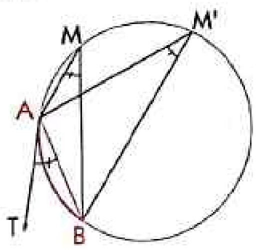
Remarques

- *En considérant que $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont des angles inscrits interceptant respectivement $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AB}$, l'énoncé du théorème du paragraphe 1.1 englobe tous les cas de figure. Nous utiliserons dorénavant cette convention.*
- *La propriété s'étend au cas où [AB] est un diamètre.*
  En effet : mes $\widehat{AOB} = 180°$ et si [AT) et [AT') sont les demi-tangentes en A au cercle, alors mes $\widehat{TAB}$ = mes $\widehat{T'AB} = 90°$.

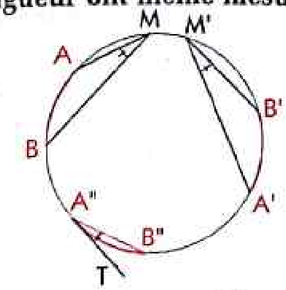
1.3. Conséquences

Propriétés

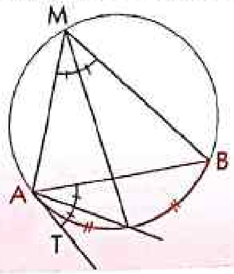
1. Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure.



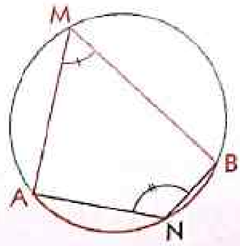
2. Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.



3. La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



4. Si M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et N un point de l'arc $\widehat{AB}$, alors $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.



1.4. Travaux dirigés

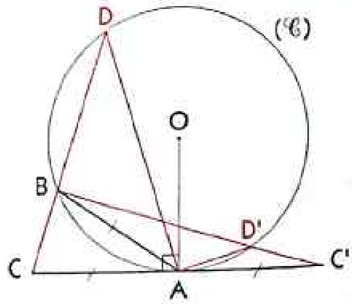
Soit A et B deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$), C et C' deux points distincts de la tangente en A à ($\mathscr{C}$) tels que : AC = AC' = AB. (BC) et (BC') recoupent ($\mathscr{C}$) respectivement en D et D'. Démontrer que les triangles ACD et AC'D' sont isocèles.

Hypothèses[2]

(CC') est la tangente en A à ($\mathscr{C}$).
AC = AB = AC'.
B, D, D' appartiennent à ($\mathscr{C}$).
B, C, D sont alignés.
B, C', D' sont alignés.

Conclusions

ACD est isocèle.
AC'D' est isocèle.



Solution guidée

On va chercher à démontrer que : mes $\widehat{ACD}$ = mes $\widehat{CAD}$ et mes $\widehat{C'AD'}$ = mes $\widehat{AC'D'}$.

Démontrons d'abord que : mes $\widehat{C'AD'}$ = mes $\widehat{AC'D'}$.

- Quelle égalité d'angles l'hypothèse AB = AC' permet-elle d'écrire ?
- Comparer les mesures des angles $\widehat{ABD'}$ et $\widehat{C'AD'}$.
- Conclure.

Démontrons que : mes $\widehat{ACD}$ = mes $\widehat{CAD}$.

- Trouver un autre angle inscrit dans ($\mathscr{C}$) qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{C'AD}$.
- Comparer les mesures des angles $\widehat{C'AD}$ et $\widehat{CAD}$.
- Comparer les mesures des angles $\widehat{ACD}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ABD}$.
- Conclure.

2. *On appelle « hypothèses » des propriétés qui, si elles sont vérifiées, induisent de nouvelles propriétés appelées « conclusions ».*

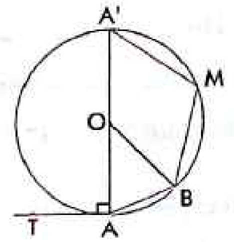
Exercices

1.a Soit A, B, C trois points distincts d'un cercle.
A' est le milieu de l'arc intercepté par $\overset{\frown}{BAC}$.
B' est le milieu de l'arc intercepté par $\overset{\frown}{ABC}$.
C' est le milieu de l'arc intercepté par $\overset{\frown}{ACB}$.
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

1.b Un cercle ($\mathscr{C}'$) de centre O' est tangent intérieurement en A à un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. Une droite passant par A coupe ($\mathscr{C}$) en M et ($\mathscr{C}'$) en M'. Démontrer que la tangente en M à ($\mathscr{C}$) est parallèle à la tangente en M' à ($\mathscr{C}'$).

1.c Soit ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) deux cercles concentriques de centre O et de rayons respectifs distincts R et R' tels que $R' < R$. Soit A et B deux points distincts de ($\mathscr{C}$) non diamétralement opposés, C un des points d'intersection de (OB) et ($\mathscr{C}'$).
La tangente en C à ($\mathscr{C}'$) coupe la tangente en A à ($\mathscr{C}$) en un point M et (AB) en un point N. Démontrer que le triangle AMN est isocèle.
(On pourra utiliser la tangente en B à ($\mathscr{C}$).)

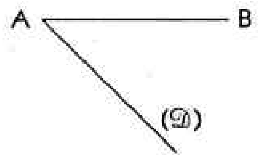
1.d On considère la figure ci-contre :



(AT) est perpendiculaire à (AA'), M est un point quelconque de l'arc intercepté par $\overset{\frown}{BAA'}$. Comment faut-il choisir l'angle $\widehat{AOB}$ pour que mes $\widehat{BMA'}$ = mes $\widehat{BAT}$?
Quelle est alors la mesure de ces deux angles ?

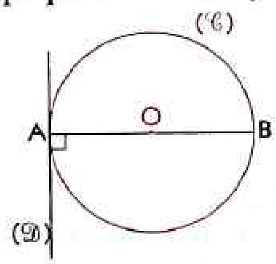
2 Lieu géométrique[1] des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$

2.1. Étude préliminaire

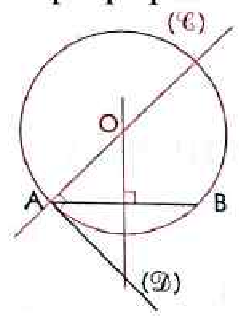


Soit A et B deux points distincts et ($\mathscr{D}$) une droite passant par A distincte de (AB). Justifier la propriété suivante : il existe un et un seul cercle ($\mathscr{C}$) passant par B admettant la droite ($\mathscr{D}$) pour tangente en A.

1er cas : ($\mathscr{D}$) est perpendiculaire à (AB).



2e cas : ($\mathscr{D}$) n'est pas perpendiculaire à (AB).



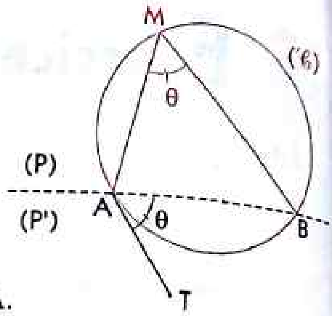
2.2. Détermination du lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$

Propriété

Soit A et B deux points distincts , θ un nombre réel tel que : $0 < \theta < 180$.
Le lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$ est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).

1. *Ensemble de points vérifiant une propriété.*

Démonstration guidée



Soit (P) et (P') les deux demi-plans de frontière (AB).

Soit T un point de (P') tel que : mes $\widehat{TAB} = \theta°$.

Cherchons d'abord l'ensemble des points M de (P) tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$.

Considérons un point M de (P) tel que mes $\widehat{AMB} = \theta°$.

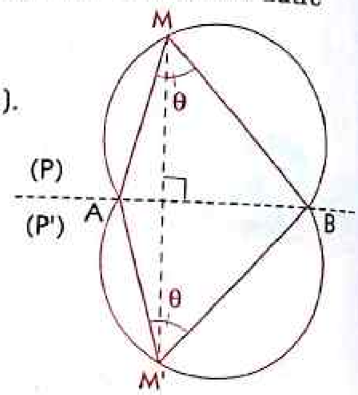
- Démontrer que le cercle circonscrit à AMB admet (AT) pour tangente en A.
- Déduire du paragraphe 2.1 que M appartient à un cercle (𝒞) fixe.

On démontre ainsi que tout point M de (P) vérifiant mes $\widehat{AMB} = \theta°$ appartient à (𝒞).

Réciproquement, tout point de (P)∩(𝒞) vérifie mes $\widehat{AMB} = \theta°$ (propriété 1 du paragraphe 1.3).

Le lieu des points M de (P) vérifiant mes $\widehat{AMB} = \theta°$ est donc l'arc de cercle (P)∩(𝒞).

On démontre de la même façon que le lieu des points M de (P') tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$ est un autre arc de cercle.



- Démontrer que ces deux arcs de cercle sont symétriques par rapport (AB).
- Peut-il y avoir sur la droite (AB) des points M tels que : mes $\widehat{AMB} = \theta°$?
- Conclure.

Vocabulaire

Ces deux arcs de cercles sont appelés arcs capables d'un angle θ°, d'extrémités A et B.

M

Pour chercher le lieu géométrique des points vérifiant une propriété (p), on peut procéder de la façon suivante :

– on démontre que tout point M qui vérifie (p) appartient à un certain ensemble E ;

– réciproquement, on cherche à savoir si tout point de E vérifie (p).

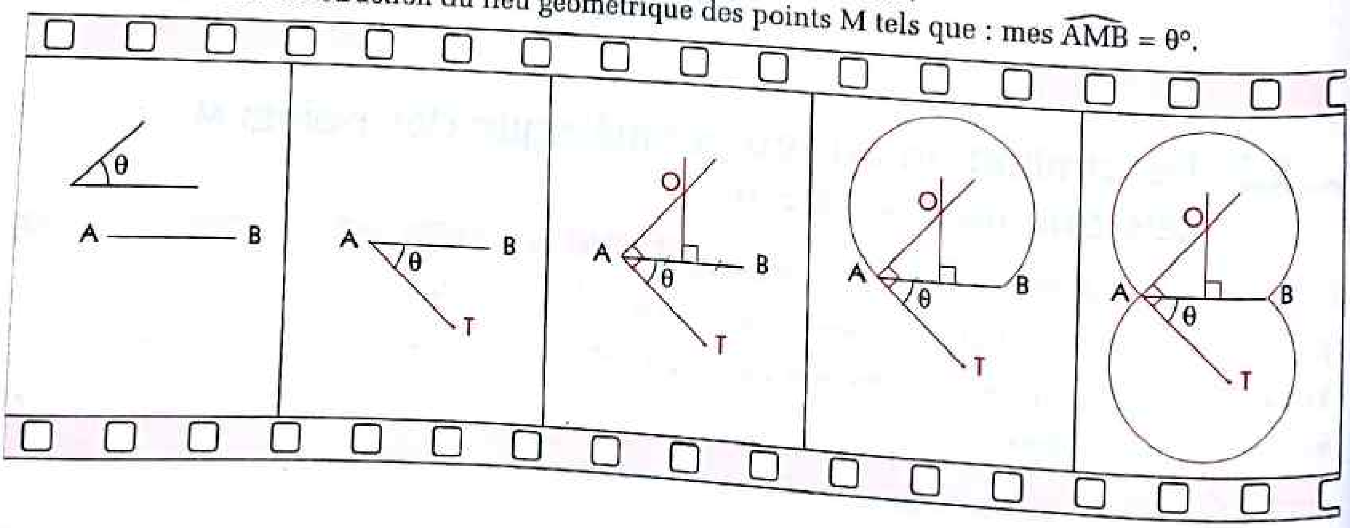
Si c'est le cas, le lieu des points cherché est E.

Sinon le lieu cherché est l'ensemble E' des points de E qui vérifient (p).

2.3. Construction

Soit deux points A et B et un angle de mesure θ° tel que : 0 < θ < 180.

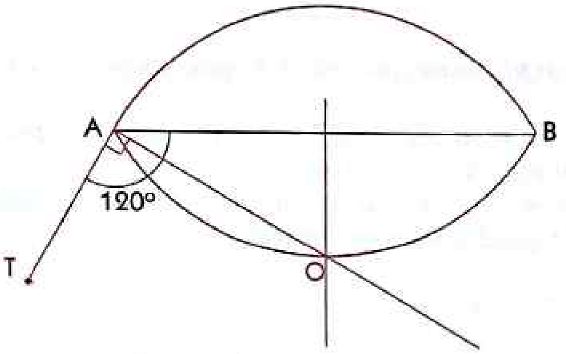
Voici le film d'une construction du lieu géométrique des points M tels que : mes $\widehat{AMB} = \theta°$.



• Justifier cette construction.

Exemple

Pour θ = 120, on a :

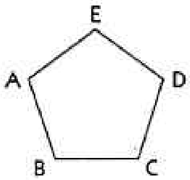


Exercices

2.a Soit ABC un triangle. Construire à la règle et au compas le lieu géométrique des points M du demi-plan de frontière (AB) contenant C tels que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ACB}$.

2.b Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, BC = 4 cm et mes $\widehat{ABC}$ = 40°.
Construire à la règle et au compas un point M tel que mes $\widehat{AMB}$ = 45° et mes $\widehat{BMC}$ = 60°.

2.c ABCDE est un pentagone régulier.
Déterminer et tracer l'ensemble des points M tels que :
mes $\widehat{BMC}$ = mes $\widehat{BAC}$.

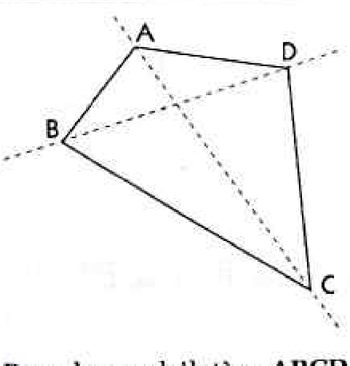
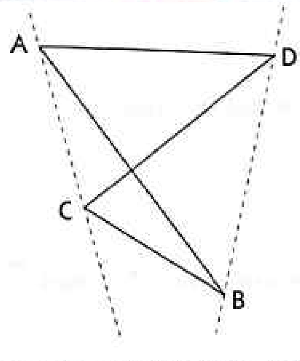
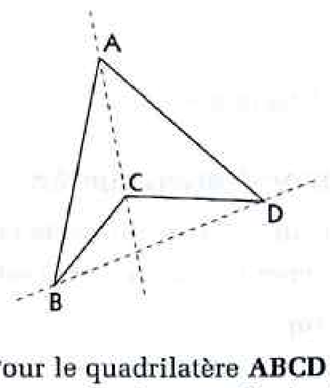


2.d Soit ($\mathscr{C}$) un arc capable d'angle θ°, d'extrémités A et B.
1. On considère un point N à l'intérieur de ($\mathscr{C}$) et n'appartenant pas à la droite (AB). La demi-droite [BN) recoupe ($\mathscr{C}$) en un point P.
a) Comparer les mesures des angles $\widehat{BAN}$ et $\widehat{BAP}$.
b) En déduire que : mes $\widehat{ANB}$ > mes $\widehat{APB}$.
2. On considère un point N' à l'extérieur de ($\mathscr{C}$) et n'appartenant pas à la droite (AB). Soit ($\mathscr{C}$') l'arc capable d'angle $\widehat{AN'B}$, d'extrémités A et B.
On admettra que ($\mathscr{C}$) est à l'intérieur de ($\mathscr{C}$').
Démontrer que : mes $\widehat{AN'B}$ < θ *(on pourra utiliser la question précédente).*
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
a) mes $\widehat{AMB}$ > θ. *b)* mes $\widehat{AMB}$ < θ.

3 Quadrilatères inscriptibles

3.1. Quadrilatère convexe, croisé

Le tableau ci-dessous définit trois types de quadrilatères dont nous aurons besoin par la suite.

Convexe	Croisé	Non convexe, non croisé
		
Pour le quadrilatère **ABCD** : • Les sommets opposés A et C n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (BD). • Les sommets opposés B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC).	Pour le quadrilatère **ABCD** : • Les sommets opposés A et C appartiennent à un même demi-plan de frontière (BD). • Les sommets opposés B et D appartiennent à un même demi-plan de frontière (AC).	Pour le quadrilatère **ABCD** : • Les sommets opposés A et C appartiennent à un même demi-plan de frontière (BD). • Les sommets opposés B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC).

Remarques

- *Ces trois cas s'excluent mutuellement. Un quadrilatère est donc soit convexe, soit croisé, soit non convexe et non croisé.*
- *L'ordre dans lequel on écrit les sommets est essentiel. On peut remarquer, par exemple, que : ABCD est convexe si et seulement si ACBD est croisé.*
- *La somme des mesures des angles d'un quadrilatère convexe est égale à 360°. Pour le démontrer, il suffit de décomposer le quadrilatère en deux triangles.*

L

ABCD désigne un quadrilatère convexe. Considérons les propriétés (p), (q), (r) suivantes.
(p) : Les quatre côtés de ABCD ont même longueur.
(q) : Les côtés opposés de ABCD sont deux à deux parallèles.
(r) : Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

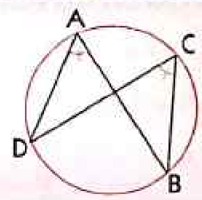
- **Si** (p) est vérifiée, **alors** (q) est vérifiée : on dit que (p) **implique** (q).
  On note : (p) $\Rightarrow$ (q).
  Pour que (q) soit vérifiée, il **suffit** que (p) soit vérifiée : on dit que (p) est une **condition suffisante** pour que (q) soit vérifiée.
  Si (q) n'est pas vérifiée, alors (p) ne peut pas être vérifiée (puisque (p) implique (q)) : il **faut** donc que (q) soit vérifiée pour que (p) le soit ; on dit que (q) est une **condition nécessaire** pour que (p) soit vérifiée.
- (q) $\Rightarrow$ (r) et (r) $\Rightarrow$ (q) : on dit que (q) et (r) sont **équivalentes** ou que (q) est vérifiée **si et seulement si** (r) est vérifiée.
  On note : (q) $\Leftrightarrow$ (r).
  Lorsque deux conditions sont équivalentes, chacune d'elles est une condition **nécessaire et suffisante** pour que l'autre soit vérifiée.

3.2. Quadrilatère croisé inscriptible

Un quadrilatère est dit inscriptible s'il existe un cercle passant par ses quatre sommets.
Si ce cercle existe, il est unique car il n'existe qu'un seul cercle passant par trois points non alignés.
Des points appartenant à un même cercle sont dits cocycliques.

Théorème

Un quadrilatère croisé est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés ont même mesure.



Les deux autres angles opposés ont alors même mesure.

Démonstration guidée

Soit ABCD un quadrilatère croisé.

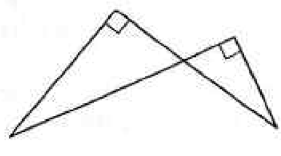
- Démontrer que si ABCD est inscriptible, alors mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{C}$. On a aussi mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{D}$.

On suppose que mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{C}$.

- Démontrer que C appartient à un arc du cercle circonscrit au triangle ABD.
- Conclure.

Cas particulier

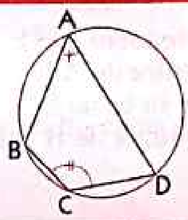
Un quadrilatère croisé ayant deux angles opposés droits est inscriptible.



3.3. Quadrilatère convexe inscriptible

Théorème

Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.



Les deux autres angles opposés sont alors supplémentaires.

Démonstration guidée

Soit ABCD un quadrilatère convexe.

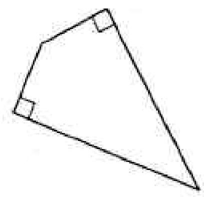
- Démontrer que si ABCD est inscriptible, alors mes $\widehat{A} = 180° -$ mes $\widehat{C}$. On a aussi mes $\widehat{B} = 180° -$ mes $\widehat{D}$.

On suppose que mes $\widehat{A} = 180° -$ mes $\widehat{C}$.

- Démontrer que C appartient à un arc du cercle circonscrit au triangle ABD.
- Conclure.

Cas particulier

Un quadrilatère convexe ayant deux angles opposés droits est inscriptible.

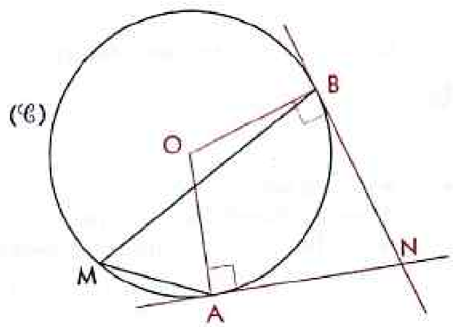


3.4. Travaux dirigés

1. Soit A et B deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$) non diamétralement opposés. On choisit un point M sur ($\mathscr{C}$) n'appartenant pas à $\widehat{AB}$. Les tangentes en A et B au cercle ($\mathscr{C}$) se coupent en un point N. Trouver la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ pour que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.

Hypothèses

A, B, M appartiennent à ($\mathscr{C}$).
$\widehat{AB}$ n'est pas un demi-cercle.
M $\notin \widehat{AB}$.
(NA) est la tangente en A à ($\mathscr{C}$).
(NB) est la tangente en B à ($\mathscr{C}$).



Solution guidée

Soit O le centre de ($\mathscr{C}$).

- Exprimer mes $\widehat{AMB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.
- Exprimer mes $\widehat{ANB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.
- Calculer mes $\widehat{AOB}$ pour que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.
- Démontrer que la longueur de $\widehat{AB}$ est égale au tiers du périmètre de ($\mathscr{C}$).

2. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Démontrer que les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit ($\mathscr{C}$).

On fera la démonstration dans le cas où H est à l'intérieur de ABC.

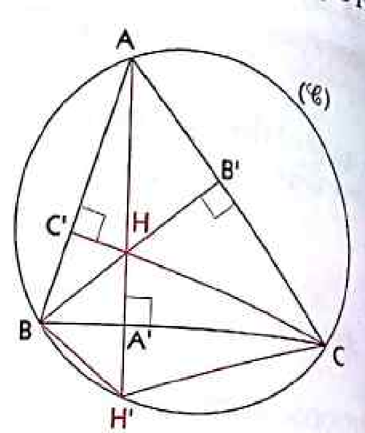
Aucun des côtés du triangle ne jouant un rôle particulier, il suffit de démontrer que le symétrique H' de H par rapport à l'un des côtés, par exemple (BC), appartient à ($\mathscr{C}$).

Hypothèses

A, B, C appartiennent à ($\mathscr{C}$).
H est l'orthocentre de ABC.
H est intérieur au triangle.
H' est le symétrique de H par rapport à (BC).

Conclusion

H' appartient à ($\mathscr{C}$).



Solution

Il suffit de démontrer que le quadrilatère ABH'C est inscriptible.

- Démontrons d'abord que ABH'C est un quadrilatère convexe.

  H' étant le symétrique de H par rapport à (BC), H et H' n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (BC). H étant intérieur au triangle, A et H sont dans le même demi-plan de frontière (BC). Donc A et H' ne le sont pas. H étant intérieur au triangle, A' appartient à [BC], donc B et C ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AH'). ABH'C est un quadrilatère convexe.

- Démontrons que ABH'C est inscriptible.

  mes $\widehat{BH'C}$ = mes $\widehat{BHC}$ car les deux triangles BHC et BH'C sont symétriques par rapport à (BC).

  mes $\widehat{BHC}$ = mes $\widehat{B'HC'}$ car les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{B'HC'}$ sont opposés par le sommet.

  D'où : mes $\widehat{BH'C}$ = mes $\widehat{B'HC'}$.

  Le quadrilatère AC'HB' est inscriptible car les angles $\widehat{AC'H}$ et $\widehat{AB'H}$ sont droits.

  Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'HC'}$ sont donc supplémentaires.

  Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BH'C}$ le sont aussi puisque mes $\widehat{BH'C}$ = mes $\widehat{B'HC'}$.

  Le quadrilatère ABH'C est donc inscriptible.

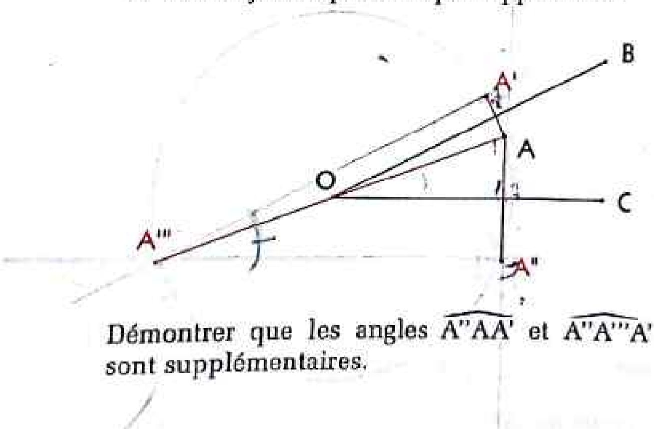
  H' appartient donc à ($\mathscr{C}$).

Exercices

3.a Démontrer que les seuls parallélogrammes inscriptibles sont les rectangles.
Quels sont les losanges inscriptibles ?

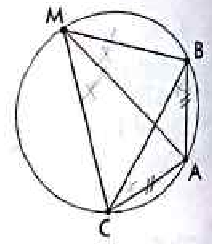
3.b Démontrer qu'un trapèze est inscriptible si et seulement si il est isocèle.

3.c Sur la figure dessous :
A' est le symétrique de A par rapport à (OB) ;
A'' est le symétrique de A par rapport à (OC) ;
A''' est le symétrique de A par rapport à O.



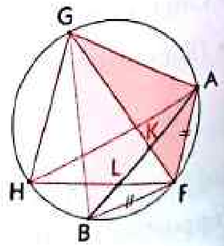
Démontrer que les angles $\widehat{A''AA'}$ et $\widehat{A''A'''A'}$ sont supplémentaires.

3.d Soit ABMC un quadrilatère inscriptible tel que le triangle ABC soit isocèle en A.
Démontrer que la droite (MA) est la bissectrice issue de M dans le triangle BMC.



3.e Soit ($\mathscr{C}$) un cercle, A et B deux points de ($\mathscr{C}$) et F le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
On considère deux points G et H de l'arc $\breve{AB}$, les cordes [GF] et [HF] coupent respectivement le segment [AB] en K et L.

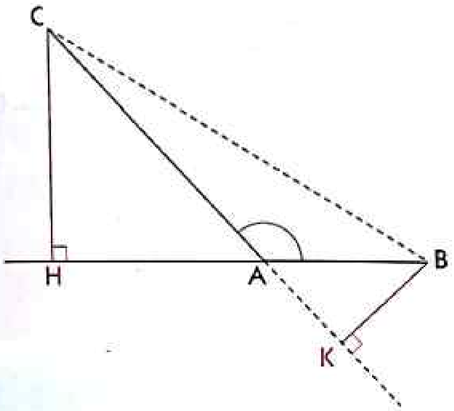
1. Parmi les angles des triangles AGF et KGB, déterminer ceux qui ont même mesure.
2. Démontrer que le quadrilatère KLHG est inscriptible.



4 Relations métriques dans un triangle

4.1. Sinus d'un angle

On a défini en classe de troisième le sinus d'un angle aigu. Nous allons étendre cette définition à un angle quelconque.



Soit $\widehat{BAC}$ un angle.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), K le projeté orthogonal de B sur (AC), $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

$$2\mathcal{A} = HC \times AB = KB \times AC$$

On a donc : $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{KB}{AB}$.

Nous admettrons que ce rapport ne dépend que de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ et pas du choix des points A, B, C.

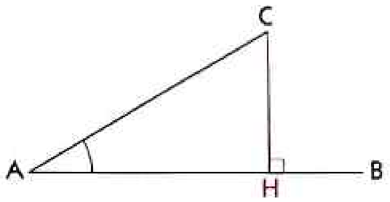
Définition

Soit $\widehat{BAC}$ un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB), K le projeté orthogonal de B sur (AC).

On pose : $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{KB}{AB}$.

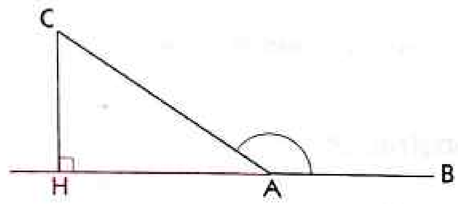
Remarques

- *Pour un angle aigu, cette définition correspond à celle donnée en classe de troisième.*



$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{HC}{AC}$

- *Le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de son supplémentaire.*



$\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{HAC}$

- *On peut démontrer, mais nous admettrons, que deux angles ayant même sinus ont même mesure ou sont supplémentaires.*

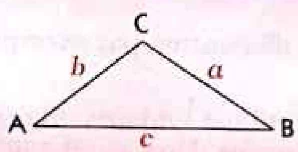
4.2. Aire d'un triangle

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire.

On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

On a : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2}\, ac \sin \widehat{B} = \dfrac{1}{2}\, ab \sin \widehat{C}$.

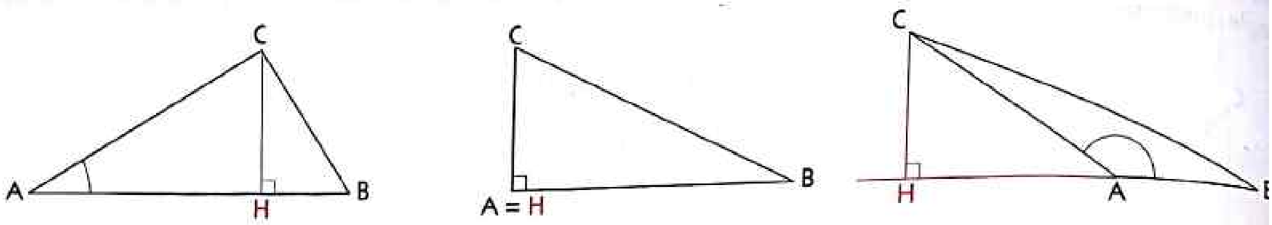


Démonstration

Soit H le pied de la hauteur issue de C.

On sait que : $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times HC}{2}$.

D'après la définition précédente, que $\widehat{A}$ soit aigu, obtus ou droit, on a toujours : $HC = AC \sin \widehat{BAC}$.



On en déduit que : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.

On démontre de même les deux autres formules, en intervertissant successivement les rôles de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, puis ceux de $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.

M Lorsque dans une démonstration, le fait d'intervertir le rôle de deux objets **a** et **b** conduit à réécrire exactement la même chose en mettant **a** à la place de **b** et **b** à la place de **a**, on se contente d'écrire : *on démontre de même en intervertissant les rôles de **a** et **b** que ...*

4.3. Théorème des sinus

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit, R le rayon de $(\mathcal{C})$.
On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

On a : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R.$

Démonstration

- Démontrons que : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.

La propriété du paragraphe 4.2 peut s'écrire : $2\mathcal{A} = bc \sin \widehat{A} = ac \sin \widehat{B} = ab \sin \widehat{C}$.

En divisant chacun des membres par abc, on déduit de ces égalités :

$$\frac{2\mathcal{A}}{abc} = \frac{bc \sin \widehat{A}}{abc} = \frac{ac \sin \widehat{B}}{abc} = \frac{ab \sin \widehat{C}}{abc}.$$

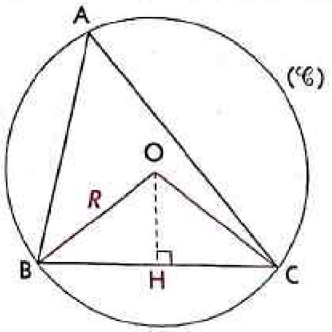
Après simplification on obtient : $\dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c} = \dfrac{2\mathcal{A}}{abc}$.

D'où : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.

- Il reste à démontrer, par exemple, que : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$.

Un triangle admet toujours un angle aigu car si ses trois angles étaient tous droits ou obtus, la somme de leurs mesures dépasserait 180°. Quitte à changer les notations, on peut supposer que $\widehat{A}$ est aigu.

Désignons par O le centre du cercle $(\mathscr{C})$, H le projeté orthogonal de O sur (BC).



Le triangle OBH est rectangle en H.

Donc : $BH = BO \sin \widehat{BOH}$.

Or, $BH = \frac{a}{2}$ et $BO = R$.

Donc : $a = 2R \sin \widehat{BOH}$.

$\text{mes}\,\widehat{BOH} = \text{mes}\,\widehat{A}$, donc : $\sin \widehat{BOH} = \sin \widehat{A}$.

D'où : $a = 2R \sin \widehat{A}$.

D'où : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$.

M

Soit **a**, **b**, **c**, **d**, ... des objets de même nature.
Si on sait que nécessairement l'un des objets **a**, **b**, **c**, **d**, ... vérifie une propriété (p), on ne perd rien en généralité en supposant que c'est **a** qui vérifie (p). En effet, si c'était, par exemple **c** qui vérifiait (p), il suffit de renommer les objets en appelant **a** celui qu'on avait appelé **c** et **c** celui qu'on avait appelé **a** pour se ramener au cas où c'est **a** qui vérifie (p).

Remarque

On peut vérifier que chaque terme des égalités écrites représente des objets de même nature : une mesure de longueur. C'est ce qu'on appelle vérifier l'homogénéité de la formule. Cette vérification permet de rectifier des erreurs éventuelles.

Par exemple, $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$ *est de nature différente de* $\dfrac{2\mathscr{A}}{abc}$ *car* $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$ *représente une mesure de longueur mais pas* $\dfrac{2\mathscr{A}}{abc}$ *qui est le quotient d'une aire par un volume, donc l'inverse d'une mesure de longueur.*

4.4. Travaux dirigés

On reprend les notations des paragraphes 4.2 et 4.3.

1. Soit ABC un triangle, [AH] la hauteur relative à [BC].

Démontrer que : $R = \dfrac{AH}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$.

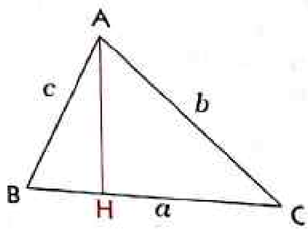
Hypothèses

[AH] est la hauteur relative à [BC].

R est le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Conclusion

$R = \dfrac{AH}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$.



Solution

On a : $AH = c \times \sin \widehat{B}$.

Or, $\dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$.

Donc : $\dfrac{AH}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} = \dfrac{c \times \sin \widehat{B}}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} = \dfrac{c}{2 \sin \widehat{C}}$.

Donc : $R = \dfrac{AH}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$.

2. Soit ABC un triangle. Démontrer que $\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = 2\mathscr{A}\,\dfrac{a + b + c}{abc}$.

Solution guidée

- Calculer $\sin \widehat{A}$, $\sin \widehat{B}$, $\sin \widehat{C}$ en fonction de a, b, c et $\mathscr{A}$.
- Ajouter membre à membre les relations trouvées.
- Conclure.

Exercices

4.a On garde les notations du § 4.3. Déterminer tous les triangles ABC pour lesquels $a = R = 1$ et $b = c$.

4.b Un triangle ABC est tel que :
$BC = 5$, mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB} = 30°$.
Calculer le périmètre de ce triangle, son aire e
le rayon de son cercle circonscrit. O étant l
centre de ce cercle, calculer mes $\widehat{BOC}$.

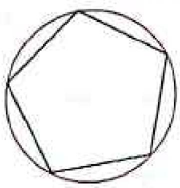
5 Polygones réguliers

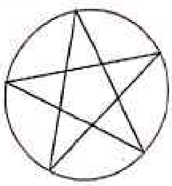
5.1. Rappels

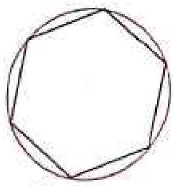
Définition

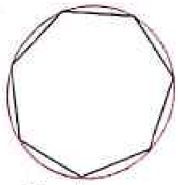
On appelle polygone régulier tout polygone inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont même longueur.

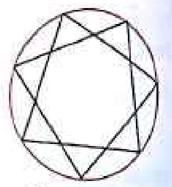
Exemples


Pentagone non étoilé


Pentagone étoilé


Hexagone


Heptagone non étoilé


Heptagone étoilé

5.2. Constructions

Historique

La construction à la règle et au compas des polygones réguliers est un sujet qui date de l'Antiquité. On trouve déjà dans les *Éléments d'Euclide* (IIIe siècle av. J.-C.) une construction du triangle équilatéral, du carré, du pentagone régulier, de l'hexagone régulier et du polygone régulier à 15 côtés et on y explique comment on peut construire à partir d'un polygone régulier à n côtés un polygone régulier à $2n$ côtés.

Bien que beaucoup de mathématiciens se soient penchés, depuis, sur la question, aucune découverte importante n'a été faite avant la fin du 18e siècle où Karl Friedrich Gauss (1777-1855) démontra en 1796, à l'âge de 19 ans, que l'on pouvait construire à la règle et au compas un polygone régulier à 17 côtés. Cinq ans plus tard, il découvrit une condition suffisante pour qu'un polygone régulier quelconque soit constructible. On démontra en 1837, grâce notamment à Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), que la condition suffisante trouvée par Gauss était aussi nécessaire.

Il serait trop complexe d'énoncer ici ce résultat. On se contentera de retenir ce qu'on peut en déduire pour les polygones réguliers ayant 12 ou moins de 12 côtés :
- les polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés sont constructibles à la règle et au compas ;
- les polygones réguliers à 7, 9, 11 côtés ne le sont pas.

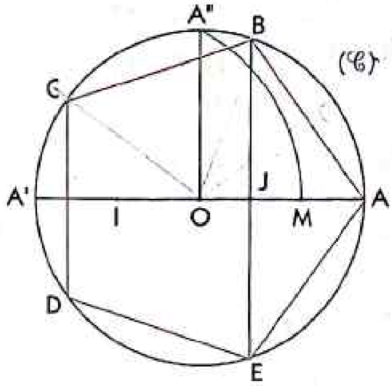
Construction du pentagone régulier

Vous avez déjà appris, dans le premier cycle, à effectuer à la règle et au compas la construction du triangle équilatéral, du carré, de l'hexagone régulier et à en déduire, en doublant le nombre de côtés, celle de l'octogone et du dodécagone réguliers.

Nous proposons ici une construction du pentagone régulier.

Programme de construction

1. Construire un cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [A'A].
2. Construire un point A" appartenant à ($\mathscr{C}$) et à la médiatrice de [A'A].
3. Construire le point d'intersection M de [OA) et du cercle ayant pour centre le milieu I de [OA'] et passant par A".
4. Construire les points d'intersection B et E de ($\mathscr{C}$) avec la perpendiculaire à (OA) passant par le milieu J de [OM].
5. Marquer C et D sur le cercle en reportant la longueur du segment [AB] à partir des points B et C.



ABCDE est un pentagone régulier.

Démonstration guidée

Prenons comme unité dans le plan le rayon du cercle : OA = 1.

- Expliquer pourquoi il suffit de démontrer que : mes $\widehat{AOB} = 72°$.

On admet que $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

- Démontrer que : $\cos \widehat{AOB} = OJ$.
- Calculer IA".
- En déduire la valeur de OJ.
- Conclure.

5.3. Travaux dirigés

1. Utiliser la construction précédente pour déterminer les valeurs exactes de cos 36° et sin 36°.

Solution guidée

- Démontrer que : $\cos 36° = \dfrac{BJ}{BA}$ et $\sin 36° = \dfrac{JA}{BA}$.
- Calculer JA.
- En utilisant le triangle OJB, calculer BJ.
- En déduire BA.
- Démontrer que : $\cos 36° = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin 36° = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

2. Soit un pentagone régulier non étoilé ABCDE inscrit dans un cercle de rayon R. Calculer en fonction de R la longueur a de chacun de ses côtés et son aire $\mathscr{A}$.
Utiliser les valeurs exactes de cos 36° et sin 36° calculées ci-dessus.

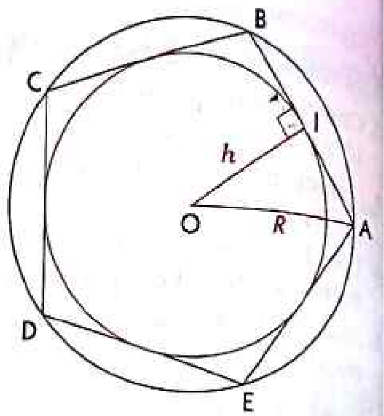
Solution

Soit I le milieu de [AB]. Posons : $h = OI$.

mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.

Donc : mes $\widehat{AOI} = 36°$.

Dans le triangle AOI rectangle en I, on a :



$$h = R\cos\widehat{AOI} = R\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

$$IA = R\sin\widehat{AOI} = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

- On en déduit : $a = AB = 2\,IA = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

- L'aire du triangle AOB est :

$$\mathscr{A}' = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}R^2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

- L'aire du pentagone est donc : $\mathscr{A} = 5\mathscr{A}' = 5\frac{R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Remarque

La distance h est appelée apothème du polygone régulier ABCDE. Le cercle de centre O et de rayon h, qui passe par I, est tangent à la droite (AB) car (OI) est perpendiculaire à (AB). On démontre de la même façon en se plaçant dans chacun des triangles isocèles de sommet O ayant pour base un des côtés du polygone régulier, que ce cercle est tangent à chacun des côtés.

L'apothème d'un polygone régulier est le rayon du cercle inscrit ; c'est aussi la distance du centre du cercle circonscrit à chacun des côtés du polygone.

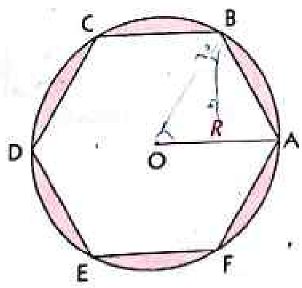
Exercices

5.a Construire à la règle et au compas un décagone régulier.

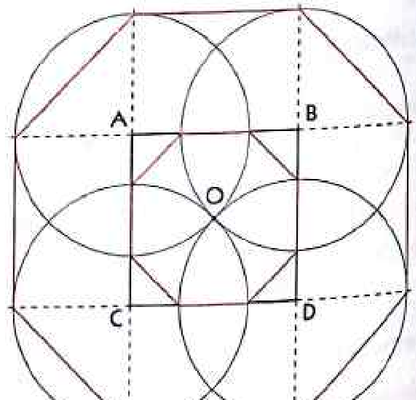
5.b Calculer l'apothème, le périmètre et l'aire d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.

5.c Soit un pentagone régulier non étoilé inscrit dans un cercle de rayon R. Calculer l'aire de la couronne dont les frontières sont le cercle inscrit et le cercle circonscrit au pentagone.

5.d Sur la figure ci-dessous, ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. Calculer l'aire de la surface coloriée.



5.e ABCD est un carré de centre O et de côté a. On trace les cercles de centres A, B, C, D et de même rayon OA.



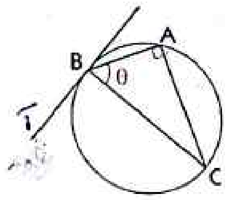
1. Démontrer que les huit points d'intersection de ces cercles avec les côtés du carré forment un octogone régulier dont on calculera le côté et l'apothème.
2. Même question avec le polygone formé par les points d'intersection de ces cercles avec les prolongements des côtés du carré.

Exercices

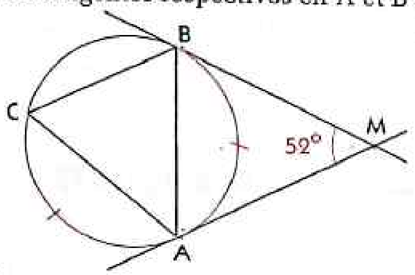
APPRENTISSAGE

Angles inscrits

1 T étant un point de la tangente en B au cercle ($T \neq B$), exprimer la mesure de $\widehat{TBA}$ en fonction de θ.
(Il y a 2 cas à envisager.)



2 Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ ont même longueur, (AM) et (BM) sont les tangentes respectives en A et B au cercle.



Calculer les mesures des angles du quadrilatère CAMB.

3 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre [AB], C un autre point de $(\mathscr{C})$ et I le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. La tangente en I au cercle coupe (AC) en D. Comparer les angles des triangles AIB et AID.

4 Soit ABCD un rectangle tel que BD = 2AB et $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ABCD. Les tangentes en A et D au cercle $(\mathscr{C})$ ont pour point d'intersection M et coupent la droite (BC) respectivement en N et P. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

5 Soit deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de même centre O et de rayons r et r' tels que $r < r'$. A un point de $(\mathscr{C}')$. Une droite (Δ) tangente à $(\mathscr{C})$ coupe le cercle $(\mathscr{C}')$ en deux points M et N. On fait varier (Δ) de façon à ce qu'elle reste tangente au cercle $(\mathscr{C})$ et de façon à ce que A et O appartiennent à un même demi-plan de frontière (MN). Démontrer que $\widehat{MAN}$ garde une mesure constante.

6 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre [AB], C un autre point de $(\mathscr{C})$. Une droite perpendiculaire à (AB) coupe (AB) en C', (BC) en A' et (AC) en B'.
1. Démontrer que les trois triangles ABC, A'B'C et A'BC' sont semblables.
2. Soit I le milieu de [A'B']. Démontrer que (CI) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$.

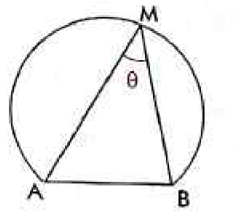
7 Soit deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, de centres respectifs O et O', sécants en deux points A et B. On appelle C le symétrique de B par rapport à O et C' le symétrique de B par rapport à O'.
1. Démontrer que C, A, C' sont alignés.
2. Soit M un point de $(\mathscr{C})$, distinct de A et B, appartenant au demi-plan de frontière (AB) contenant C. On appelle M' le point d'intersection de (AM) avec $(\mathscr{C}')$. Démontrer que mes $\widehat{CBC'}$ = mes $\widehat{MBM'}$.
3. Soit M un point de $(\mathscr{C})$, distinct de A et B, appartenant à l'arc d'extrémités A et B ne contenant pas C. On appelle M' le point d'intersection de (AM) avec $(\mathscr{C}')$. Démontrer que mes $\widehat{CBC'}$ = mes $\widehat{MBM'}$.
4. Que peut-on dire des angles du triangle MBM' lorsque M parcourt le cercle $(\mathscr{C})$ privé des points A et B ?

8 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et [AB] une corde telle que la tangente en B à $(\mathscr{C})$ coupe (OA) en un point C. Comment faut-il choisir la corde [AB] pour que le triangle ABC soit isocèle ?
On distinguera le cas où $\widehat{AOB}$ est aigu et celui où il est obtus.

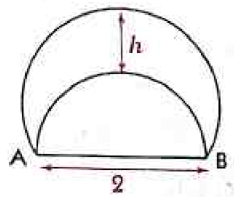
9 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, M et N deux points qui décrivent le cercle $(\mathscr{C})$ de façon à ce que la distance MN reste toujours égale à R. On cherche à déterminer le lieu géométrique du point d'intersection P des tangentes en M et N au cercle $(\mathscr{C})$.
1. Pour M et N donnés sur $(\mathscr{C})$, démontrer que P appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$ que l'on déterminera.
2. Réciproquement, P étant un point de $(\mathscr{C}')$, démontrer qu'on peut trouver deux points M et N de $(\mathscr{C})$ tels que P soit le point d'intersection des tangentes en M et N au cercle $(\mathscr{C})$. Conclure.

Arcs capables

10 Construire l'arc capable d'un angle de mesure 2θ, d'extrémités A et B, inclus dans le demi-plan de frontière (AB) contenant M.



11 La figure est constituée d'un demi-cercle de diamètre [AB] et d'un arc capable d'extrémités A et B de mesure 60°. Calculer h.



12 Soit A et B deux points distincts.
À toute demi-droite [AP), on associe, lorsque c'est possible, la demi-droite [BT) incluse dans le même demi-plan de frontière (AB) telle que :

$$\text{mes } \widehat{ABT} = 120° - \text{mes } \widehat{BAP}.$$

1. Pour quelles positions de [AP), [BT) existe-t-elle ?
2. Soit M le point d'intersection de [AP) et [BT). Déterminer et tracer le lieu géométrique de M.

13 Soit [AB] un segment et P un point tel que l'angle $\widehat{BAP}$ soit aigu. Construire à la règle et au compas un point M du plan tel que :

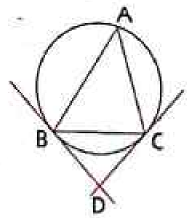
$$\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{MAB} = \text{mes } \widehat{BAP}.$$

Quadrilatères inscriptibles

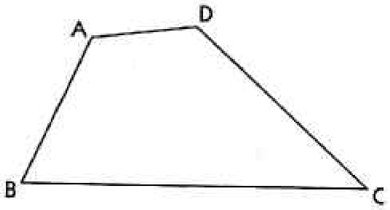
14 Soit A, B, C, D quatre points du plan, deux à deux distincts, tels que : mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$. Les points A, B, C, D appartiennent-ils toujours à un même cercle ? Sinon, dans quels cas est-ce vrai ?

15 Les tangentes en B et C se coupent en D.

Existe-t-il des cas de figure où ABCD est un quadrilatère inscriptible ?



16 On considère le quadrilatère ABCD suivant.



Construire un point M tel que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ADB}$ et mes $\widehat{DMC} = 90°$.

17 Soit ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) deux cercles de même rayon, sécants en A et B. Une droite ($\mathscr{D}$), passant par A, recoupe ($\mathscr{C}$) en E et ($\mathscr{C}'$) en E'. La droite symétrique de ($\mathscr{D}$) par rapport à (AB) coupe ($\mathscr{C}$) en F et ($\mathscr{C}'$) en F'. Démontrer que le quadrilatère EE'FF' est inscriptible.
On pourra envisager deux cas de figure.

18 Soit un demi-cercle de diamètre [CA], O le milieu de [CA], B le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, P un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et I le milieu de l'arc $\overset{\frown}{PB}$. Les droites (CP) et (OI) se coupent en un point M.
1. Déterminer les mesures des angles $\widehat{BPC}$ et $\widehat{BMC}$.
2. En déduire que le quadrilatère OCBM est inscriptible dans un cercle dont on précisera un diamètre.
3. Quel est le lieu du point M lorsque P parcourt l'arc $\overset{\frown}{AB}$?

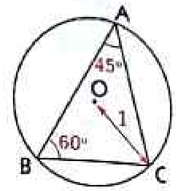
19 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et [AB] une corde de ce cercle qui ne soit pas un diamètre. Soit I le milieu de [AB]. On appelle respectivement A', I' et B' les projetés orthogonaux de A, I et B sur un diamètre de ($\mathscr{C}$). Comparer les mesures des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'IB'}$.

20 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et [AB] une corde de ce cercle. On choisit deux points M et N sur ($\mathscr{C}$) tels que les droites (AM) et (BN) se coupent en P et les droites (AN) et (BM) se coupent en Q. Démontrer que le quadrilatère MPNQ est inscriptible si et seulement si [AB] est un diamètre de ($\mathscr{C}$).
On distinguera le cas où M et N sont dans le même demi-plan de frontière [AB] et celui où ils ne le sont pas.

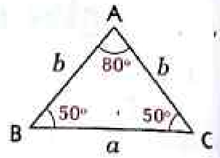
21 Soit ABCD un trapèze isocèle de bases [AB] et [DC] (AB < CD). Les droites (AC) et (BD) se coupent en M. Les droites (AD) et BC) se coupent en N.
1. Démontrer que ABCD est inscriptible.
On appelle O le centre de son cercle circonscrit.
2. Démontrer que les quadrilatères AMOD et AOCN sont inscriptibles.

Relations métriques

22 Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.



23 Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC sachant que son aire est égale à 2.



24 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que l'angle $\widehat{A}$ mesure 30°. Sachant que le rayon de son cercle circonscrit est égal à 1, calculer la longueur de chacun de ses côtés et son aire.

25 Soit ABC un triangle.
Démontrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$.

Polygones réguliers

26 Un polygone ayant six côtés de même longueur est-il nécessairement un polygone régulier ?

27 Déterminer la longueur de chacun des côtés d'un hexagone régulier dont l'aire est égale à 1. Quel est le rayon de son cercle circonscrit ?

28 Construire à la règle et au compas un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de son périmètre et de son aire.

29 Un pentagone régulier non étoilé a pour aire 10 cm². Quel est le rayon de son cercle circonscrit ? Quel est le rayon de son cercle inscrit ?
On utilisera les valeurs exactes du sinus et du cosinus de 72° et 36° données dans le cours.

30 Soit un polygone régulier non étoilé à n cotés inscrit dans un cercle de rayon R (n entier naturel supérieur ou égal à 3).
On appelle a la longueur de chacun de ses côtés, h son apothème et S son aire. On pose $\theta = \dfrac{180°}{n}$.
1. Calculer a et h en fonction de R et θ.
2. Calculer S de deux façons différentes et en déduire que : $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$.

31 Calculer la longueur de chacun des côtés, l'apothème et l'aire d'un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. En déduire les valeurs exactes de cos 15° et sin 15°.

32 Construction approchée de l'heptagone régulier
Soit (O, A, A') un repère orthonormé, ($\mathscr{C}$) le cercle de centre O passant par A, A" le symétrique de A' par rapport à O. La droite passant par A" et le milieu I de [OA]

recoupe le cercle en M. La parallèle à (A"M) passant par O coupe l'arc $\widehat{AA'}$ en N. On appelle H et K les projetés orthogonaux de M et N sur (OA) et J le milieu de [HK]. La perpendiculaire en J à (OA) coupe l'arc $\widehat{AA'}$ en B.

L'objet de l'exercice est de démontrer que la longueur du segment [AB] est très proche de celle des côtés d'un heptagone régulier inscrit dans le cercle (𝒞) et que donc on obtiendra une figure très proche d'un heptagone régulier en reportant sept fois la longueur du segment [AB] sur le cercle.

1. Vérifier à l'aide d'une calculatrice que $\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ est une valeur approchée de $\cos\frac{360°}{7}$ à $1{,}2 \times 10^{-4}$ près.

2. Quel est le coefficient directeur de chacune des droites (A"I) et (ON) ?

En déduire que KN = 2 OK et HM = 2 IH.

3. Calculer OK.

4. En considérant le triangle OMH, calculer OH.

5. En déduire que $OJ = \frac{4+\sqrt{5}}{10}$. Conclure.

APPROFONDISSEMENT

33 Un point M décrit un arc capable d'un angle de 60° d'extrémités A et B. Déterminer le lieu décrit par le centre O du cercle inscrit dans le triangle AMB.

On rappelle que le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection des bissectrices.

34 Un point M décrit un arc capable d'un angle de 45° d'extrémités A et B. Déterminer le lieu décrit par l'orthocentre H du triangle AMB .

35 Calcul de cos 72°.

Soit ABC un triangle isocèle en A dont l'angle au sommet mesure 36°. On appelle M le pied de la bissectrice issue de B, H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB) et (BC). On pose a = BC.

1. Démontrer que les triangles ABM et BCM sont isocèles.

2. Calculer AB en fonction de a et cos 36°, puis MC en fonction de a et cos 72°.

En déduire que $\cos 36° = \frac{1}{2} + \cos 72°$.

3. Calculer BK en fonction de a et cos 36°, puis KC en fonction de a et cos 72°.

En déduire que $\cos 36° = 1 - 2\cos^2 72°$.

4. Déduire des questions **2.** et **3.** que cos 72° est solution de l'équation : $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0$.

5. *(Question ne pouvant être traitée qu'après l'étude du chapitre sur les polynômes).* En déduire la valeur exacte de cos 72°.

36 Soit ABC un triangle tel que son orthocentre H et le centre O de son cercle circonscrit (𝒞) soient situés à l'intérieur de ABC. On appelle A', B', C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C.

1. En considérant la demi-tangente [AT) en A à (𝒞) située dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B, démontrer que :

$$\text{mes}\,\widehat{BAA'} = \text{mes}\,\widehat{OAC}.$$

En déduire le théorème de Nagel :

les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{A'AO}$ ont même bissectrice.

2. On se propose de démontrer que les droites (OA) et (B'C') sont perpendiculaires.

a) Que peut-on dire du quadrilatère BCB'C' ?

b) En déduire que (B'C') est parallèle à [AT).

c) Conclure.

3. On se propose de démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C'.

a) Comparer mes $\widehat{ABB'}$ et mes $\widehat{AA'B'}$.

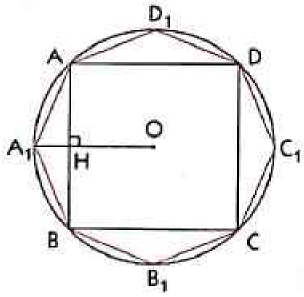
b) Comparer mes $\widehat{AA'C'}$ et mes $\widehat{ACC'}$.

c) Conclure.

37 Soit ABC un triangle et (𝒞) son cercle circonscrit. À tout point M de (𝒞) distinct de B et C, on associe le centre N du cercle inscrit dans le triangle MBC. Déterminer et construire le lieu du point N lorsque M parcourt le cercle (𝒞) privé de B et C.

38 Calcul d'une valeur approchée de π.

Soit un carré ABCD inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.



1. On appelle c_0 la longueur de chacun des côtés du carré ABCD.

Calculer c_0.

2. On considère les milieux respectifs A_1, B_1, C_1, D_1 des arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ et on appelle c_1 la longueur de chacun des côtés de l'octogone régulier $AA_1BB_1CC_1DD_1$. Calculer c_1. Vérifier que :

$$c_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{4}}}.$$

3. On continue en prenant les milieux respectifs des arcs $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1B}$, $\widehat{BB_1}$, ..., $\widehat{DD_1}$, $\widehat{D_1A}$ et on appelle c_2 la longueur de chacun des côtés du polygone régulier à 16 côtés obtenu. Démontrer que :

$$c_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{4}}}.$$

4. En continuant ainsi de suite, on obtient les nombres c_3, c_4, ... , c_n où c_n est la longueur de chacun des côtés du $n^{\text{ième}}$ polygone régulier obtenu au bout de n étapes.

a) Quel est le nombre de cotés du $n^{\text{ième}}$ polygone ?

b) On note p_n son demi-périmètre. Calculer c_n en fonction de c_{n-1} et p_n en fonction de n et c_n.

c) Donner des valeurs approchées de c_1, c_2, c_3, ..., c_8, puis de p_1, p_2, p_3, ..., p_8. Que constatez-vous ? Expliquer.

39 Soit ABC un triangle isocèle de base [BC].

On pose a = BC, b = CA = AB.

Soit r le rayon de son cercle inscrit, R celui de son cercle circonscrit et $\mathcal{A}$ son aire.

L'objet de l'exercice est de démontrer que le triangle isocèle ABC est équilatéral si et seulement si R = 2r.

1. Démontrer que si le triangle ABC est équilatéral, alors $R = 2r$.

2. On suppose le triangle ABC isocèle.

a) Démontrer que $r = \frac{2\mathcal{A}}{a+2b}$.

b) Démontrer que $\quad R = \dfrac{ab^2}{4\mathscr{A}}$.

c) Démontrer que $\quad \cos \widehat{B} = \dfrac{a}{2b}$.

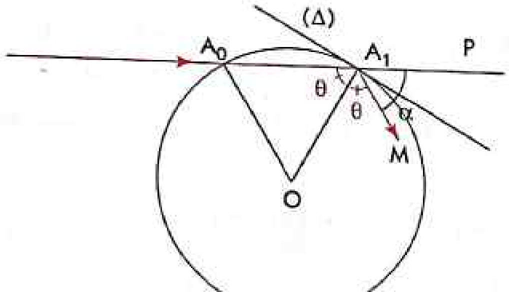
En déduire que $\quad \sin^2 \widehat{B} = \dfrac{4b^2 - a^2}{4b^2}$,

puis exprimer $\mathscr{A}^2$ en fonction de a et b.

d) Déduire des questions *a), b)* et *c)* que si $R = 2r$, alors le triangle ABC est équilatéral.

40 *D'après un article de Tangente (N° 30. Jan.-Fév. 1993).*

Un rayon lumineux entre dans un cercle en un point A_0 et se réfléchit en un autre point A_1 comme s'il y avait en A_1 un miroir plan positionné suivant la tangente en A_1 au cercle.



D'après la « loi de réflexion », on sait que l'angle « d'incidence » $\widehat{A_0A_1O}$ a la même mesure que l'angle de « réflexion » $\widehat{OA_1M}$.

1. Démontrer que l'angle d'incidence est égal à $\widehat{OA_0A_1}$. On appellera désormais θ la mesure en degrés de cet angle. Calculer en fonction de θ la mesure α en degrés de l'angle de déviation $\widehat{PA_1M}$ (cf. figure).

2. Le rayon de lumière après s'être réfléchi en A_1 va continuer à se réfléchir en un point A_2, puis en d'autres points A_3, A_4 etc. Le rayon de lumière va ainsi décrire une ligne brisée.

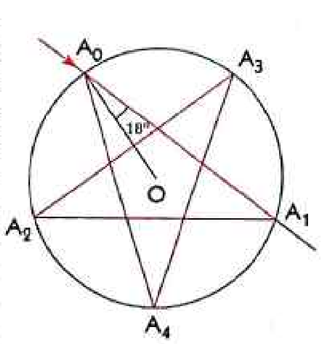
a) Démontrer que cette ligne brisée est constituée de segments de même longueur.

b) Démontrer que si $\theta = 54$, alors le rayon de lumière décrit un pentagone régulier et ressort en A_0.

c) Démontrer que si $\theta = 18$, alors le rayon de lumière suit la trajectoire indiquée sur la figure ci-dessous.

Le polygone ainsi décrit est appelé pentagone régulier étoilé.

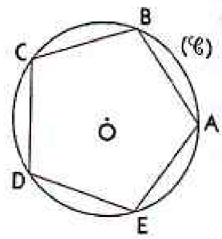
3. Dans le cas où $\theta = 54$, le rayon de lumière a fait une seule fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier à 5 côtés avant de ressortir. Calculer en fonction de n la valeur de θ pour laquelle le rayon de lumière fait une seule fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier à n côtés.



4. Dans le cas où $\theta = 18$, le rayon de lumière a fait deux fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier étoilé à 5 côtés avant de ressortir. Démontrer que pou que le rayon de lumière fasse deux fois le tour du cercl en décrivant un polygone régulier étoilé à n côtés, i faut que n soit impair. Calculer la valeur de θ corres pondante.

41 *(D'après Le trésor de Tonton Lulu, vol 1, Éditions Archimède).*

On considère un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$). La longueur de chacun de ses côtés est 1 (cf. figure).



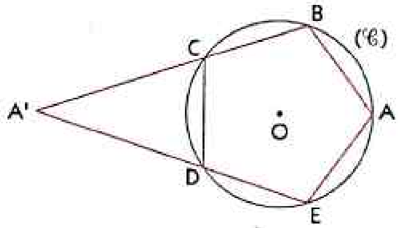
On appelle diagonale tout segment dont les extrémités sont des sommets non consécutifs. On désigne par d la longueur de chacune des diagonales.

1. *a)* Quelle est la mesure de chacun des angles du pen tagone ?

b) Démontrer que la diagonale [AC] est parallèle au côté [ED].

c) D'une manière générale, quelle propriété concer nant les diagonales d'un pentagone régulier non étoi lé peut-on énoncer ?

2. *a)* On prolonge les côtés [BC] et [ED]. On appelle A le point d'intersection des droites (BC) et (ED).



Déterminer les angles du triangle CA'D. Quel est sa nature ?

b) Démontrer que ACA'D est un parallélogramme. En déduire que A'C = A'D = d.

c) On appelle B' le point d'intersection des droites (AE) et (CD). Déterminer les angles du triangle A'DB', puis ceux du triangle A'CB'. Déterminer A'B' en fonction de d.

d) On prolonge tous les côtés du pentagone ABCDE. On obtient un pentagone A'B'C'D'E'. Démontrer que A'B'C'D'E' est régulier. Quelle est la longueur de ses côtés ? Quelle est la longueur de ses diagonales ?

3. *a)* Démontrer que A'CEB' est un trapèze. En déduire que $d^2 = d + 1$.

Le nombre d est appelé nombre d'or. On le rencontre dans de nombreux problèmes. On lui accordait au Moyen-Âge un caractère divin.

La suite du problème a pour objet de démontrer par l'absurde que ce nombre est irrationnel.

On suppose donc que d peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible : $d = \dfrac{p}{q}$.

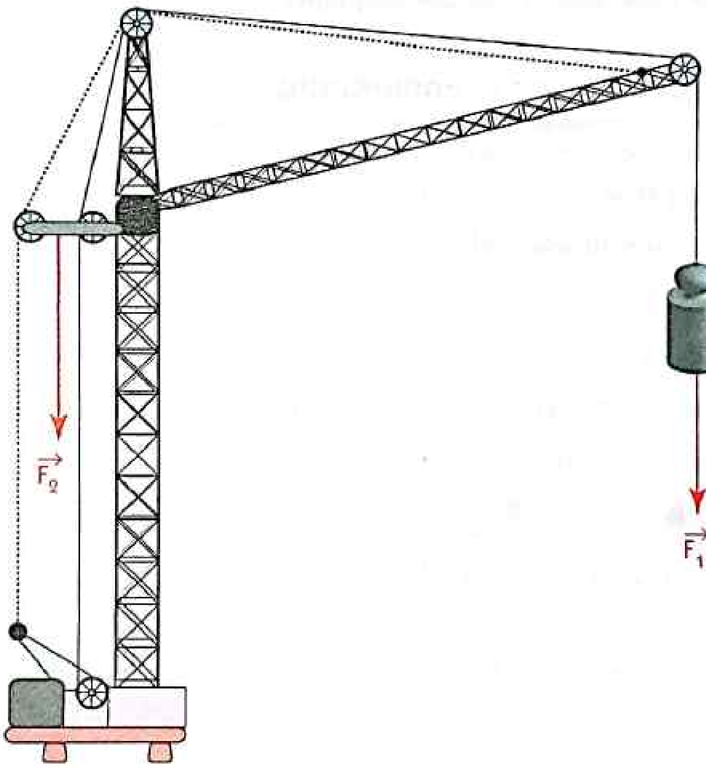
b) Démontrer que : $pq = (p - q)(p + q)$.

c) En raisonnant sur la parité de p et q, trouver une contradiction. Conclure.

2

Vecteurs et points du plan

Nous allons préciser et compléter la notion de vecteurs déjà abordée dans le premier cycle. Nous apprendrons ensuite à utiliser le calcul vectoriel pour résoudre des problèmes variés de géométrie plane.



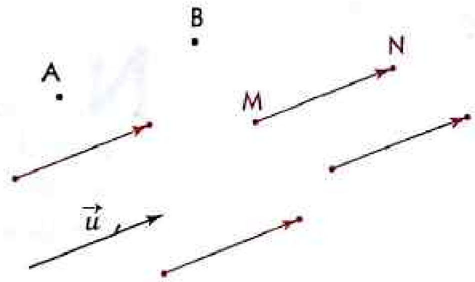
SOMMAIRE

1 Vecteurs

1.1. Définitions et premières propriétés

Définitions et notations

- Soit (A,B) un couple de points, t la translation transformant A en B.
L'ensemble des couples (M,N) où N est l'image de M par t est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- On appelle plan vectoriel l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\mathcal{V}$. Les éléments de $\mathcal{V}$ sont en général notés par des lettres surmontées d'une flèche : $\vec{a}$; $\vec{b}$; ... ; $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$; etc.

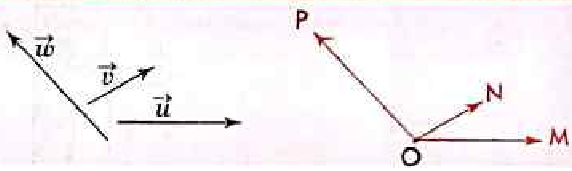


- Sur la figure ci-dessus : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. On dit que (A,B) et (M,N) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Tout vecteur a une infinité de représentants.

Conséquences immédiates

Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Démonstration

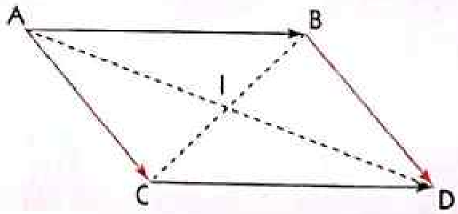
$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ signifie que M est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Donc, M existe et est unique.

Propriété 1

Les énoncés suivants sont équivalents :

- **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;**
- **[AD] et [BC] ont même milieu ;**
- **$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.**



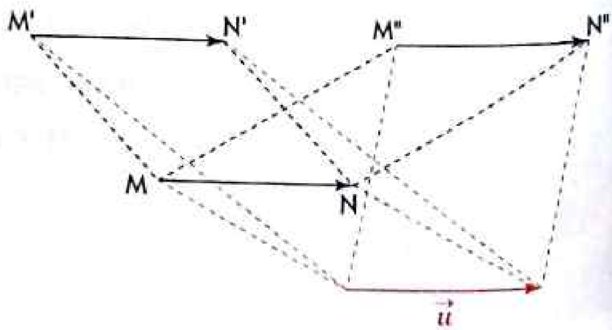
Cette propriété a été vue en classe de quatrième.

Direction, sens et norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Soit (M,N), (M',N'), (M",N"), etc., des représentants de $\vec{u}$.

- Les droites (MN), (M'N'), (M"N"), etc. sont parallèles ; elles définissent une direction appelée direction du vecteur $\vec{u}$.
- La translation qui transforme M en N, M' en N', M" en N", etc., définit sur cette direction un sens de parcours appelé sens du vecteur $\vec{u}$.
- MN = M'N' = M"N"= .... Cette distance ne dépend pas du représentant du vecteur $\vec{u}$.



Définition

On appelle norme de $\vec{u}$ la distance AB où (A,B) est un représentant de $\vec{u}$. On la note : $\|\vec{u}\|$.

Propriété 2

Il existe un et un seul vecteur ayant une direction donnée, un sens donné et une norme donnée.

Cette propriété est admise.

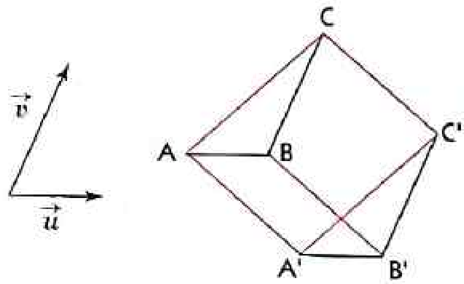
Remarques

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
  En effet, $\vec{0}$ a pour norme 0.
  Réciproquement, si $\|\vec{u}\| = 0$, alors tout représentant (M,N) de $\vec{u}$ est tel que : MN = 0.
  On en déduit que M est égal à N et donc que $\vec{u}$ est le vecteur nul.
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.*
  En effet, si (A,B) est un représentant de $\vec{u}$, (B,A) est un représentant de $-\vec{u}$.
  BA = AB, donc $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.
- *Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.*

1.2. Calcul vectoriel

Somme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs, A un point.
D'après la propriété fondamentale, il existe un seul point B et un seul point C tels que :
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne dépend pas du choix de A.
Soit A' un autre point, B' et C' tels que :
$\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \vec{v}$.
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.
De la propriété 1 § 1.1, on déduit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.
D'où : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



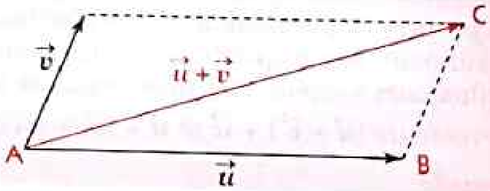
Ce résultat légitime la définition suivante.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.

A, B, C étant des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$,

on pose : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

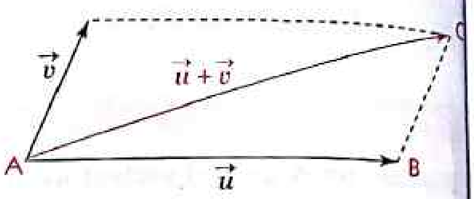
Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition.

Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Démonstration

Soit (A,B) un représentant de $\vec{u}$, (B,C) un représentant de $\vec{v}$.
(A,C) est un représentant de $\vec{u}+\vec{v}$.



D'après l'inégalité triangulaire pour les distances, on a :

AC ≤ AB + BC.

D'où : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition

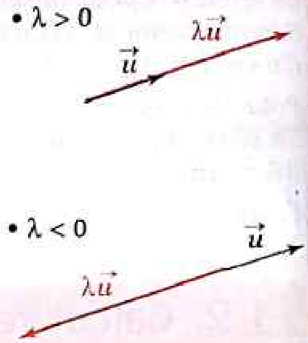
- **Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, λ un nombre réel non nul.**

Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- **pour direction celle de $\vec{u}$;**
- **pour sens celui de $\vec{u}$ si λ est positif, celui de $-\vec{u}$ si λ est négatif ;**
- **pour norme $|\lambda|\ \|\vec{u}\|$.**

- **On pose, par ailleurs, pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ :**

$0\,\vec{u}=\vec{0}$ et $\lambda\vec{0}=\vec{0}$.



Remarque

Par définition, pour tout vecteur $\vec{u}$: $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\ \|\vec{u}\|$.
On n'oubliera pas la valeur absolue. Pour $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\lambda<0$, l'égalité $\|\lambda\vec{u}\| = \lambda\|\vec{u}\|$ est fausse.

Calcul vectoriel

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombres réels λ et μ, on a :

(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; **(2)** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

(3) $(\lambda+\mu)\,\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$; **(4)** $\lambda\,(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$;

(5) $\lambda\,(\mu\vec{u}) = (\lambda\times\mu)\,\vec{u}$; **(6)** $1\,\vec{u}=\vec{u}$.

Ces propriétés sont admises.

Ces propriétés permettent de justifier les règles usuelles de calcul sur les vecteurs.
Notamment, les propriétés (1) et (2) permettent de justifier la règle suivante : pour calculer une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper les différents termes.
Les vecteurs $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ et $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ se notent : $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

Exemple

$4\vec{u}-\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2(\vec{u}+3\vec{w})$

$= 4\vec{u}-\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2\vec{u}-2(3\vec{w})$	d'après (4)
$= 4\vec{u}-\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2\vec{u}-6\vec{w}$	d'après (5)
$= 4\vec{u}-1\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2\vec{u}-6\vec{w}$	d'après (6)
$= (4\vec{u}-2\vec{u})+(3\vec{v}-1\vec{v})+(6\vec{w}-6\vec{w})$	d'après (1) et (2)
$= (4-2)\vec{u}+(3-1)\vec{v}+(6-6)\vec{w}$	d'après (3)
$= 2\vec{u}+2\vec{v}+0\vec{w}$	
$= 2\vec{u}+2\vec{v}$	d'après la définition de $\lambda\vec{u}$ avec $\lambda = 0$
$= 2(\vec{u}+\vec{v})$	d'après (4)

En pratique, on saute les différentes étapes du calcul et on écrit directement :

$$\begin{aligned}4\vec{u}-\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2(\vec{u}+3\vec{w}) &= 4\vec{u}-\vec{v}+6\vec{w}+3\vec{v}-2\vec{u}-6\vec{w}\\ &= 2\vec{u}+2\vec{v}\\ &= 2(\vec{u}+\vec{v})\end{aligned}$$

Propriétés

(7) $\lambda\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $\vec{u}=\vec{0}$; **(8)** $\lambda\vec{u}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ **et** $\vec{u}\neq\vec{0}$.

La propriété (7) est une conséquence immédiate de la définition. La propriété (8) lui est équivalente comme nous allons le voir dans le point de logique qui suit.

L

Soit (p), (q), (r) des propositions, (non p), (non q) , (non r) leurs négations. Par exemple, la négation de ($\lambda = 0$) est ($\lambda \neq 0$).

(p)	$\lambda = 0$	ABCD est un parallélogramme
(q)	$\vec{u}=\vec{0}$	AC = BD
(r)	$\lambda\vec{u}=\vec{0}$	ABCD est un rectangle
	(r) ⇔ (p) **ou** (q)	(r) ⇔ (p) **et** (q)

• ($\lambda = 0$ **ou** $\vec{u}=\vec{0}$) est vraie lorsqu'au moins l'une des propositions ($\lambda = 0$) et ($\vec{u}=\vec{0}$) est vérifiée, les deux pouvant l'être simultanément.

• (ABCD est un parallélogramme **et** AC = BD) est vraie lorsque les deux propositions (ABCD est un parallélogramme) et (AC = BD) sont vérifiées simultanément.

(non p)	$\lambda \neq 0$	ABCD n'est pas un parallélogramme
(non q)	$\vec{u}\neq\vec{0}$	AC ≠ BD
(non r)	$\lambda\vec{u}\neq\vec{0}$	ABCD n'est pas un rectangle
	(non r) ⇔ (non p) **et** (non q)	(non r) ⇔ (non p) **ou** (non q)

• ($\lambda = 0$ **ou** $\vec{u}=\vec{0}$) est fausse lorsque les deux propositions ($\lambda = 0$) et ($\vec{u}=\vec{0}$) sont simultanément fausses.

• (ABCD est un parallélogramme **et** AC = BD) est fausse lorsqu'au moins une des propositions (ABCD est un parallélogramme) et (AC = BD) est fausse.

• D'une manière générale, on peut retenir que :
la négation de [(p) **ou** (q)] est [(non p) **et** (non q)] ;
la négation de [(p) **et** (q)] est [(non p) **ou** (non q)].

Exemples

• La négation de (x inférieur à y **ou** égal à y) est (x non inférieur à y **et** différent de y). Donc, la négation de ($x \leqslant y$) est ($x > y$). On démontre de même que la négation de ($x < y$) est ($x \geqslant y$).
• La négation de ($-1 \leqslant x$ et $x < 1$) est ($-1 > x$ ou $x \geqslant 1$).
Donc, la négation de ($-1 \leqslant x < 1$) est ($x < -1$ ou $x \geqslant 1$).

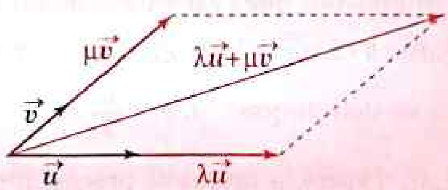
1.3. Combinaisons linéaires

Combinaisons linéaires

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, où λ et μ sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

λ et μ sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



D'une manière plus générale, on appelle combinaison linéaire de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ tout vec-teur de la forme $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \dots + \lambda_n\vec{u}_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels, appelés coef-ficients.

Vecteurs colinéaires

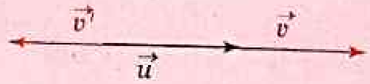
Définition

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires dans les deux cas suivants :

lorsque l'un d'eux au moins est $\vec{0}$

ou bien

lorsqu'ils ont même direction.



Remarque

$\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

• $\lambda > 0$

• $\lambda < 0$

Cette propriété est une conséquence immédiate d'une propriété vue en classe troisième.

Remarque

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\vec{v} \neq \vec{0}$, il existe un nombre réel λ unique tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Propriété 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Cette propriété peut s'exprimer ainsi :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un couple $(\lambda ; \mu) \neq (0 ; 0)$ tel que : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration

• Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

D'après la propriété précédente, il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

On en déduit : $\lambda\vec{u} - 1\vec{v} = \vec{0}$ ou $1\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$.

Ce sont bien des combinaisons linéaires nulles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

• Supposons que : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$, où λ et μ sont des nombres réels non tous les deux nuls.

Quitte à changer les notations, on peut supposer que $\lambda \neq 0$.

On en déduit que : $\vec{u} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\vec{v}$.

D'où, d'après la propriété précédente : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et μ deux nombres réels. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

(2) $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$.

Démonstration

(2) signifie qu'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coefficients ne sont pas tous les deux nuls. La propriété 3 est donc une autre formulation de la propriété 2.

Vecteurs directeurs d'une droite

En classe de troisième, on a appelé vecteur directeur d'une droite ($\mathcal{D}$) tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que ($\mathcal{D}$) et (AB) soient parallèles. La direction d'un vecteur non nul $\vec{u}$ étant celle de toute droite (AB) où (A,B) est un représentant de $\vec{u}$, cette définition est équivalente à la suivante.

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite ($\mathcal{D}$) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que ($\mathcal{D}$).

On dira que ($\mathcal{D}$) est dirigée par $\vec{u}$.

Remarques

- *Si ($\mathcal{D}$) est une droite dirigée par $\vec{u}$, les vecteurs directeurs de ($\mathcal{D}$) sont les vecteurs $k\vec{u}$ où k est un nombre réel non nul. Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.*
- *Si A et B sont des points d'une droite ($\mathcal{D}$) dirigée par $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

Vecteurs unitaires

Définition

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$.

Ces deux vecteurs sont opposés.

Démonstration

Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est de la forme $\lambda\vec{u}$ où λ appartient à $\mathbb{R}$.

$$\|\lambda\vec{u}\| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda|\,\|\vec{u}\| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

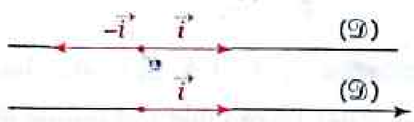
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{1}{\|\vec{u}\|}.$$

Il n'y a donc que deux vecteurs de norme 1 colinéaires à $\vec{u}$ que l'on convient d'écrire :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad \text{et} \quad -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Remarques

- *Une droite admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés.*
- *Choisir l'un d'eux revient à orienter la droite.*



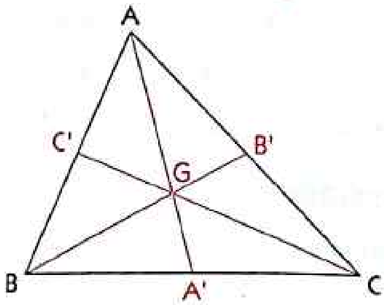
Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

On sait, depuis le premier cycle, que les médianes [AA'], [BB'] et [CC'] sont concourantes en un point G, appelé centre de gravité, qui vérifie :

$AG = \frac{2}{3}\ AA'$; $BG = \frac{2}{3}\ BB'$; $CG = \frac{2}{3} CC'$.

Nous allons voir une autre caractérisation de G.



Propriété

Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démonstration guidée

Soit G le centre de gravité de ABC.

- Démontrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
- En déduire que : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, puis $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démontrons que le point G est unique. Soit M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- En faisant apparaître le point G à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que : $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.
- En déduire que M = G.
- Conclure.

M Pour démontrer qu'il existe un seul objet vérifiant une propriété, on peut considérer qu'il en existe deux et démontrer qu'ils sont égaux.

1.4. Travaux dirigés

1. Soit ABCD un quadrilatère, λ un nombre réel non nul et différent de 1, M, N, P, Q les points tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = (1-\lambda)\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{DA}$.

Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

Solution

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$= -\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC}$

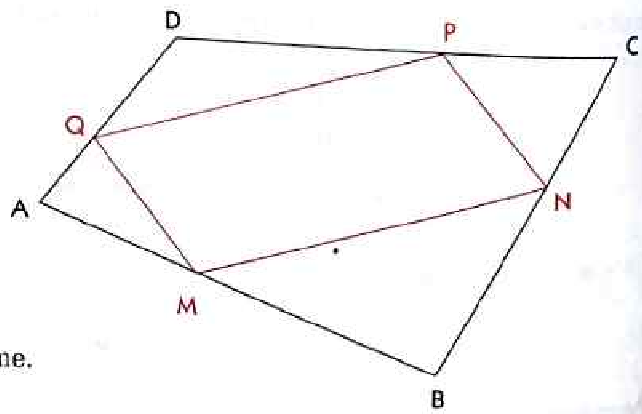
$= (1-\lambda)\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$.

On calcule de la même manière $\overrightarrow{QP}$:

$\overrightarrow{QP} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$.

D'où : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. MNPQ est donc un parallélogramme.



2. Soit A, B, C trois points non alignés.

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$.

Solution guidée

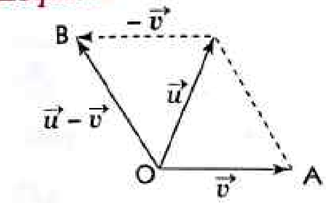
L'expression $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ suggère d'utiliser le centre de gravité G du triangle ABC.

- En introduisant G, à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
- En déduire : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow GM = 4$.
- Conclure.

3. Construire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$. Quelle valeur maximale peut prendre $\|\vec{u}\|$?

Solution

Esquisse



Analyse

- $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Donc, les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- On constate que : $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$.
- On peut donc construire d'abord $\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$, puis faire la somme de ces deux vecteurs pour obtenir $\vec{u}$.

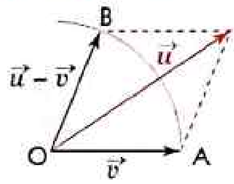
Programme de construction

- Choisir arbitrairement deux points A et B distincts sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- Construire $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

En posant $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, on a : $\overrightarrow{OB} = \vec{u} - \vec{v}$.

D'où : $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Construction



Il semblerait géométriquement que la norme de $\vec{u}$ sera maximale lorsqu'on aura : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}$.
C'est-à-dire : $\vec{u} = 2\vec{v}$. Dans ce cas : $\|\vec{u}\| = 2$.

Démontrons donc que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant les hypothèses, on a : $\|\vec{u}\| \leq 2$.

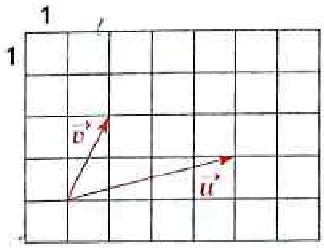
$\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$ d'après l'inégalité triangulaire ;

$\Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \leq 2$ car $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Exercices

1.a Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant les vecteurs représentés sur la figure ci-dessous.

(Les carrés du quadrillage ont pour aire 1.)



1.b Soit ABC un triangle, λ un nombre réel non nul, A', B', C' tels que :
$\overrightarrow{BA'} = \lambda\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = \lambda\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

1.c Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, A, B, C trois points tels que :
$\overrightarrow{AB} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$; $\overrightarrow{AC} = 5\vec{u} - 4\vec{v}$.
Pour tous nombres réels λ et μ, on considère le point M tel que : $\overrightarrow{BM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
Quelles relations doivent vérifier λ et μ pour que :
1) A, B, M soient alignés ?
2) ABCM soit un parallélogramme ?

1.d Soit A et B deux points distincts, I le milieu de [AB]. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
1) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}$;
2) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = 1$.

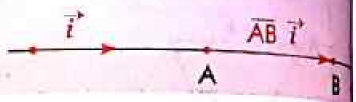
2 Mesure algébrique

2.1. Présentation

Soit A, B, C trois points.
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Par contre, AB + BC n'est égal à AC que si B appartient à [AC].
Nous allons définir un nouvel outil qui permettra de préciser non seulement la distance entre deu points A et B d'une même droite, mais aussi leur position relative.

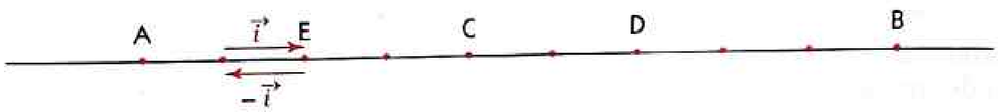
Définition

Soit ($\mathscr{D}$) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
A et B étant deux points de ($\mathscr{D}$), on appelle mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel, noté $\overline{AB}$, tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$.



Exemple

Soit ($\mathscr{D}$) une droite et $\vec{i}$ l'un de ses vecteurs directeurs unitaires.
On considère les points A, B, C, D, E suivants :



Relativement à $\vec{i}$: $\overline{AB} = 9$; $\overline{BC} = -5$; $\overline{CD} = 2$; $\overline{DE} = -4$; $\overline{AE} = 2$.
Relativement à $-\vec{i}$: $\overline{AB} = -9$; $\overline{BC} = 5$; $\overline{CD} = -2$; $\overline{DE} = 4$; $\overline{AE} = -2$.

Remarques

- *Ces mesures sont dites algébriques car, contrairement aux distances, elles peuvent être négatives.*
- *Soit A, B deux points d'une droite ($\mathscr{D}$) et $\vec{i}$ l'un de ses vecteurs directeurs unitaires. Les mesures algébriques de (A,B) relativement à $\vec{i}$ et à $-\vec{i}$ sont opposées. En effet, si $\overline{AB}$ est la mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{i}$, alors :* $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$
$= (-\overline{AB})(-\vec{i})$.
- *$\overline{AB}$ ne peut être définie sans que la droite (AB) ne soit orientée.*

2.2. Propriétés

Conséquences immédiates

Soit ($\mathscr{D}$) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
Pour tous points A, B, C de ($\mathscr{D}$), tout nombre réel λ, on a :

(1) $|\overline{AB}| = AB$; **(2)** $\overline{BA} = -\overline{AB}$;

(3) **lorsque A et B sont distincts :**
- $\overline{AB} = AB$ **si et seulement si** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\vec{i}$ **sont de même sens ;**
- $\overline{AB} = -AB$ **si et seulement si** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\vec{i}$ **sont de sens contraires ;**

(4) $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$; **(5)** $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \lambda\,\overline{AB}$;

(6) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ **(relation de Chasles).**

Démonstration

Toutes ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition. Nous ne démontrerons que les propriétés (1) et (6).

(1) $\quad AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overline{AB}\ \vec{i}\| = |\overline{AB}|\ \|\vec{i}\| = |\overline{AB}|.$

(6) $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\qquad = \overline{AB}\vec{i} + \overline{BC}\vec{i}$

$\qquad = (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{i}.$

D'où, par définition : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Remarques

- *La relation $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si les points A, B, C sont alignés.*
- *La relation AB + BC = AC n'est vérifiée que si B appartient à [AC]. Par contre, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ est vraie pour tous points A, B, C d'une droite $(\mathcal{D})$.*

La propriété suivante permet d'effectuer certains calculs sans préciser l'orientation choisie sur $(\mathcal{D})$.

Propriété

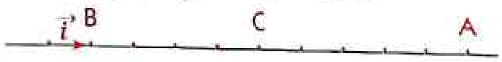
Pour des points appartenant à une même droite, le produit et le quotient de deux mesures algébriques sont indépendants de l'orientation de la droite.

Démonstration

Les mesures algébriques relativement à $\vec{i}$ et à $-\vec{i}$ sont des nombres opposés. Donc, d'après la règle des signes, le produit (respectivement le quotient) de deux mesures algébriques relativement à $\vec{i}$ est le même que celui relativement à $-\vec{i}$.

Exercices

2.a Lire sur le graphique $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.



2.b Sur une droite orientée par un vecteur directeur unitaire $\vec{i}$, placer trois points A, B, C tels que : $\overline{AB} = -3$; $\overline{AC} = 2$.
Calculer $\overline{CB}$.

2.c Est-il possible de trouver trois points A, B, C d'une même droite tels que :
$\overline{AB} = \overline{BC}$ et $\overline{AC} = -4$?

2.d Déterminer relativement à $\vec{i}$, puis à $-\vec{i}$:
$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB} \times \overline{AC}$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

3 Bases et repères

3.1. Bases de $\mathcal{V}$

Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels $(x\ ;\ y)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Cette propriété signifie que tout vecteur peut se décomposer de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$, pourvu que ceux-ci ne soient pas colinéaires.

Démonstration

• Soit $\vec{u}$ un vecteur. Démontrons que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit (O,I), (O,J), (O,M) des représentants respectifs des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}$, H le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ), K le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).

Si M est sur (OI), alors K est en O et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$. Si M est sur (OJ), alors H est en O et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK}$.

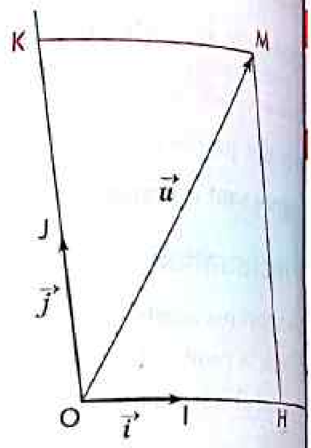
Si M n'est ni sur (OI) ni sur (OJ), OHMK est un parallélogramme.

On a dans tous les cas : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$.

$\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$. Donc il existe un nombre réel x tel que : $\overrightarrow{OH} = x\,\overrightarrow{OI}$.

Il existe, pour la même raison, un nombre réel y tel que : $\overrightarrow{OK} = y\,\overrightarrow{OJ}$.

On en déduit : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$. C'est-à-dire : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



• Démontrons que cette décomposition est unique.

Soit $(x' ; y')$ un couple de nombres réels tels que : $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} &\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\
&\Rightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = \vec{0} \\
&\Rightarrow x - x' = 0 \text{ et } y - y' = 0 \\
&\Rightarrow x = x' \text{ et } y = y'.
\end{aligned}$$

Le couple $(x ; y)$ est donc unique.

La propriété précédente justifie les définitions qui suivent.

Définitions

- **Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires est appelé base de $\mathscr{V}$.**
- **Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{V}$ et $\vec{u}$ un vecteur.**

Le seul couple de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

Dire « on munit $\mathscr{V}$ de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ » signifie que, sauf mention contraire, les coordonnées de tout vecteur de $\mathscr{V}$ sont exprimées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On écrit alors simplement : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{V}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors : $\vec{u} + \vec{u}'\begin{pmatrix}x + x'\\y + y'\end{pmatrix}$ et $(\lambda\,\vec{u})\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Démonstration

On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

• $\vec{u} + \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j})$
$= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

• $\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$
$= \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$.

D'où le résultat.

Bases orthonormées

Définitions

- **Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un au moins est nul. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on note : $\vec{u} \perp \vec{v}$.**
- **Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.**

$(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée si et seulement si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et μ deux nombres réels. On a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{u} \perp \mu\vec{v}$.

Démonstration

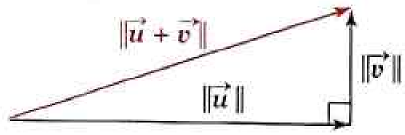
Si les vecteurs $\lambda\vec{u}$ et $\mu\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, leurs directions sont respectivement les mêmes que celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ils sont donc orthogonaux.

Si l'un des vecteurs $\lambda\vec{u}$ ou $\mu\vec{v}$ est nul, la propriété est évidente.

Remarque

En utilisant les normes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ pour écrire le théorème de Pythagore et sa réciproque, on obtient :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.



Expression de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration guidée

On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

- Que peut-on dire des vecteurs $x\vec{i}$ et $y\vec{j}$?
- En utilisant la remarque précédente sur le théorème de Pythagore, démontrer que :
  $\|\vec{u}\|^2 = |x|^2 \|\vec{i}\|^2 + |y|^2 \|\vec{j}\|^2$.
- Conclure.

Remarque

Cette propriété n'est pas applicable lorsque la base n'est pas orthonormée.

3.2. Déterminant de deux vecteurs

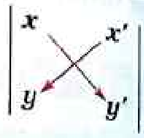
Il a été admis en classe de troisième que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. Cette propriété nous conduit à introduire un nouvel outil mathématique : le déterminant.

Définitions

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.
On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{u}')$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre réel $xy' - yx'$.
On note : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = xy' - yx'$.

Pour calculer un déterminant, on dispose les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de la façon suivante : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

On effectue les produits des coefficients suivant les diagonales comme l'indique la figure ci-contre, puis la différence de ces produits.



On écrit : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Théorème

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration

Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.

- Démontrons que si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.
  - Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $x = y = 0$. On a bien $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.
  - Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$.

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = x\lambda y - y\lambda x$$
$$\Rightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0.$$

- Démontrons que si $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, il est évident que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires. Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$.

– Si $x \neq 0$, on pose : $\lambda = \dfrac{x'}{x}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \quad &\Rightarrow \quad xy' - yx' = 0 \\ &\Rightarrow \quad xy' - y\lambda x = 0 \quad \text{car } x' = \lambda x \\ &\Rightarrow \quad y' - y\lambda = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad y' = \lambda y. \end{aligned}$$

D'où : $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$.

– Si $x = 0$, alors $y \neq 0$. On obtient le même résultat en posant : $\lambda = \dfrac{y'}{y}$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont bien colinéaires.

3.3. Repères du plan

Une autre présentation

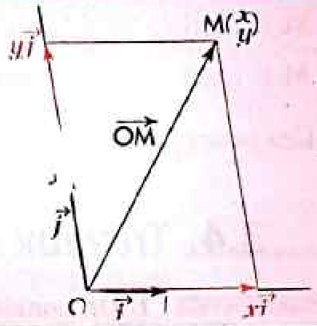
Si (O, I, J) est un repère du plan, alors, les points O, I, J n'étant pas alignés, le couple $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Réciproquement, pour tout point O et toute base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, il existe un couple unique de points (I,J) tels que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. (O, I, J) est un repère du plan.

Un repère peut donc être aussi défini par la donnée d'un point et d'une base de $\mathcal{V}$.

Définitions

- On appelle repère du plan :
  - ou bien un triplet (O, I, J) de points non alignés ;
  - ou bien un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
- Le point O est appelé origine du repère.



$M\binom{x}{y}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$;
signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarques

- *Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ l'est.*
- *$(O, \vec{i})$ est un repère de l'axe des abscisses et $(O, \vec{j})$ un repère de l'axe des ordonnées.*

Calculs dans un repère

Propriétés

(1) Si $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

(2) Si $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si M est le milieu de [AB],

$$\text{alors } M\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

(3) Si $A\binom{x_A}{y_A}$, $B\binom{x_B}{y_B}$ et $C\binom{x_C}{y_C}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si G est le centre de gravité de ABC,

$$\text{alors } G\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Les propriétés (1) et (2) ont été démontrées dans le premier cycle.

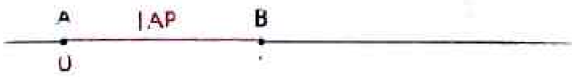
Démonstration guidée de la propriété (3)

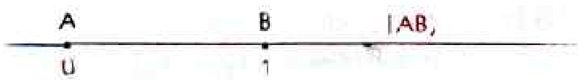
On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- En introduisant O à l'aide de la relation de Chasles dans la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, démontrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
- Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OG}$?
- Conclure.

Caractérisations vectorielles d'un segment, d'une demi-droite

Soit A, B deux points distincts. Un point M appartient au segment [AB] (respectivement à la demi-droite [AB)) si et seulement si l'abscisse de M sur la droite (AB) munie du repère (A,B) appartient à l'intervalle [0 ; 1] (respectivement est positive).





Propriétés

M $\in$ [AB] $\Leftrightarrow$ **il existe t appartenant à [0 ; 1] tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.**

M $\in$ [AB) $\Leftrightarrow$ **il existe t appartenant à $\mathbb{R}^+$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.**

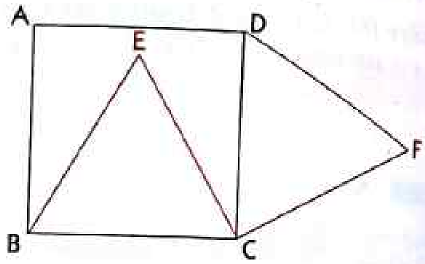
Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition d'un segment et d'une demi-droite.

3.4. Travaux dirigés

1. On considère la figure ci-dessous :

ABCD est un carré ; BCE et CDF sont des triangles équilatéraux. Démontrer que A, E, F sont alignés.

Solution guidée

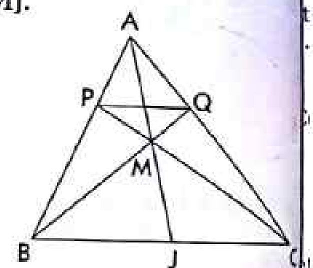


On considère le repère (B,C,A).

- Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D ?
- Calculer les coordonnées de E et F.
- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
- Démontrer que det $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = 0$.
- Conclure.

2. Soit un triangle ABC, J le milieu de [BC].
M est un point de (AJ) distinct de A et tel que J ne soit pas le milieu de [AM].
(CM) coupe (AB) en P et (BM) coupe (AC) en Q.
Démontrer que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.

Solution guidée



Vérifier que si M est en J, alors (PQ) et (BC) sont confondues.

On suppose que M est distinct de J et on se place dans le repère (M, B, C).

- Quelles sont les coordonnées de M, B, C et J ?
- Démontrer que les coordonnées de A sont de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
- Déterminer les coordonnées de P, point d'intersection des droites (CM) et (AB).
- Déterminer les coordonnées de Q, point d'intersection des droites (BM) et (AC).
- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
- Conclure.

Remarques

- *Si J est le milieu de [AM], les droites (BM) et (AC) sont parallèles, de même que (CM) et (AB) ; les points P et Q n'existent pas.*
- *Si M est en A, les points P et Q sont confondus.*

Exercices

3.a Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer : det $(\vec{u}, \vec{v})$; det $(\vec{v}, \vec{u})$; det $(\vec{u}, -\vec{v})$;
det $(\vec{u}, \vec{w})$; det $(\vec{u}, \vec{v}-\vec{w})$; det $(\vec{u}+3\vec{w}, 2\vec{v}-4\vec{w})$.

3.b Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?
3. Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

Exercices

APPRENTISSAGE

Vecteurs

1 On donne la figure suivante :

Compléter les égalités :
$\overrightarrow{BD} = ... \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = ... \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = ... \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = ... \overrightarrow{BC}$;
$\overrightarrow{BC} = ... \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} = ... \overrightarrow{DB}$.

2 On donne : $\overrightarrow{MP} = -4\,\overrightarrow{MN}$. Compléter :
$\overrightarrow{NM} = ... \overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{PN} = ... \overrightarrow{PM}$.
On donne : $\overrightarrow{SU} = \frac{6}{5}\overrightarrow{ST}$. Compléter :
$\overrightarrow{TU} = ... \overrightarrow{TS}$; $\overrightarrow{UT} = ... \overrightarrow{US}$; $\overrightarrow{ST} = ... \overrightarrow{TU}$.

3 Soit ABC un triangle quelconque.
1. Construire les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$.
2. Démontrer que D est le milieu du segment [CE].

4 Soit ABC un triangle quelconque.
Construire les points M et N tels que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \end{cases}.$$

5 Soit ABCD un quadrilatère dont les côtés [AD] et [BC] ont pour milieux respectifs I et J.
Démontrer que : $2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

6 Développer et réduire :
$\vec{a} = 7\vec{u} - 4\,\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$
$\vec{b} = 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u}$
$\vec{c} = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v})$
$\vec{d} = \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v})$

7 On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \end{cases}.$$
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{w}$.

8 Soit ABC un triangle et I un point de (AB).
1. La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J.
La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en K.
La parallèle à (AC) passant par K coupe (AB) en L.
Démontrer que L = I si et seulement si I est le milieu de [AB].
2. La parallèle à (BC) passant par L coupe (AC) en M.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N.
Démontrer que les droites (IN) et (AC) sont parallèles.

9 On donne un rectangle ABCD. On considère un point quelconque M situé à l'intérieur du rectangle, bords compris. On trace les droites (Δ) et (Δ') passant par M, respectivement parallèles à (AB) et à (AD). (Δ) coupe (AD) en E et (BC) en F. (Δ') coupe (AB) en G et (DC) en H.
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF}$.
Même question avec un parallélogramme.

10 Soit un triangle ABC, M et N les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].
E est le symétrique de B par rapport à A, et F est le symétrique de A par rapport à M.
Démontrer que N est le milieu de [EF].

11 Soit ABCD un quadrilatère. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD].
1. Démontrer que les segments [IK], [JL] et [MN] ont même milieu G.
2. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

12 Soit ABC un triangle, M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).
1. Construire les points A', B' et C' tels que MABA', MBCB' et MCAC' soient des parallélogrammes.
2. Démontrer que M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

13 Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des segments [AC] et [AB]. k est un nombre réel, D et E sont les points du plan définis par $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$. I est le milieu de [DE].
Démontrer que B', C' et I sont alignés.

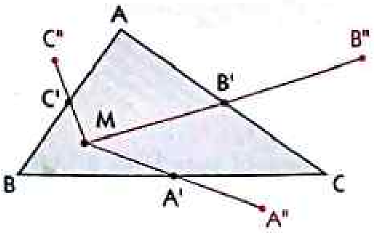
14 Soit ABC un triangle.
M est le milieu de [AB] et I est le milieu de [MC].
1. Construire le point K tel que : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
2. Démontrer que les points A, I et K sont alignés.

15 Soit ABC un triangle.
1. Placer les points I, J et K tels que :
$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
2. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

16 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.
3. Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN].
Démontrer que les points A, S et T sont alignés.

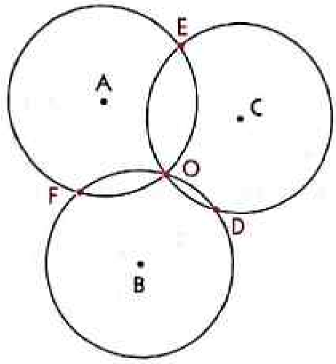
17 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\,\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que (BN) et (MC) sont parallèles.

18 Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB], M un point intérieur au triangle ABC et A'', B'', C'' les symétriques respectifs de M par rapport à A', B', C'.



1. Démontrer que : $\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{CA''}$.
2. Démontrer que les droites (AA''), (BB'') et (CC'') sont concourantes.

19 Sur la figure ci-dessous, les trois cercles ont même rayon et pour centres A, B, C.
O est un point commun aux trois cercles.



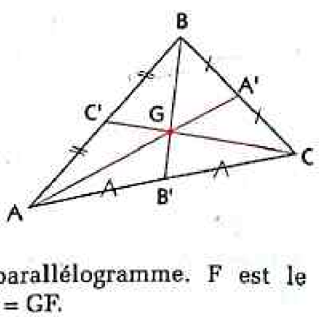
1. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
2. Quelle est la nature des quadrilatères AOBF, AOCE et BOCD ?
3. Démontrer que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$.
4. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle DEF.

20 Sachant que $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\|$, $\|x\vec{u}\| = \|y\vec{v}\|$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, quelle relation peut-on écrire entre les deux nombres réels x et y ? Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils nécessairement colinéaires ?

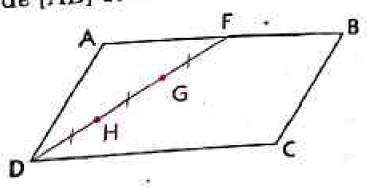
21 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| \leqslant 3$ et $\|\vec{v}\| \leqslant 2$. Démontrer que $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\| \leqslant 12$.

Bases et repères

22 On donne le triangle ABC et G son centre de gravité.
Quelles sont les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{GC'}$.
1. dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?
2. dans la base $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC})$?



23 Soit ABCD un parallélogramme. F est le milieu de [AB] et DH = HG = GF.



1. Que peut-on conjecturer sur les points A, G, C ?
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$.
3. Démontrer la conjecture.

24 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{V}$.
Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que le coup $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathscr{V}$ et déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, -4\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{i} + 2\vec{j}$ dans cette base.
1. $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{j}, \vec{i})$;
2. $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{i}, -\vec{j})$;
3. $(\vec{u}, \vec{v}) = (2\vec{i}, -\vec{j})$;
4. $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{i} + \vec{j})$.

25 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{V}$.
1. Démontrer que :
$(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$, $(2\vec{i}, 2\vec{j})$, $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ et $(\vec{j}, -\vec{i})$ sont des bases de $\mathscr{V}$.
2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés par leur coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j})$.
a) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans chacune des bases :
$(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$, $(2\vec{i}, 2\vec{j})$, $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ et $(\vec{j}, -\vec{i})$.
b) Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ dans chacune de ces bases.
3. Démontrer que : si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ dans l'une des bases alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ dans les autres bases.

26 $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont deux bases de $\mathscr{V}$ telles que $\vec{j} = \frac{7}{6}\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

27 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs de [AD], [AB], [BC] et [CD].
Justifier que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EO})$ est une base de $\mathscr{V}$.
Déterminer dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GD}$.

28 Soit A et B deux points distincts.
1. Démontrer qu'il existe un unique point G du plan tel que : $5\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
(On pourra exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.)
2. Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
On donne $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Placer le point G et calculer ses coordonnées.

29 Soit le parallélogramme ABCD et I le point d'intersection de ses diagonales.
1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathscr{V}$.
Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par :
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) - 2(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA})$
2. Construire le point E défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE}$ forment-ils une base de $\mathscr{V}$?

3. Donner les coordonnées des points B, C, D, E et I dans chacun des repères (A, B, D) et (B, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

30 Le plan est muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On donne le point $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.
1. Démontrer que ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est une base de $\mathcal{V}$.
2. Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans la base ($\vec{u}$, $\vec{v}$) ?
3. Un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et (x',y') dans le repère (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

31 $\mathcal{V}$ est muni de la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).
Dans chacun des cas ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont-ils la même direction ? Si oui, préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$;
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$;
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\a\end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{R})$.

(On discutera suivant les valeurs de a).

32 On considère un triangle ABC et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :
$\vec{u} = (3-\sqrt{2})\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 7\overrightarrow{AB} + (3-\sqrt{2})\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

33 $\mathcal{V}$ est muni de la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).
1. Calculer : det ($\vec{i}$, $\vec{j}$), det ($-\vec{j}$, $2\vec{j}$) et det ($\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}$).
2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ deux vecteurs quelconques, et k un nombre réel.
a) Comparer det ($\vec{v}$, $\vec{u}$) et det ($\vec{u}$, $\vec{v}$).
b) Calculer det ($k\vec{u}$, $\vec{v}$) en fonction de det ($\vec{u}$, $\vec{v}$).
c) Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$, démontrer que :
det ($\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}$) = det ($\vec{w}$, $\vec{u}$) + det ($\vec{w}$, $\vec{v}$).

34 $\mathcal{V}$ est muni de la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).
Dans chacun des cas ci-dessous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

1. $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -9\vec{i} + 6\vec{j}$
2. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
3. $\vec{u} = (1-\sqrt{2})\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + (1+\sqrt{2})\vec{j}$
4. $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$

(On discutera suivant les valeurs du nombre réel a).

APPROFONDISSEMENT

35 Soit ABC un triangle de centre de gravité G, I le milieu de [BC].
1. Démontrer que pour tout point M du plan :
• $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$,
• $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$.
2. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires ?
3. Quel est l'ensemble des points M tels que :
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$?

36 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
1. Démontrer que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
2. Démontrer que pour tout point M :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
3. Y a-t-il d'autres points M de $\mathcal{P}$ tels que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.
4. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$.

37 Soit ABC un triangle.
1. Démontrer qu'il existe un unique point D tel que :
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Construire le point D.
2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$.
3. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.
4. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

38 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes en O et M un point n'appartenant ni à $(\mathcal{D})$, ni à $(\mathcal{D}')$.
Construire un point N de $(\mathcal{D})$ et un point P de $(\mathcal{D}')$ tels que : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

39 On considère deux points A et B tels que : $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$.
1. Construire un point M tel que :
$\|\overrightarrow{AM}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = 2$.
(On pourra introduire le point B' tel que : $\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB}$.)
2. Peut-on construire un autre point M répondant aux mêmes conditions ?
3. Peut-on construire un point M vérifiant :
$\|\overrightarrow{AM}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = 8$?

40 1. Soit le pentagone ABCDE. Soit I, J, K, L et M les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].
Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{LK}$.
2. Construire un pentagone dont on connaît les milieux des côtés.

41 Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
1. Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.
2. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les points M et N appartiennent respectivement aux droites (ID) et (JB).
3. Démontrer que MINJ est un parallélogramme.
4. Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC).
Démontrer que B est le milieu du segment [CE].

42 Soit $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites sécantes en O, M et N deux points distincts.

Construire les points A de $(\mathscr{D}_1)$ et B de $(\mathscr{D}_2)$ tels que :

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MN}$; 2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MN}$;

3. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$; 4. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{MN}$.

43 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, M un point intérieur à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ une droite passant par O et ne contenant pas M.

Construire des points A de $(\mathscr{D})$ et B de $(\mathscr{C})$ tels que :

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$;
2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$.

44 Le plan est muni du repère (O, I, J).

K est le point de coordonnées (a,b) et S la symétrie de centre K.

1. Le point M de coordonnées (x,y) a pour image par S le point M' de coordonnées (x',y').
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que :
$x' = -x + c$ et $y' = -y + d$.
Démontrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

45 1. Soit A, B deux points distincts.

a) Placer les points C et D tels que :
$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

b) Comparer $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

c) Soit I le milieu de [AB] ; exprimer IA^2 et $\overline{IC} \times \overline{ID}$ en fonction AB, conclure.

d) Calculer $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$;

en déduire que : $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$.

Note historique

Les anciens utilisaient beaucoup les mesures algébriques et notamment les relations suivantes.

Soit A, B, C, D quatre points alignés, distincts deux à deux, et I le milieu de [AB].

On dit que les points A, B, C, D forment une division harmonique ou que D est conjugué de C par rapport à A et B lorsque : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ *(1).*

On dit que les points A, B, C, D vérifient la relation de Newton lorsque : $IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$ *(2).*

On dit que les points A, B, C, D vérifient la relation de Descartes lorsque :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad (3).$$

2. Le but de cette question est de démontrer l'équivalence des relations (1), (2) et (3).
En reprenant les données de la note historique :

a) Vérifier que :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

b) Démontrer l'équivalence des relations (1) et (2).
(On pourra introduire le point I à l'aide de la relation de Chasles dans la formule de la division harmonique).

c) Démontrer l'équivalence des relations (1) et (3) *(on pourra introduire le point A à l'aide de la relation de Chasles dans une formule équivalente à celle de la division harmonique).*

46 Soit A, B, C trois points non alignés et I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On note respectivement a, b, c, p les distances BC, AC, AB et le périmètre du triangle ABC.

1. Parmi les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{CI}$, peut-il y en avoir deux colinéaires ?
2. Soit D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
(On pourra introduire les points B' et C' tels que : $\overrightarrow{AB'} = b\,\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC'} = c\,\overrightarrow{AC}$*).*
3. *a)* Démontrer qu'il existe un réel α tel que :
$(\alpha - b - c)\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
b) Démontrer de même qu'il existe un réel β tel que :
$a\,\overrightarrow{IA} + (\beta - a - c)\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
c) Démontrer que : $\alpha = \beta = p$.
d) En déduire que :
$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Application

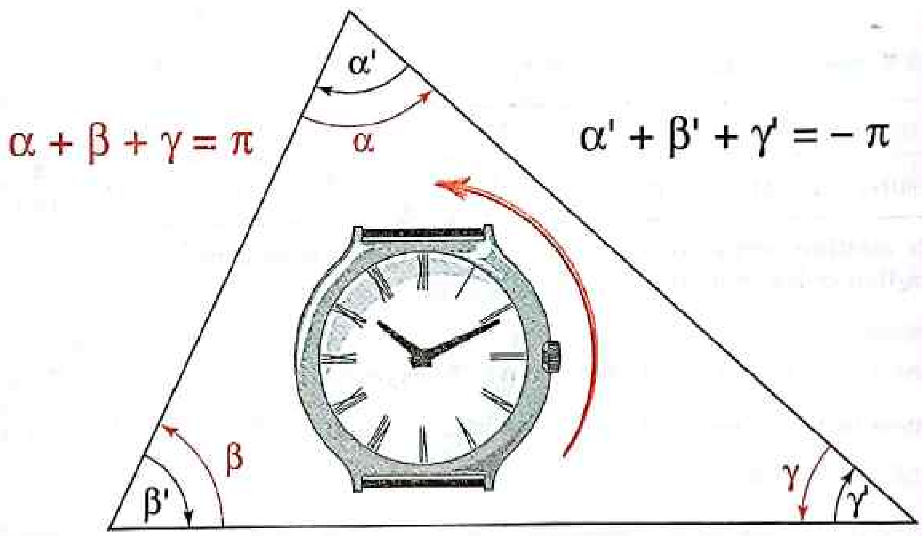
4. Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et on appelle $(\mathscr{C})$ le cercle inscrit dans le triangle ABC.
a) Déterminer les coordonnées du point K centre de $(\mathscr{C})$ et faire une figure.
b) Quel est le rayon de $(\mathscr{C})$?
c) Tracer le cercle $(\mathscr{C})$.

3

Angles orientés
Trigonométrie

Quand on dit que Bamako a pour longitude 7°55' et pour latitude 12°34', cela ne détermine pas exactement la position géographique de cette ville. Il faut compléter : 7°55' de longitude ouest et 12°34' de latitude nord. De même, si on dit à une personne : tourne de 45°, elle ne sait pas dans quel sens il faut le faire.

C'est pour plus de précision que l'on va, dans ce chapitre, définir un nouveau type d'angle : les angles orientés. On va aussi approfondir la trigonométrie.



SOMMAIRE

1 Compléments sur les angles

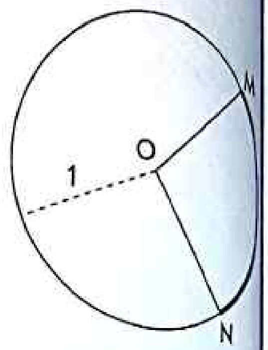
1.1. Radian

Mesure d'un angle en radian

Dans le plan où une unité de longueur a été choisie, on considère un cercle de centre O et de rayon 1.

Le périmètre de ce cercle est 2π, la longueur du demi-cercle π, celle du quart de cercle $\frac{\pi}{2}$.

On définit une nouvelle unité de mesure d'angles pour que, sur un cercle de rayon 1, l'arc de cercle $\overset{\frown}{MN}$ et l'angle au centre $\widehat{MON}$ qui l'intercepte soient mesurés par le même nombre.



Définition

La mesure en radian d'un angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la notera mes $\widehat{MON}$.

Dans la suite de ce cours, sauf précision contraire, les mesures des angles seront données en radian.

Mesures en radian et mesures en degré

mesures en degré	180	90	60	45	30	0	x
mesures en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y

C'est un tableau de proportionnalité : $y = \frac{\pi}{180}x$.

Cette relation permet de calculer x en fonction de y ou y en fonction de x, donc de convertir les degrés en radian et les radians en degré.

Exemples

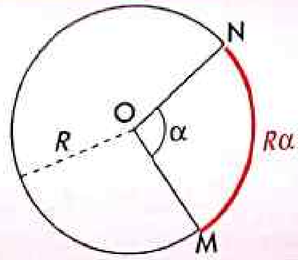
La mesure y, en radian, d'un angle de 75 degrés vérifie : $y = \frac{\pi}{180} \times 75$. D'où : $y = \frac{5\pi}{12}$.

La mesure x, en degrés, d'un angle de 1,24 radian vérifie : $x = \frac{180}{\pi} \times 1{,}24$. D'où : $x \approx 71$.

De même, 1 radian vaut 57° à 1° près par défaut.

Propriété

Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α radian est $R\alpha$.



Démonstration

Sur un cercle, on sait que la longueur x d'un arc est proportionnelle à la mesure en degré de l'angle au centre qui l'intercepte. On vient de voir que la mesure en degré est proportionnelle à la mesure en radian.

Ainsi la longueur d'un arc est proportionnelle à la mesure en radian de l'angle au centre qui l'intercepte lorsque l'angle au centre a pour mesure π, l'arc intercepté a pour longueur πR (coefficient de proportionnalité : R). On a donc : $x = R\alpha$.

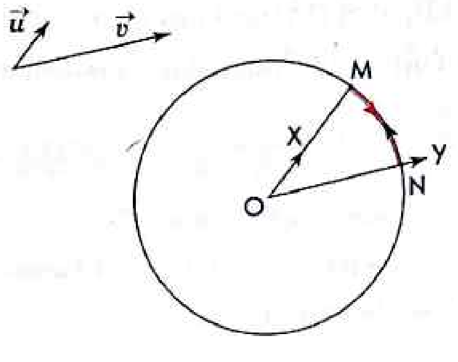
1.2. Angle orienté de deux vecteurs

Présentation

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non colinéaires, X et Y les points tels que : $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$.
Désignons par M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O.

$\widehat{MON}$ et $\widehat{NOM}$ désignent un même angle. L'arc $\widehat{MN}$ peut être « parcouru » de M vers N ou de N vers M.

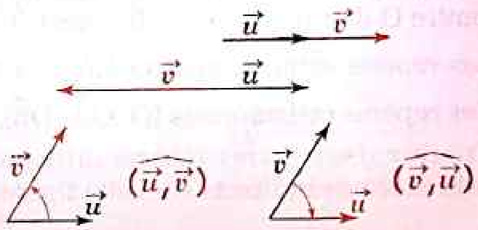
Pour rendre compte de cette situation, on définit un nouveau type d'angle appelé angle orienté pour lequel les angles construits à partir des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ seront considérés comme étant opposés.



Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls, X et Y les points tels que : $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$. Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O.

- **L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé angle orienté et noté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.**
- **L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, est l'angle orienté nul.**
- **L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, est l'angle orienté plat.**



Vocabulaire

- Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est un représentant de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- Les angles orientés $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ sont dits opposés.

1.3. Orientation du plan

Cercle orienté

Le déplacement d'un véhicule autour d'un rond-point donne l'idée de deux sens de parcours sur tout cercle du plan.
Sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours.
Sur la figure 1, les deux cercles sont orientés dans le même sens. Sur la figure 2, ils sont orientés en sens contraires.

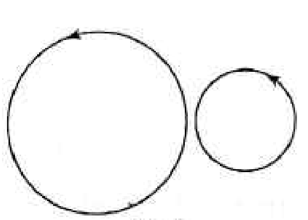


fig. 1

Cercles orientés dans le même sens

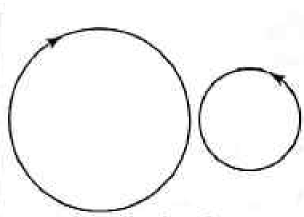


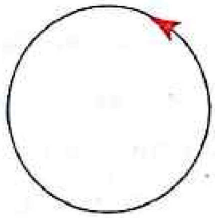
fig. 2

Cercles orientés en sens contraires

Plan orienté

Orienter le plan, c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens.
Ce sens est appelé sens direct (ou positif, ou trigonométrique). Le sens contraire est appelé sens indirect (ou négatif ou rétrograde).
On choisit en général comme sens direct le sens indiqué sur la figure ci-contre : le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Il en sera ainsi dans la suite de ce cours.



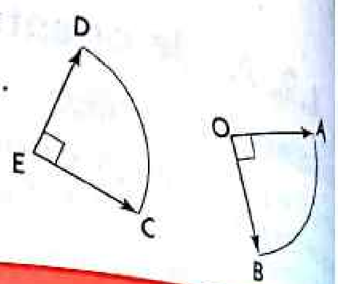
Sens inverse de celui des aiguilles d'une montre

Repère orthonormé direct

Sur la figure codée ci-contre, il y a deux angles orientés droits opposés .

$(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED})$, $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ sont des représentants de l'angle droit direct.

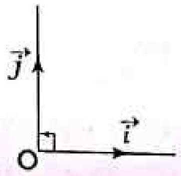
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC})$ sont des représentants de l'angle droit indirect.



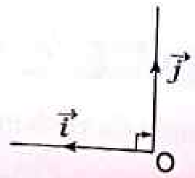
Définitions

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct si l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ est l'angle droit direct.



Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est indirect si l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ est l'angle droit indirect.



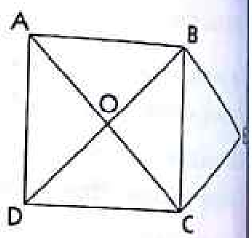
Exemple

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré inscriptible dans le cercle de centre O de rayon 1. E est le symétrique de O par rapport à (BC).

Les repères orthonormés (O,B,A), $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$, (E,B,C) sont directs.

Les repères orthonormés $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, (O,D,A), (C,O,E) sont indirects.

Trouver deux autres repères orthonormés directs et deux autres repères orthonormés indirects sur cette figure.



1.4. Mesure principale d'un angle orienté

Définition

On verra en classe de première que l'on peut définir plusieurs mesures pour un même angle orienté. En classe de seconde nous allons définir l'une de ces mesures appelée mesure principale.

Définition

Soit $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ un angle orienté.

Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O.

La mesure principale en radian de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$, notée Mes $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$, est définie par :

- **si $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ est l'angle nul, Mes $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})} = 0$;**
- **si $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ est l'angle plat, Mes $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})} = \pi$;**
- **si $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ n'est ni nul ni plat,**

  Mes $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ = mes $\widehat{XOY}$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens direct (fig. 1) ;

  Mes $\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}$ = – mes $\widehat{XOY}$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens indirect (fig. 2).

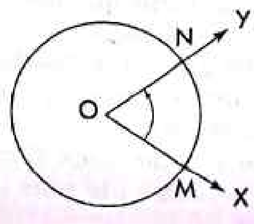


fig. 1

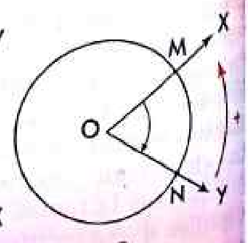


fig. 2

Remarque

Un triangle ABC est dit de sens direct si, sur le cercle circonscrit parcouru dans le sens direct à partir de A, on rencontre d'abord B puis C.
De même un polygone convexe inscriptible ABCDE est dit de sens direct si, sur le cercle circonscrit parcouru dans le sens direct à partir de A, on rencontre dans l'ordre B puis C, D, E.

Egalité d'angles orientés

Des angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.

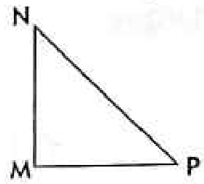
C'est un conséquence immédiate de la définition.

Remarques

- *La mesure principale de l'angle plat orienté est π (et non $-\pi$).*
  Par conséquent la mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
- *L'angle droit direct a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$. L'angle droit indirect a pour mesure principale $-\frac{\pi}{2}$.*
- *Si l'angle orienté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est différent de l'angle plat, alors $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\vec{v},\vec{u})} = -\,\mathrm{Mes}\,\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.*
- *On définit de manière analogue la mesure principale en degrés d'un angle orienté. On la note : $\mathrm{Mes}°\,\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.*

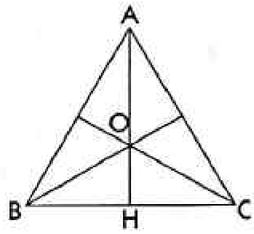
Exemples

- MNP est le triangle rectangle isocèle de sommet M représenté sur la figure.



On a : $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})} = -\frac{\pi}{2}$; $\mathrm{Mes}°\,\widehat{(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM})} = 45$;
$\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{MN})} = -\frac{\pi}{4}$.

- ABC est le triangle équilatéral représenté sur la figure.
Soit O son centre de gravité et H le pied de la hauteur issue de A.



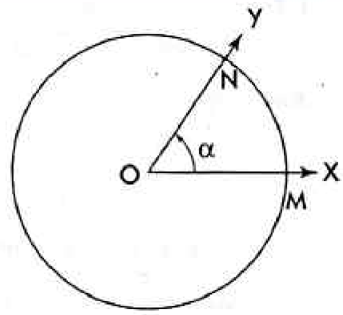
On a : $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = -\frac{\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})} = -\frac{\pi}{3}$;
$\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{AB})} = -\frac{\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HA})} = -\frac{\pi}{2}$; $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{6}$;
$\mathrm{Mes}°\,\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})} = -120$.

Propriété fondamentale

Propriété

Étant donné un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et une demi-droite [OX) , il existe une seule demi-droite [OY) telle que $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})} = \alpha$.

Démonstration



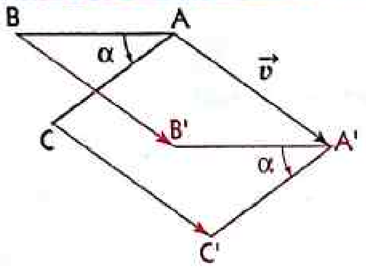
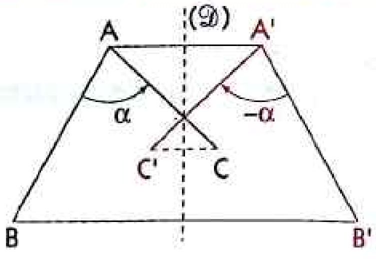
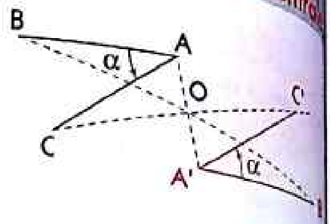
On trace un cercle de centre O. Soit M le point d'intersection de ce cercle avec la demi-droite [OX). D'après la définition, il existe un seul point N du cercle tel que $\mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})} = \alpha$. En effet :

- Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, N est l'unique point du cercle tel que mes $\widehat{MON} = \alpha$.
- Si $\alpha \in\ ]0\,;\pi[$, N est le point tel que l'arc $\overset{\frown}{MN}$ soit parcouru de M vers N dans le sens direct et mes $\widehat{MON} = \alpha$.
- Si $\alpha \in\ ]-\pi\,;0[$, N est le point tel que l'arc $\overset{\frown}{MN}$ soit parcouru de M vers N dans le sens indirect et mes $\widehat{MON} = -\alpha$.

La demi-droite cherchée est [ON).

Angle orienté et applications du plan

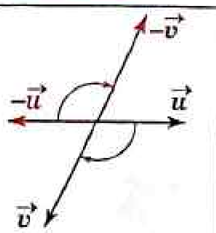
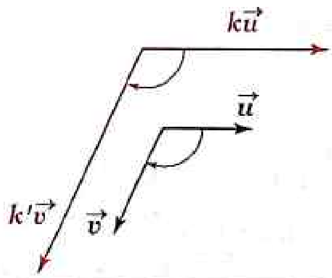
Soit A, B, C trois points non alignés, f une application du plan dans lui-même, A', B', C', les images respectives de A, B, C par f. Nous admettrons les résultats suivants :

f est une translation	f est une symétrie orthogonale	f est une symétrie centrale
		
$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont égaux.	$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont opposés.	$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont égaux.

On peut retenir ces propriétés sous la forme :

- La symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.
- La translation et la symétrie centrale conservent les angles orientés.

Remarque

	
$(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$	$k > 0$ et $k' > 0$: $(\widehat{k\vec{u}, k'\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

En particulier, pour tout nombre reél k non nul : $(\widehat{k\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Exercices

1.a À l'aide d'un rapporteur dessiner un angle de 1 radian.

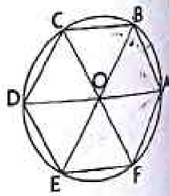
1.b Compléter le tableau de correspondance :

Degrés	60	75	36				
Radians				$\frac{\pi}{4}$	1,5	2	$\frac{\pi}{7}$

1.c On considère un triangle isocèle ABC tel que $Mes°(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 100$. Calculer les sommes :

- $Mes°(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + Mes°(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) + Mes°(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$;
- $Mes°(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + Mes°(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + Mes°(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

1.d Dans le plan orienté, on donne l'hexagone régulier ABCDEF de centre O représenté ci-contre.



Donner les mesures en radians des angles : $\widehat{ABC}$, $\widehat{AEC}$, $\widehat{DBA}$, $\widehat{BDF}$.

Donner les mesures principales en radians des angles orientés :

$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ED}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{BA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}})$; $(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OF}})$.

2 Trigonométrie

2.1. Cercle trigonométrique

Définition

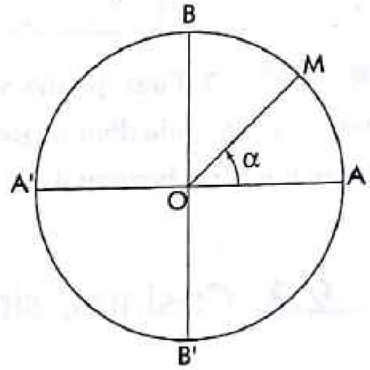
Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O, A, B), on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O de rayon 1.

À tout point M du cercle trigonométrique, on associe le nombre α mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

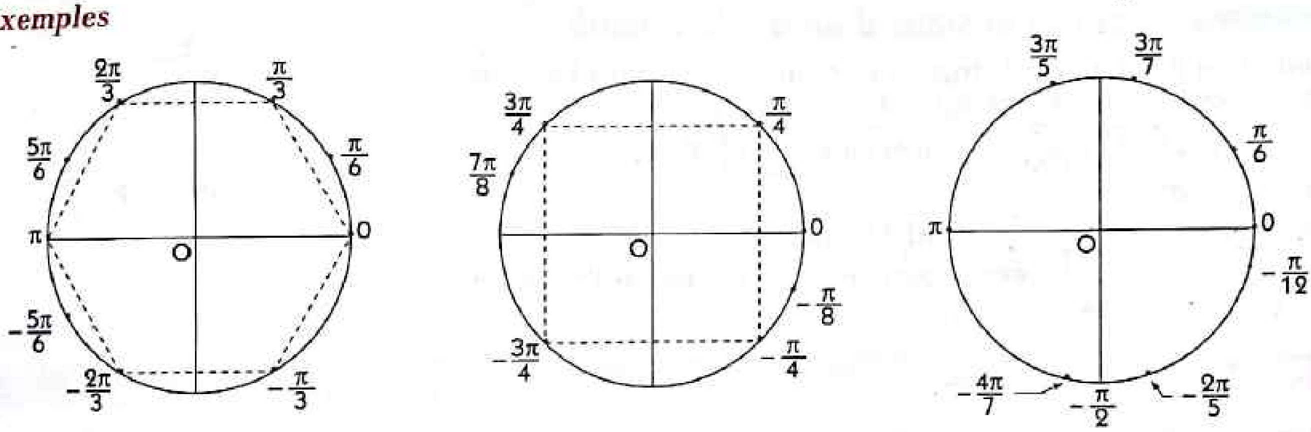
Réciproquement, à tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

M est appelé image de α sur le cercle trigonométrique.

On convient généralement de nommer A' l'image de π et B' celle de $-\frac{\pi}{2}$.

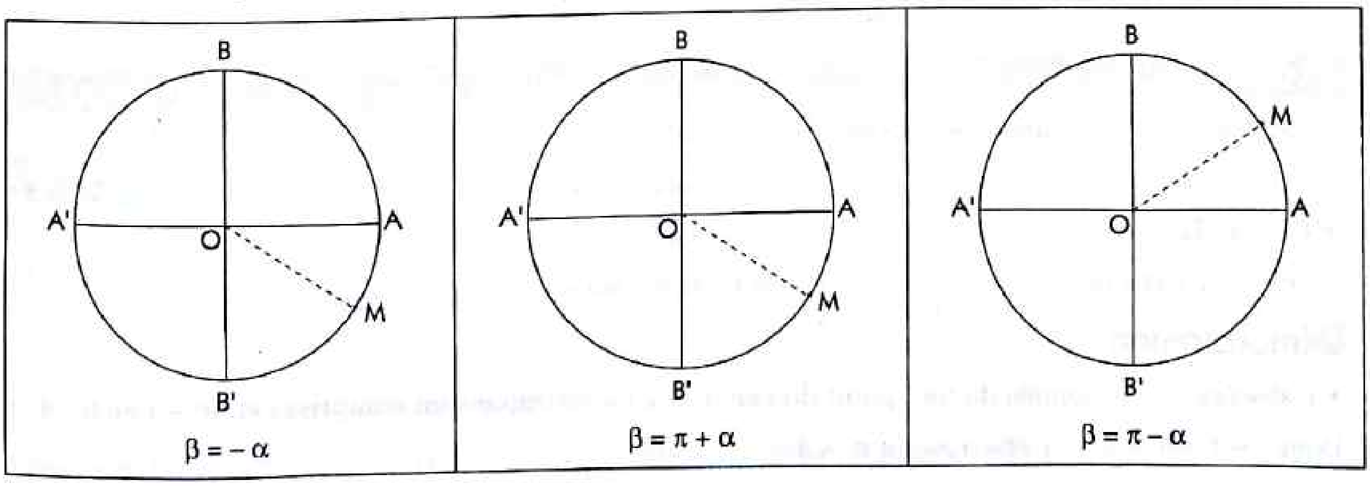


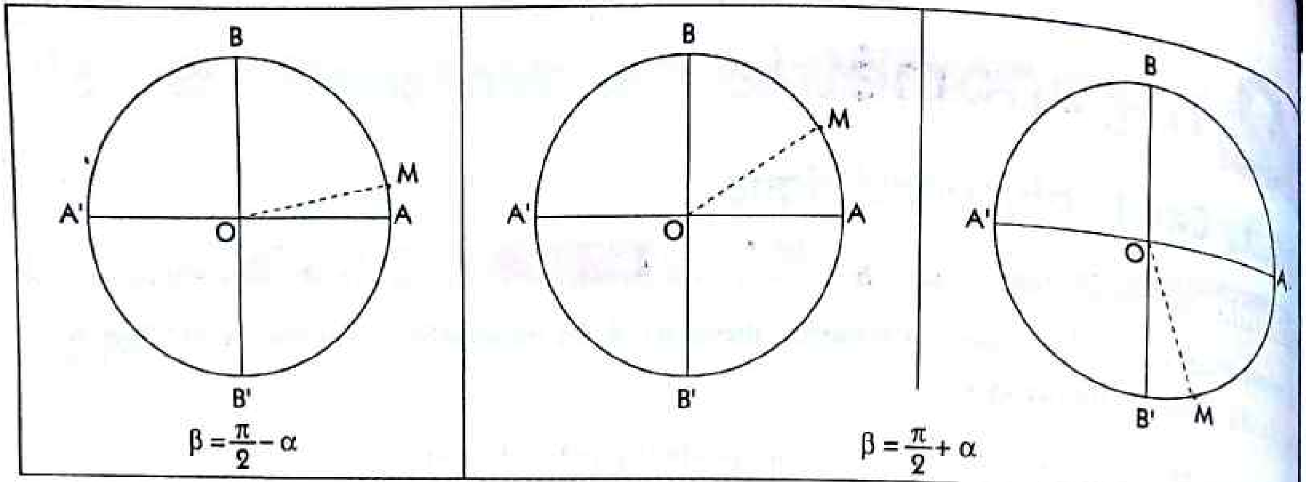
Exemples



2.2. Utilisations du cercle trigonométrique

1. Sur les figures ci-dessous, le point M est l'image du nombre réel α appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$. Dans chaque cas, placer sur la figure l'image du nombre β indiqué.





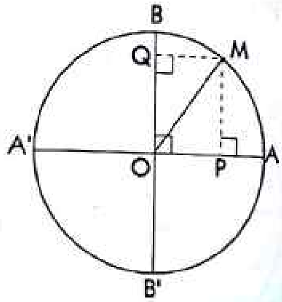
$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\qquad$ $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$

2. Pour quelles valeurs de α appartenant à $]-\pi\ ;\ \pi]$, le nombre β tel que $\beta = \pi + \alpha$ est-il la mesure principale d'un angle orienté ?

Même question lorsque $\beta = \pi - \alpha$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$; $\beta = -\alpha$.

2.3. Cosinus, sinus d'un angle

Cosinus et sinus d'un angle orienté



Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc $\widehat{AB}$.
Dans le triangle OMP rectangle en P, on a vu que :

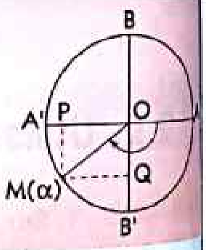
$$\cos\widehat{AOM} = \frac{OP}{OM} \quad \text{et} \quad \sin\widehat{AOM} = \frac{MP}{OM} = \frac{OQ}{OM}.$$

Or $\qquad OM = 1.$

Donc : $\cos\widehat{AOM} = OP$ et $\sin\widehat{AOM} = OQ$.

$\cos\widehat{AOM}$ et $\sin\widehat{AOM}$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère (O, A, B) .

Définition



Un angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ de mesure principale α étant donné, soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

Soit P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AA') et (BB').

Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de sa mesure principale α sont définis par : $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.

Dans le repère (O, A, B) on a : $M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.

Propriétés

- **Quel que soit le nombre réel α dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$:**

  $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$; $\quad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$; $\quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

- **De plus si $\alpha \neq \pi$:**

  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$

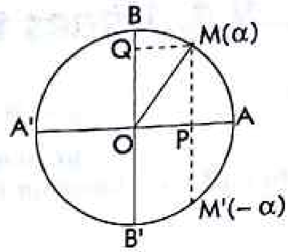
Démonstration

- L'abscisse et l'ordonnée de tout point du cercle trigonométrique sont comprises entre -1 et 1.

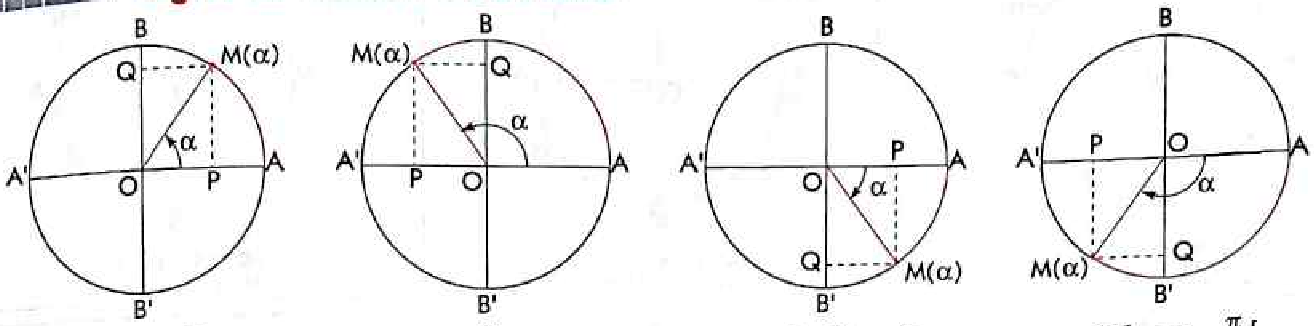
Donc : $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

• $M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$. Donc $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ est le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
D'où : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

• Les images de α et $-\alpha$ sont symétriques par rapport à (AA').
Donc : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.



Signe du cosinus et du sinus



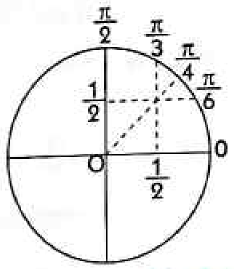
$\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$

$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$: $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$: $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$

$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$

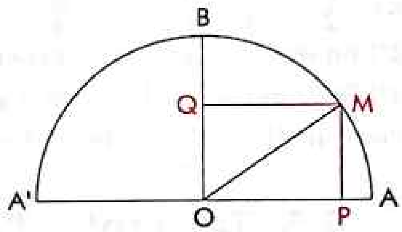
Cosinus et sinus d'angles remarquables



Mesure principale	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cosinus et sinus d'un angle non orienté

À tout angle non orienté, de mesure α appartenant à $[0\,;\,\pi]$, on peut associer un point M du demi-cercle trigonométrique $\overset{\frown}{AA'}$ contenant B.

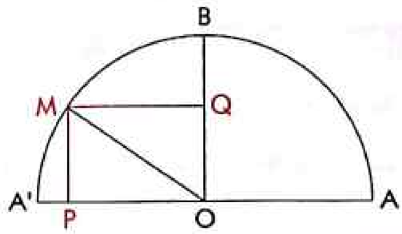


1er cas : $\widehat{AOM}$ est aigu.

$\cos\widehat{AOM} = \dfrac{OP}{OM} = OP = \overline{OP}$; $\sin\widehat{AOM} = \dfrac{MP}{OM} = OQ = \overline{OQ}$.

2^e cas : $\widehat{AOM}$ est obtus.
Par définition et extension, on pose :

$\cos\widehat{AOM} = \overline{OP} = -OP$; $\sin\widehat{AOM} = \overline{OQ} = OQ$.



3^e cas : $\widehat{AOM}$ est droit.

$\cos\widehat{AOM} = 0$; $\sin\widehat{AOM} = 1$.

Remarques

• *Le sinus d'un angle non orienté est toujours positif.*

• *$\cos\widehat{AOM} < 0 \Leftrightarrow \widehat{AOM}$ est un angle obtus.*
$\cos\widehat{AOM} > 0 \Leftrightarrow \widehat{AOM}$ est un angle aigu.
$\cos\widehat{AOM} = 0 \Leftrightarrow \widehat{AOM}$ est un angle droit.

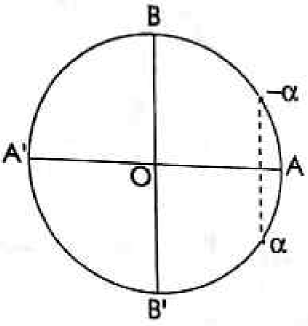
• *Deux angles supplémentaires ont même sinus et des cosinus opposés.*

• *On peut démontrer que : $\cos\widehat{AOM} = \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et $\sin\widehat{AOM} = |\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})|$.*

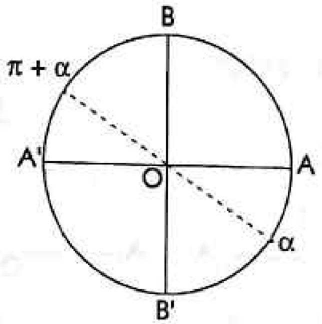
2.4. Lignes trigonométriques d'angles associés

1. Cosinus et sinus d'angles associés

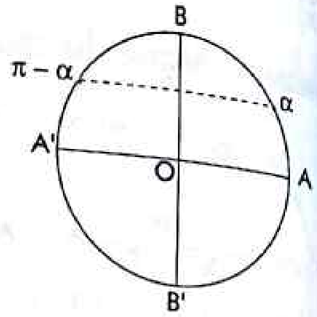
α est la mesure principale d'un angle orienté. Dans les cas suivants, exprimer les sinus et cosinus demandés en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.



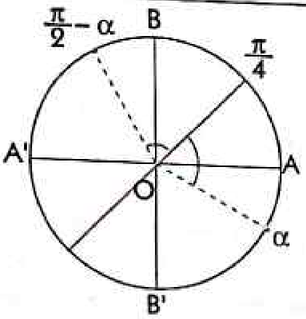
$\cos(-\alpha) = \dots$
$\sin(-\alpha) = \dots$



$\cos(\pi + \alpha) = \dots$
$\sin(\pi + \alpha) = \dots$

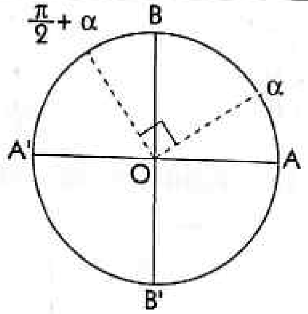


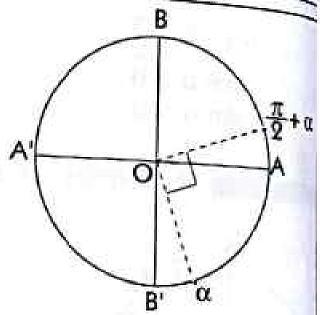
$\cos(\pi - \alpha) = \dots$
$\sin(\pi - \alpha) = \dots$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots$





$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dots$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dots$

2. Construction de points images

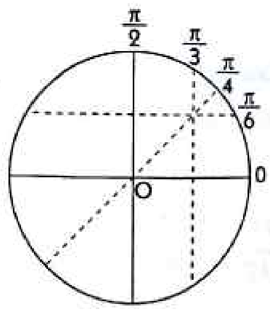
1°) Placer sur le cercle trigonométrique les points images des nombres suivants :

$\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\ ;\ -\frac{5\pi}{4}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}.$

2°) En déduire les sinus et cosinus de ces nombres.

3°) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\cos \alpha = 0$?

Pour quelles valeurs de α a-t-on $\sin \alpha = 0$?



2.5. Tangente d'un angle orienté

Définition

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ non droit de mesure principale α $(\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2})$.

La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par : $\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

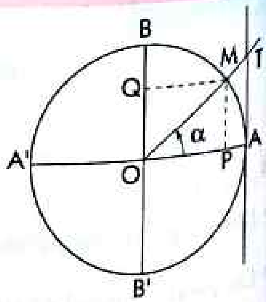
Interprétation géométrique

Soit un angle orienté non droit de mesure principale α.

Soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

La tangente en A au cercle trigonométrique et la droite (OM) sont sécantes en un point T. On munit la droite (AT) du repère $(A, \overrightarrow{OB})$.

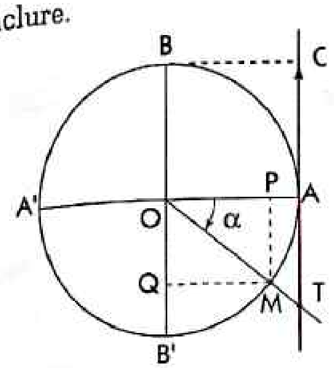
Démontrons que : $\tan \alpha = \overline{AT}$.



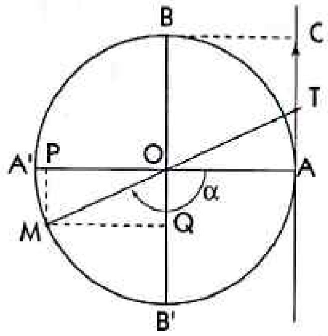
• Justifier que la tangente en A et la droite (OM) sont sécantes.

• Lorsque le nombre réel α appartient à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, démontrer que $\tan \alpha = AT$. (On utilisera le théorème de Thalès dans le triangle OAT). Conclure.

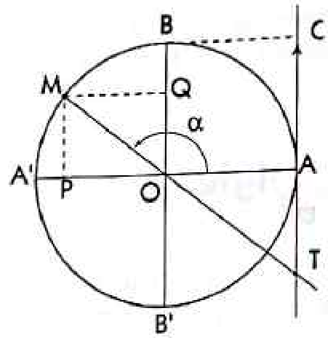
• Lorsque le nombre réel α n'appartient pas à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, à l'aide des trois figures ci-dessous, conclure.



$\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[$



$\alpha \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[$



$\alpha \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$

Propriété

Quel que soit le nombre nombre réel α de $]-\pi ; \pi]$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$: $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Démonstration guidée

Calculer $1 + \tan^2\alpha$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

2.6. Travaux dirigés

Tangentes d'angles associés

α est la mesure principale d'un angle orienté non droit.
Dans chacun des cas suivants, effectuer les calculs demandés en fonction de $\tan \alpha$.

$\alpha \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi[$: $\tan(-\alpha) = \dots$;

$\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup]0 ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi[$: $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dots$; $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi]$: $\tan(\pi - \alpha) = \dots$;

$\alpha \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2} ; 0]$: $\tan(\pi + \alpha) = \dots$; $\alpha \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup]0 ; \frac{\pi}{2}[$: $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots$.

Exercices

2.a En s'aidant éventuellement du rapporteur, placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux angles orientés dont les nombres suivants sont les mesures principales en radians :

2 ; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-1,4$; $-0,8$.

2.b Compléter le tableau des signes suivant :

α	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
signe de $\sin \alpha$					
signe de $\cos \alpha$					
signe de $\tan \alpha$					

2.c Compléter le tableau suivant en utilisant éventuellement la calculatrice.

α	$-120°$	$75°$	$0°$	$25°$
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				

2.d Combien existe-t-il d'angles orientés dont le cosinus est 0,6 ? Lire une valeur approchée de leurs mesures principales sur le cercle trigonométrique. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Combien existe-t-il d'angles orientés dont le sinus est $-0,4$?

Exercices

APPRENTISSAGE

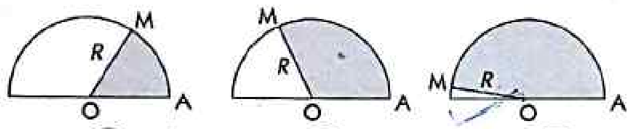
Pour tous les exercices ci-dessous le plan est orienté dans le sens direct.

Angles

1 Sur un cercle de centre O et de rayon 3 cm, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur π cm.
Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$?

2 Sur un cercle de centre O et de rayon π cm, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur 2π cm. Déterminer une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

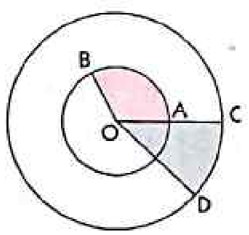
3 On donne les figures suivantes :



long. $\overset{\frown}{AM}$: R long. $\overset{\frown}{AM}$: $2R$ long. $\overset{\frown}{AM}$: $3R$

1. Dans chacun des trois cas, calculer mes $\widehat{AOM}$, le périmètre et l'aire du domaine grisé.
2. Construire dans chacun des trois cas un rectangle dont un des côtés a pour mesure R et ayant même périmètre et même aire que la partie grisée.

4 On donne deux cercles concentriques de rayon R et $2R$.



Quelle relation doivent vérifier les mesures en radian α et β des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ pour que les aires des domaines coloriés soient égales ?

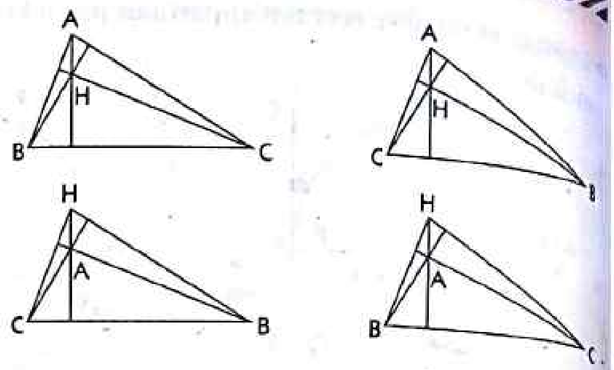
Construire ces domaines lorsque les aires sont égales à $\frac{\pi R^2}{2}$.

5 Soit ABC un triangle équilatéral direct. Donner les mesures principales en radian des angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}$.

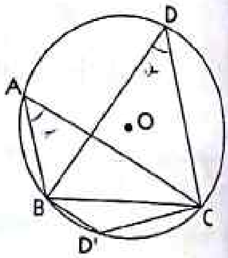
6 Soit un triangle ABC, H son orthocentre.

On pose : Mes $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \alpha$.
Dans chacun des quatre cas de figure indiqués, répondre aux questions suivantes :

1. Calculer Mes $\widehat{(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})}$.
2. Soit H' le symétrique de H par rapport à la droite (BC).
Calculer Mes $\widehat{(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})}$. En déduire que A, B, H', C sont cocycliques.



7 Sur la figure ci-contre, les points A, B, C, D et D' appartiennent à un même cercle de centre O.



On pose :

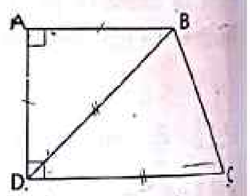
Mes $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \alpha$.

Exprimer en fonction de α :

Mes $\widehat{(\overrightarrow{D'B}, \overrightarrow{D'C})}$; Mes $\widehat{(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})}$; Mes $\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}$

8 ABC est un triangle équilatéral tel que :
Mes $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = -\frac{\pi}{3}$. Donner les mesures principales de $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.

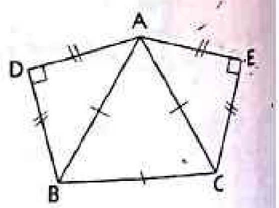
9 On considère le trapèze rectangle ci-contre.



Calculer les mesures principales des angles :

$\widehat{(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})}$; $\widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})}$;
$\widehat{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})}$; $\widehat{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB})}$.

10 On considère la figure ci-contre.



Calculer les mesures principales des angles :

$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$; $\widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})}$;
$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})}$; $\widehat{(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})}$; $\widehat{(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC})}$; $\widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB})}$.

11 Le plan étant étant muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on considère le point $A\binom{2}{1}$.

1. Construire le point B tel que :
$$AB = 2 \text{ et Mes } \widehat{(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{AB})} = -\frac{\pi}{6}.$$
2. Construire le point C tel que :
$$CB = 2 \text{ et Mes } \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} = \frac{2\pi}{3}.$$
3. Calculer Mes $\widehat{(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{BC})}$.

12 Soit ABC un triangle.

1. Démontrer que ce triangle est isocèle, de sommet principal A, si et seulement si :

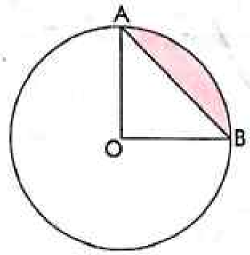
$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}).$$

2. Démontrer que ce triangle est équilatéral si et seulement si : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

13 Soit un cercle de centre O et de rayon 1. A et B sont deux points du cercle tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit un angle droit.

Calculer le périmètre du segment de cercle* limité par la corde [AB].

** On appelle segment de cercle, le domaine limité par la corde [AB] et l'arc $\overset{\frown}{AB}$.*



Trigonométrie

14 Combien existe-t-il d'angles orientés dont le cosinus est égal à 1 ? à $\frac{1}{2}$?

Combien existe-t-il d'angles orientés dont le sinus est égal à 1 ? à $\frac{1}{2}$?

15 Soit x un nombre de l'intervalle $]-\pi\ ;\ 0[$ tel que : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer la valeur de $\sin x$.

16 Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi[$, on définit les nombres A(x) et B(x) par :

$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$;

$B(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Mettre A(x) et B(x) sous la forme la plus simple possible.

17 Démontrer que :

$$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} = 0.$$

18 x étant la mesure principale d'un angle orienté, démontrer que :

$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$;
$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$;
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;
$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;
$\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$.

19 x étant la mesure principale d'un angle orienté non droit, démontrer que :
$\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

20 t étant la mesure principale d'un angle orienté, démontrer que :
$1 + \cos t \geqslant 0$;
$1 - \sin t \geqslant 0$;
$-1 \leqslant 3 + \cos t - 3\sin t \leqslant 7$.

21 Calculer $\cos x$, sachant que :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

22 Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{5}$ sachant que :

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

23 Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\tan\frac{\pi}{10}$ sachant que :

$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

24 Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que :

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

25 Calculer une valeur approchée de x sachant que : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

26 Calculer une valeur approchée de x sachant que : $\cos x = -\frac{2}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

27 Calculer une valeur approchée de x sachant que : $\tan x = \frac{1}{3}$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

28 t étant la mesure principale d'un angle orienté, résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x\cos t + y\sin t = 1 \\ x\sin t - y\cos t = 1. \end{cases}$$

29 Soit un nombre réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 2\alpha$.

H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B.

On pose : $a = AB$.

1. Démontrer que : $BC = 2a\sin\alpha$.
2. Démontrer que : $BI = BC\cos\alpha$.
3. Démontrer que : $BI = a\sin 2\alpha$.
4. En déduire que : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

30 Démontrer que : si ABC est un triangle rectangle,

alors $\begin{cases} \cos^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{C} = 1 \\ \sin^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = 2. \end{cases}$

APPROFONDISSEMENT

31 Soit un triangle ABC.

1. Quel est l'ensemble des points M tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$?
2. Quel est l'ensemble des points M tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$?

32 1. Soit A et B deux points distincts et α un nombre réel appartenant à $]0\ ;\ \pi[$.

a) Quel est le lieu des points M du plan tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha$?

b) Quel est le lieu des points N du plan tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = \alpha - \pi$?

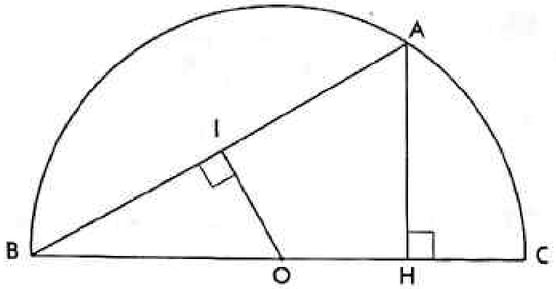
2. Soit A, B, C, D quatre points distincts non alignés. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$ pour que les quatre points A, B, C et D soient cocycliques.

33 On donne un triangle ABC de sens direct. Démontrer que :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi$.

Que vaut cette somme si le triangle ABC est indirect ?

34 Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre BC = 2, A un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I celui de O sur (AB).



α est la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

1. Démontrer que I est le milieu de [AB] et que OH = cos 2 α.
2. Exprimer AB en fonction de cos α.
3. Démontrer que : BH = $2\cos^2\alpha$ et OH = $2\cos^2\alpha - 1$.
4. En déduire que :

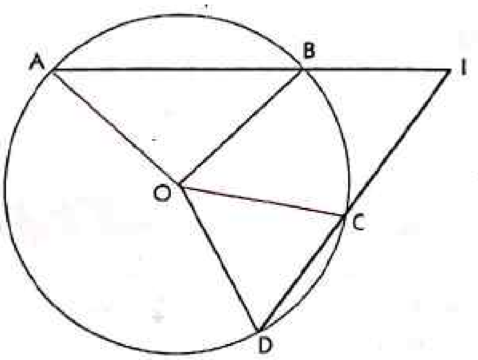
$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \ ;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \ .$$

5. Application : calculer $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

35 Pour la figure ci-dessous, on pose :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = 2\alpha$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}}) = 2\beta$.



Calculer Mes $(\widehat{\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}})$ en fonction de α et β.

36 La petite et la grande aiguille d'une horloge sont exactement superposées à midi juste.

Trouver à quelle heure (à la seconde près) ces deux aiguilles seront à nouveau exactement superposées. Combien de fois, entre midi et minuit, se trouvent-elles exactement superposées ?

37 Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. M est son image sur le cercle trigonométrique. On appelle A l'image de 0. T est le point d'intersection de (OM) et de la tangente en A au cercle trigonométrique.

1. Faire une figure.
2. Calculer l'aire du triangle OAT en fonction de α.
3. Calculer, en fonction de α, l'aire de la région du plan limitée par les segments [OA], [OM] et l'arc $\widehat{AM}$.
4. Démontrer que : $|\alpha| \leq |\tan \alpha|$.

38 Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. M est l'image de 2α sur le cercle trigonométrique. On appelle A l'image de 0, A' le symétrique de A par rapport à O.

1. Calculer, en fonction de α, la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M}})$.
2. Dans le triangle AA'M, calculer AM en fonction de sin $|\alpha|$.
3. Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{AM}$?
4. Démontrer que : $\sin|\alpha| = |\sin \alpha|$.
5. Démontrer que : $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$.

39 Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : BC = a et Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{2\pi}{5}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté [AC] en D. Faire une figure.

1. Démontrer que : AD = BD = a.
2. Démontrer que : AB = $2a\cos\frac{\pi}{5}$ et CD = $2a\cos\frac{2\pi}{5}$.
En déduire que : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.
3. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer BH en fonction de a de deux manières différentes et en déduire que : $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.
4. En remarquant que $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer : $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.
5. Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$.

40 Une piste circulaire de centre O a un rayon de 100 m. Un cycliste M part d'un point A de la piste à l'instant $t = 0$. Un autre cycliste N part au même moment d'un point B situé 100 m en avant. On suppose que les deux cyclistes M et N roulent respectivement à des vitesses v_1 et v_2 (exprimées en m/s).

1. Les deux cyclistes roulent dans le sens direct.

a) Calculer Mes $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ en fonction de t.

b) Le cycliste M passe au point B à l'instant $t = 10$ s et double N à l'instant $t = 60$ s. Quelles sont les vitesses respectives de M et N ?

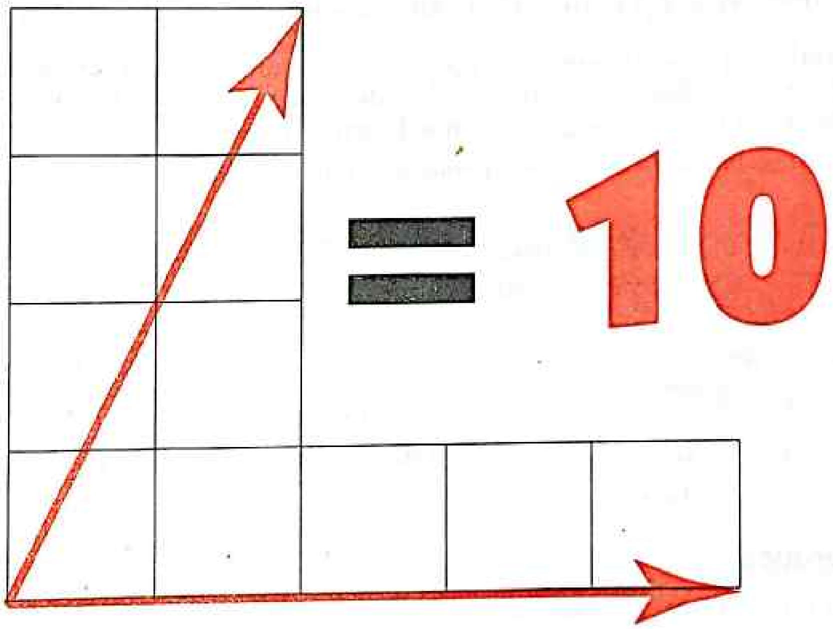
c) Au bout de combien de temps les cyclistes seront-ils diamétralement opposés sur la piste ?

2. v_1 et v_2 ont les valeurs trouvées à la première question. M roule dans le sens indirect et N dans le sens direct. Au bout de combien de temps vont-ils se croiser ?

4

Produit scalaire

Le produit scalaire est une « opération » qui à deux vecteurs du plan associe un nombre réel. Ses propriétés, simples et faciles à utiliser, en font un instrument privilégié du calcul vectoriel, notamment dans la détermination de distances et d'angles et la résolution de problèmes d'orthogonalité.



SOMMAIRE

1 Définitions et premières propriétés

1.1. Introduction

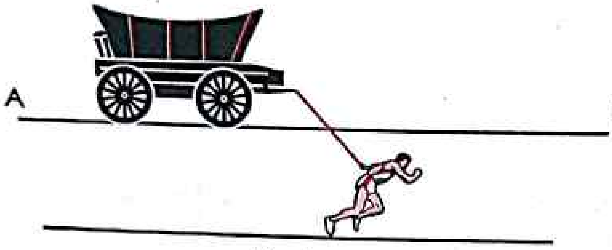


Fig. 1

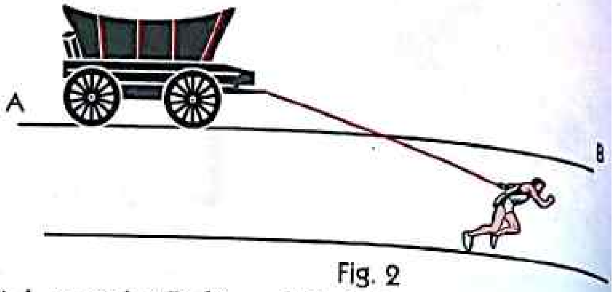
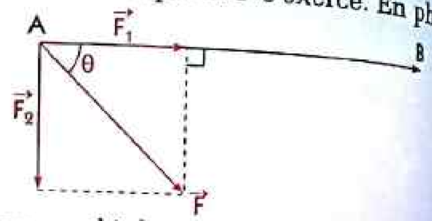


Fig. 2

L'énergie dépensée pour déplacer le wagonnet du point A au point B dépend de la longueur de [AB], de l'intensité de la force $\vec{F}$ exercée sur la corde, mais aussi de la direction dans laquelle $\vec{F}$ s'exerce. En physique, pour évaluer cette énergie, on introduit la notion de travail.

On décompose la force $\vec{F}$ en $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Par définition, le travail W de la force $\vec{F}$ est dans le cas de figure ci-contre : $W = \|\vec{F}_1\| \times AB = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\theta$.



Le travail est proportionnel à $\|\vec{F}_1\|$ ($\vec{F}_2$ n'apporte aucune contribution au déplacement). C'est pourquoi dans le cas de la figure 2, pour une force de même intensité, l'homme est plus efficace. Imaginez ce qui se passerait si l'homme tirait dans une direction perpendiculaire à (AB), parallèle à (AB).
L'objet de ce chapitre est de mathématiser cette situation.

1.2. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :
- **$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;**
- **$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.**

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

Remarques

- *Dans l'introduction, on a donc : $W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$.*
- *Dans la définition, le plan est supposé orienté. Cependant, comme l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ n'intervient que par son cosinus dont la valeur est indépendante de l'orientation du plan, on aurait pu définir le produit scalaire dans un plan non orienté.*

Exemples

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

- Si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
- Si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{5\pi}{6}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\sqrt{3}$.
- Si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{\pi}{3}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
- Si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriétés

(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

(2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

(3) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$;**
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.**

Démonstration

Les deux premières propriétés sont évidentes lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Supposons : $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

(1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.

Or : $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.

D'où : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

(2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \leq 1$.

D'où $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$,

et $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

(3) • $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mes } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 &\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \\ &\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi$.

$$\begin{aligned} \text{Mes } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi &\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \\ &\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

1.3. Carré scalaire

Définition

$\vec{u}.\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration

Si $\vec{u} = \vec{0}$, la propriété est évidente.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = \|\vec{u}\|^2$.

1.4. Interprétation géométrique

Remarque

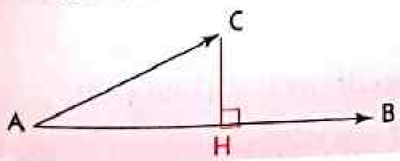
Pour tout point A et tous points B et C distincts de A : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$.

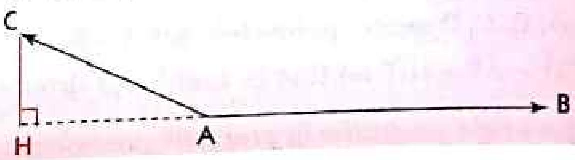
En effet : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$; $\|\overrightarrow{AC}\| = AC$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \cos \widehat{BAC}$.

Propriété

Pour tous points A, B, C tels que A ≠ B, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orhogonal de C sur (AB).





Scanned by CamScanner

Démonstration

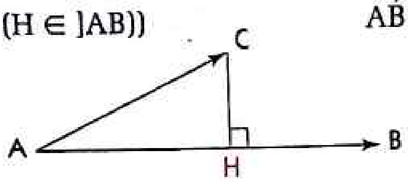
Si A = C, alors H = A = C. La propriété est vérifiée car $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\overline{AH} = 0$.

Supposons : $A \neq C$ ($A \neq B$ par hypothèse).

Envisageons trois cas de figure.

- $\widehat{BAC}$ est aigu ou nul.

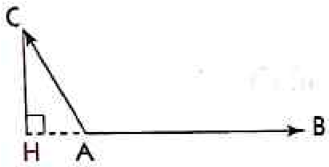
($H \in]AB)$)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \cos\widehat{BAC} \\ &= AB \times AC \cos\widehat{HAC} && \text{car } H \in]AB) \\ &= AB \times AH \\ &= \overline{AB} \times \overline{AH} && \text{car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens.}\end{aligned}$$

- $\widehat{BAC}$ est obtus ou plat.

($H \notin [AB)$)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \cos\widehat{BAC} \\ &= AB \times AC\,(-\cos\widehat{HAC}) && \text{car } \widehat{BAC} \text{ et } \widehat{HAC} \text{ sont supplémentaires} \\ &= -AB \times AC \cos\widehat{HAC} \\ &= -AB \times AH \\ &= \overline{AB} \times \overline{AH} && \text{car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires.}\end{aligned}$$

- $\widehat{BAC}$ est droit.

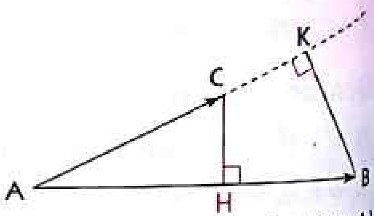
($H = A$)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \cos\widehat{BAC} \\ &= AB \times AC \times 0 && \text{car } \widehat{BAC} \text{ est droit, donc } \cos\widehat{BAC} = 0 \\ &= \overline{AB} \times \overline{AH} && \text{car } \overline{AH} = 0.\end{aligned}$$

Remarques

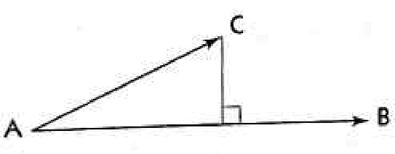
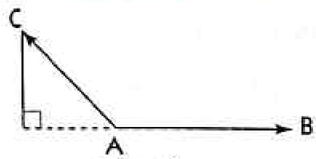
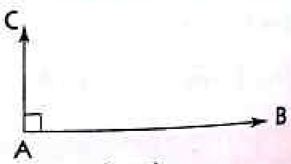
Soit A, B, C tels que : $A \neq C$ et $A \neq B$.

- *Puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, on peut aussi calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en projetant B orthogonalement sur (AC) :*
  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \overline{AK} \times \overline{AC}$,
  où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et
  K est le projeté orthogonal de B sur (AC).



- *$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ a le même signe que $\cos\widehat{BAC}$ et ne s'annule que si $\cos\widehat{BAC}$ s'annule (puisque $B \neq A$ et $C \neq A$).*

On a donc :

$\widehat{BAC}$ est aigu	$\widehat{BAC}$ est obtus	$\widehat{BAC}$ est droit
 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$	 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$	 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Propriété

Soit A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HH'}$ où H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).

Cette propriété généralise la propriété précédente.

Démonstration

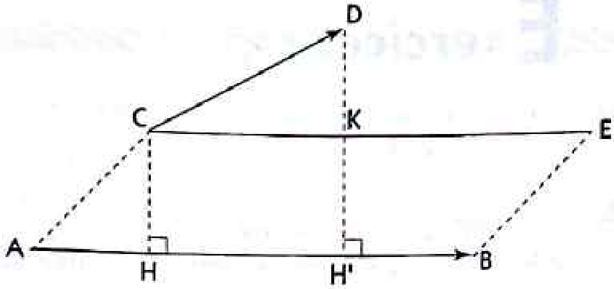
Soit E le point tel que : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.

Soit K le projeté orthogonal de D sur (CE).

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}$

$= \overline{CE} \times \overline{CK}$

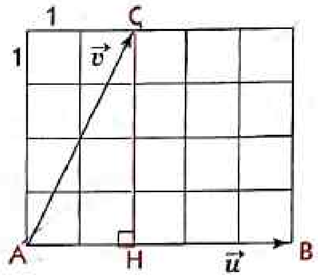
$= \overline{AB} \times \overline{HH'}$.



1.5. Travaux dirigés

1. On considère la figure ci-dessous c'est-à-dire celle de la première page de ce chapitre. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et une valeur approchée de Mes$(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$ à 10^{-2} près.

Solution



- $\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} = 5 \times 2 = 10$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

D'où : $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \dfrac{10}{5\, \|\vec{v}\|}$.

$\|\vec{v}\|^2 = AH^2 + HC^2 = 4 + 16 = 20$.

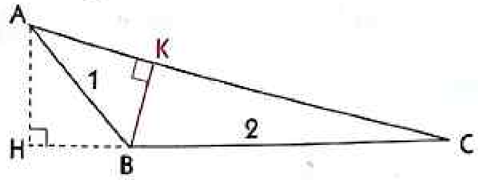
D'où : $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$ et $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

À l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique, on trouve mes $\widehat{BAC} \approx 1{,}11$. Mais, il y a deux angles orientés opposés ayant pour cosinus $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Compte tenu de la figure, on a : Mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}11$.

2. Soit ABC un triangle tel que : BC = 2 et BA = 1. Le pied H de la hauteur issue de A est tel que : $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Calculer les arrondis d'ordre 2 des mesures en degrés des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Solution guidée



- Justifier que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
- En déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\frac{4}{3}$.
- Démontrer de la même manière que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{16}{3}$.
- Soit K le projeté orthogonal de B sur (AC). Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overline{AC} + \overline{CK})\ \overline{AC}$.
- Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2 - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
- À l'aide du théorème de Pythagore, calculer : AH^2. En déduire que : $AC^2 = \frac{23}{3}$.
- En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{7}{3}$.
- En exprimant $\cos \widehat{A}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, AB et AC, vérifier que : mes $\widehat{A} \approx 32{,}57°$.
- Vérifier de la même façon que : mes $\widehat{B} \approx 131{,}81°$ et mes $\widehat{C} \approx 15{,}62°$.
- Vérifier les résultats sachant que la somme des mesures en degrés des angles d'un triangle est 180°.

Exercices

1.a Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ sachant que : $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 1$; $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{2\pi}{3}$.

1.b Soit ABC un triangle isocèle tel que : $AB = AC = 3$ et mes $\widehat{A} = 30°$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

1.c Soit $\vec{u}$ un vecteur donné de norme 1.
Déterminer tous les vecteurs $\vec{v}$ de norme 1 tels que : $\vec{u}.\vec{v} = 1$.

1.d ABC est un triangle équilatéral de côté a.
Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

1.e Soit un cercle $(\mathscr{C})$, A et B deux points dia tralement opposés de $(\mathscr{C})$ et M un point e rieur à $(\mathscr{C})$, n'appartenant pas à la droite (A Les droites (MA) et (MB) recoupent $(\mathscr{C})$ resp tivement en C et D. En calculant de d manières le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, dém trer que : $MA \times MC = MB \times MD$.

2 Propriétés du produit scalaire

2.1. Vecteurs orthogonaux

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Démonstration

Rappelons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un d'eux est nul.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, la propriété est évidente.

Supposons : $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \qquad \text{car } \|\vec{u}\| \neq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.
\end{aligned}$$

Conséquences

(1) **Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:**

$$(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

(2) **Soit les points A, B, C, D, avec $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.**

(3) **Soit les points A, B, M, avec $A \neq B$:**
M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration

Les propriétés (1) et (2) sont évidentes.

(3) Si M = A ou M = B, la propriété est évidente. Supposons : $M \neq A$ et $M \neq B$.

On sait que M appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement si (MA) et (MB) sont perpendiculaires, ce qui est équivalent à : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

2.2. Règles de calculs

Propriétés fondamentales

Définir une nouvelle « opération » dans l'ensemble des vecteurs du plan ne serait pas très utile si on ne pouvait l'utiliser conjointement avec celles que l'on connaît déjà : l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Les deux premières questions auxquelles on se doit donc de répondre sont les suivantes :

- Qu'advient-il du produit scalaire lorsqu'on multiplie l'un des vecteurs par un nombre réel ?
- Qu'advient-il du produit scalaire lorsqu'on remplace l'un des vecteurs par une somme de vecteurs ?

Dans les propriétés que nous allons énoncer ci-dessous, il est essentiel de faire la distinction entre :

- le produit de deux nombres réels a et b noté $a \times b$ ou ab ;
- le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel a noté $a\vec{u}$;
- le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ et tout nombre réel λ, on a :

(1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; (2) $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$;

(3) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}\,') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}\,'$; (4) $(\vec{u} + \vec{u}\,').\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\,'.\vec{v}$.

Notation

On notera simplement $\lambda\vec{u}.\vec{v}$ la valeur commune des trois expressions : $(\lambda\vec{u}).\vec{v}$; $\vec{u}.(\lambda\vec{v})$; $\lambda(\vec{u}.\vec{v})$.

Démonstration guidée

- Vérifier ces propriétés lorsque l'un des vecteurs est nul ou lorsque $\lambda = 0$.

Supposons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ et le nombre réel λ non nuls.

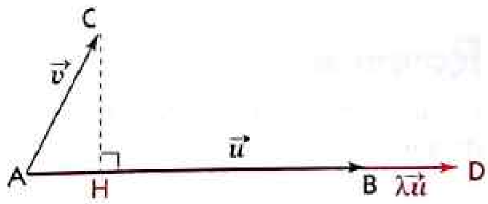
(1) Cette propriété a déjà été démontrée au paragraphe 1.2.

(2) Soit (A,B) un représentant de $\vec{u}$, (A,C) un représentant de $\vec{v}$ et (A,D) un représentant de $\lambda\vec{u}$.

- Démontrer que :

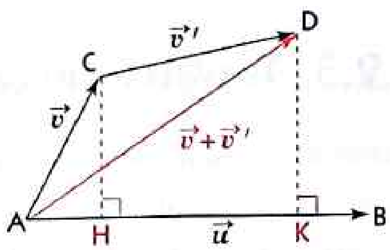
a) $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = (\lambda\overline{AB})\,\overline{AH}$;

b) $\lambda(\vec{u}.\vec{v}) = \lambda(\overline{AB} \times \overline{AH})$.



- Conclure.
- Pourquoi a-t-on : $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{v}).\vec{u}$?
- Pourquoi a-t-on : $(\lambda\vec{v}).\vec{u} = \lambda(\vec{v}.\vec{u})$?
- Conclure que : $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$.

(3) Soit (A,B) un représentant de $\vec{u}$, (A,C) un représentant de $\vec{v}$ et (C,D) un représentant de $\vec{v}\,'$.



- Démontrer que : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}\,') = \overline{AB}\,(\overline{AH} + \overline{HK})$.
- En déduire que : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}\,') = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
- Conclure.

(4) • Démontrer la propriété en utilisant les propriétés (1) et (3).

Conséquences

À partir des propriétés précédentes, il est possible de développer un grand nombre d'expressions. Voici celles que l'on rencontre le plus fréquemment.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$, on a :

(1) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}'+\vec{v}') = \vec{u}.\vec{u}' + \vec{u}.\vec{v}' + \vec{v}.\vec{u}' + \vec{v}.\vec{v}'$;

(2) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;

(3) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;

(4) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstrations

(1) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}'+\vec{v}') = \vec{u}.(\vec{u}'+\vec{v}') + \vec{v}.(\vec{u}'+\vec{v}')$ d'après (4) du paragraphe précédent

$= \vec{u}.\vec{u}' + \vec{u}.\vec{v}' + \vec{v}.\vec{u}' + \vec{v}.\vec{v}'$ d'après (3) du paragraphe précédent.

On démontre les autres à partir de celle-ci et des propriétés du paragraphe précédent.

Remarque

Les « règles de calcul » du produit scalaire ressemblent à celles de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
Cependant cette ressemblance a ses limites.
On sait que pour tous nombres réels a et b : $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
Or, on a déjà vu que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ n'implique pas que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ mais seulement $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Autre expression du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la propriété (2) ci-dessus :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.

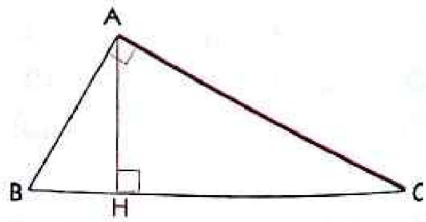
D'où : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Remarque

L'intérêt de cette formule est de fournir une expression du produit scalaire ne faisant intervenir que des normes.

2.3. Travaux dirigés

1. Soit ABC un triangle rectangle en A,
H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Démontrer que : $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$.



Solution

- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overline{BC} \times \overline{BH}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA^2$ car A est le projeté orthogonal de C sur (BA).

Or : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

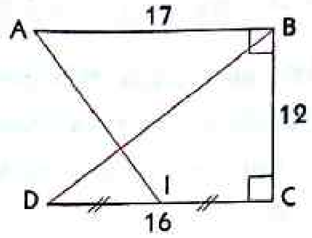
On a donc : $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$.

2. Dans la figure ci-contre :

- $AB = 17$; $BC = 12$; $CD = 16$;
- I est le milieu de [DC].

(AB) et (DC) sont perpendiculaires à (BC).

Démontrer que les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires.



Solution

L'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ fait apparaître deux vecteurs orthogonaux dont on connaît la norme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})\\ &= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}\\ &= BC^2 + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

car les projetés orthogonaux de A et I sur (BC) sont respectivement B et C.

Utilisons le même procédé pour calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} &= BC^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}).\overrightarrow{CD}\\ &= BC^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}\\ &= 12^2 - 17 \times 16 + 0 + \frac{16}{2} \times 16\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc : $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD}$. Les droites (AI) et (BD) sont bien perpendiculaires.

M Pour calculer des produits scalaires de la forme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, on a souvent intérêt à décomposer $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ à l'aide de la relation de Chasles en somme de vecteurs connus et de développer en utilisant les règles de calculs sur le produit scalaire.

Exercices

2.a On donne : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 2$ et Mes $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{4}$.
Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$.
En déduire les valeurs de :
$(\vec{u}+\vec{v})^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2$; $(2\vec{u}-3\vec{v})^2$; $(\vec{u}+2\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})$.

2.b Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

2.c Soit ABCD un carré, I le milieu de [BC] et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
Démontrer que (IA) ⊥ (IJ).

2.d Soit ABCD un parallélogramme.
Démontrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$.
Retrouver la propriété suivante : le parallélogramme ABCD est un losange si et seulement si (AC) ⊥ (BD).

2.e ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$.
1. Développer $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$.
2. Calculer BC.

2.f Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = 7$.
On pose : $\vec{i} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{j} = -3\vec{u} + \vec{v}$.
Démontrer que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan.

3 Relations métriques dans un triangle

3.1. Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

On sait que la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est caractéristique[1] d'un triangle rectangle en A.
La propriété suivante donne deux autres relations caractéristiques d'un triangle rectangle en A.

1. La relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est dite caractéristique d'un triangle rectangle en A car c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en A. (Les triangles rectangles en A sont les seuls triangles vérifiant cette relation.)

Propriété

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

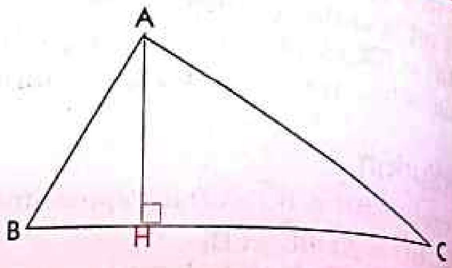
Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) **ABC est rectangle en A ;**

(2) $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$ **;**

(3) $\mathbf{BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}}$ **;**

(4) $\mathbf{AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}}$**.**



Démonstration guidée

On a démontré dans le premier cycle que : (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Dans le premier exercice du paragraphe 2.3, on a démontré que : (1) $\Rightarrow$ (3).

- Justifier que : (3) $\Rightarrow HA^2 + HB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
- En remarquant que $\overline{BH} \times \overline{BC} = \overline{BH}^2 + \overline{BH} \times \overline{HC}$, démontrer que : (3) $\Rightarrow$ (4).

Démontrons que : (4) $\Rightarrow$ (1).

- À l'aide d'un développement, justifier que : $\overrightarrow{HA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\,HA^2$.
- En remarquant que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$, démontrer que : $\overline{HB} \times \overline{HC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AH^2$.
- En déduire que : (4) $\Rightarrow$ (1).

On a démontré successivement que : (1) $\Rightarrow$ (3) ; (3) $\Rightarrow$ (4) ; (4) $\Rightarrow$ (1).

Ces trois implications entraînent les trois équivalences suivantes :

(1) $\Leftrightarrow$ (3) ; (3) $\Leftrightarrow$ (4) ; (4) $\Leftrightarrow$ (1).

L

Pour démontrer que trois propriétés (p), (q), (r) sont équivalentes, il suffit de démontrer les trois implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} (p) & \Rightarrow & (q) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & (r) & \end{array}$$

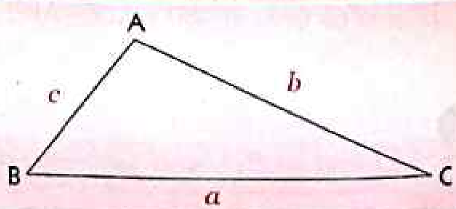
3.2. Théorème d'Al Kashi

Propriété

Soit ABC un triangle quelconque.

On pose : $\boldsymbol{a = BC \; ; \; b = AC \; ; \; c = AB}$.

On a : $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}}$.



Démonstration

$$\begin{aligned} a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\ &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}. \end{aligned}$$

Remarque

- *Ce résultat, connu sous le nom de théorème d'Al Kashi, généralise le théorème de Pythagore à un triangle quelconque. En effet, dans le cas d'un triangle rectangle en A, le terme 2bc cos $\widehat{A}$ s'annule et on retrouve : $a^2 = b^2 + c^2$.*
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc\cos\widehat{A}$. *On a donc :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.
- *De même, on a les relations :* $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$;

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

- *Ces relations permettent, entre autres, de déterminer les mesures des angles d'un triangle dont on connaît les longueurs des côtés.*

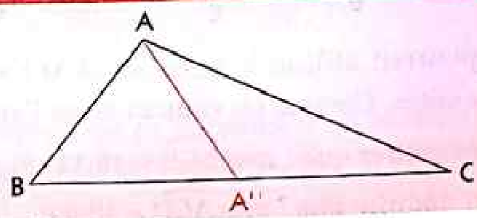
3.3. Théorème de la médiane

Propriété

Soit ABC un triangle quelconque et [AA'] la médiane relative à [BC]. On a :

(1) $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$;

(2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.



Démonstration guidée

(1) • En utilisant l'égalité $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2$, démontrer que :
$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2\overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{A'B}^2 + \overrightarrow{A'C}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$.

- Que peut-on dire de : $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$?
- Exprimer $A'B^2$ et $A'C^2$ en fonction de BC^2.
- Conclure.

(2) • Déduire de (1) que : $\frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.

- Conclure en utilisant la deuxième remarque du paragraphe 3.2.

M

Pour calculer AB^2, on utilise souvent les égalités : $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2$.
Pour développer AB^2, il est souvent utile d'introduire à l'aide de la relation de Chasles un point particulier. Un peu d'expérience permet de choisir habilement ce point.
On peut cependant retenir que lorsqu'une expression est du type $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$, on a intérêt à introduire le milieu I de [AB]. De même, lorsqu'une expression est du type $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ou $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$, on a intérêt à introduire le centre de gravité G du triangle ABC.

Remarques

- *Le triangle étant quelconque, les médianes [AA'], [BB'] et [CC'] jouent des rôles symétriques. On a donc aussi :*
  $2BB'^2 + \frac{AC^2}{2} = BA^2 + BC^2$; $2CC'^2 + \frac{AB^2}{2} = CA^2 + CB^2$.
- *Ces relations permettent de calculer les longueurs des médianes d'un triangle dont on connaît les longueurs des côtés.*

3.4. Travaux dirigés

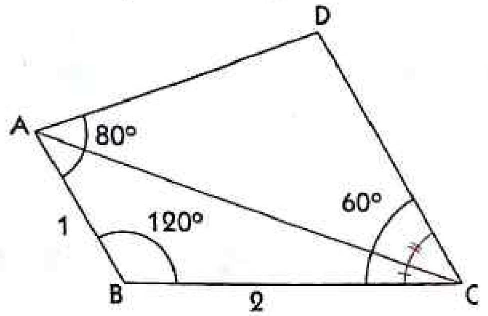
Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que : AB = 1 ; BC = 2 ; mes $\widehat{A}$ = 80° ; mes $\widehat{B}$ = 120° ; mes $\widehat{C}$ = 60°. Calculer les arrondis d'ordre 2 de DA et DC.

Solution guidée

La figure est constituée de « deux triangles accolés » : ABC et ADC.

Dans ABC, on connaît l'angle $\widehat{B}$ et ses deux côtés adjacents, on peut donc calculer AC en utilisant le théorème d'Al Kashi.

- Démontrer que : $AC = \sqrt{7}$.



Dans ADC, on connaît AC. On peut aussi déterminer l'angle $\widehat{D}$ opposé à [AC] car la somme des mesures des angles d'un quadrilatère convexe est 360°.

- Démontrer que : mes $\widehat{D} = 100°$.

Pour déterminer les autres côtés du triangle, il faudrait connaître un autre angle, par exemple $\widehat{ACD}$. Pour cela, il suffit de déterminer l'angle $\widehat{ACB}$.

On pourrait utiliser le théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC puisqu'on connaît la longueur des trois côtés. Comme on connaît aussi l'angle $\widehat{B}$, il est plus simple d'utiliser le théorème des sinus.

- Démontrer que : mes $\widehat{ACB} \approx 19{,}11°$.
- En déduire que : mes $\widehat{ACD} \approx 40{,}89°$.
- En utilisant le théorème des sinus dans le triangle ADC, vérifier que : $DA \approx 1{,}76$ et $DC \approx 1{,}69$.

M Pour déterminer des angles et des longueurs dans un polygone donné, il est souvent utile de le décomposer en triangles et d'utiliser dans chacun d'eux les relations métriques qui conviennent.

Exercices

3.a Soit ABC un triangle tel que :
$AB = AC = 4$ et $BC = 3$.
Calculer la longueur de chacune des médianes.

3.b Soit ABC un triangle tel que :
$AB = 4$; $AC = 7$; mes $\widehat{A} = 120°$. Calculer BC.
Déterminer les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Calculer la longueur de chacune des médianes.

3.c ABC est un triangle tel que : $AB = AC = 2BC$.
Déterminer les mesures des angles de ce triangle.

3.d Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].
On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Exprimer $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2$ en fonction de a, b, c.

4 Forme analytique du produit scalaire

4.1. Expression dans une base orthonormée

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On a : $\vec{u}.\vec{u}' = xx' + yy'$.

Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$\vec{u}.\vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j})$.

Développons à l'aide des propriétés du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u}' = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}^2$.

Puisque $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée : $\vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$; $\vec{j}^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$.

Il reste : $\vec{u}.\vec{u}' = xx' + yy'$.

Conséquence

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On a : $\begin{cases} x = \vec{u}.\vec{i} \\ y = \vec{u}.\vec{j}. \end{cases}$

Démonstration

On sait que : $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la propriété précédente, on a : $\vec{u}.\vec{i} = x \times 1 + y \times 0 = x$ et $\vec{u}.\vec{j} = x \times 0 + y \times 1 = y$.

Remarques

- *La formule $\vec{u}.\vec{u}' = xx' + yy'$ permet de retrouver facilement l'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée et l'expression de la distance dans un repère orthonormé :*

  soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

  soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- *Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.*

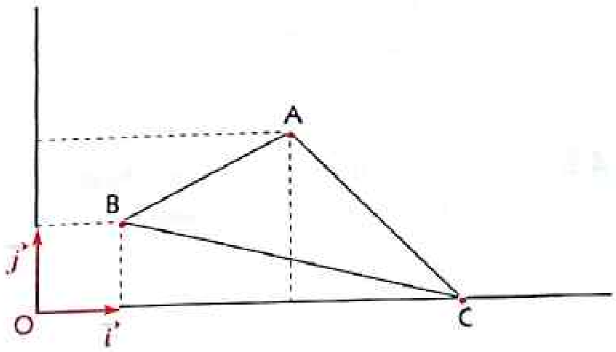
En effet : $\vec{u}.\vec{v} = a(-b) + ba = 0$.

4.2. Travaux dirigés

1. Dans un repère orthonormé on considère les points $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle ABC.

Solution



$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \cos \widehat{A} \iff \cos \widehat{A} = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB \times AC}$

- $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB}.\vec{AC} = -2 \Rightarrow \cos \widehat{A} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Il suffit d'utiliser une calculatrice ou une table trigonométrique pour déterminer mes $\widehat{A}$: mes $\widehat{A} \approx 108{,}4°$.

- On peut déterminer de la même façon mes $\widehat{B}$: $\vec{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{BA}.\vec{BC} = 7 \Rightarrow \cos \widehat{B} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

mes $\widehat{B} \approx 40{,}6°$.

- On pourrait encore déterminer de la même façon mes $\widehat{C}$ mais il est plus rapide d'utiliser que la somme des mesures en degré des angles d'un triangle est égale à 180 : mes $\widehat{C} \approx 180° - 108{,}4° - 40{,}6° \approx 31°$.

2. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

1°) Trouver les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$.

2°) Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{i}'$ de norme 1, colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$. Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{j}'$ de norme 1, colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens que $\vec{v}$.

3°) *a)* Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}', \vec{j}')$.

***b)* Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Trouver, en fonction de x et y, les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}', \vec{j}')$.**

Solution

1°) On remarque que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

2°) $\vec{i}' = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{j}' = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5 \Rightarrow \vec{i}'\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $\vec{j}'\begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}$.

3°) *a)* $(\vec{i}', \vec{j}')$ est une base orthonormée, donc :

$\vec{w}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}', \vec{j}')$ $\Leftrightarrow x' = \vec{w}.\vec{i}'$ et $y' = \vec{w}.\vec{j}'$ $\Leftrightarrow x' = \frac{14}{5}$ et $y' = \frac{23}{5}$.

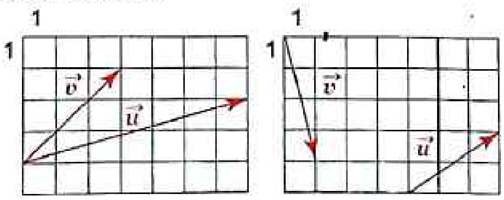
b) $\vec{w}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}', \vec{j}')$ $\Leftrightarrow x' = \vec{w}.\vec{i}'$ et $y' = \vec{w}.\vec{j}'$ $\Leftrightarrow x' = \dfrac{3x+4y}{5}$ et $y' = \dfrac{-4x+3y}{5}$.

Remarque

On aurait pu choisir pour $\vec{v}$ tout vecteur colinéaire à celui choisi dans la solution ; toutefois, quel que soit ce choix, le vecteur $\vec{j}'$ ne pouvait avoir comme coordonnées que $\begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix}$.

Exercices

4.a Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des deux cas de figure ci-dessous.



4.b Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points :

$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A. Déterminer les longueurs des trois côtés et les mesures en degrés des trois angles de ce triangle.

4.c Soit x un nombre réel. On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les deux points : $A\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer x pour que : mes $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

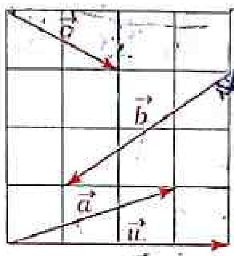
Utilisation des définitions

1 Calculer :

$\vec{u}.\vec{a}$;

$\vec{u}.\vec{b}$;

$\vec{u}.\vec{c}$.



2 Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sachant que :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$; $\text{Mes}\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2$.

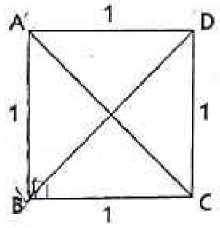
3 Calculer :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}$.



4 Soit A, B, C trois points tels que :
$AB = 2$; $AC = \sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3$.

1. Calculer mes $\widehat{BAC}$.
2. Construire C connaissant A et B.

5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On pose : $\alpha = \text{Mes}\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

1. Dans le cas où $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, calculer $\vec{u}.\vec{v}$.
2. Dans le cas où $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{4\pi}{9}$, $\|\vec{u}\| = 2$, calculer $\|\vec{v}\|$. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de $\|\vec{v}\|$ à 10^{-2} près.
3. Dans le cas où $\vec{u}.\vec{v} = 3$, $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, déterminer $|\alpha|$.

6 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre [AB], H un point de [AB], $(\mathscr{D})$ la perpendiculaire à (AB) en H.
Soit M un point de $(\mathscr{C})$.
La droite (BM) coupe $(\mathscr{D})$ en N.

1. Démontrer que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$.
2. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

7 Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : AB = 3 et BC = 4. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), K le projeté orhogonal de H sur (AC).
Calculer AH. Calculer $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes et en déduire la valeur de AK.

8 Soit [OX) et [OY) deux demi-droites telles que l'angle $\widehat{XOY}$ soit aigu et A un point de [OX) distinct de O. On considère :

- A' le projeté orthogonal de A sur (OY) ;
- B le projeté orthogonal de A' sur (OX) ;
- B' le projeté orthogonal de B sur (OY) ;
- C le projeté orthogonal de B' sur (OX).

1. Démontrer que : $\overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$.
3. En déduire que OB est la moyenne géométrique de OA et de OC.

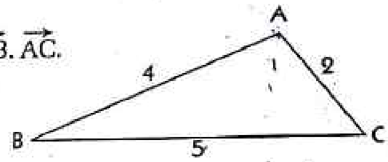
On appelle moyenne géométrique de deux nombres réels positifs a et b le nombre $\sqrt{ab}$.

9 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. On considère sur $(\mathscr{C})$ deux points A et B et leurs symétriques respectifs A' et B' par rapport à O.

1. Démontrer que :
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$.
2. Démontrer que les sommes $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ sont constantes lorsque A et B parcourent $(\mathscr{C})$.

Utilisation des propriétés

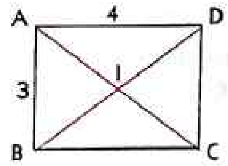
10 Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



11 Soit $A\binom{1}{2}$ et $B\binom{3}{1}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

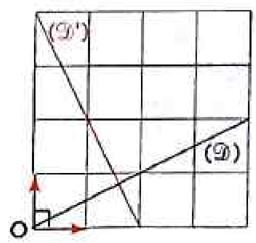
Démontrer que le triangle OAB est isocèle. Évaluer les angles de ce triangle.

12 ABCD est un rectangle.
Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.



13 Que peut-on dire des points A, B, C lorsque :
$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\ ?$$

14 Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles perpendiculaires ?



15 Que peut-on dire des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ lorsque : $\vec{u}.\vec{w} = \vec{v}.\vec{w}$?
Représenter trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifiant cette relation.

16 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = 2$ et Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$.

Calculer : $\vec{u}.(2\vec{u} - \vec{v})$; $(\vec{u} - 2\vec{v}).(3\vec{u} + \vec{v})$; $(3\vec{u} + \vec{v})^2$.

17 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.

Calculer : $(\vec{u} + \vec{v})^2$; $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$; $(2\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 3\vec{v})$.

18 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$;
$(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2$; Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.
Calculer $\|\vec{v}\|$.

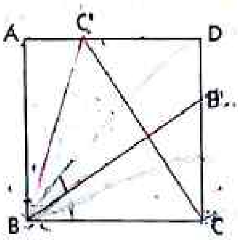
19 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\| - 6$ et $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 9$.
Calculer : $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

20 1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Démontrer que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$.
2. Déduire de la question précédente qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Démonstration de propriétés

21 Soit ABCD un carré, I le milieu de [AB] et J celui de [BC]. Démontrer que (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

22 Soit ABCD un carré.
On considère le point B' de [CD] et le point C' de [AD] tels que :
$CB' = \frac{2}{3}CD$ et $AC' = \frac{1}{3}AD$.



1. Les droites (BB') et (CC') sont-elles perpendiculaires ?
2. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de mes $\widehat{B'BC'}$.

23 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Les points A', B' et C' appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC] et [CA] et sont tels que :
$$AA' = BB' = CC' = \frac{1}{3}.$$
1. Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'}$.
Que peut-on dire de $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{C'B'}$?
2. Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

24 Soit un rectangle ABCD. On considère :
- sur la demi-droite [AD), le point B' tel que AB' = AB ;
- sur la demi-droite opposée à [AB), le point D' tel que AD' = AD.

1. Démontrer que (BD) ⊥ (B'D').
2. Que représente D pour le triangle BB'D' ?
En déduire que (DD') ⊥ (BB').

25 On donne un carré ABCD et un point M de la diagonale [BD]. On désigne par H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB) et (AD).
Démontrer que : (HK) ⊥ (CM).

26 Soit A et B deux points donnés du plan tels que AB = 3. On appelle O le milieu de [AB].
1. Pour tout point M du plan, calculer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de la distance OM.
2. En déduire le lieu des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4$.

27 On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points :
$$A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
1. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
2. Déterminer les longueurs de ses côtés et évaluer ses angles.
3. Vérifier que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

28 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs :
$$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}, \vec{v}'\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$
1. Calculer :
$3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}\|$; $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\|$; $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\|$.
2. Calculer :
$3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}'\|$; $\|3\vec{u} + 2\vec{v}'\|$; $\|3\vec{u} - 2\vec{v}'\|$.
3. D'une manière générale, quelles conditions doivent vérifier deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour que, quels que soient les nombres réels positifs a et b :
$$\|a\vec{u} + b\vec{v}\| = a\|\vec{u}\| + b\|\vec{v}\| \text{ ?}$$

Géométrie analytique

29 On considère un carré ABCD. Soit I un point de [AB], J un point de [BC], K un point de [CD], L un point de [DA] tels que : BI = CJ = DK = AL.
Le but de l'exercice est de chercher la nature du quadrilatère IJKL.
On pose AB = a et BI = x.
1. Calculer IJ en fonction de a et x. Calculer de même JK, KL et LI. Qu'en conclure en ce qui concerne la nature de IJKL ?
2. Calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IL}$.
En déduire que IJKL est un carré.

30 On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points :
$$A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}5/2\\4\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}-11/2\\0\end{pmatrix}.$$
Démontrer que ABCD est un losange.
Évaluer mes $\widehat{ABC}$ et mes $\widehat{BAD}$.

31 On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point A tel que : OA = 3 et Mes $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{3}$.
1. Calculer les coordonnées de A.
2. Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Relations métriques

32 Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Démontrer que si ABC est rectangle en A, alors :
$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}.$$

33 Soit ABCD un parallélogramme.
1. Démontrer que : $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$.
Énoncer ce résultat sous forme d'un théorème concernant les parallélogrammes.
2. On donne : $AB = 4$, $AD = 2$, $BD = 5$.
Calculer AC, puis les mesures en degrés des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$.

34 Soit ABC un triangle, I le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de A sur (BC).
1. Démontrer que : $AC^2 - AB^2 = 2\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI}$.
2. En déduire que : $AC^2 - AB^2 = -2\ \overline{BC} \times \overline{IH}$.

35 Soit ABC un triangle isocèle en A et M un point du côté [BC].
Démontrer que $AM^2 - AB^2 = \overline{MB} \times \overline{MC}$.

36 Soit ABC un triangle tel que : mes $\widehat{A} = 60°$; $AC = 3$; $AB = 5$.
On appelle R le rayon de son cercle circonscrit et S l'aire de ABC.
Déterminer BC, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, R et S.

37 Soit ABC un triangle. On appelle S son aire.
On pose : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$.
On sait que: mes $\widehat{A} = 45°$; $b = 3$ et $S = 3$. Déterminer la longueur de chacun des côtés et les angles de ce triangle.

38 Pour déterminer la distance entre deux poteaux M et N, on s'est placé en deux points A et B distants de 20 m tels que M et N soient situés dans un même demi-plan de frontière (AB). À l'aide d'un instrument de visée, on a déterminé les mesures en degrés des angles suivants :
mes $\widehat{MAN} = 50°$; mes $\widehat{NAB} = 45°$;
mes $\widehat{MBN} = 40°$ et mes $\widehat{MBA} = 30°$.
1. Construire la figure *(on s'aidera d'un rapporteur)*.
2. Pour calculer MN, on peut procéder comme suit :
a) calculer AM dans le triangle AMB ;
b) calculer AN dans le triangle ANB ;
c) calculer la distance MN dans le triangle AMN.

APPROFONDISSEMENT

39 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
1. Démontrer que si $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
2. Démontrer que si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors $\vec{w} = \vec{0}$. *(On pourra remarquer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$ et calculer $\vec{w}^2$.)*
3. ***Application***
Soit ABC un triangle. Déterminer les points M tels que :
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0.$$
Lorsque $M \neq A$, que représente M pour le triangle ABC ?

40 On considère un triangle ABC et M un point quelconque.
1. Démontrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Soit H le point d'intersection de deux hauteurs. Démontrer en utilisant la première question que H appartient aussi à la troisième hauteur.

41 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre [AB], C un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B. À tout point M distinct de A, on associe le point d'intersection N de (AM) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.
1. Démontrer en utilisant plusieurs fois l'interprétation géométrique du produit scalaire que :
$$\overline{AM}\ \overline{AN} = AC^2.$$
2. Réciproquement, soit M un point du plan distinct de A tel que : $\overline{AM}\ \overline{AN} = AC^2$. M appartient-il à $(\mathscr{C})$?

42 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque du plan.
1. Soit [IJ] un diamètre de $(\mathscr{C})$. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ ne dépend pas du diamètre [IJ] choisi.
2. Une droite passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points P et Q. Soit P' le symétrique de P par rapport à O.
Démontrer que : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ reste constant lorsque P décrit $(\mathscr{C})$.

43 Une droite $(\mathscr{D})$ coupe un cercle $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. Une autre droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ coupe $(\mathscr{D})$ en I et $(\mathscr{C})$ en deux points C et D.
Démontrer que la médiane issue de I du triangle AIC est la hauteur issue de I du triangle BID et réciproquement.
(On pourra utiliser la 3° question de l'exercice n° 42.)

44 ABC est un triangle rectangle en A. Soit [AH] la hauteur relative au côté [BC], M et P, les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC) respectivement.
Démontrer que : $BM^2 + CP^2 + 3AH^2 = BC^2$.

45 Dans un triangle ABC, on considère les milieux respectifs I et J de [BC] et [AC]. On pose : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.
Démontrer que : $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$.

46 On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R. Soit M un point intérieur à $(\mathscr{C})$, (Δ) une droite passant par M. (Δ) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. La droite (Δ') perpendiculaire en M à (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points C et D. On désigne par H et K les milieux respectifs de [AB] et [CD] et on pose : $d = OM$.
1. Calculer en fonction de d le nombre réel :
$$OH^2 + OK^2.$$
2. En utilisant le théorème de la médiane dans les triangles AOB et COD, calculer en fonction de d et R le nombre réel : $AB^2 + CD^2$.
3. Calculer, en fonction de R, le nombre réel :
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

47 **Droite d'Euler**
Soit ABC un triangle. On considère A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Soit H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. Démontrer que :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$

$= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{OA'}$.

En déduire que le vecteur $3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2. Démontrer que le vecteur $3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CA}$.

3. Démontrer que : $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. En déduire que O, G et H sont alignés *(la droite passant par O, G et H est appelée droite d'Euler)*.

Démontrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$.

48 On donne un triangle ABC et le point A' milieu du côté [BC].

1. Démontrer que :

$AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$.

2. En déduire l'équivalence des trois énoncés suivants :

a) le triangle ABC est isocèle en A ;

b) A' est le projeté orthogonal de A sur (BC) ;

c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$.

49 On considère un triangle ABC. On construit le carré ABFE situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C et le carré ACGD situé dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B.

1. Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BAD}$.

2. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$.

3. Soit M le milieu de [BC]. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{ED}$. En déduire que la médiane [AM] du triangle ABC est hauteur du triangle AED.

4. Démontrer que les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires.

5. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

6. Démontrer que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires.

50 On se propose de démontrer que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

1. Soit ABCD un quadrilatère. On considère le point E tel que BCDE soit un parallélogramme.

Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = AE^2$.

2. Démontrer que :

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + AD^2 + BC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - 2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

$AC^2 + BD^2 = 2CD^2 + CB^2 + AD^2 - 2\,\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - 2\,\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$.

En déduire que :

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$.

3. Déduire des questions précédentes que :

$BD^2 + AC^2 \leqslant AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$. Conclure.

4. Peut-on avoir

$BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$?

Énoncer le résultat sous forme de théorème.

51 On considère un triangle ABC et (Δ) une droite passant par le sommet A.

- B' est le projeté orthogonal de B sur (Δ).
- C' est le projeté orthogonal de C sur (Δ).
- B'' est le projeté orthogonal de B' sur (AC).
- C'' est le projeté orthogonal de C' sur (AB).
- (B'B'') et (C'C'') sont sécantes en I.

Le but du problème est de démontrer que (AI) est perpendiculaire à (BC).

1. Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}$.

2. Démontrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'}$.

Conclure.

52 On considère un triangle ABC tel que $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$.

1. Démontrer qu'un point M est sur la bissectrice de $\widehat{A}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM}.\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

2. [AA'] est la médiane relative à [BC].

Démontrer que A' est sur la bissectrice de $\widehat{A}$ si et seulement si $b = c$.

53 **Formule de Héron d'Alexandrie.**

Soit ABC un triangle.

On pose : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$.

On appelle p son demi-périmètre et S son aire.

On se propose de calculer S en fonction de a, b et c.

1. Démontrer que $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$.

En déduire $\sin^2\widehat{A}$ en fonction de a, b, c.

2. Démontrer la formule de Héron d'Alexandrie :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

3. On appelle r le rayon du cercle inscrit dans ABC.

a) Démontrer que $S = pr$.

b) En déduire que $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

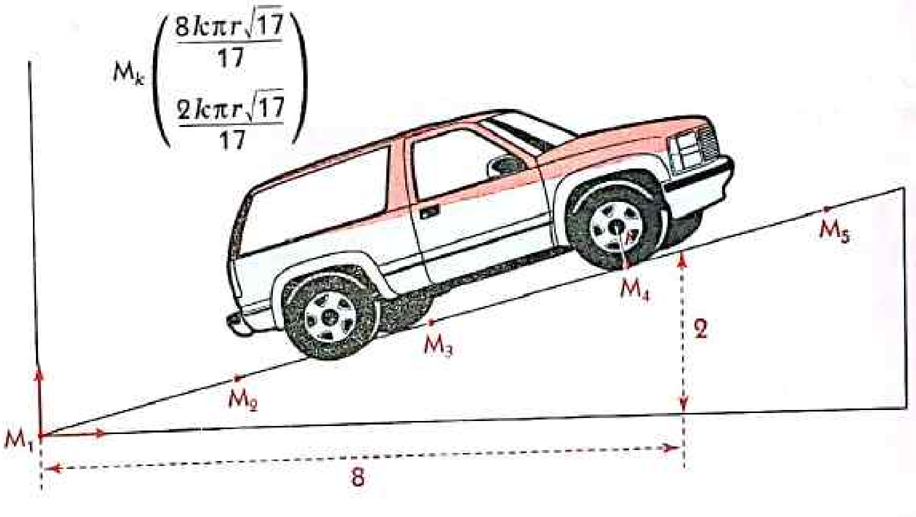
c) On appelle R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Calculer R en fonction de a, b, c.

5

Droites et cercles dans le plan

En géométrie plane, le cercle et la droite jouent un rôle privilégié. Nous allons, dans ce chapitre, compléter leur étude. Nous introduirons notamment deux notions utiles :

– les représentations paramétriques de droites ;
– les équations cartésiennes de cercles.



SOMMAIRE

1 Droites

1.1. Vecteur directeur et vecteur normal

Utilisation d'un vecteur directeur d'une droite

Propriétés

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites ayant respectivement $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ pour vecteurs directeurs.

On a les propriétés suivantes :

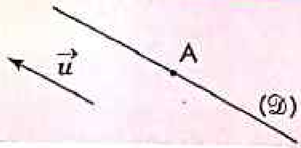
(1) $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}') \iff \vec{u}$ **et** $\vec{u}\,'$ **colinéaires ;**

(2) $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \iff \vec{u} \perp \vec{u}\,'$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ayant respectivement pour directions celles de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, ces propriétés sont évidentes.

Propriété

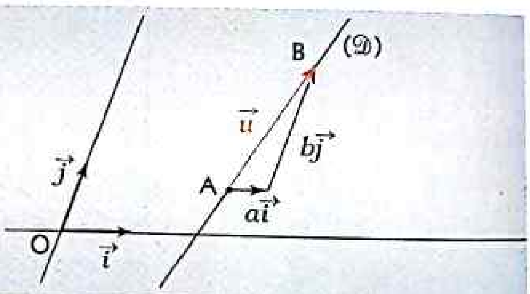
Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$ non nul,
il existe une et une seule droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.



La démonstration de cette propriété est immédiate puisqu'on sait qu'il existe une et une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.

M

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Pour construire la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et dirigée par $\vec{u}\binom{a}{b}$, on peut :
– placer le point A ;
– construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
La droite passant par A et B est alors la droite $(\mathscr{D})$.



Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de $(\mathscr{D})$.
Pour tout point M du plan, on a :

$$M \in (\mathscr{D}) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires.}$$

Démonstration

Soit B l'unique point du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

La droite (AB) est parallèle à $(\mathscr{D})$ et contient A, c'est donc $(\mathscr{D})$.

On a démontré en classe de troisième que pour tout point M :

$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires

$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

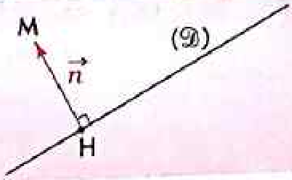
D'où le résultat, puisque $(\mathscr{D})$ et (AB) désignent la même droite.

Remarque

Soit $(\mathscr{D})$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul ; on déduit de la démonstration précédente que $\vec{u}$ dirige $(\mathscr{D})$ si et seulement si il existe deux points A et B de $(\mathscr{D})$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Vecteur normal

Définition



On appelle vecteur normal à une droite $(\mathscr{D})$ tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à celle de $(\mathscr{D})$.

Remarque

Toute droite $(\mathscr{D})$ admet une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires entre eux. Il suffit de considérer tous les vecteurs directeurs d'une droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$.

Propriétés

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux.

On a les propriétés suivantes :

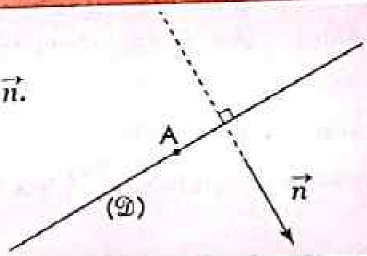
(1) $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires ;

(2) $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$.

Les directions de $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ étant respectivement perpendiculaires à celles de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, ces propriétés sont évidentes.

Propriété

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{n}$ non nul,
il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



La démonstration de cette propriété est immédiate puisqu'on sait qu'il existe une et une seule droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ et A un point de $(\mathscr{D})$.

Pour tout point M du plan, on a :

$$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}.$$

Démonstration

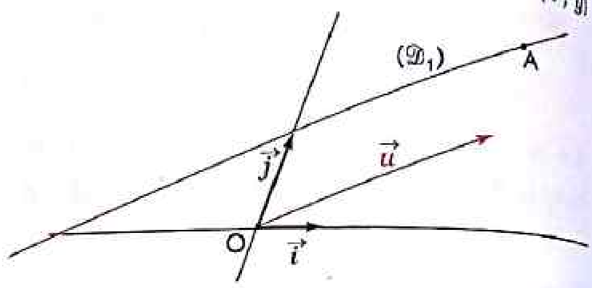
- Si M = A, la propriété est évidente.
- Si M ≠ A, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires, ou encore, si et seulement si M appartient à $(\mathscr{D})$, unique droite passant par A et de direction perpendiculaire à celle de $\vec{n}$.

1.2. Équations cartésiennes d'une droite

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples introductifs

• Désignons par $(\mathcal{D}_1)$ la droite passant par le point $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan. Cherchons une condition nécessaire et suffisante portant sur le couple $(x\ ;y)$ pour que M appartienne à la droite $(\mathcal{D}_1)$.



On a : $M \in (\mathcal{D}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

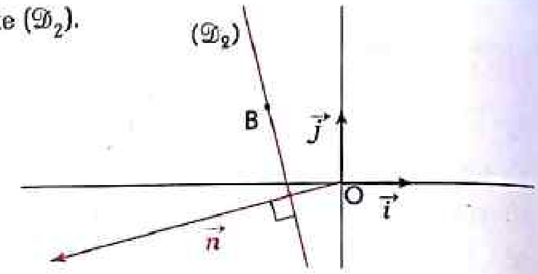
$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 - 3(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0.$

• Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormé, on désigne par $(\mathcal{D}_2)$ la droite passant par le point $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan, on cherche une condition nécessaire et suffisante portant sur le couple $(x\ ;y)$ pour que M appartienne à la droite $(\mathcal{D}_2)$.



On a : $M \in (\mathcal{D}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow -4(x+1) - (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x - y - 3 = 0.$

Cas général

Théorème

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Soit $(\mathcal{D})$ une droite ; il existe des nombres réels a, b et c tels que, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:

$$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow ax + by + c = 0.$$

(2) Soit a, b et c des nombres réels tels que : $(a, b) \neq (0, 0)$;
l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Démonstration guidée

(1) Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de $(\mathcal{D})$, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque.

• Calculer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$.

• En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à $(\mathcal{D})$.

(2) Soit (E) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $ax + by + c = 0$.

On va démontrer que (E) n'est pas vide.

• Démontrer que, dans le cas où $a \neq 0$, le point de coordonnées $(-\frac{c}{a}\ ; 0)$ appartient à (E).

• Démontrer de même que, dans le cas où $a = 0$, le point de coordonnées $(0\ ; -\frac{c}{b})$ appartient à (E).

On désigne par $(x_0\ ; y_0)$ une solution de l'équation $ax + by + c = 0$ et par A le point de coordonnées $(x_0\ ; y_0)$.

• Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$; démontrer que, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a : $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = ax + by + c$.

• En déduire que (E) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Définition

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère, $(\mathscr{D})$ une droite.

Toute équation de $(\mathscr{D})$ du type $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne[1] de $(\mathscr{D})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarques

- *Soit $(\mathscr{D})$ une droite admettant $ax + by + c = 0$ pour équation cartésienne. Pour tout nombre réel k non nul, $kax + kby + kc = 0$ est une autre équation cartésienne de $(\mathscr{D})$. Toute droite admet donc une infinité d'équations cartésiennes.*
- *Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$.*
- *Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Toute droite $(\mathscr{D}')$ parallèle à $(\mathscr{D})$ admet une équation du type $ax + by + d = 0$ (puisqu'elles ont même vecteur directeur). On peut déterminer le nombre réel d en substituant dans l'équation de $(\mathscr{D}')$ les coordonnées d'un point de $(\mathscr{D}')$.*

M

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite $(\mathscr{D})$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut chercher à se ramener à l'un des deux cas suivants :

- $(\mathscr{D})$ est définie par un point A et un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$.
  Pour tout point M, on a : $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.
- $(\mathscr{D})$ est définie par un point A et un de ses vecteurs normaux $\vec{n}$.
  Pour tout point M, on a : $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

La deuxième méthode ne doit être utilisée que si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormé** puisque c'est uniquement dans ce cas que l'on connaît l'expression analytique du produit scalaire.

Équation réduite

On a vu en classe de troisième que toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation cartésienne du type $y = mx + p$. Cette équation est appelée équation réduite de la droite.

m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite du type : $x = q$.

Propriétés

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'. On a :

(1) $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}') \Leftrightarrow m = m'$;

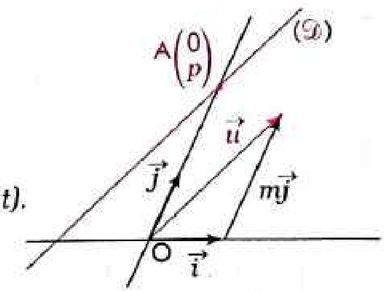
(2) **lorsque le repère est orthonormé : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow mm' = -1$.**

Remarques

Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$, $A\begin{pmatrix}0\\p\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathscr{D})$.

On en déduit une construction simple de $(\mathscr{D})$ (cf. le point méthode qui suit).

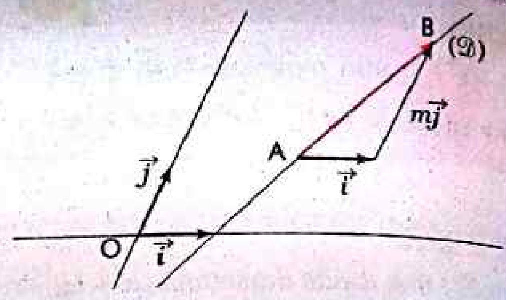


1. *Du nom de René Descartes (1596-1650), père de la géométrie analytique.*

M

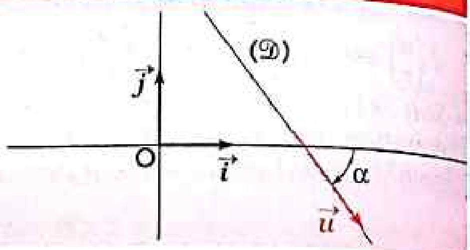
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour construire la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et de coefficient directeur m, on peut :
- placer le point A ;
- construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + m\vec{j}$.

La droite passant par A et B est alors la droite $(\mathcal{D})$.



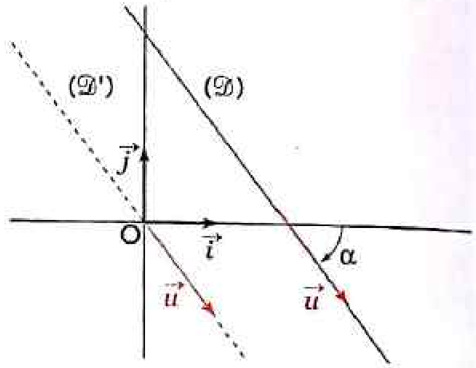
Propriété

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une droite $(\mathcal{D})$, non parallèle à l'axe des ordonnées, de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $Mes(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \alpha$, a pour coefficient directeur $\tan \alpha$.



Démonstration guidée

- Donner les coordonnées du vecteur $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en fonction de α.
  La parallèle $(\mathcal{D}')$ à $(\mathcal{D})$ passant par O a même vecteur unitaire $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ que $(\mathcal{D})$.
- En déduire une équation de $(\mathcal{D}')$.
- Écrire l'équation réduite de $(\mathcal{D}')$.
- En déduire le coefficient directeur de $(\mathcal{D})$.



Remarque

Soit $(\mathcal{D})$ une droite dirigée par $\vec{u}$ avec $Mes(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \alpha$. D'après la démonstration précédente, $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ est le vecteur directeur unitaire de $(\mathcal{D})$ de même sens que $\vec{u}$.

1.3. Travaux dirigés

1. Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A\begin{pmatrix}2 \\ -3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2 \\ 4\end{pmatrix}$ deux points du plan, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ les droites d'équations cartésiennes respectives :
$3x + y - 3 = 0$ et $x - 2y - 1 = 0$.

1°) Vérifier que $A \in (\mathcal{D}_1)$.

2°) Déterminer les coordonnées de C, point d'intersection de la droite $(\mathcal{D}_2)$ avec la droite $(\mathcal{D}_3)$ passant par B et parallèle à $(\mathcal{D}_1)$.

3°) Démontrer que $(\mathcal{D}_2)$ est une médiane du triangle ABC.

Solution

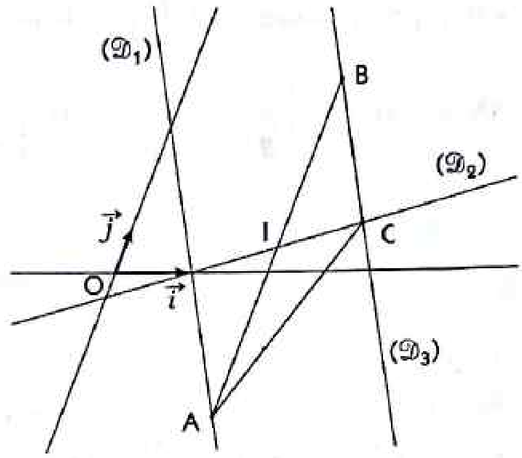
1°) $3 \times 2 - 3 - 3 = 0$. Donc : $A \in (\mathcal{D}_1)$.

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1 \\ 3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D}_1)$.

$(\mathcal{D}_3)$ est parallèle à $(\mathcal{D}_1)$, donc $(\mathcal{D}_3)$ est la droite passant par $B\begin{pmatrix}2 \\ 4\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a :

$$M \in (\mathcal{D}_3) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \vec{u}) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x + y - 10 = 0.$$



Soit (x, y) le couple de coordonnées du point C.

On a : $C \in (\mathcal{D}_2) \cap (\mathcal{D}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x + y - 10 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

Donc $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont sécantes en $C\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

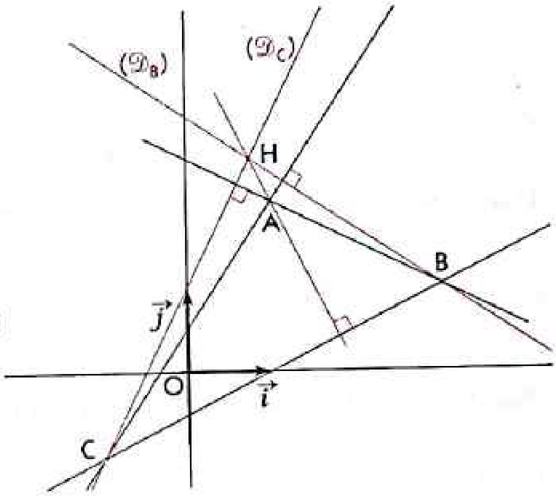
3°) Soit I le milieu de [AB].

On a : $I\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}$, $2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$. Donc, $I \in (\mathcal{D}_2)$.

$(\mathcal{D}_2)$ contient le point C et le milieu I de [AB]. Donc $(\mathcal{D}_2)$ est la médiane passant par C du triangle ABC.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

1°) Justifier que A, B et C sont non alignés.
2°) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.



Solution guidée

1°) • Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
• Conclure.

2°) • Déterminer des équations cartésiennes des hauteurs $(\mathcal{D}_B)$ et $(\mathcal{D}_C)$ du triangle ABC passant respectivement par B et C.

On trouve : $(\mathcal{D}_B) : -2x - 3y + 9 = 0$;
$(\mathcal{D}_C) : 2x - y + 1 = 0$.

• Calculer les coordonnées du point d'intersection H de $(\mathcal{D}_B)$ et $(\mathcal{D}_C)$.

(On pourra contrôler graphiquement ce résultat.)

Remarque

Il est souvent utile de faire une figure pour contrôler ou conjecturer des résultats de calculs.

1.4. Représentations paramétriques d'une droite

Exemple introductif

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et on désigne par $(\mathcal{D})$ la droite (AB).

On veut déterminer les couples de coordonnées des points C et D d'abscisses respectives -1 et $\frac{2}{3}$ dans le repère (A, B) de la droite $(\mathcal{D})$.

• $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = -1 \\ y_C + 3 = 2 \end{cases}$

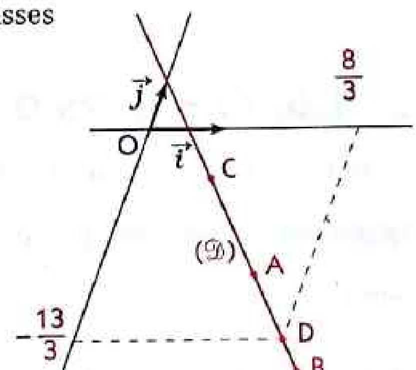
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1. \end{cases}$

Donc : $C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

• $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = \frac{2}{3} \\ y_D + 3 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{8}{3} \\ y_D = -\frac{13}{3}. \end{cases}$

Donc : $D\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$.



• Plus généralement, si $M\binom{x}{y}$ est le point d'abscisse t dans le repère (A, B) de la droite ($\mathscr{D}$), on a :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=t \\ y+3=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t. \end{cases}$$

Cas général

Théorème

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Soit a, b, x_0, y_0 des nombres réels tels que : $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

L'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ pour lesquels il existe un nombre réel t vérifiant $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ est la droite ($\mathscr{D}$) passant par le point $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

Démonstration

Soit $A\binom{x_0}{y_0}$, $\vec{u}\binom{a}{b}$ et ($\mathscr{D}$) la droite de repère $(A, \vec{u})$.

Pour tout point $M\binom{x}{y}$ du plan, on a :

$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Or : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0=at \\ y-y_0=bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt. \end{cases}$

Donc : $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow$ il existe un nombre réel t tel que : $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt. \end{cases}$

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Soit ($\mathscr{D}$) la droite passant par $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

On dit que le système $\begin{cases} x=x_0+a\,t \\ y=y_0+b\,t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite ($\mathscr{D}$) dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Remarques

- *Si $M\binom{x}{y}$ est un point de ($\mathscr{D}$), le nombre réel t vérifiant $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ est unique ; c'est l'abscisse du point M dans le repère $(A, \vec{u})$ de la droite ($\mathscr{D}$). On dit que M est le point de paramètre t.*
- *Une droite ($\mathscr{D}$) admet plusieurs représentations paramétriques, chacune étant déterminée par le choix d'un point A sur ($\mathscr{D}$) et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de ($\mathscr{D}$).*

1.5. Exemples d'utilisations des représentations paramétriques

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Démontrer qu'un point appartient ou n'appartient pas à une droite

Soit ($\mathscr{D}$) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et deux points $A\binom{0}{5}$ et $B\binom{3}{-1}$.

Le point A appartient à ($\mathscr{D}$) si et seulement si le système $\begin{cases} 0=1-2t \\ 5=2+3t \end{cases}$ admet une solution.

Or : $\begin{cases} 0 = 1 - 2t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$. Donc ce système n'a pas de solution et A $\notin$ $(\mathscr{D})$.

Le point B appartient à $(\mathscr{D})$ si et seulement si le système $\begin{cases} 3 = 1 - 2t \\ -1 = 2 + 3t \end{cases}$ admet une solution.

Or : $\begin{cases} 3 = 1 - 2t \\ -1 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow$ t = – 1. Donc ce système admet une solution et B $\in$ $(\mathscr{D})$.

Trouver une équation cartésienne d'une droite définie par une représentation paramétrique

On considère la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
On veut trouver une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$.

• *1re méthode*
La droite $(\mathscr{D})$ passe par le point $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.
On procède comme précédemment en utilisant l'équivalence : $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

• *2e méthode (élimination du paramètre)*
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de $(\mathscr{D})$, il existe donc un nombre réel t tel que : $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$
On a donc : $2x + 5y = 2(-1 + 5t) + 5(3 - 2t) = 13$.
Donc $(\mathscr{D})$ a pour équation cartésienne : $2x + 5y - 13 = 0$.

Trouver une représentation paramétrique d'une droite définie par une équation cartésienne

On considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation cartésienne $6x - 5y + 5 = 0$.
On vérifie que $(\mathscr{D})$ passe par $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.
Donc : $\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 + 6t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$.

1.6. Travaux dirigés

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan. Étudier les positions relatives des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :
$(\mathscr{D}_1) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $(\mathscr{D}_2) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$
et déterminer, s'il y a lieu, les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution guidée

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ dirige $(\mathscr{D}_1)$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ dirige $(\mathscr{D}_2)$ et $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$.

Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes car $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0$.

On cherche les coordonnées de $I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, point d'intersection des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$.

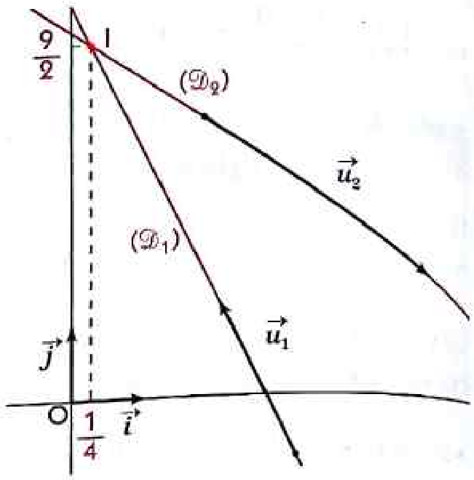
• *1re méthode*
On a : $I \in (\mathscr{D}_1)$ et $I \in (\mathscr{D}_2)$. Il existe donc deux nombres réels r et s tels que :
(1) $\begin{cases} x = 3 - r \\ y = -1 + 2r \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 4 - 2s. \end{cases}$

Le couple $(r ; s)$ vérifie donc le système :
$\begin{cases} 3 - r = 1 + 3s \\ -1 + 2r = 4 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + r = 2 \\ 2s + 2r = 5. \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} s = -\dfrac{1}{4} \\ r = \dfrac{11}{4}. \end{cases}$

D'où par substitution de r et s dans l'un ou l'autre des systèmes (1) : $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{9}{2}. \end{cases}$

Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ se coupent donc au point $\mathrm{I}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.



• *2ᵉ méthode*

Vérifier que $2x + y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de $(\mathscr{D}_1)$.

$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes en I, donc I appartient à $(\mathscr{D}_2)$.

Il existe donc un nombre réel t tel que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ (1).

De plus : $\mathrm{I} \in (\mathscr{D}_1) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 + 3t) + 4 - 2t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$.

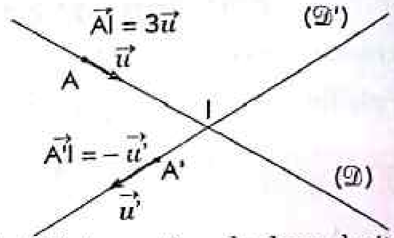
D'où, par substitution de t dans (1) : $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$. Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ se coupent donc au point $\mathrm{I}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

M

• Si dans un exercice, plusieurs droites interviennent par leurs représentations paramétriques, il est en général préférable de désigner les différents paramètres par des lettres distinctes.

Soit, par exemple, deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sécantes en I de repères respectifs $(\mathrm{A},\vec{u})$ et $(\mathrm{A}',\vec{u}')$.

Les paramètres de I dans chacune des deux représentations paramétriques associées aux repères $(\mathrm{A},\vec{u})$ et $(\mathrm{A}',\vec{u}')$ sont les abscisses de I dans ces deux repères et sont donc en général distincts.



• De manière générale, si on cherche les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes, il est souvent pratique de trouver une représentation paramétrique de l'une des droites et une équation cartésienne de l'autre.

Exercices

1.a Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne puis une représentation paramétrique des droites :

1. passant par les points $\mathrm{A}\binom{2}{5}$ et $\mathrm{B}\binom{-1}{1}$;
2. passant par le point $\mathrm{C}\binom{-2}{0}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$;
3. passant par le point $\mathrm{D}\binom{-2}{4}$ et dirigée par le vecteur $\vec{i}$;
4. passant par le point $\mathrm{E}\binom{-3}{1}$ et dirigée par le vecteur $\vec{j}$;
5. passant par le point $\mathrm{F}\binom{-3}{5}$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{3}{2}$.

1.b Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(\mathscr{D})$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = 7\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Parmi les points suivants : $\mathrm{A}_1\binom{2}{1}$, $\mathrm{A}_2\binom{3}{7}$, $\mathrm{A}_3\binom{0}{-14}$, $\mathrm{A}_4\binom{3}{-7}$, $\mathrm{A}_5\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_6\binom{-1}{-21}$, $\mathrm{A}_7\binom{2+\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$, $\mathrm{A}_8\binom{\sqrt{2}}{1}$,

trouver ceux qui appartiennent à la droite $(\mathscr{D})$.

1.c Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ de représentations paramétriques respectives :

$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = k \\ y = 3k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ et $(\mathscr{D}') : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

sont sécantes et trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

2 Cercles

2.1. Exemples introductifs

Dans ce paragraphe, on utilisera essentiellement les expressions analytiques de la distance et du produit scalaire. C'est pourquoi on se placera toujours dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ puisque ce n'est que dans un tel repère que ces expressions sont connues.

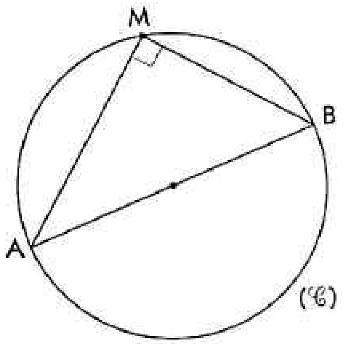
Les résultats suivants ont été établis précédemment.

Cercle défini par un de ses diamètres

Soit A et B deux points distincts du plan,
$(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].

Pour tout point M, on a :

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

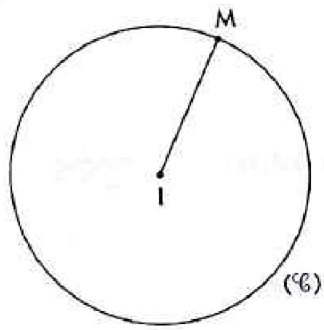


Cercle défini par son centre et son rayon

Soit I un point du plan,
R un nombre réel strictement positif,
$(\mathscr{C})$ le cercle de centre I et de rayon R.

Pour tout point M, on a :

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM = R$$
$$\Leftrightarrow IM^2 = R^2.$$



Exemples

• Équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] où $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a :

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) + (y-2)(y+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0.$$

• Équation cartésienne du cercle de centre $I\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et de rayon 2.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a :

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0.$$

2.2. Cas général

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Soit $(\mathscr{C})$ un cercle ; il existe des nombres réels a, b et c tels que, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

(2) Soit a, b et c des nombres réels ;

l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est :

- **soit l'ensemble vide,**
- **soit un point,**
- **soit un cercle.**

Démonstration guidée

(1) Soit $(\mathscr{C})$ un cercle, $I\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ son centre et R son rayon. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque.

- Calculer IM^2.
- En déduire que : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$.

(2) Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque.

- Vérifier que : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 + c$.
- En déduire que : $M \in (E) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$.
- Trouver la nature de (E) dans les trois cas suivants : $a^2 + b^2 - c < 0$; $a^2 + b^2 - c = 0$; $a^2 + b^2 - c > 0$.

Remarque

Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
On sait que $(\mathscr{C})$ est soit vide, soit un point, soit un cercle. Si l'on connaît deux points distincts de $(\mathscr{C})$, alors $(\mathscr{C})$ est un cercle.

2.3. Travaux dirigés

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points $A\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
1°) Démontrer que les points A, B et C sont non alignés.
2°) Déterminer les coordonnées du centre I du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3°) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

Solution guidée

1°) • Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et conclure.
2°) • Déterminer des équations cartésiennes des droites $(\mathscr{D}_B)$ et $(\mathscr{D}_C)$, médiatrices respectives des segments [AC] et [AB].
• Déterminer les coordonnées du point I.
3°) • Calculer le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.
• Donner une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
• Contrôler graphiquement les calculs.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
1°) Donner une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
2°) Déterminer les points d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ avec la droite $(\mathscr{D})$ passant par $C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Solution

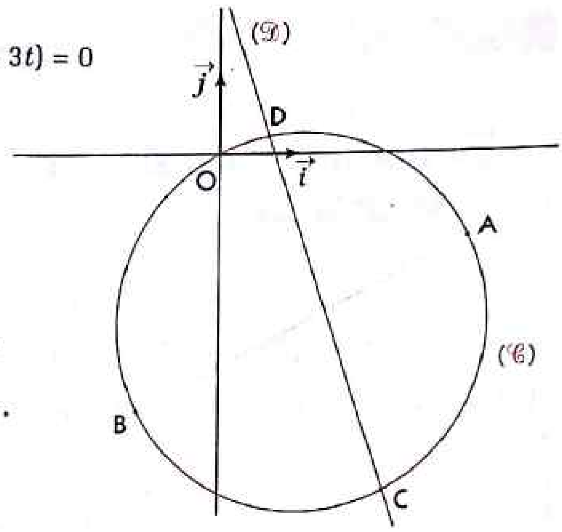
1°) Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+1) + (y+1)(y+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0. \end{aligned}$$

2°) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de $(\mathscr{D})$; il existe donc un nombre réel t vérifiant $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ (1).

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + t)^2 + (-1 - 3t)^2 - 2(1 + t) + 4(-1 - 3t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10t^2 - 6t - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5t^2 - 3t - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5\left[(t - \tfrac{3}{10})^2 - (\tfrac{7}{10})^2\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(t - 1)(t + \tfrac{2}{5}) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \quad \text{ou} \quad t = -\tfrac{2}{5}. \end{aligned}$$



D'où, par substitution de t dans (1) : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{1}{5}. \end{cases}$

Donc $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ sont sécants en $C\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Remarque

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection d'un cercle $(\mathscr{C})$ et d'une droite $(\mathscr{D})$, il est en général plus facile d'utiliser une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ plutôt qu'une de ses équations cartésiennes.

Exercices

2.a Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon 3.
2. Trouver une équation du cercle de centre B passant par A.
3. Trouver une équation du cercle de diamètre [AB].

2.b Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les équations suivantes :

1. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$;
3. $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 5 = 0$.

2.c Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tracer et trouver une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans chacun des cas suivants :
a) $(\mathscr{C})$ est tangent à l'axe des abscisses ;
b) $(\mathscr{C})$ est tangent à l'axe des ordonnées ;
c) $(\mathscr{C})$ est tangent à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $2x + 3y + 1 = 0$.

2.d Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point $A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $-2x + y + 4 = 0$.
1. Tracer le cercle $(\mathscr{C})$ passant par A et tangent à $(\mathscr{D})$.
2. Trouver une équation de $(\mathscr{C})$.

2.e Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -1$.

2.f Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 76$.
En déduire que $(\mathscr{C})$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
2. Soit I le milieu du segment [AB]. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :
$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 26$.
Utiliser cette propriété pour retrouver les résultats de la première question.

Exercices

APPRENTISSAGE

Équations cartésiennes de droites

1 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Parmi les points $A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, préciser ceux qui appartiennent aux droites d'équations cartésiennes :

$(\mathscr{D}_1) : 2x - 3y + 5 = 0$; $(\mathscr{D}_2) : 3x - 2y + 4 = 0$;
$(\mathscr{D}_3) : 4x + 3y + 1 = 0$; $(\mathscr{D}_4) : -x - 2y + 8 = 0$.

2 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.

1. $(\mathscr{D})$ passe par $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.
2. $(\mathscr{D})$ passe par $C\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
3. $(\mathscr{D})$ passe par $D\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et est parallèle à la droite d'équation cartésienne $7x - 4y + 3 = 0$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.

1. $(\mathscr{D})$ passe par $A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
2. $(\mathscr{D})$ passe par $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $3x + 5y - 8 = 0$.
3. $(\mathscr{D})$ est la médiatrice du segment [CD] où $C\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

4 1. Soit A, B et C trois points distincts.
Démontrer que le vecteur $AC\,\overrightarrow{AB} + AB\,\overrightarrow{AC}$ dirige la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver une équation cartésienne de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ dans chacun des cas suivants :

- $A\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$;
- $A\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-14\\10\end{pmatrix}$;
- $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$.

5 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

1. Sur une figure soignée, représenter la droite (AB), le point C, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.
Quelles conjectures la figure suggère-t-elle ?
2. Déterminer une équation cartésienne de (AB).
3. Les conjectures établies à la première question sont-elles vérifiées ?

6 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $(\mathscr{D}) : -2x + 3y - 6 = 0$.

1. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}'')$, image de $(\mathscr{D})$ par la symétrie S_Ω de centre $\Omega\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.
3. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}''')$, image de $(\mathscr{D})$ par la symétrie orthogonale S d'axe la droite de repère $(O, \vec{i})$.

7 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Étudier les positions relatives des droites d'équations cartésiennes :

$(\mathscr{D}_1) : 3x + 6y - 5 = 0$; $(\mathscr{D}_2) : x - 2y + 4 = 0$;
$(\mathscr{D}_3) : x + 2y + 5 = 0$; $(\mathscr{D}_4) : -x - 5y + 3 = 0$;
$(\mathscr{D}_5) : 4x - y + 1 = 0$; $(\mathscr{D}_6) : 7x - 14y + 8 = 0$.

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles perpendiculaires ?

1. $(\mathscr{D}) : 2x - 3y - 5 = 0$; $(\mathscr{D}') : 6x + 4y - 3 = 0$.
2. $(\mathscr{D}) : -x + 2y - 8 = 0$; $(\mathscr{D}') : 2x - y + 4 = 0$.
3. $(\mathscr{D}) : 5x - 6y - 2 = 0$; $(\mathscr{D}') : \frac{x}{6} - \frac{y}{5} - 1 = 0$.
4. $(\mathscr{D}) : 7x + 3y - 5 = 0$; $(\mathscr{D}') : \frac{x}{7} - \frac{y}{2} + 2 = 0$.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite $(\mathscr{D})$:

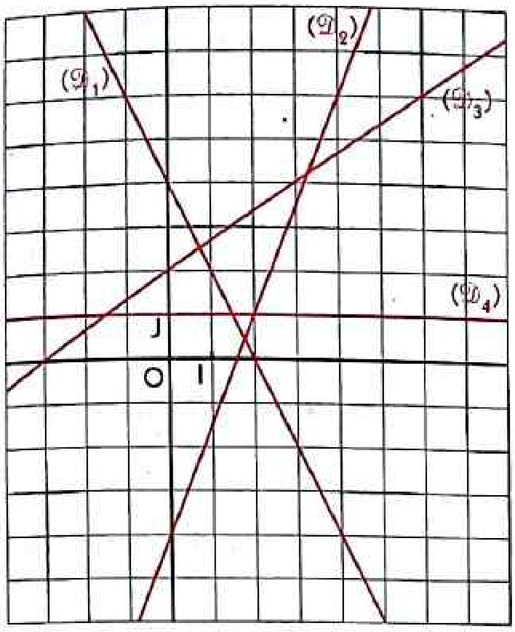
1. $(\mathscr{D})$ est la droite passant par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur 6 ;
2. $(\mathscr{D})$ est la droite passant par $B\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-4\end{pmatrix}$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ vérifiant Mes $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{6}$.

10 Soit $(\mathscr{D})$ la droite de coefficient directeur m passant par $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\mathscr{D})$ admet pour équation : $(y - y_A) = m(x - x_A)$.
2. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{D})$ dans les cas suivants :
$m = 2$ et $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $m = -1$ et $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

11 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. Soit $(\mathscr{D}) : y = ax + b$ une droite dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$. Exprimer a en fonction de α et β.
2. Déduire du graphique ci-dessous les équations réduites de $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$.



12 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs directeurs unitaires de la première bissectrice (droite d'équation $y = x$). On appelle $\vec{u}$ celui pour lequel : $\vec{i} \cdot \vec{u} > 0$.

Soit I et A les points tels que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

2. Démontrer que $\vec{i} + \vec{u}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{IOA}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

13 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, étudier les positions relatives des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ et déterminer, s'il y a lieu, les coordonnées de leur point d'intersection :

1. $(\mathscr{D}) : 2x - y - 5 = 0$ et $(\mathscr{D}') : 7x + y - 4 = 0$;
2. $(\mathscr{D}) : -5x + 2y - 7 = 0$ et $(\mathscr{D}') : 3x - y + 4 = 0$;
3. $(\mathscr{D}) : 3x - 7y - 2 = 0$ et $(\mathscr{D}') : 18x - 56y - 12 = 0$;
4. $(\mathscr{D}) : 5x + 7y - 1 = 0$ et $(\mathscr{D}') : 4x - 11y - 34 = 0$.

Représentations paramétriques de droites

14 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$:

1. $(\mathscr{D})$ passe par $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$;
2. $(\mathscr{D})$ passe par $C\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$;
3. $(\mathscr{D})$ passe par $D\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et est parallèle à la droite d'équation $2x - y - 6 = 0$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$:

1. $(\mathscr{D})$ passe par $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $-x + 5y - 8 = 0$;
2. $(\mathscr{D})$ est la médiatrice du segment [BC] où $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

16 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ dans chacun des cas suivants :

1. la droite $(\mathscr{D})$ passe par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;
2. $(\mathscr{D})$ est la droite passant par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;
3. $(\mathscr{D})$ a pour équation cartésienne : $x - 2y + 5 = 0$.

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$:

1. $(\mathscr{D})$ est la droite passant par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur -1 ;
2. $(\mathscr{D})$ estla droite passant par $B\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ vérifiant Mes $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

18 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1. La droite $(\mathscr{D})$ passe-t-elle par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$? Par $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$? Par $C\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$?
2. Quel est le point de $(\mathscr{D})$ qui a pour abscisse 0 ? Quel est le point de $(\mathscr{D})$ qui a pour ordonnée 0 ?
3. Donner une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.

19 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ de représentations paramétriques respectives :
$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = b + mt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
où m et b sont des nombres réels.

1. Peut-on trouver des couples $(m ; b)$ tels que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ soient parallèles ?
2. Peut-on trouver $(m ; b)$ pour que $(\mathscr{D}) = (\mathscr{D}')$?

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de la droite $(\mathscr{D})$ vérifiant $\vec{u} \cdot \vec{i} \geqslant 0$, puis calculer la valeur exacte, ou à défaut une valeur approchée en radian, de Mes $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$:

1. $(\mathscr{D}) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;
2. $(\mathscr{D}) \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;
3. $(\mathscr{D}) \begin{cases} x = 2 - t\sqrt{3} \\ y = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;
4. $(\mathscr{D}) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

21 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Représenter graphiquement les droites :

1. $(\mathscr{D})$ passant par $A\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 4\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2\pi}{3}\\ 0\end{pmatrix}$;

2. $(\mathscr{D}')\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{5\pi}{6} + t\frac{\sqrt{7}}{5}\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Trouver un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$;

2. $A\begin{pmatrix}17\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}13\\6\end{pmatrix}$;

3. $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

23 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, étudier les positions relatives des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ dont on donne les représentations paramétriques. Lorsqu'elles sont parallèles, préciser si elles sont disjointes ou confondues. Lorsqu'elles sont sécantes, préciser si elles sont perpendiculaires ou non.

1. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 6t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 4t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

3. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 3t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

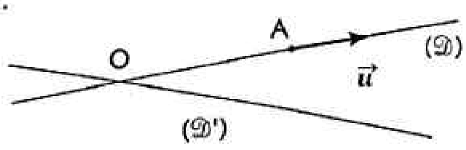
4. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 6t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

24 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad$ et $\quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles parallèles ? Trouver les coordonnées de leur point d'intersection s'il y a lieu.

25 Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites sécantes en O, A un point de $(\mathscr{D})$ distinct de O et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.



1. Soit M un point de $(\mathscr{D}')$. Démontrer que M = O si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
2. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Utiliser le résultat précédent pour calculer les coordonnées du point d'intersection des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad$ et $\quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

26 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites

$(\mathscr{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 2t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(\mathscr{D}_2) : -3x + 2y = 0$.

1. le point $A\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ appartient-il à $(\mathscr{D}_1)$? Appartient-il à $(\mathscr{D}_2)$?
2. Justifier que $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont perpendiculaires.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Équations cartésiennes de cercles

27 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points :

$A\begin{pmatrix}1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

$E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Démontrer que ABCDEF est un hexagone régulier.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 5.
2. Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$ de centre $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 3.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et passant par $B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.
2. Donner les coordonnées du point C diamétralement opposé à B.

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$.
Trouver une équation cartésienne du cercle de diamètre [BC]. Préciser les coordonnées du centre de ce cercle, ainsi que son rayon.

31 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB].
1. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
2. Les points O, $C\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à $(\mathscr{C})$?

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifiant :
1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$;
3. $(x-2)(x+1) + y(y-1) = 0$;
4. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 1 = 0$;
5. $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 8 = 0$;
6. $(x-y)(x+y) + 2y^2 = x + y + 1$;
7. $(x + y + k)^2 = 2xy$ (où k est un nombre réel donné);
8. $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky + 4k^2 + 1 = 0$ (où k est un nombre réel donné).

33 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $\Omega\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.
1. Exprimer ΩM^2 en fonction de x et y *(on préférera une forme développée)*.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ d'équation : $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.
3. Soit $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 - 6x - 8y \leqslant 0$.
a) Les points O et Ω appartiennent-ils à $(\mathscr{E})$?
b) Construire $(\mathscr{E})$.

34 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points : $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$.
1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 50$ est réduit à un point G qui est le centre de gravité du triangle ABC.
2. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 77$.
Que représente G pour $(\mathscr{F})$?
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 47$.
4. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{X})$ des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 1$.
Que représente le vecteur $2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ pour l'ensemble $(\mathscr{X})$?

Intersection de droites et cercles

35 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :
- la droite $(\mathscr{D})$: $5x + y - 6 = 0$;
- le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

36 Tangentes à un cercle parallèles à une droite donnée.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équations :
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ et $2x - 3y + 1 = 0$.
1. Faire une figure. Construire les deux tangentes au cercle parallèles à $(\mathscr{D})$.
2. Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles. En déduire les équations de ces deux tangentes.

37 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :
$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
1. Démontrer que A, B, C sont non alignés.
2. Trouver une équation du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer les points d'intersections de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

APPROFONDISSEMENT

38 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.
1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points B et B' images respectives du point A par les translations de vecteurs $\vec{n}$ et $-\vec{n}$.
2. Exprimer le nombre $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ en fonction de x et y.
3. Tracer la droite $(\mathscr{D})$: $3x + 4y - 10 = 0$.
4. Soit $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $3x + 4y - 10 \geqslant 0$.
a) Les points O, A, B, B' appartiennent-ils à $(\mathscr{E})$?
b) Soit H le projeté orthogonal de M sur (BB'). Où le point H se trouve-t-il lorsque $M \in (\mathscr{E})$?
c) Hachurer $(\mathscr{E})$ en noir.
5. Soit $(\mathscr{E}')$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $3x + 4y - 10 \leqslant 0$.
a) Les points O, A, B, B' appartiennent-ils à $(\mathscr{E}')$?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que M appartienne à $(\mathscr{E}')$.
c) Hachurer $(\mathscr{E}')$ en bleu.

39 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$: $x + y - 2 = 0$.
À tout point M de $(\mathscr{D})$, on associe le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AH} - 3\,\overrightarrow{AK}$ où H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$.
2. Calculer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
3. Déterminer le lieu $(\mathscr{D}')$ des points N lorsque M parcourt $(\mathscr{D})$.

40 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $x - y - 1 = 0$ et $(\mathscr{D}_0)$ la droite d'équation $2x + 3y - 7 = 0$.
1. Déterminer le point d'intersection A de ces deux droites.
2. Démontrer que les équations :
$(2x + 3y - 7) + 2(x - y - 1) = 0$ et
$(2x + 3y - 7) - 3(x - y - 1) = 0$ sont celles de deux droites passant par A.
3. Démontrer que pour tout nombre réel λ l'équation $(2x + 3y - 7) + \lambda(x - y - 1) = 0$ est celle d'une droite passant par A.
4. Démontrer que pour toute droite distincte de $(\mathscr{D})$ et passant par A, on peut déterminer λ pour que l'équation de cette droite soit de la forme ci-dessus.
5. On considère les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives : $x - 4y + 1 = 0$ et $3x + 5y - 13 = 0$. Donner les équations des droites distinctes de (Δ_2) passant par le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2).

41 **Tangente à un cercle en un point de ce cercle.**
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

1. Vérifier que le point $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ appartient au cercle.
Faire une figure. Construire, sur cette figure, la tangente en A.

2. Déterminer une équation cartésienne de cette droite. On démontrera que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$xx_A + yy_A + (x + x_A) - 3(y + y_A) - 15 = 0.$$

3. ***Généralisation.***
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

et $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ un point de $(\mathscr{C})$.

Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C})$ en A a pour équation :

$$xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0.$$

(On dit qu'on a obtenu l'équation de la tangente à partir de celle du cercle par dédoublement.)

42 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit $A\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en un point K dont on déterminera les coordonnées.

3. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}_1)$ tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en $I\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et vérifier que cette droite passe par le point B.

4. *a)* Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}_2)$ passant par A et tangente au cercle $(\mathscr{C})$, autre que (AB).
b) Soit C le point d'intersection des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C et déterminer une équation du cercle circonscrit à ce triangle.

43 *Le but du problème est de fournir une méthode pour obtenir facilement une équation de la tangente commune au point de contact de deux cercles tangents.*
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles d'équations respectives :
$(x-2)^2 + (y+3)^2 - 4 = 0$;
$(x-5)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0$.

1. Démontrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2. Vérifier que l'équation

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 - 4 - [(x-5)^2 + (y-1)^2 - 9] = 0$$

est une équation de droite et que cette droite passe par A.

3. Vérifier que cette droite est une tangente commune aux deux cercles.

44 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point. Démontrer que :

$\|\overrightarrow{OM}\| = 1 \Leftrightarrow$ Il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tel que : $\begin{cases}x = \cos t\\ y = \sin t\end{cases}$.

2. Soit r un nombre réel strictement positif. Déduire de la question précédente le lieu $(\mathscr{E})$ des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour lesquels il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tel que : $\begin{cases}x = r\cos t\\ y = r\sin t\end{cases}$.

3. Soit a, b, r trois nombres réels tels que : $r > 0$. Déduire de la question précédente le lieu $(\mathscr{E}')$ des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour lesquels il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tel que : $\begin{cases}x = r\cos t + a\\ y = r\sin t + b\end{cases}$.

Le système $\begin{cases}x = r\cos t + a\\ y = r\sin t + b\end{cases}$ *est appelé représentation paramétrique du cercle de centre* $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ *et de rayon* r.

4. ***Application***
On considère dans le plan un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, un point A de $(\mathscr{C})$. À tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{OM} + 5\,\overrightarrow{OA}$.
En choisissant un repère d'origine O, déterminer le lieu géométrique des points N lorsque M parcourt $(\mathscr{C})$.

45 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équations cartésiennes respectives :
$(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$;
$(\mathscr{D})$: $x - y + 4 = 0$.

1. Donner les éléments caractéristiques du cercle $(\mathscr{C})$.

2. Trouver les points d'intersection A et B du cercle $(\mathscr{C})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

3. Soit λ un réel quelconque. Vérifier que la courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 - \lambda(x - y + 4) = 0$ est un cercle qui passe par A et B.

4. Soit E un point quelconque du plan. Existe-t-il un cercle passant par les points A, B et E ? (On discutera suivant la position du point E).

5. Montrer que tout cercle passant par A et B a une équation cartésienne du type :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 - \lambda(x - y + 4) = 0$$

6. ***Application***
On donne $E\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.
Vérifier que les points A, B et E ne sont pas alignés. Utiliser les résultats ci-dessus pour trouver une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABE.

46 **Puissance d'un point par rapport à un cercle.**
Soit un cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et un point M extérieur à ce cercle. Une droite quelconque $(\mathscr{D})$ passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points A et B.
On se propose de démontrer que le nombre réel $MA \times MB$ *est indépendant de* $(\mathscr{D})$. *Ce nombre est appelé puissance du point M par rapport au cercle* $(\mathscr{C})$.

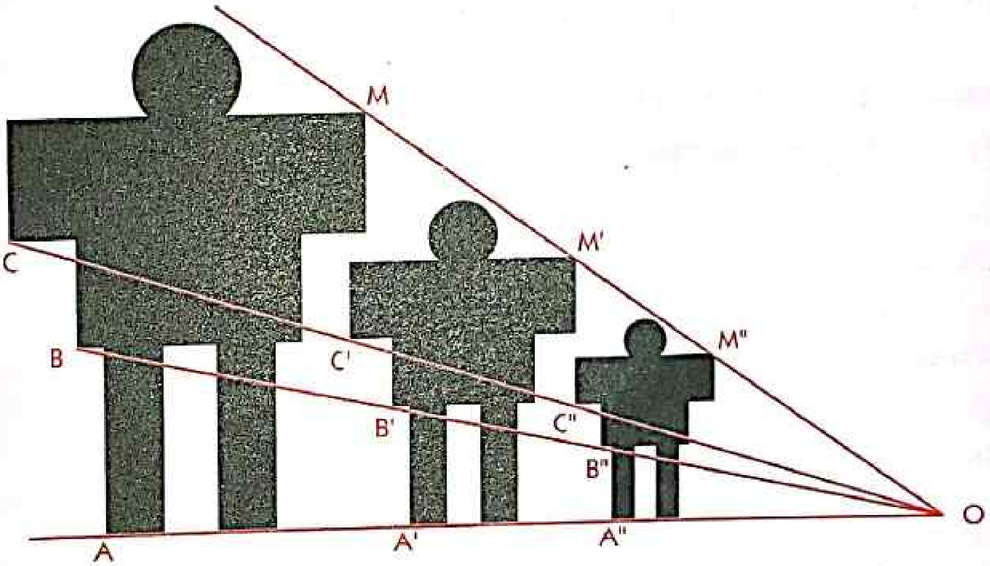
1. Soit r le rayon de $(\mathscr{C})$, (T) une tangente à $(\mathscr{C})$ passant par M et T le point de contact.
Démontrer que : $MT^2 = M\Omega^2 - r^2$.

2. Soit A et B les points d'intersection avec $(\mathscr{C})$ d'une droite passant par M et A' le point diamétralement opposé à A sur $(\mathscr{C})$.
a) Démontrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$;
b) En déduire que : $MA \times MB = M\Omega^2 - r^2$.

6

Homothétie – Rotation

La symétrie centrale, la symétrie orthogonale et la translation sont des applications qui conservent les distances. On va étudier deux applications dont l'une ne conserve pas les distances ; les configurations associées ne sont cependant pas nouvelles ; on reconnaîtra les configurations de Thalès.



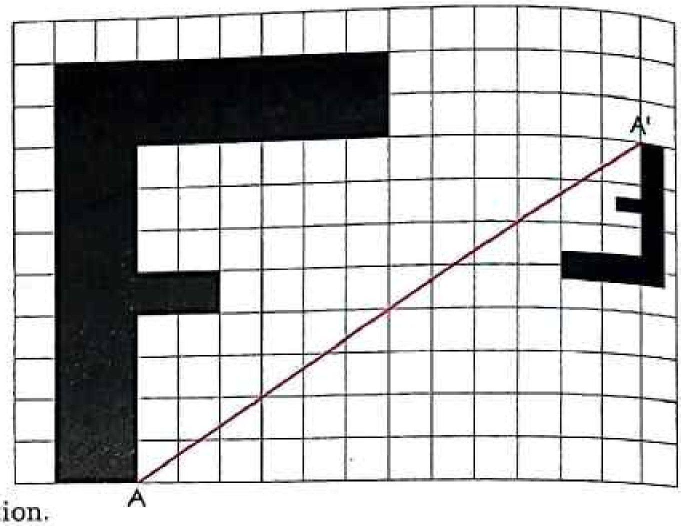
SOMMAIRE

1 Homothétie

1.1. Définition

Introduction

Considérons les deux « lettres F » ci-contre.
Les distances n'étant pas conservées, aucune translation, symétrie centrale ou orthogonale, ne transforme l'une des deux lettres en l'autre.



Sur la figure, on a joint A et A'.

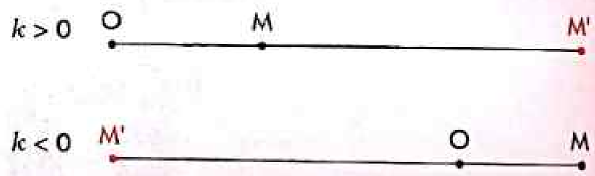
- Joindre d'autres points qui se correspondent. On les notera B et B', C et C' ...
Que peut-on dire des droites (AA'), (BB') et (CC') ?
- Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$; entre les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{C'B'}$.
- Trouver d'autres vecteurs vérifiant la même relation.

Définition et exemples

Définition

Soit O un point, k un nombre réel non nul.
On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application $h_{(O,k)}$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

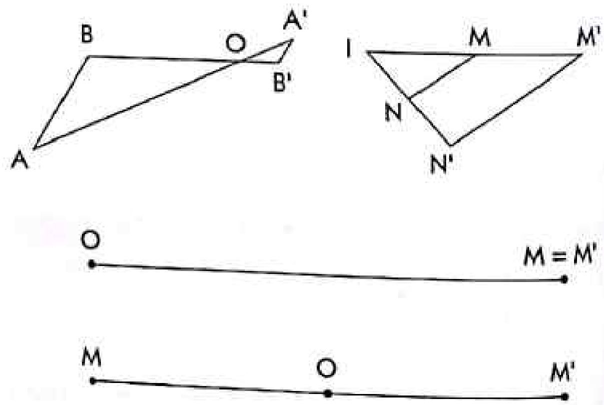
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$



On note généralement $h_{(O,k)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k.

Exemples

- On a construit, ci-contre, les images A' et B' des points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{4}$ et les images M' et N', des points M et N, par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
- Si $k = 1$, chaque point est sa propre image. Cette application est appelée application identique et est notée Id.
- Si $k = -1$, l'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie de centre O car : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.



1.2. Conséquences de la définition

Propriété 1

Un point M, son image M' par une homothétie et le centre O de cette homothétie sont alignés.

Démonstration

Puisque $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. Donc, les points O, M, M' sont alignés.

Vocabulaire

Un point est dit invariant par une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ lorsqu'il est sa propre image. Il est immédiat que O est invariant par $h_{(O,k)}$.

Propriété 2

Le seul point invariant, par une homothétie *de rapport différent de 1*, est son centre.

Démonstration

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

M est invariant par h $\Leftrightarrow$ $M = h(M)$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow$ $(1-k)\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ car $k \neq 1$

$\Leftrightarrow$ $M = O$.

Le seul point invariant par h est son centre O.

Remarque

Tout point est invariant par l'application identique.

Propriété 3

Soit O un point, k un nombre réel non nul. Quels que soient les points M et M', on a :

$$M' = h_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = h_{(O,\frac{1}{k})}(M').$$

Démonstration

Soit h et h' les homothéties de centre O et de rapports respectifs k et $\frac{1}{k}$.

$M' = h(M)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$ car $k \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $M = h'(M')$.

Tout point M' est l'image par h d'un point unique M et l'application qui à M' associe M est h'.

Définition

Toute application f du plan dans lui-même pour laquelle tout point M' est l'image d'un unique point M est appelée transformation du plan et l'application qui à M' associe M est appelée transformation réciproque de f.

$h_{(O,k)}$ est donc une transformation ayant pour transformation réciproque $h_{(O,\frac{1}{k})}$.

Remarque

Les translations et les symétries sont aussi des transformations du plan. Par contre, les projections ne sont pas des transformations du plan.

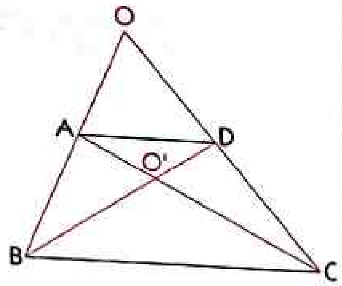
1.3. Travaux dirigés

Soit ABCD un trapèze de bases [AD] et [BC] tel que AD ≠ BC.

1°) Démontrer qu'il existe une homothétie transformant A en B et D en C.

2°) Démontrer qu'il existe une homothétie transformant A en C et D en B.

Solution



1°) Si l'homothétie existe, son centre doit être aligné, d'une part avec A et B, d'autre part avec D et C. C'est donc nécessairement le point d'intersection O de (AB) et (DC).

Utilisons la formulation vectorielle des propriétés de Thalès.

Dans le triangle OBC, puisque (AD) // (BC), il existe un nombre réel k tel que :

$\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OD}$ où $k = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$.

L'homothétie de centre O et de rapport k transforme A en B et D en C.

2°) On démontre de même que l'homothétie de centre O', point d'intersection de (AC) et (BD), et de rapport $k' = \dfrac{\overline{O'C}}{\overline{O'A}} = \dfrac{\overline{O'B}}{\overline{O'D}}$ transforme A en C et D en B.

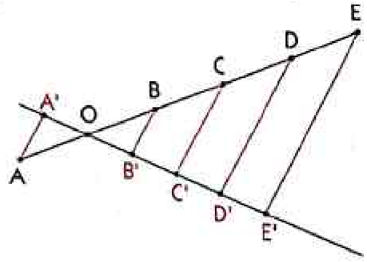
M Quand, dans une figure , on reconnaît une « configuration de Thalès » c'est-à-dire deux droites sécantes coupées par des droites parallèles, on peut introduire une homothétie qui, nous le verrons plus tard, permet souvent de démontrer plus simplement des propriétés.

Exercices

1.a Construire les images des quatre sommets d'un parallélogramme ABCD par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$, puis par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1.b Soit un triangle ABC, A' le milieu de [BC] et G son centre de gravité.
Démontrer que l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme A en A'. Trouver les images de B et C par h.
Démontrer que l'homothétie h' de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ transforme G en A'.
Définir les homothéties réciproques de h et h'.

1.c Dans la figure ci-dessous, on a : AO = OB = BC = CD = DE et A'O = OB' = B'C' = C'D' = D'E'.
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -1,
h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -2,
h_3 l'homothétie de centre O et de rapport -3,
h_4 l'homothétie de centre O et de rapport -4.
Déterminer les images de A et A' par ces homothéties.

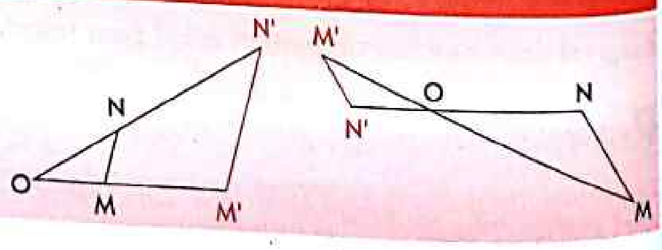


2 Propriétés de l'homothétie

2.1. Propriété fondamentale

Propriété

Soit h une homothétie de rapport k, M' et N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N. On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



Démonstration

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Soit M et N deux points quelconques, M' et N' leurs images par h. On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON} \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \quad ; \quad \text{d'où :} \quad \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

2.2. Images de figures simples

Image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle

Propriétés

Soit h une homothétie de rapport k, A', B' et I' les images respectives de A, B (A ≠ B) et I par h :

(1) l'image de la droite (AB) est la droite (A'B') et (A'B') est parallèle à (AB) ;

(2) l'image du segment [AB] est le segment [A'B'] ;

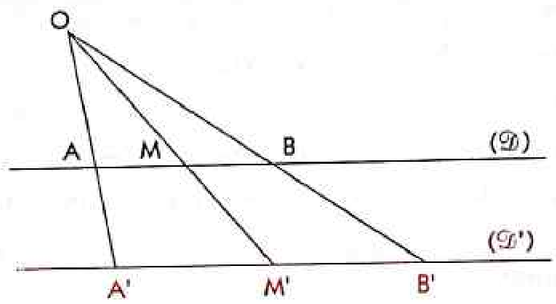
(3) l'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') ;

(4) l'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|k|\,r$.

Démonstration guidée

(1)

- Démontrer que : (AB)//(A'B').
- Démontrer que tout point M de la droite (AB) a son image M' sur la droite (A'B').
- Démontrer que pour tout point N' de la droite (A'B'), il existe un point N de la droite (AB) tel que N' = h(N).
- Conclure.



On démontre de même que l'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') et que l'image du segment [AB] est le segment [A'B'].

On rappelle qu'un point M du segment [AB] est défini par : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ *avec* $t \in [0 ; 1]$.

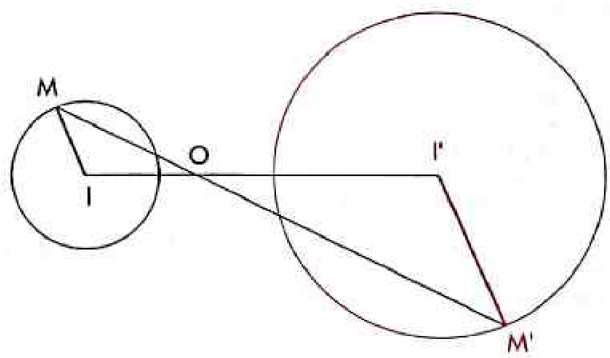
(4) Soit un cercle (𝒞) de centre I de rayon r.

L'homothétie de centre O et de rapport k transforme I en I'.

Soit M un point, M' son image par h.

- Démontrer que : IM = r ⇔ I'M' = $|k|\,r$.

  On rappelle que : $\|\lambda\,\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$.
- Conclure.



Conséquence

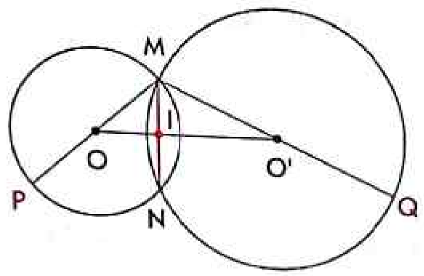
Toute homothétie transforme trois points alignés en trois points alignés.

On retient cette propriété en disant que toute homothétie conserve l'alignement.

Scanned by CamScanner

Exemple

On considère deux cercles de centres O et O' sécants en M et N. Soit P le point diamétralement opposé à M sur le cercle de centre O et Q le point diamétralement opposé à M sur le cercle de centre O'. Nous allons démontrer, en utilisant une homothétie, que les points P, N et Q sont alignés.



O et O' étant à égale distance de M et N, (OO') est la médiatrice de [MN]. Elle coupe [MN] en son milieu I.
Le tableau de correspondance ci-contre donne les images de O, I et O' par l'homothétie h de centre M et de rapport 2.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ O & P \\ I & N \\ O' & Q \end{array}$$

Les points O, I, O' étant alignés, leurs images P, N et Q le sont aussi.

M Pour démontrer que des points sont alignés, on peut démontrer qu'ils sont les images par une homothétie de points alignés.

Conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu

Propriétés

Toute homothétie transforme :

(1) **deux droites parallèles en deux droites parallèles ;**

(2) **deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires ;**

(3) **le milieu d'un segment en le milieu du segment image.**

On retient ces propriétés en disant que toute homothétie conserve le parallélisme, l'orthogonalité et le milieu.

Démonstration

(1) Soit $(\mathscr{D})$ et (Δ) deux droites parallèles. Leurs images $(\mathscr{D}')$ et (Δ') sont respectivement parallèles à $(\mathscr{D})$ et (Δ). Comme $(\mathscr{D})$ et (Δ) sont parallèles, il en est de même pour $(\mathscr{D}')$ et (Δ').

(2) On démontre de même que deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

(3) Soit [AB] un segment, I son milieu, A', B' et I' leurs images respectives par une homothétie de rapport k. D'après la propriété fondamentale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{I'B'} &= k\,\overrightarrow{IA} + k\,\overrightarrow{IB} \\ &= k\,(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \vec{0} \qquad \text{car, I étant le milieu de [AB], } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}. \end{aligned}$$

I' est donc le milieu de [A'B'].

Exemple

Soit un triangle ABC et A'B'C' son image par une homothétie h.

On se propose de démontrer que l'image de l'orthocentre de ABC est l'orthocentre de A'B'C'.

L'image par h de la hauteur issue de A est la droite passant par l'image A' de A et perpendiculaire à l'image (B'C') de (BC). C'est donc la hauteur issue de A' du triangle A'B'C'. On démontre de la même façon que les images des deux autres hauteurs de ABC sont les hauteurs issues de B' et C' du triangle A'B'C'.

•L'image du point d'intersection H des trois hauteurs du triangle ABC est un point H' qui appartient donc aux trois hauteurs du triangle A'B'C'.

L'orthocentre H du triangle ABC a donc pour image l'orthocentre H' du triangle A'B'C'.

M Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires (resp parallèles), on peut démontrer qu'elles sont les images de droites perpendiculaires (resp parallèles) par une homothétie.

Conservation des angles orientés

Propriété

Soit A, B, C trois points d'images respectives A', B', C' par une homothétie. On a :

$$\widehat{(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}.$$

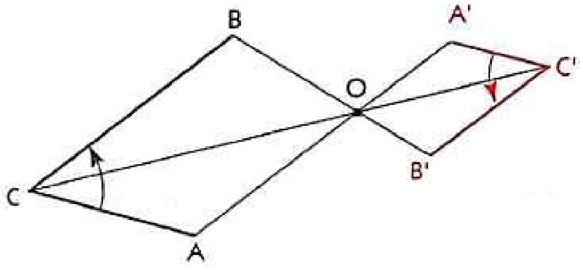
On retient cette propriété en disant que l'homothétie conserve les angles orientés.

Démonstration

D'après la propriété fondamentale :

$\overrightarrow{C'A'} = k\,\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{C'B'} = k\,\overrightarrow{CB}$.

On en déduit que : $\widehat{(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.



Remarque

Puisque l'homothétie conserve les angles orientés, elle conserve les mesures des angles non orientés. Un triangle et son image par une homothétie sont donc semblables.

Longueurs et aires

Propriété

Soit h une homothétie de rapport k.

(1) L'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur $|k|\,l$.

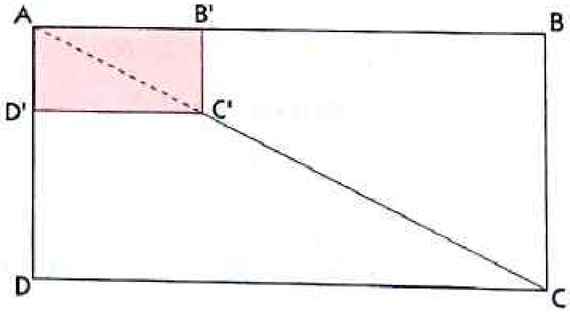
(2) L'image d'une figure d'aire $\mathcal{A}$ est une figure d'aire $k^2\mathcal{A}$.

(1) est une conséquence immédiate de la propriété fondamentale. Nous admettrons la propriété (2) que nous illustrerons par l'exemple qui suit.

Exemple

Soit ABCD un rectangle. On a construit les images respectives B', C', D' de B, C, D par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$. Comparons les aires des deux rectangles ABCD et AB'C'D'.

L'aire $\mathcal{A}$ de ABCD est égale à AB × BC et celle $\mathcal{A}'$ de AB'C'D' est égale à $\frac{1}{3}$ AB × $\frac{1}{3}$ BC. Soit $\mathcal{A}' = \frac{1}{9}\mathcal{A}$.

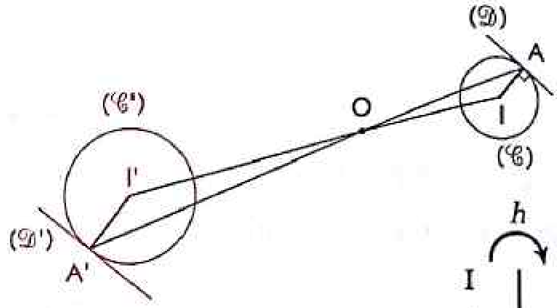


2.3. Travaux dirigés

Soit [OI] un segment tel que OI = 3. Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de centre I et de rayon 1, h l'homothétie de centre O et de rapport – 2, A un point de ($\mathscr{C}$), ($\mathscr{D}$) la tangente en A au cercle ($\mathscr{C}$).
1°) Définir et construire l'image ($\mathscr{C}$') du cercle ($\mathscr{C}$) et l'image A' du point A par h.
2°) Démontrer que l'image par h de la droite ($\mathscr{D}$) est la tangente en A' au cercle ($\mathscr{C}$').

Solution

1°) On sait que ($\mathscr{C}$') est le cercle de centre I', image de I par h, et de rayon : $|-2| \times 1 = 2$.



2°) Désignons par ($\mathscr{D}$') l'image de ($\mathscr{D}$) par h.
A appartient à ($\mathscr{D}$)∩($\mathscr{C}$), son image A' appartient ($\mathscr{D}$')∩($\mathscr{C}$'). ($\mathscr{D}$) étant tangente en A à ($\mathscr{C}$), (IA) est perpendiculaire à ($\mathscr{D}$). L'homothétie conservant l'orthogonalité, (I'A') est perpendiculaire à ($\mathscr{D}$').

h

I	I'
A	A'
(IA)	(I'A')
($\mathscr{D}$)	($\mathscr{D}$')

Ainsi, ($\mathscr{D}$') est la droite passant par le point A' de ($\mathscr{C}$') et perpendiculaire à (I'A'). C'est donc la tangente en A' à ($\mathscr{C}$').

Remarque

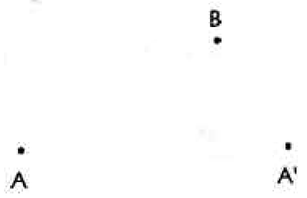
D'une manière générale, on peut démontrer que, par une homothétie transformant A en A' :
– une droite et un cercle tangents en A ont pour image une droite et un cercle tangents en A' ;
– deux cercles tangents en A ont pour image deux cercles tangents en A'.
Pour retenir ces propriétés, on dit que l'homothétie « conserve le contact ».

Exercices

2.a Soit un parallélogramme ABCD, O son centre, B' le symétrique de A par rapport à B et D' le symétrique de A par rapport à D. Démontrer que les points B', C, D' sont alignés.

2.b Un élève a construit, au crayon, les images A' et B' de deux points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport – 0,5. Malheureusement, un coup de gomme intempestif a effacé les points O et B'. Reconstruire ces points dans les deux cas de figure proposés ci-dessous.

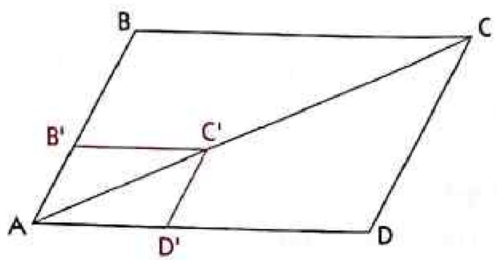
Premier cas :



Deuxième cas :

2.c Soit ABC un triangle et E un point du segment [AB]. La droite parallèle à (CB) passant par E coupe le côté [AC] en F. Déterminer la position de E pour que l'aire du triangle AEF soit le quart de celle du triangle ABC.

2.d On considère les deux parallélogrammes ABCD et AB'C'D' dessinés ci-dessous (le point C' est aligné avec A et C).
Démontrer que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.



3 Caractérisations d'une homothétie

3.1. Diverses caractérisations d'une homothétie

D'après la définition, une homothétie différente de l'identité est caractérisée par la donnée de son centre et de son rapport. Nous allons dans ce paragraphe donner d'autres caratérisations d'une homothétie.

Homothétie définie par son centre, un point et son image

Propriété

Soit trois points alignés O, A, A', deux à deux distincts.

Il existe une homothétie et une seule de centre O qui transforme A en A'.

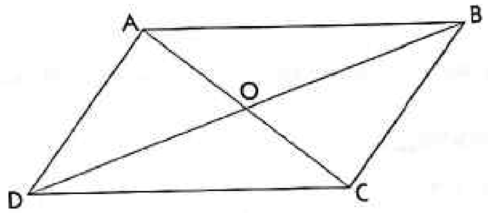
Démonstration

Les trois points O, A et A' étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ étant non nul, il existe un nombre unique réel k tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. k est différent de 0 sinon A' serait égal à O. A' est donc l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k. Remarquons que : $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Exemple

Dans le parallélogramme ABCD ci-contre de centre O, les trois points A, O, C sont alignés :

- C peut être considéré comme l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1 ;
- O peut être considéré comme l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$;
- D peut être considéré comme l'image de O par l'homothétie de centre B et de rapport 2.



Construction

h étant l'homothétie de centre O transformant A en A', on veut construire l'image d'un point M distinct de O et de A.

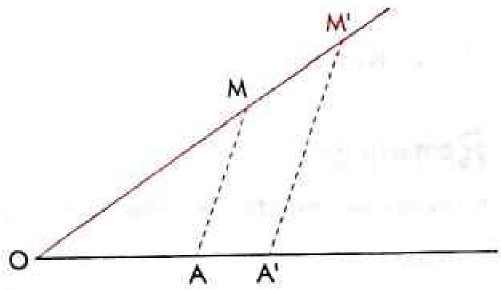
Distinguons deux cas.

1°) M n'appartient pas à la droite (OA).

- Construire la droite passant par A' et parallèle à (AM).
- Marquer le point d'intersection M' de cette droite avec la droite (OM).

(OM) et (A'M') sont sécantes car (OM) et (AM) le sont par hypothèse.

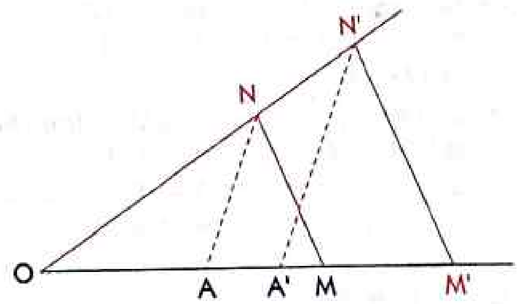
L'image de M appartient à (OM) (car il est aligné avec O et M). h(M) appartient aussi à l'image de (AM) qui est la droite passant par A' et parallèle à (AM). Donc h(M) = M'.



2°) M appartient à la droite (OA).

- Construire l'image N' d'un point N n'appartenant pas à (OA) en utilisant la construction précédente.
- Construire le point d'intersection M' de (OA) avec la parallèle à (MN) passant par N'.

En faisant deux fois de suite le raisonnement précédent, on démontre que M' est l'image de M par h.



Homothétie définie par son rapport, un point et son image

Propriété

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1, deux points A et A'.
Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui transforme A en A'.

Démonstration

Soit O un point .

$$
\begin{aligned}
A' = h_{(O,k)}(A) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = -k\overrightarrow{AO} \\
&\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AA'} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'} \text{ car } k \neq 1.
\end{aligned}
$$

Pour A, A' et k donnés ($k \neq 0$ et $k \neq 1$), il existe un seul point O tel que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$. Il n'y a donc qu'une seule homothétie de rapport k qui transforme A en A'.

Homothétie définie par deux points et leurs images

Propriété

Soit quatre points A, B, A', B' tels que (AB)//(A'B') et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B'.

Démonstration

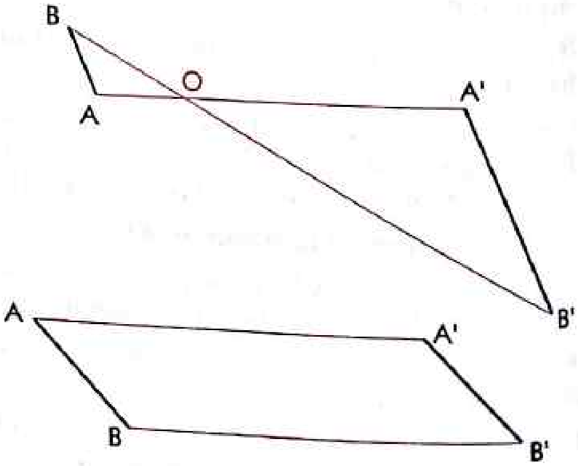
Si une telle homothétie existe, d'après la propriété fondamentale, son rapport ne peut être que le nombre réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$ et $k \neq 1$). L'homothétie recherchée ne peut être que l'homothétie h de rapport k transformant A en A', ce qui démontre l'unicité de h.

Pour démontrer que h convient, il reste à vérifier que $h(B) = B'$. Soit O le centre de h.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} \\
&= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \\
&= k\overrightarrow{OB}.
\end{aligned}
$$

h transforme bien B en B'.

Remarques



- *Lorsqu'on oriente les deux droites (AB) et (A'B') par le même vecteur unitaire, on a :* $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.
- *Lorsque les droites (AB) et (A'B') sont disjointes, le centre de l'homothétie est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').*
- *Si* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, *une homothétie transformant A en A' et B en B' aurait pour rapport 1 et serait donc égale à l'application identique. Si A = A', Id convient. Sinon, il n'y a aucune homothétie répondant à la question.*

On peut remarquer que la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ *transforme A en A' et B en B'.*

3.2. Travaux dirigés

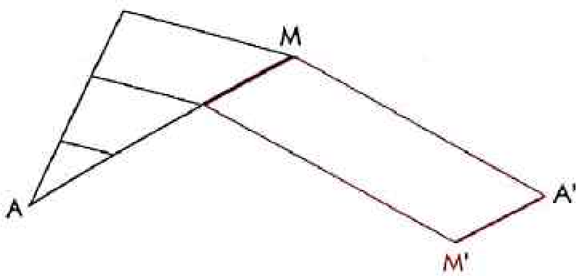
1. Construire l'image du point M par l'homothétie de rapport k qui transforme A en A'

Solution

On prendra par exemple $k = -\frac{1}{3}$.

Première méthode

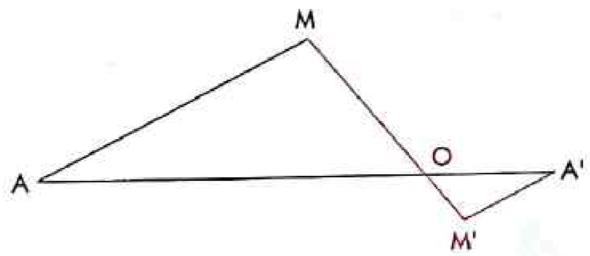
On construit le point M' tel que : $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.



Deuxième méthode

On construit le centre O défini par : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$.

Puis, on construit le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.



2. Homothétie définie par deux points A et B, et leurs images A' et B'

On donne les quatre points A, A', B, B' tels que (AB)//(A'B') et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Soit h l'homothétie qui transforme A en A' et B en B'.
M étant un point donné, construire l'image M' de M par h dans les deux cas suivants :
1°) *a)* M n'appartient pas à la droite (AB) ;
***b)* M appartient à la droite (AB).**

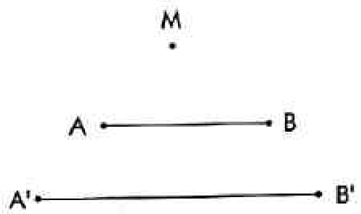


figure 1

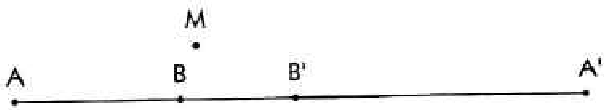


figure 2

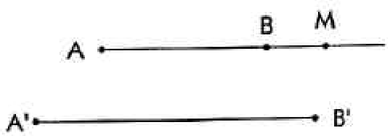


figure 3

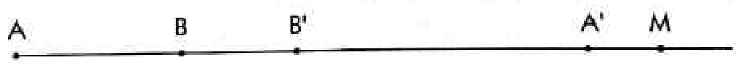


figure 4

2°) Reproduire les figures ci-dessous et construire, pour chacune d'elles, le point M' correspondant.

Solution guidée

1°) *a)* • Démontrer que : (M'A') // (MA) et (M'B') // (MB).

• En déduire la construction de M'.

b) • Choisir un point auxiliaire C n'appartenant pas à (AB) et construire C' à l'aide de la question précédente. h est aussi l'homothétie transformant A en A' et C en C'.

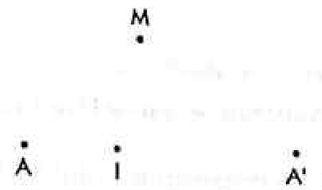
• Démontrer que M n'appartient pas à (AC).

• En déduire la construction de M'.

Exercices

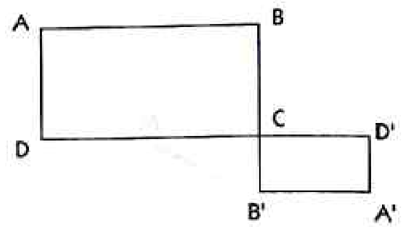
3.a Construire dans les cas de figures ci-dessous les images du point M par l'homothétie de centre I qui transforme A en A'.

1er cas



2e cas

3.b On donne les deux rectangles ABCD et CB'A'D' comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On a : AB = 4, BC = 2, CD' = 2, CB' = 1.
Démontrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme le rectangle ABCD en le rectangle A'B'CD'. On donnera le rapport de cette homothétie.



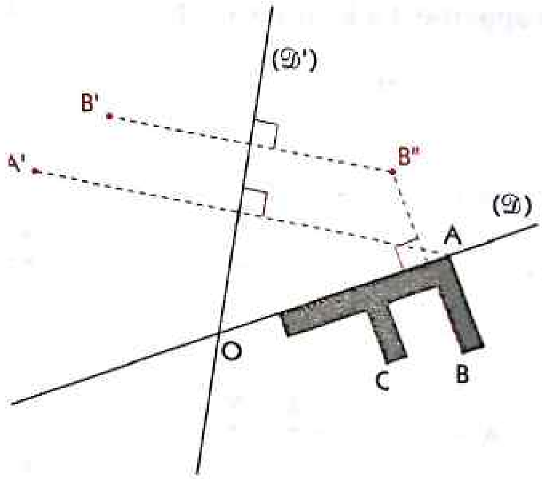
4 Rotation

4.1. Définition

Introduction

Considérons la « lettre F » ci-contre et les deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sécantes en O.
Soit $S_{(\mathscr{D})}$ et $S_{(\mathscr{D}')}$, les symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
On considère la transformation « $S_{(\mathscr{D})}$ suivie de $S_{(\mathscr{D}')}$ ».
Sur la figure, on a construit les points A' et B' images respectives de A et B par cette transformation. Construire les images d'autres points de la figure, puis celle de la « lettre F ».
Démontrer que : OA = OA' ; OB = OB' et OC = OC', etc.

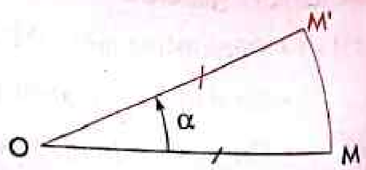
Comparer, à l'aide d'un rapporteur ou d'un compas, les angles orientés $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})$, $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})$.



Définition et exemples

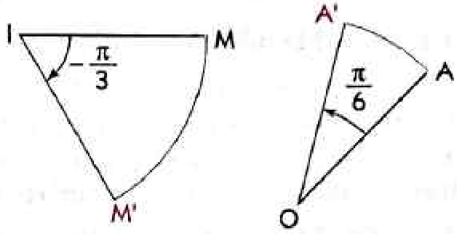
Définition

Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :
- **si M = O, alors M' = M ;**
- **si M ≠ O, alors OM' = OM et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.**

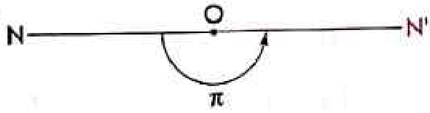


On note généralement $r_{(O,\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α.

Exemples



- On a construit ci-contre l'image A' du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'image M' du point M par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la rotation est aussi appelée quart de tour direct.
- Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, la rotation est aussi appelée quart de tour indirect.
- Si $\alpha = 0$, la rotation de centre O et d'angle 0 transforme tout point M en lui-même, c'est donc l'application identique.
- Si $\alpha = \pi$, la rotation de centre O et d'angle π est la symétrie centrale de centre O.



4.2. Conséquences de la définition

Propriété 1

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

Démonstration

Soit r la rotation de centre O d'angle α non nul. D'après la définition on a : $r(O)= O$. Le centre de la rotation est un point invariant.

Cherchons tous les points du plan qui sont invariants par r. Soit I un point distinct de O.

$$r(I) = I \quad \Leftrightarrow \begin{cases} OI = OI \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI}}) = \alpha\,; \end{cases}$$ ce qui est impossible puisque l'angle est non nul.

Donc O est le seul point invariant.

Propriété 2

La rotation est une transformation du plan.

La transformation réciproque de $r_{(O,\alpha)}$ est la rotation $r_{(O,-\alpha)}$.

Démonstration

Il est immédiat que O est le seul point dont l'image est O.

Soit M et M' deux points distincts de O.

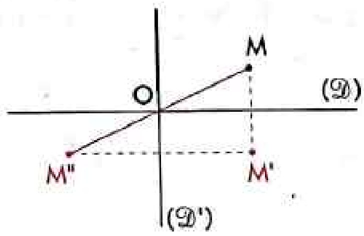
$$M' = r_{(O,\alpha)}(M) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}) = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \quad M = r_{(O,-\alpha)}(M').$$

Donc, tout point M' est l'image d'un et d'un seul point M. La rotation est donc une transformation du plan. L'application réciproque de $r_{(O,\alpha)}$ est la rotation $r_{(O,-\alpha)}$.

4.3. Exemple de décompositions d'une rotation

Soit $S_{(\mathscr{D})}$ et $S_{(\mathscr{D}')}$ deux symétries d'axes respectifs $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ perpendiculaires en O. On peut démontrer que l'application « $S_{(\mathscr{D})}$ suivie de $S_{(\mathscr{D}')}$ » est la symétrie centrale de centre O, c'est à dire une rotation d'angle plat.

Dans l'exercice suivant, on va étudier l'application « $S_{(\mathscr{D})}$ suivie de $S_{(\mathscr{D}')}$ » dans un cas où les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.



On considère un hexagone régulier ABCDEF de sens direct, de centre O.

1°) Soit $(\mathcal{D})$ la médiatrice de [AB] et $(\mathcal{D}')$ la médiatrice de [BC]. On considère l'application « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ ». Démontrer que cette application et la rotation r de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforment de la même manière les points A, B, C, D, E, F.

2°) Trouver deux autres droites (Δ) et (Δ') telles que l'application « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ » et la rotation r transforment de la même manière les points A, B, C, D, E, F.

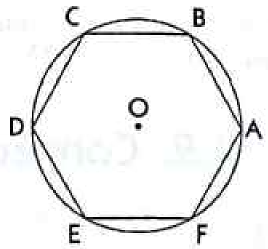
3°) Trouver encore deux autres symétries orthogonales avec lesquelles on obtient le même résultat.

Solution

1°) En utilisant l'application « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ » d'une part et r d'autre part, on a :

	$S_{(\mathcal{D})}$	$S_{(\mathcal{D}')}$
A	B	C
B	A	D
C	F	E
D	E	F
E	D	A
F	C	B

	r
A	C
B	D
C	E
D	F
E	A
F	B



2°) Soit (Δ) la droite (FC) et (Δ') la droite (AD). En utilisant successivement les deux symétries $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ d'axes (Δ) et (Δ'), on obtient les tableaux de correspondance ci-contre.

	$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta')}$
A	E	C
B	D	D
C	C	E
D	B	F
E	A	A
F	F	B

3°) Soit (δ) la droite (EB) et (δ') la droite (FC). En utilisant successivement les deux symétries $S_{(\delta)}$ et $S_{(\delta')}$ d'axes (δ) et (δ'), on obtient les tableaux de correspondance ci-contre.

	$S_{(\delta)}$	$S_{(\delta')}$
A	C	C
B	B	D
C	A	E
D	F	F
E	E	A
F	D	B

On dit qu'on a décomposé la rotation en deux symétries orthogonales, et cela de trois manières. On démontre qu'il y a une infinité de façons de faire cette décomposition.

4.4. Propriétés

On admettra les propriétés suivantes :

Propriétés

- **Étant donné deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sécantes en O, l'application « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ » est une rotation de centre O.**
- **Étant donné une rotation r de centre O, on peut trouver deux droites (Δ) et (Δ'), sécantes en O, telles que la rotation r soit l'application « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ ».**

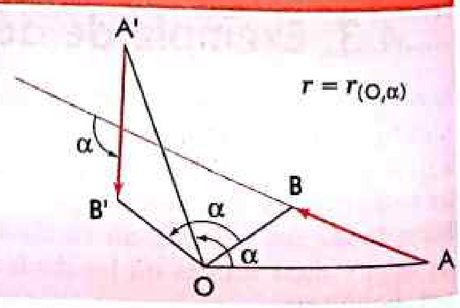
Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α, A' et B' les images respectives par r de deux points quelconques A et B.

On a :

$$A'B' = AB$$

et $$\text{Mes}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha.$$



Remarque

On appelle isométrie[1] toute transformation du plan dans lui-même qui conserve la distance, c'est à dire qui transforme tout segment en un segment de même longueur. La rotation est une isométrie. La translation, la symétrie orthogonale sont aussi des isométries. L'homothétie n'est pas, en général, une isométrie.

4.5. Images de figures simples

Images d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle

Propriétés

Toute rotation transforme :

(1) une droite en une droite ;

(2) un segment en un segment ;

(3) une demi-droite en une demi-droite ;

(4) un cercle en un cercle de même rayon.

Démonstration

On sait que toute rotation peut se décomposer sous la forme « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ » où $(\mathcal{D})$et $(\mathcal{D}')$ sont des droites sécantes. Or, une symétrie orthogonale tranforme une droite en une droite, un segment en un segment, une demi-droite en une demi-droite, un cercle en un cercle de même rayon. Il en est donc de même pour toute rotation.

Conservation du milieu d'un segment, des angles orientés, du parallélisme, de l'orthogonalité

Propriétés

Toute rotation transforme :

(1) le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;

(2) un angle orienté en un angle orienté égal ;

(3) deux droites parallèles en deux droites parallèles ;

(4) deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

Démonstration

Toute rotation r peut se décomposer sous la forme « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ ».

Comme les propriétés (1), (3), (4) sont vérifiées pour $S_{(\mathcal{D})}$ et $S_{(\mathcal{D}')}$, elles le sont pour r.

Une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé. Donc, « $S_{(\mathcal{D})}$ suivie de $S_{(\mathcal{D}')}$ » transforme un angle orienté en un angle orienté égal. La propriété (2) est donc démontrée.

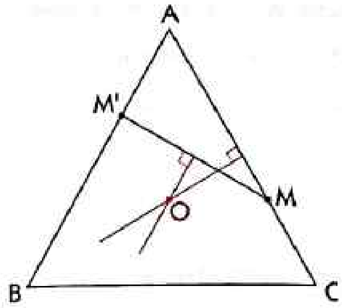
1. *Le mot isométrie vient du grec iso qui signifie même et metron qui signifie mesure.*

4.6. Travaux dirigés

Le but de l'exercice qui suit est de démontrer qu'une rotation peut être définie par la donnée de quatre points.

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, M le point du segment [CA] tel que $CM = \frac{1}{3}CA$ et M' le point du segment [AB] tel que $AM' = \frac{1}{3}AB$.
1°) Trouver une rotation qui transforme C en A et M en M'.
2°) Démontrer qu'il n'existe aucune autre rotation transformant C en A et M en M'.
3°) Démontrer qu'il existe une et une seule rotation transformant C en M' et M en A.

Solution guidée



1°) Le centre d'une telle rotation est nécessairement le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [MM'].

La figure permet de conjecturer que la rotation de centre O, centre de gravité du triangle équilatéral, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ convient.

- Démontrer que $r_{(O, \frac{2\pi}{3})}$ transforme C en A.
- Démontrer que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}})$ a pour mesure $\frac{2\pi}{3}$.
- Démontrer, en utilisant la propriété fondamentale, que : $r_{(O, \frac{2\pi}{3})}(M) = M'$.

2°) Soit r' une rotation transformant C en A et M en M'.
- Quel est son centre ?
- Quel est son angle ?
- Conclure.

3°) • Calculer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}})$.
- Trouver une rotation transformant C en M' et M en A.
- Démontrer qu'il n'y a pas d'autre rotation transformant C en M' et M en A.

Exercices

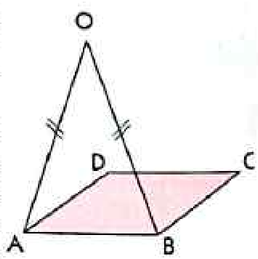
4.a Soit O et A deux points donnés. Construire l'image de A par la rotation de centre O d'angle 30°.

4.b Démontrer que l'image d'un rectangle par une rotation est un rectangle.
Que dire de l'image d'un carré par une rotation ?

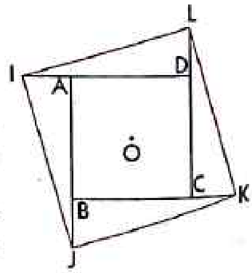
4.c Construire l'image de la droite ($\mathcal{D}$) par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4.d ABCDE est un pentagone régulier de centre O et de sens direct.
1. Déterminer les images respectives des points A, B, C, D et E par l'application f : « $S_{(OA)}$ suivie de $S_{(OB)}$ ».
2. Quelle est la nature et quels sont les éléments caractéristiques de l'application f ?

4.e Sur la figure ci-contre, OAB est un triangle isocèle en O et ABCD est un parallélogramme.
1. Construire le point E, image de D par la rotation de centre O qui transforme A en B.
2. Démontrer que le triangle BCE est isocèle.



4.f Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O et AI = BJ = CK = DL.
1. Déterminer une rotation qui transforme (A, I, J) en (B, J, K).
2. En déduire que le quadrilatère IJKL est un carré.



Exercices

APPRENTISSAGE

Homothéties

1 Traduire par des égalités vectorielles les phrases suivantes :
1. « M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 5 » ;
2. « Le point C a pour image D par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$ » ;
3. « L'homothétie de centre I et de rapport – 3 transforme A en B ».

2 Interpréter, en utilisant une homothétie, les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{BA}$; $2\,\overrightarrow{MN} = -5\,\overrightarrow{MP}$; $\frac{3}{2}\,\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG}$.

3 Soit h l'homothétie de centre I et de rapport – 2, A', B', C' les images respectives de A, B, C par h.
Compléter les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{IB'} = \dots\ \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{C'B'} = \dots\ \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{A'B'} = \dots\ \overrightarrow{AB}$.

4 Soit A, B et C trois points deux à deux distincts. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.
1. $\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. $\overrightarrow{BC} - 4\,\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
3. $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BA}$.

5 Soit A, B et C trois points deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AC} = 5\,\overrightarrow{BC}$. Déterminer le rapport de :
1. l'homothétie de centre A qui transforme C en B ;
2. l'homothétie de centre B qui transforme A en C ;
3. l'homothétie de centre C qui transforme A en B.

6 On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et M un point du plan. Construire l'image de M par l'homothétie qui transforme A en C et B en D.

7 On considère la figure suivante :

1. Trouver le centre de l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C.
2. Trouver le centre de l'homothétie de rapport – 2 qui transforme A en C.
3. Trouver le centre de l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B.

8 Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. Une homothétie h transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Définir les images des points H, O, I.

9 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $M\binom{x}{y}$. Calculer les coordonnées du point M', image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

10 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'application h du plan dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(-5x\,;\,-5y)$.
Démontrer que h est une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

11 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'application h du plan dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(2x - 1\,;\,2y + 3)$.
1. Démontrer qu'il existe un unique point I tel que $h(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$.
2. Démontrer que h est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

12 Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Soit f la transformation du plan qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(-2x + 3\,;\,-2y - 6)$.
Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre I et le rapport k.
2. Déterminer, en fonction de x et y, les coordonnées du point M'', image du point M par la transformation réciproque de f.

Rotations

13 Soit OAB un triangle isocèle de sommet principal O, tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.
1. Déterminer les points :
$r_{(O,\pi/4)}(A)$ et $r_{(O,-\pi/4)}(B)$.
2. Construire, à la règle et au compas, les points :
$r_{(O,-\pi/4)}(A)$; $r_{(O,\pi/4)}(B)$; $r_{(A,3\pi/8)}(B)$;
$r_{(B,-3\pi/8)}(A)$; $r_{(B,3\pi/8)}(O)$; $r_{(A,-3\pi/8)}(O)$.

14 Soit ABCD un rectangle tel que :
Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.
Construire à la règle et au compas l'image de ce rectangle par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

15 Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à cette droite.
1. *a)* Construire l'image (Δ') de (Δ) par le quart de tour direct de centre O. On écrira et justifiera le programme de construction.
b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u}\,'$ un vecteur directeur de (Δ'). Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}\,'})$?
2. Même question avec le quart de tour indirect de centre O.

16 Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à cette droite.

1. *a)* Construire l'image (Δ') de (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u}'$ un vecteur directeur de (Δ'). Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$?

2. Mêmes questions avec la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

17 Soit ABC un triangle équilatéral tel que :
Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, G son centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB].

1. Quels sont les points $r_{(B,\,\pi/3)}(C)$, $r_{(A,\,\pi/3)}(B)$, $r_{(C,\,\pi/3)}(A)$?
2. Déterminer le centre et l'angle d'une rotation qui transforme A en B, B en C et C en A.
3. Construire les points P, Q et R tels que $P = r_{(A,\,\pi/3)}(C)$, $Q = r_{(C,\,\pi/3)}(B)$, $R = r_{(B,\,\pi/3)}(A)$.
Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

18 Soit A et A' deux points distincts et r une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A'.

Construire à la règle et au compas le centre de cette rotation.

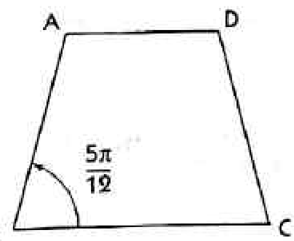
19 Soit ABCD un carré tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.
On note E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A. Déterminer son centre et son angle.
2. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A. Déterminer son centre et son angle.
3. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en F. Déterminer son centre et son angle.
4. *a)* Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E. Déterminer son centre.
b) Soit α la mesure principale de son angle. Démontrer que $\tan \frac{-\alpha}{2} = 2$. En déduire, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α.

20 Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites perpendiculaires.

1. Déterminer quatre rotations qui transforment $(\mathscr{D})$ en $(\mathscr{D}')$.
2. Quel est l'ensemble des centres des rotations qui transforment $(\mathscr{D})$ en $(\mathscr{D}')$?

21 Soit ABCD un trapèze isocèle de bases [AD] et [BC] tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{5\pi}{12}$.



1. Trouver une rotation transformant A en D et B en C. Préciser son centre et son angle.
2. Trouver une rotation transformant A en C et B en D. Préciser son centre.

22 Soit ABCD un carré tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.
Définir le centre et l'angle des rotations :
« $S_{(AB)}$ suivie de $S_{(AD)}$ » ;
« $S_{(AD)}$ suivie de $S_{(AC)}$ » ;
« $S_{(AC)}$ suivie de $S_{(BD)}$ ».

23 Soit ABC un triangle équilatéral tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, G son centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB].
Déterminer trois couples de droites $((\Delta), (\Delta'))$ tels que la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ soit l'application « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ ».

24 Soit ABC un triangle équilatéral direct, $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit, M un point de $\widehat{AC}$ et I le point du segment [MB] tel que MI = MA.

1. Démontrer que le triangle AMI est équilatéral.
2. Déterminer l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.
3. En déduire que : MA + MC = MB.

25 Soit OAB un triangle non isocèle tel que :
Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$. Soit O_1, O_2 les points de (OB) tels que : $O_1B = O_2B = OA$.

1. Démontrer que s'il existe une rotation transformant A en B et (OA) en (OB), alors :
a) son centre est sur la médiatrice de [AB] ;
b) l'image de O est soit O_1 soit O_2.
c) En déduire que son angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.
2. Démontrer qu'il existe deux rotations et deux seulement transformant A en B et (OA) en (OB). Construire leurs centres et donner leurs angles.

26 Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, M un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ et I', J', M' les images respectives de I, J, M par r.

1. Démontrer que le repère (O, I', J') est orthonormé direct.
2. Démontrer que le point M' a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère (O, I', J').
3. Exprimer, en fonction de x et y, les coordonnées de M' dans le repère (O, I, J).

APPROFONDISSEMENT

27 Soit $(\mathscr{D})$ une droite, A un point de $(\mathscr{D})$ et B un point de la droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par A.
On construit le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

1. Construire la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par l'homothétie de centre B et de rapport -2.
2. Trouver le lieu des centres de toutes les homothéties de rapport -2 qui transforment $(\mathscr{D})$ en $(\mathscr{D}')$.

28 On considère deux carrés ABCD et MNPQ de même sens et tels que : (AB) // (MN) et MN ≠ AB.

1. Peut-on trouver des homothéties qui transforment le premier carré en le second ? Si oui construire leurs centres.
2. En est-il de même pour deux rectangles ?

29 Soit R un nombre réel strictement positif et deux points O et O' tels que $OO' = 2R$. On considère les cercles ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon R et ($\mathscr{C}'$) de centre O' et de rayon $2R$.

1. Démontrer qu'il existe deux homothéties h_1 et h_2 qui transforment ($\mathscr{C}$) en ($\mathscr{C}'$). Déterminer les rapports de ces homothéties et construire leurs centres.
2. Soit A et B les points communs aux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$), A_1 et A_2 les images respectives de A par h_1 et h_2, B_1 et B_2 les images respectives de B par h_1 et h_2. Quelle est la nature du quadrilatère $A_1B_1A_2B_2$?

30 **Droite d'Euler**
Soit un triangle ABC, G son centre de gravité, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Déterminer les images par h des hauteurs du triangle ABC.
2. Démontrer que les points O, G, H sont alignés. Trouver la relation qui existe entre les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GO}$.

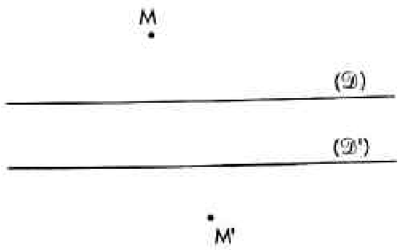
Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, l'unique droite qui contient O, G et H est appelée droite d'Euler.

31 On considère le trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. Les droites (AD) et (BC) se coupent en O et les droites (AC) et (BD) se coupent en O'. Démontrer que la droite (OO') coupe les bases du trapèze en leurs milieux.

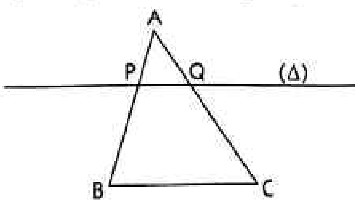
32 Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) deux droites parallèles, (Δ) et (Δ'), deux autres droites parallèles telles que :
- ($\mathscr{D}$) et (Δ) sont sécantes en A ;
- ($\mathscr{D}'$) et (Δ') sont sécantes en A'.

1. Trouver le centre de l'homothétie de rapport 2 qui transforme ($\mathscr{D}$) en ($\mathscr{D}'$) et (Δ) en (Δ').
2. Déterminer le lieu des centres des homothéties transformant ($\mathscr{D}$) en ($\mathscr{D}'$) et (Δ) en (Δ').

33 Sur la figure ci-dessous, ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) sont deux droites parallèles, M et M' sont deux points du plan. Démontrer qu'il existe une unique homothétie transformant M en M' et ($\mathscr{D}$) en ($\mathscr{D}'$).
Construire le centre de cette homothétie.



34 On considère un triangle ABC. Une droite (Δ) parallèle à (BC) coupe les côtés [AB] et [AC] en P et Q. Déterminer la position de la droite (Δ) pour que l'aire du triangle APQ soit égale à celle du quadrilatère PQCB.



35 Soit [AB] un segment de milieu O. On considère les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) de diamètres respectifs [AO] et [AB]. Une droite passant par A coupe ($\mathscr{C}$) en M et ($\mathscr{C}'$) en N. Démontrer que M est le milieu du segment [AN].

36 Soit ABCD un parallélogramme et I un point de la diagonale [BD]. La droite (AI) coupe (BC) en J et (DC) en K. Démontrer que : $IA^2 = IJ \times IK$.

37 Soit ABC un triangle. On construit extérieurement à ce triangle le carré BCDE. La droite (BC) coupe les droites (AE) et (AD) respectivement en P et Q. Les perpendiculaires à (BC) en P et Q coupent respectivement les côtés [AB] et [AC] en S et R. Démontrer que PQRS est un carré.

38 Soit A, B, C trois points non alignés. À tout point M du plan, on associe le point M' défini par :
$$3\,\overrightarrow{AM'} - 2\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.$$

1. Expliquer pourquoi à tout point M correspond un point M' unique. On définit ainsi une application f du plan dans lui-même. Déterminer les images de A, B, C par f.
2. Trouver un point invariant par f.
3. Démontrer que f est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

39 Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC], M un point de [AA'] distinct de A et A'. Les parallèles à (AB) et (AC) passant par M coupent (BC) respectivement en P et Q. Démontrer que A' est le milieu de [PQ].

40 Soit un triangle ABC et H son orthocentre. On note r le quart de tour direct de centre A et r' le quart de tour indirect de centre A.

1. Construire B', C' et C'' tels que : $B' = r(B)$, $C'' = r(C)$, $C' = r'(C)$.
2. Démontrer que (BC) est perpendiculaire à (B'C'')
3. Quelle est l'image de la droite (AH) par l'homothétie de centre C' et de rapport 2 ?
4. Démontrer que (AH) est une médiane du triangle AB'C'.

41 Soit ABC un triangle isocèle de base [BC], O le centre de son cercle circonscrit.

1. Déterminer la rotation de centre O transformant A en C. Quelle est l'image de B par cette rotation ?
2. Soit M un point du segment [BC]. La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en D et la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en E. Démontrer que E est l'image de D par cette rotation. En déduire que la médiatrice de [DE] passe par un point fixe quand M parcourt le segment [BC].

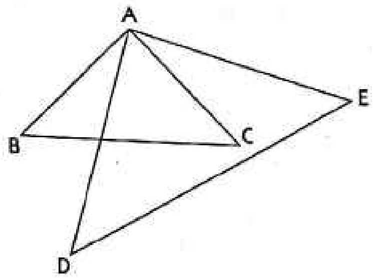
42 À l'extérieur d'un triangle direct ABC, on construit les carrés ACDE, ABGF, BHIC.

1. Déterminer la rotation transformant le triangle ACI en le triangle DCB.
En déduire que (AI) est perpendiculaire à (BD).
2. Démontrer que les droites (CG) et (AH) sont perpendiculaires.
3. Construire l'image du triangle AFE par le quart de tour direct de centre A.
4. Démontrer que l'image K' du milieu K de [EF], par ce quart de tour, appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A.
En déduire que (AK) est une hauteur du triangle ABC.

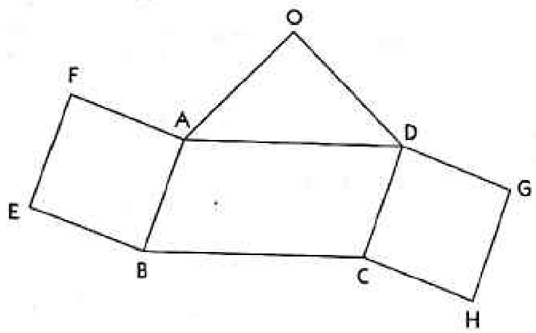
Scanned by CamScanner

43 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. A tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe le point M' tel que AMM' soit un triangle équilatéral de sens direct.
1. Vérifier que le point M' est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer et construire le lieu des points M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

44 ABC et ADE sont deux triangles rectangles isocèles en A et orientés dans le même sens.
Démontrer que les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires et que BD = CE.
(On pourra remarquer que les points A, C, E sont les images respectives des points A, B, D par une transformation simple).



45 ABCD est un parallélogramme de sens direct. On construit, extérieurement à ce parallélogramme, les carrés ABEF et CDGH, puis le triangle OAD rectangle isocèle en O.



1. Démontrer que les images des points A, B, F, E par le quart de tour direct de centre O sont respectivement les points D, G, C, H.
2. En deduire la position relative des droites (OE) et (OH).

46 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, M un point de $(\mathscr{C})$ et A un point du plan.
Déterminer et construire l'ensemble des images du point A par les homothéties de centre M et de rapport -2 lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

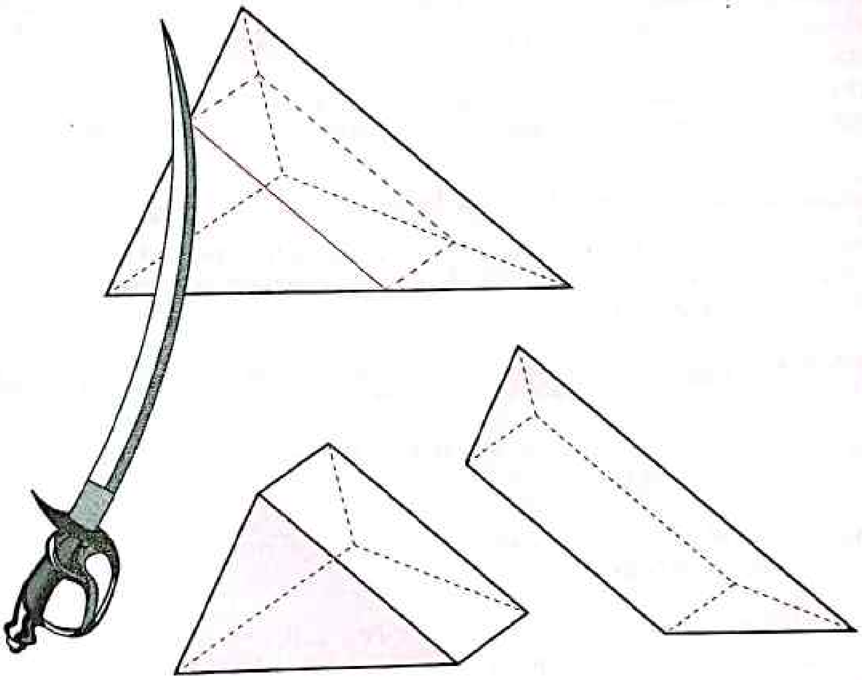
47 Soit $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et $2R$. Soit A un point de $(\mathscr{C}_1)$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Le but de cet exercice est de construire un triangle équilatéral ABC tel que A et B appartiennent à $(\mathscr{C}_1)$, C appartienne à $(\mathscr{C}_2)$.
1. Déterminer et construire l'image (Γ) de $(\mathscr{C}_1)$ par r et démontrer que (Γ) et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents en un point C.
2. Les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et (Γ) se coupent en A et en un deuxième point B. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral et calculer AB en fonction de R.

48 Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les applications du plan dans lui-même transformant toute droite $(\mathscr{D})$ en une droite $(\mathscr{D}')$ parallèle à $(\mathscr{D})$. Soit f une telle application.
1. On suppose que toute droite $(\mathscr{D})$ est sa propre image par f. Démontrer que f est l'application identique du plan. *(Pour tout point M du plan, on pourra considérer les images de deux droites sécantes en M).*
On suppose dans la suite de l'énoncé qu'il existe une droite $(\mathscr{D})$ dont l'image $(\mathscr{D}')$ par f est strictement parallèle à $(\mathscr{D})$. Soit A' et B' deux points distincts de $(\mathscr{D}')$ et A et B deux points de $(\mathscr{D})$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
2. Démontrer que A et B sont distincts.
3. On suppose dans cette question que (AA') et (BB') sont sécantes en un point O.
a) Démontrer que (AA') et (BB') sont leurs propres images par f.
b) En déduire que O est invariant par f et que O est distinct de A et B.
c) Soit M un point du plan n'appartenant pas à (AA'). Démontrer que l'image M' de M par f est le point d'intersection de (OM) et de la droite parallèle à (AM) passant par A'.
d) Soit M un point du plan appartenant à la droite (AA') privée de O. Démontrer que l'image M' de M par f est le point d'intersection de (OM) et de la droite parallèle à (BM) passant par B'.
e) Déduire des questions précédentes que f est l'homothétie de centre O appliquant A sur A'.
4. On suppose dans cette question que (AA') et (BB') sont parallèles.
a) Démontrer que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.
b) Soit M un point du plan n'appartenant pas à (AB) et M' son image par f. Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. *(On pourra considérer les images par f et par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ des droites (AM) et (BM).)*
c) Soit C un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et C' son image par f. Soit M un point du plan appartenant à (AB) privée de A. Démontrer que les droites (AM) et (CM) ne sont pas confondues. En raisonnant comme à la question précédente, démontrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.
d) Quelle est l'application f ?
5. Quelles sont les applications du plan dans lui-même qui transforment toute droite en une droite qui lui est parallèle ?

7

Géométrie de l'espace

Dans le premier cycle, on a découvert quelques propriétés de géométrie de l'espace à l'occasion de l'étude de certains solides. Cette année, nous allons adopter une présentation axiomatisée qui complète cette étude.



SOMMAIRE

1 Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1.1. Introduction

Un peu d'histoire

On peut dire qu'Euclide, mathématicien grec qui a vécu vers 295 av. J.- C. et fondé l'école mathématique d'Alexandrie, est le législateur de la géométrie. Deux philosophes grecs, à peu près contemporains (vers 350 av. J.- C.) s'étaient intéressés à la démonstration. « *Savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration* » écrit Aristote (384 - 322 av. J.- C.) qui met en place les fondements de la logique. La façon dont doit se dérouler une démonstration est décrite par Platon (427 - 347 av. J.- C.) dans « *la République* » : il constate que la démonstration s'appuie sur des « éléments connus » ou supposés tels, dont on déduit les résultats cherchés.

Mais que doivent être ces « éléments connus » ? Euclide dans ses « *Éléments de géométrie* », qui est son œuvre universellement connue, pose les fondements de sa géométrie (la géométrie euclidienne) en choisissant ces points de départ appelés axiomes. Dans le langage actuel, on dit qu'il a axiomatisé la géométrie.

D'autres choix d'axiomes peuvent conduire à la géométrie euclidienne ou à d'autres géométries dites non euclidiennes comme les géométries de Riemann (1826 - 1866) ou de Lobatchevski (1793 - 1856).

Axiomatisation de la géométrie de l'espace

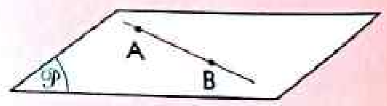
Pour les besoins de ce cours, nous avons choisi les axiomes qui suivent.
L'espace $\mathscr{E}$ est un ensemble infini de points admettant des sous-ensembles infinis appelés droites et plans qui satisfont aux axiomes suivants.

Axiomes

(A1) **Par deux points distincts A et B de $\mathscr{E}$, il passe une droite unique notée (AB).**

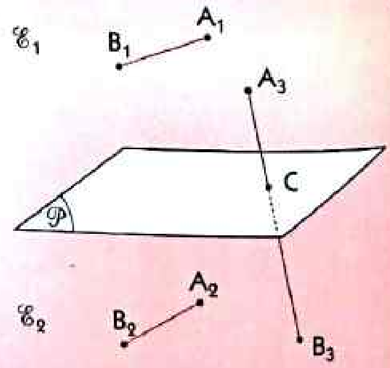
(A2) **Par trois points non alignés A, B et C de $\mathscr{E}$, il passe un plan unique noté (ABC).**

(A3) **Si A et B sont deux points distincts d'un plan $(\mathscr{P})$, alors $(\mathscr{P})$ contient la droite (AB).**



(A4) **Tout plan $(\mathscr{P})$ partage l'espace $\mathscr{E}$ en deux demi-espaces $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ non vides tels que :**

- **$\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $(\mathscr{P})$ sont deux à deux disjoints ;**
- **$\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup (\mathscr{P}) = \mathscr{E}$;**
- **si A et B sont deux points de $\mathscr{E}_1$, alors $\mathscr{E}_1$ contient [AB] ;**
- **si A et B sont deux points de $\mathscr{E}_2$, alors $\mathscr{E}_2$ contient [AB] ;**
- **si A et B sont des points appartenant respectivement à $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ alors [AB] et $(\mathscr{P})$ ont un unique point d'intersection C.**



(A5) **Les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.**

Remarques

- *Les deux demi-espaces $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ intervenant dans (A4) sont appelés demi-espaces ouverts de frontière $(\mathscr{P})$. Les ensembles $\mathscr{E}_1 \cup (\mathscr{P})$ et $\mathscr{E}_2 \cup (\mathscr{P})$ sont appelés demi-espaces fermés de frontière $(\mathscr{P})$.*
- *Lorsque deux points appartiennent l'un à $\mathscr{E}_1$, l'autre à $\mathscr{E}_2$, on dit qu'ils sont de part et d'autre du plan $(\mathscr{P})$.*

1.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

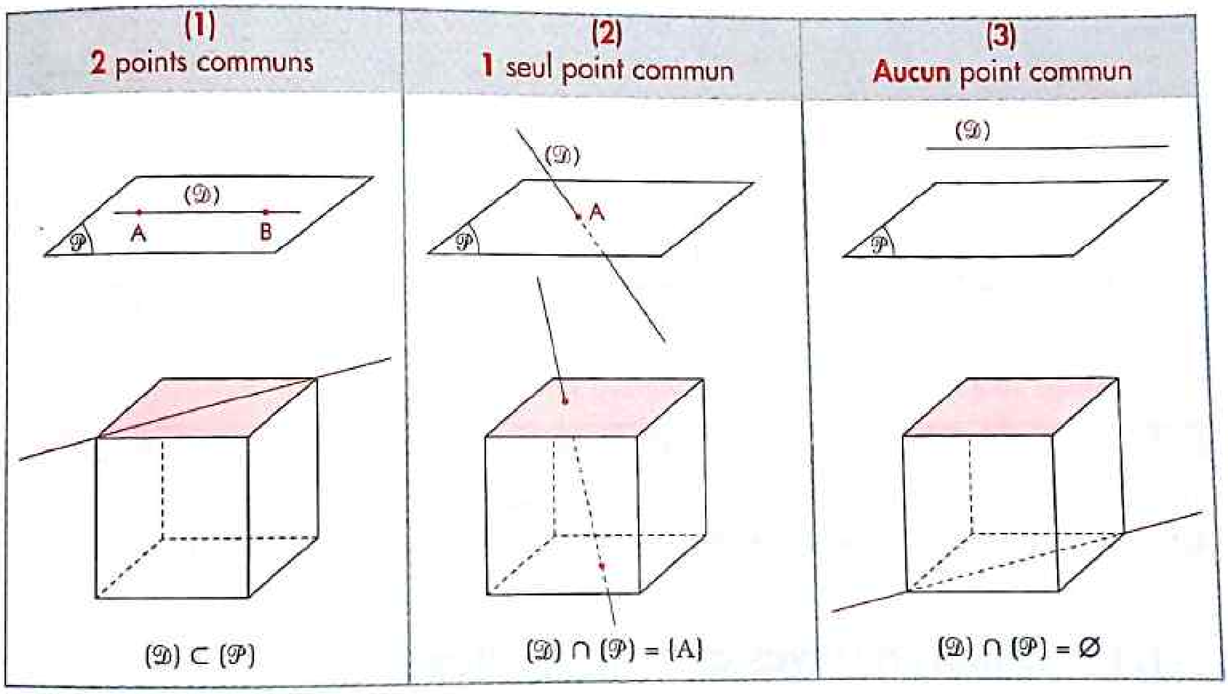
Propriété

Étant donné une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$, les différentes positions relatives sont :

(1) $(\mathscr{D})$ **est incluse dans** $(\mathscr{P})$.

(2) **L'intersection de** $(\mathscr{D})$ **et de** $(\mathscr{P})$ **est réduite à un point.**

(3) $(\mathscr{D})$ **et** $(\mathscr{P})$ **sont disjoints.**



Démonstration

Si les cas (2) et (3) ne sont pas réalisés, alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ ont en commun deux points distincts A et B, d'après l'axiome (A1) les droites $(\mathscr{D})$ et (AB) sont confondues et, d'après l'axiome (A3), $(\mathscr{D})$ est incluse dans $(\mathscr{P})$.

Cette propriété justifie les définitions suivantes.

Définitions

(1) **On dit qu'une droite $(\mathscr{D})$ est parallèle à un plan $(\mathscr{P})$ lorsque $(\mathscr{D})$ est incluse dans $(\mathscr{P})$ ou lorsque $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont disjoints.**

(2) **On dit que le plan $(\mathscr{P})$ est sécant à la droite $(\mathscr{D})$ au point I lorsque l'intersection de $(\mathscr{D})$ et de $(\mathscr{P})$ est réduite au point I.**

1.3. Positions relatives de deux plans

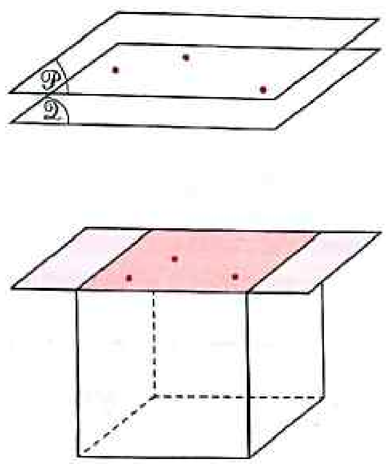
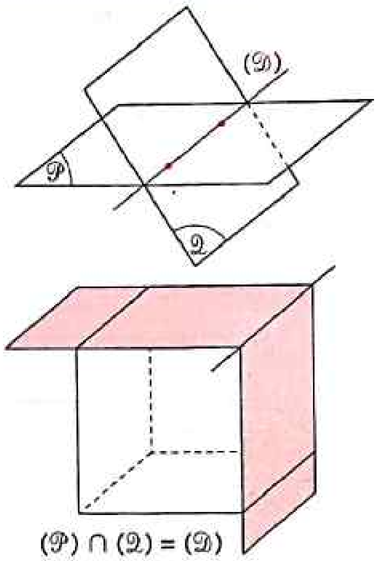
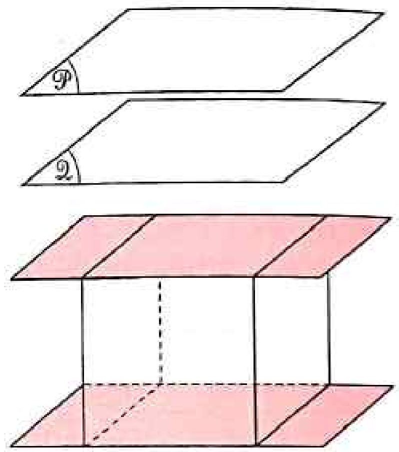
Propriété

Étant donné deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$, les différentes positions relatives sont :

(1) **$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont confondus.**

(2) **L'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ est une droite.**

(3) **$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont disjoints.**

(1) 3 points communs non alignés	(2) 2 points communs distincts	(3) Aucun point commun
 $(\mathcal{P}) = (\mathcal{Q})$	 $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q}) = (\mathcal{D})$	 $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q}) = \varnothing$

Cette propriété est admise. Elle justifie les définitions suivantes.

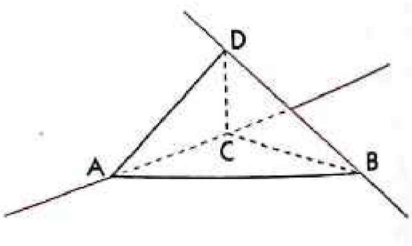
Définitions

(1) **Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.**

(2) **Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.**

1.4. Positions relatives de deux droites

Droites coplanaires, droites non coplanaires



L'axiome (A4) permet de justifier l'existence de 4 points non coplanaires[1].
Un solide à quatre sommets (non coplanaires) est appelé tétraèdre.
Soit ABCD un tétraèdre. Démontrons que les droites (AC) et (BD) sont non coplanaires.
Raisonnons par l'absurde. Si un plan contenait les droites (AC) et (BD), il contiendrait les points A, B, C et D. Ce qui est contradictoire. Donc (AC) et (BD) sont non coplanaires.

Propriété

Deux droites non coplanaires sont disjointes.

1. Coplanaire signifie « situé dans un même plan ».

Démonstration

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites non coplanaires. On veut démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont disjointes.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ont un point commun I.

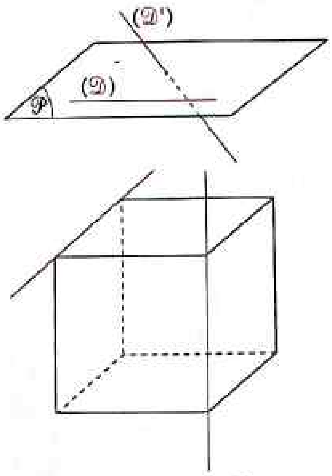
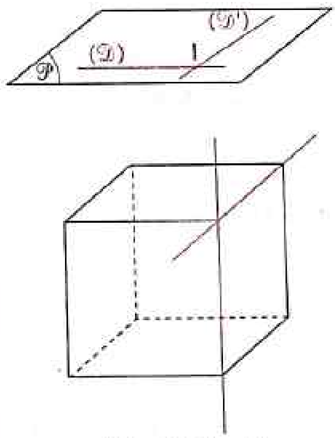
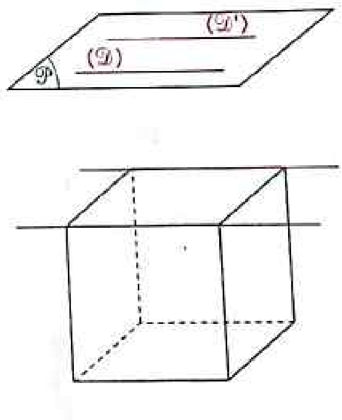
- Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ont un autre point commun J, alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues.
- Supposons que I est le seul point commun à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$. Soit J et K deux points distincts de I, appartenant respectivement à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$. D'après les axiomes (A2) et (A1), I, J et K sont non alignés et définissent un plan. D'après l'axiome (A3), $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont contenues dans (IJK).

Dans les deux cas, on a démontré que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont coplanaires, ce qui est contradictoire.

Donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont disjointes.

Résultats à retenir

On déduit des propriétés précédentes et de l'axiome (A5), le tableau suivant donnant les différentes positions relatives de deux droites.

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires	$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont coplanaires	
	$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes dans $(\mathscr{P})$	$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues ou strictement parallèles dans $(\mathscr{P})$
		
$(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}') = \varnothing$	$(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}') = \{I\}$	$(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}') = \varnothing$ ou $(\mathscr{D}) = (\mathscr{D}')$

Les propriétés précédentes justifient les définitions suivantes.

Définitions

(1) **Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou bien lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.**

(2) **Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point.**

Remarque

Deux droites disjointes ne sont pas nécessairement parallèles, elles peuvent être non coplanaires.

Détermination d'un plan

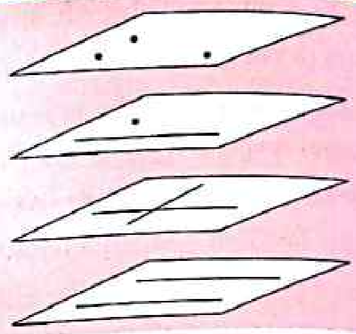
Propriétés

(1) **Il existe un seul plan contenant trois points non alignés.**

(2) **Il existe un seul plan contenant une droite et un point extérieur à cette droite.**

(3) **Il existe un seul plan contenant deux droites sécantes.**

(4) **Il existe un seul plan contenant deux droites strictement parallèles.**



Démonstration

(1) C'est l'axiome (A2).

(2) Deux points distincts de la droite et le point extérieur définissent un plan unique d'après (A2). Ce plan contient bien la droite d'après l'axiome (A3).

(3) On se ramène au cas précédent en choisissant sur l'une des droites un point extérieur à l'autre.

(4) Cela résulte de la définition du parallélisme de deux droites et de (2).

1.5. Travaux dirigés. Section plane d'un solide

Considérons un pavé droit ABCDEFGH en bois (fig. 1).
On décide de scier le « coin » B suivant les chemins [IJ] et [IK].
Une fois le « coin » tombé, il reste le solide de la figure 2.
Les faces rectangulaires ABCD, ABFE et BCGF ont pris les formes indiquées sur la figure 3.
Une face supplémentaire apparaît sur le solide (qui n'est plus un pavé) ; c'est une face triangulaire : la face IJK.
On l'appelle **section plane** du pavé ABCDEFGH par le plan (IJK).

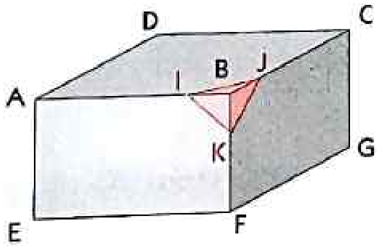


fig. 1

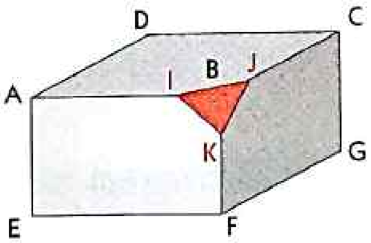


fig. 2

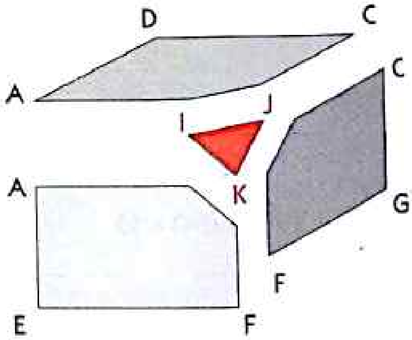


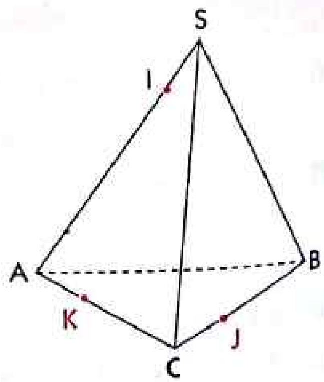
fig. 3

Soit un tétraèdre SABC et trois points distincts des sommets du tétraèdre tels que :

$I \in [SA]$; $J \in [BC]$; $K \in [AC]$; (JK) est non parallèle à (AB).

1°) Justifier que les points I, J, K définissent un plan ($\mathcal{P}$) sécant aux quatre plans contenant les faces du tétraèdre.

2°) Construire sur la figure en perspective ci-contre la section plane du tétraèdre par le plan ($\mathcal{P}$) ; on justifiera cette construction.



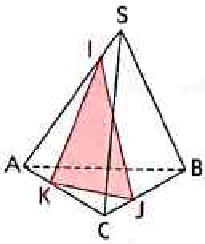
Solution

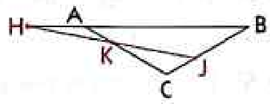
1°) I, J, K, définissent bien un plan (𝒫). En effet, s'ils étaient alignés, I appartiendrait à la droite (KJ) donc au plan (ABC). Par suite, S, point de la droite (AI), appartiendrait au plan (ABC), ce qui est exclu puisque SABC est un tétraèdre.

J est un point commun à (𝒫) et (ABC). I appartient à (𝒫) et n'appartient pas à (ABC). Donc, (𝒫) et (ABC) sont sécants.

On démontrerait de même que (𝒫) est sécant aux plans (ABS), (ACS) et (BCS).

2°) *On va successivement déterminer les intersections de (𝒫) avec chacune des faces du tétraèdre, en commençant par les faces sur lesquelles on a le plus de renseignements. Pour cela, à chaque étape, on repérera soigneusement tous les points du plan (𝒫) appartenant à une même face. On sait que deux plans sécants se coupent selon une droite. Donc les intersections de (𝒫) avec les faces du tétraèdre sont, au plus, quatre segments.*

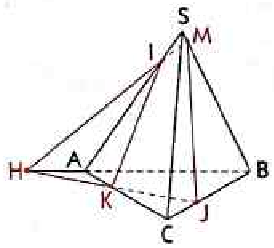




• (ABC) contient : A, B, C, J, K.
(𝒫) contient : I, J, K.
Donc : (ABC) ∩ (𝒫) = (JK).

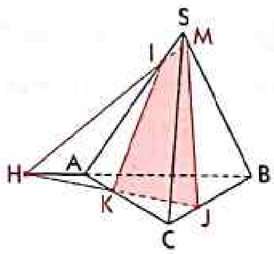
• (SAC) contient : S, A, C, I, K.
(𝒫) contient : I, J, K.
Donc : (SAC) ∩ (𝒫) = (IK).

• (SAB) contient : S, A, B, I.
(𝒫) contient : I, J, K.
I est donc un point commun à (SAB) et (𝒫) .
Cherchons un autre point commun à ces deux plans.
Les droites (JK) et (AB) du plan (ABC) se coupent en un point H qui est donc commun à (𝒫) et (SAB).
Donc : (SAB) ∩ (𝒫) = (IH).
Dans le plan (SAB), la droite (IH) coupe le segment [SB] en un point M qui est donc commun à (𝒫) et (SBC).



• (SBC) contient : S, B, C, J, M.
(𝒫) contient : I, J, K, H, M.
Donc : (SBC) ∩ (𝒫) = (JM).

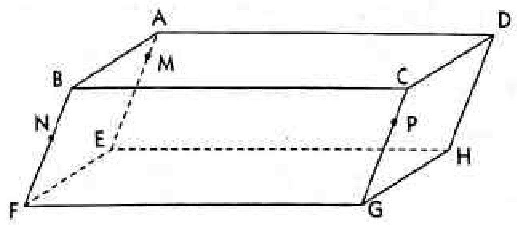
• La section plane recherchée est la région du plan (𝒫) délimitée par le quadrilatère convexe MIKJ.



Exercices

1.a Soit une pyramide régulière SABCD à base carrée ABCD, de centre O. Soit M un point de [SO]. Déterminer l'intersection de la droite (AM) avec le plan (SBC).

1.b Soit ABCDEFGH un pavé[1], M, N, P des points distincts des sommets appartenant respectivement à [AE], [BF], [CG] tels que (MN) et (NP) ne soient pas parallèles aux arêtes. Justifier que les plans (MNP) et (ABC) sont sécants et construire leur intersection.



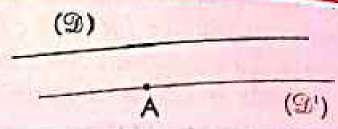
1. *Un pavé est un solide à six faces dont chacune est un parallélogramme.*

2 Étude du parallélisme

2.1. Parallélisme de deux droites

Propriété 1

Par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée[1].



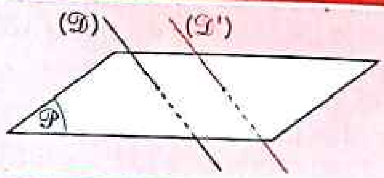
Démonstration

Soit A un point et $(\mathscr{D})$ une droite de $(\mathscr{E})$.

- Par définition, deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues, donc si A appartient à $(\mathscr{D})$, alors $(\mathscr{D})$ est l'unique droite de $(\mathscr{E})$ passant par A et parallèle à $(\mathscr{D})$.
- Si A n'appartient pas à $(\mathscr{D})$, il existe un plan $(\mathscr{P})$ unique contenant A et $(\mathscr{D})$. Toute droite passant par A et parallèle à $(\mathscr{D})$ sera contenue dans $(\mathscr{P})$. Dans le plan $(\mathscr{P})$, d'après l'axiome (A5), on peut appliquer la propriété suivante : il existe une et une seule droite passant par A et parallèle à $(\mathscr{D})$. La propriété est ainsi démontrée.

Propriété 2

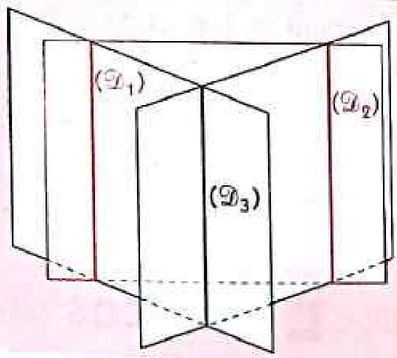
Si deux droites sont parallèles, tout plan coupant l'une coupe l'autre.



Cette propriété est admise.

Propriété 3

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.



Démonstration guidée

Soit $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ trois droites telles que $(\mathscr{D}_1)//(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_2)//(\mathscr{D}_3)$. On cherche à démontrer que $(\mathscr{D}_1)//(\mathscr{D}_2)$.

- Vérifier que la propriété est vraie lorsque deux des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ sont confondues.

Nous supposerons dorénavant les droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ deux à deux distinctes.

Soit A un point quelconque de $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{P})$ l'unique plan contenant $(\mathscr{D}_1)$ et A.

- Démontrer en utilisant la propriété 2 que si $(\mathscr{P})$ est sécant à $(\mathscr{D}_2)$, alors $(\mathscr{P})$ est sécant à $(\mathscr{D}_3)$ et à $(\mathscr{D}_1)$.
- En déduire que les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont coplanaires.
- À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que si les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ du plan $(\mathscr{P})$ sont sécantes, alors la propriété 1 est contredite.
- Conclure.

Conséquence

Deux droites coplanaires respectivement parallèles à deux droites non parallèles sont sécantes.

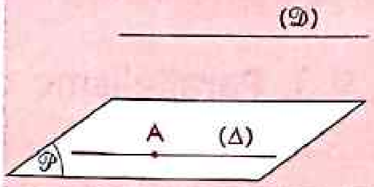
1. Dans sa construction axiomatique de la géométrie plane, Euclide avait choisi cette propriété pour axiome. Elle est restée connue sous le nom d'axiome d'Euclide.

2.2. Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété 1

Une droite $(\mathcal{D})$ est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe dans $(\mathcal{P})$ une droite parallèle à $(\mathcal{D})$.

Démonstration guidée



- Vérifier que la propriété est vraie lorsque $(\mathcal{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.

Nous supposerons dorénavant que $(\mathcal{P})$ ne contient pas la droite $(\mathcal{D})$.
Démontrons d'abord que si $(\mathcal{P})$ contient une droite (Δ) parallèle à $(\mathcal{D})$, alors $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.

- Démontrer que le plan $(\mathcal{Q})$ contenant $(\mathcal{D})$ et (Δ) est sécant à $(\mathcal{P})$ et déterminer l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$.
- Démontrer que si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ avaient un point commun, il appartiendrait à (Δ).
- Conclure.

Réciproquement, démontrons que si $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{P})$ contient une droite (Δ) parallèle à $(\mathcal{D})$.
Soit A un point quelconque de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ le plan contenant $(\mathcal{D})$ et A.

- Démontrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants.

Soit (Δ) leur droite d'intersection.

- Démontrer que $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont disjointes.
- Conclure.

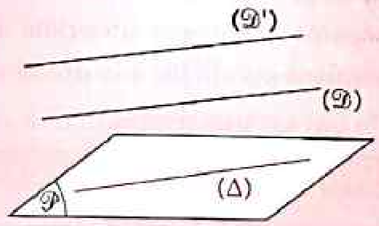
Remarque

Au cours de la démonstration, on a établi que si une droite $(\mathcal{D})$ est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$, toute droite parallèle à $(\mathcal{D})$ et passant par un point de $(\mathcal{P})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.

Propriété 2

Si une droite $(\mathcal{D})$ est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$, alors toute droite parallèle à $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.

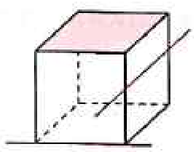
Démonstration



Soit $(\mathcal{D}')$ une droite parallèle à $(\mathcal{D})$. D'après la propriété précédente, le plan $(\mathcal{P})$ contient une droite (Δ) parallèle à $(\mathcal{D})$ donc à $(\mathcal{D}')$. On déduit de la même propriété que $(\mathcal{D}')$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.

Remarque

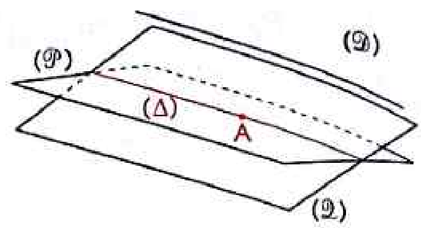
Deux droites parallèles à un même plan $(\mathcal{P})$ ne sont pas nécessairement parallèles entre elles (Cf. figure ci-contre).



Propriété 3

Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

Démonstration



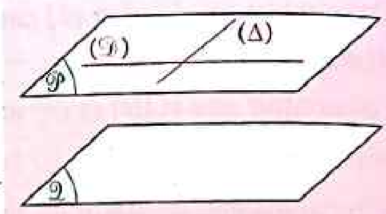
Soit $(\mathcal{D})$ une droite parallèle à deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sécants suivant (Δ). On veut démontrer que $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont parallèles. Soit $A \in (\Delta)$, d'après la remarque qui suit la propriété 1, la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par A est incluse dans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$. Cette droite est donc (Δ).

2.3. Parallélisme de deux plans

Propriété 1

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.

Démonstration guidée



- Vérifier que la propriété est vraie lorsque $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont confondus.

Nous supposerons dorénavant que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont distincts.

- Démontrer que si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont parallèles, deux droites sécantes arbitraires $(\mathcal{D})$ et (Δ) de $(\mathcal{P})$ sont parallèles à $(\mathcal{Q})$.

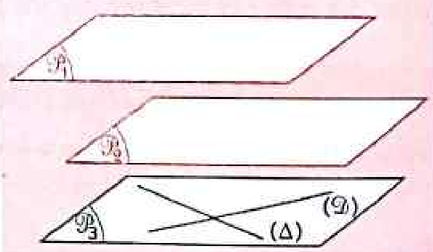
Réciproquement, on suppose maintenant que $(\mathcal{P})$ contient deux droites sécantes $(\mathcal{D})$ et (Δ) parallèles à $(\mathcal{Q})$.

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D}')$; à l'aide de la propriété 3 § 2.2, démontrer que $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont parallèles à $(\mathcal{D}')$.
- Conclure.

Propriété 2

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

Démonstration



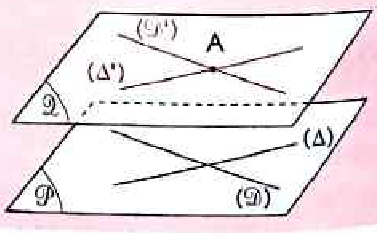
Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans parallèles à un plan $(\mathcal{P}_3)$, $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes incluses dans $(\mathcal{P}_3)$. Démontrons que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles. Raisonnons par l'absurde ; s'ils étaient sécants, d'après la propriété 3 § 2.2, les droites sécantes $(\mathcal{D})$ et (Δ) seraient parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.

Ce qui est une contradiction avec le fait qu'elles sont sécantes.

Propriété 3

Par un point donné de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné.

Démonstration



Soit $(\mathcal{P})$ un plan et A un point . Choisissons deux droites sécantes $(\mathcal{D})$ et (Δ) dans $(\mathcal{P})$. Soit $(\mathcal{D}')$ et (Δ') les droites respectivement parallèles à $(\mathcal{D})$ et (Δ) passant par A. $(\mathcal{D}')$ et (Δ') sont sécantes en A (cf. conséquence du § 2.1). Le plan $(\mathcal{Q})$ déterminé par les droites $(\mathcal{D}')$ et (Δ') contient A et deux droites sécantes parallèles à $(\mathcal{P})$. Donc $(\mathcal{Q})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$ d'après la propriété 1.

Il reste à démontrer que $(\mathcal{Q})$ est unique. Soit $(\mathcal{Q}')$ un plan passant par A et parallèle à $(\mathcal{P})$. $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q}')$ sont parallèles d'après la propriété 2. Ayant A en commun, ils sont confondus. $(\mathcal{Q})$ est donc unique.

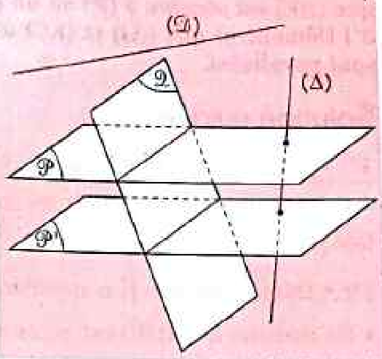
Propriété 4

Si deux plans sont parallèles :

(1) **tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ;**

(2) **toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;**

(3) **toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.**

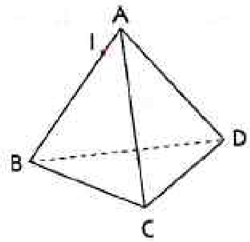


La démonstration de cette propriété est laissée au soin du lecteur.

2.4. Travaux dirigés

1. Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre et I un point du segment [AB] distinct de A et B.

1°) Démontrer qu'il existe un seul plan (𝒫) passant par I et parallèle aux droites (BD) et (AC).
2°) Construire les points d'intersection respectifs J, K et L de (𝒫) avec les droites (AD), (BC) et (CD).
3°) Démontrer que IJLK est un parallélogramme.



Solution guidée

1°) • Démontrer que le plan (𝒫), s'il existe, contient les droites parallèles à (BD) et (AC) passant par I.

• Démontrer que ces deux droites définissent le plan qui convient.

2°) • Démontrer que les plans (𝒫) et (ABD) sont sécants, et que leur droite d'intersection est parallèle à (BD).

• En déduire la construction de J.

• Déterminer de même les intersections du plan (𝒫) avec les plans (ABC) et (ACD).

• En déduire la construction de K et L.

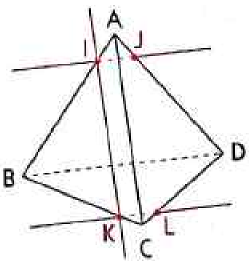
3°) • Justifier que I, J et K sont non alignés.

• Démontrer que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.

• Démontrer que (KL) est parallèle à (BD).

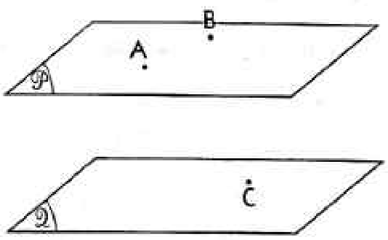
• Démontrer que les droites (I J) et (KL) sont parallèles.

• Conclure que IJLK est un parallélogramme.



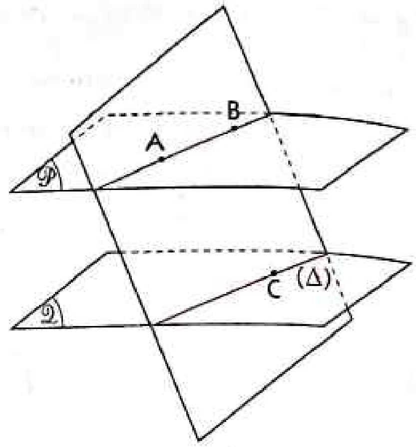
2. Soit (𝒫) et (𝒬) deux plans strictement parallèles[1], A et B deux points distincts de (𝒫) et C un point de (𝒬).

1°) Démontrer que les plans (𝒬) et (ABC) sont sécants et déterminer leur droite d'intersection (Δ).



1. Strictement parallèle signifie parallèle et disjoint.

2°) Soit D un point de (Δ) distinct de C tel que (BD) et (AC) soient sécantes en un point H, K un point de $(\mathcal{Q})$ non situé sur (Δ). Démontrer que (HK) est sécante à $(\mathcal{P})$ en un point I n'appartenant pas à (AB).
3°) Démontrer que (AI) et (KC) d'une part, (KD) et (BI) d'autre part sont parallèles.



Solution guidée

1°) • Démontrer que (ABC) est sécant à $(\mathcal{P})$.

• En déduire que (ABC) est sécant à $(\mathcal{Q})$ suivant une droite (Δ) parallèle à (AB).

2°) • Démontrer que H n'appartient ni à $(\mathcal{Q})$ ni à $(\mathcal{P})$.

• En déduire que (HK) est sécante à $(\mathcal{Q})$ puis à $(\mathcal{P})$.

• Démontrer que (HK) est sécante à (ABC) en H.

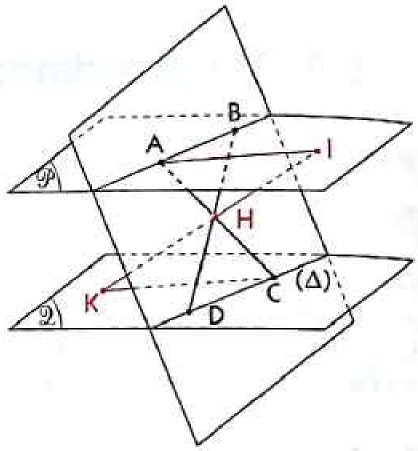
• En déduire que I n'appartient pas à (AB).

3°) • Démontrer que (ACK) est sécant à $(\mathcal{Q})$ suivant une droite que l'on déterminera.

• Démontrer que (ACK) est sécant à $(\mathcal{P})$ suivant une droite que l'on déterminera.

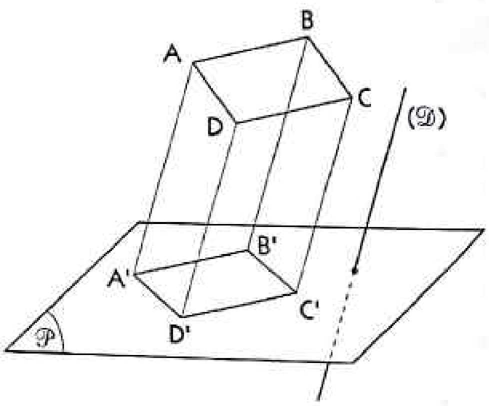
• En déduire que (AI) et (KC) sont parallèles.

• Procéder de même pour démontrer que les droites (KD) et (BI) sont parallèles.



3. Soit $(\mathcal{P})$ un plan, $(\mathcal{D})$ une droite sécante à $(\mathcal{P})$ et ABCD un parallélogramme dont les sommets n'appartiennent pas à $(\mathcal{P})$ et tel que $(\mathcal{D})$ soit sécante à (ABC). Les droites parallèles à $(\mathcal{D})$ passant respectivement par A, B, C et D coupent $(\mathcal{P})$ respectivement en A', B', C' et D'.

On cherche à démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.
1°) Démontrer que les points A', B', C' et D' ne sont pas alignés.
2°) Étudier la position relative des plans (ABA') et (CDC') puis celle des plans (ADA') et (BCB').
3°) Conclure que A'B'C'D' est un parallélogramme.



Solution guidée

1°) • Démontrer que si les points A', B', C' étaient alignés, alors la droite $(\mathcal{D})$ serait parallèle au plan (ABC).

• En déduire que les points A', B', C' sont non alignés.

2°) • Démontrer que les plans (ABA') et (CDC') sont parallèles.

• Étudier de même la position relative des plans (ADA') et (BCB').

3°) • Démontrer que les droites (A'B') et (D'C') sont strictement parallèles.

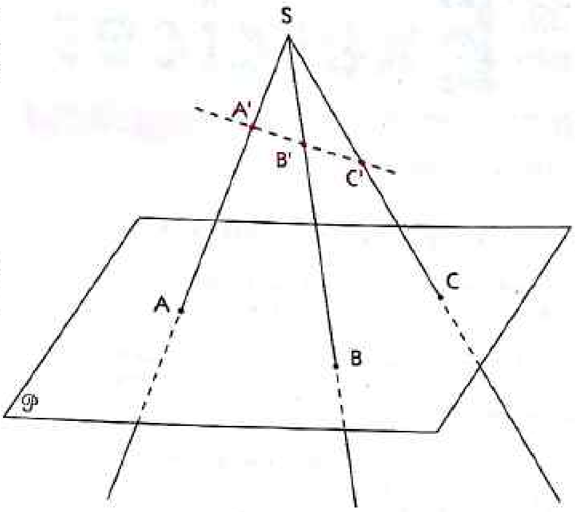
• Démontrer de même que (A'D') et (B'C') sont strictement parallèles.

• Conclure.

Remarque

L'application de $(\mathcal{E})$ dans lui même qui, à tout point M de $(\mathcal{E})$, associe le point d'intersection M' de $(\mathcal{P})$ et de la droite passant par M et parallèle à $(\mathcal{D})$ est appelée projection sur le plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$.

4. Sur la figure ci-contre, les points A, B, C appartiennent au plan (𝒫) et ne sont pas alignés, le point S n'appartient pas à (𝒫), et les points A', B', C' appartiennent respectivement aux droites (SA), (SB) et (SC).
Les points A', B', C' sont-ils alignés ?



Solution

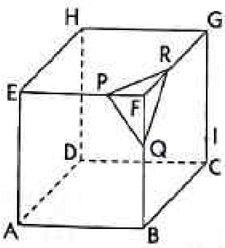
Si les points A', B', C' étaient alignés, alors le point S et la droite passant par A', B', C' détermineraient un plan (𝒫') qui contiendrait les points A, B, C. Ces trois points appartiendraient à l'intersection des plans sécants (𝒫) et (𝒫') et seraient donc alignés, ce qui est faux.

Exercices

2.a Soit un tétraèdre SABC, I le milieu de [BC]. Par un point M de [SA], on mène la parallèle (Δ) à (AI).
1. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (SBC).
2. Démontrer que la droite (Δ) est incluse dans le plan (SAI).
3. Construire, sur une figure en perspective, le point d'intersection N de (Δ) avec la face SBC. On justifiera la construction.

2.b On considère deux plans strictement parallèles (𝒫) et (𝒬). Soit A et M deux points distincts de (𝒫), B un point de (𝒬), I un point du segment [AB] distinct de A et B.
Démontrer que la droite (IM) est sécante au plan (𝒬). Construire, sur une figure en perspective, l'intersection de la droite (IM) avec le plan (𝒬). On justifiera la construction.

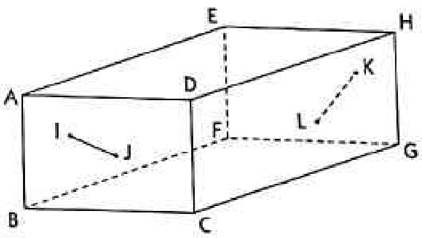
2.c



Reproduire la figure ci-dessus et construire la section du cube ABCDEFGH par le plan passant par le point I et parallèle au plan (PQR).

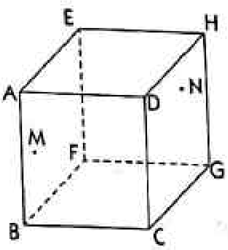
2.d Soit un pavé ABCDEFGH.
Soit I et J les centres respectifs des parallélogrammes ABCD et BCGF.
1. Démontrer que la droite (IJ) est sécante au plan (EFG).
2. Construire, sur une figure en perspective, le point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (EFG). On justifiera la construction.

2.e



Sur la figure ci-dessus, [IJ] est un segment de la face ABCD et [LK] un segment de la face EFGH du pavé ABCDEFGH.
Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

2.f M et N sont des points situés respectivement sur les faces ABFE et DHGC du cube.
Construire la section de ce cube par le plan parallèle à la droite (BC) et contenant les points M et N.



Exercices

APPRENTISSAGE

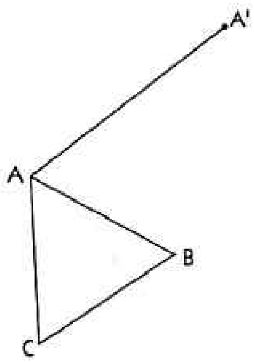
Perspective cavalière

On reverra les règles de la perspective cavalière présentées dans le premier cycle.

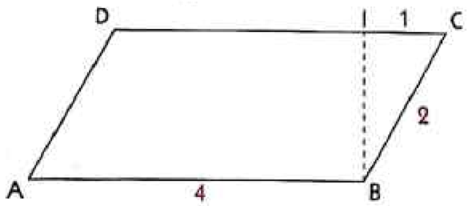
1 Représenter sur une feuille non quadrillée un cube de 7 cm d'arête en perspective cavalière avec $\alpha = 60°$ et $k = \frac{1}{2}$.

2 Représenter sur une feuille quadrillée $(0{,}5 \times 0{,}5)$ une pyramide régulière, à base carrée de 6 cm de côté, et de hauteur 10 cm en perspective cavalière avec $\alpha = 45°$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

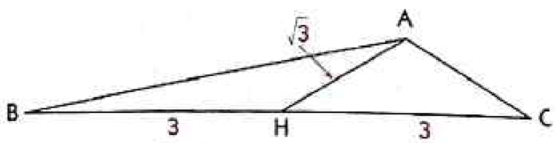
3 La figure ci-contre est le début de la représentation en perspective cavalière d'un prisme droit dont une base est le triangle ABC et dont une arête latérale est le segment [AA']. Achever cette représentation.
Lorsque les dimensions d'un solide ne sont pas connues le code (α, k) n'a pas à être précisé.



4 Le parallélogramme ci-dessous est la représentation en perspective cavalière d'un carré situé dans un plan horizontal. Déterminer, par le calcul, le code de cette perspective cavalière, c'est-à-dire l'angle des fuyantes et le coefficient de réduction. [AB], vu de face, est dessiné en vraie grandeur.



5 ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
1. La figure ci-dessous est la représentation en perspective cavalière de ce triangle, lorqu'il est situé dans un plan horizontal , le côté [BC] étant vu de face.

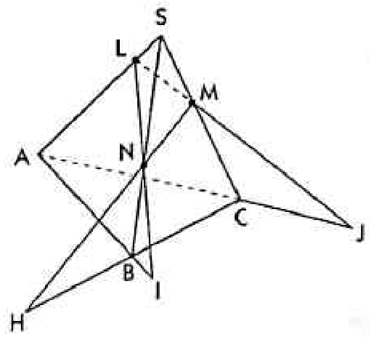


Préciser le code de cette perspective cavalière.
2. Représenter ce triangle en perspective cavalière avec le code $(\alpha = 45°, k = \frac{1}{3})$, lorsque la hauteur [AH] est verticale et vue de face, le support du côté [BC] est perpendiculaire au plan vertical de face.

Démonstration de propriétés

6 Soit une droite $(\mathcal{D})$ et un point A n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$. Soit $(\mathcal{P})$ le plan défini par $(\mathcal{D})$ et A, B un point n'appartenant pas au plan $(\mathcal{P})$.
Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) ne sont pas coplanaires.

7



Sur la figure ci-dessus, SABCD est un tétraèdre, L est un point de]SA[, M un point de]SC[et N un point de]SB[.
Les droites (MN) et (BC) se coupent au point H, les droites (NL) et (AB) se coupent au point I, les droites (LM) et (AC) se coupent au point J.
Démontrer que les points H, I et J sont alignés.

8 Soit un cube ABCDIJKL. A, D, K définissent un plan $(\mathcal{P})$.
1. Démontrer que J appartient à $(\mathcal{P})$.
2. Démontrer que les centres des faces ABJI et DCKL appartiennent à $(\mathcal{P})$.

9 SABCD est une pyramide, de sommet S, de base le parallélogramme ABCD ; O est le centre de cette base. Soit J le milieu de l'arête [SA].
1. Démontrer que les droites (CJ) et (SO) sont sécantes. On désignera par K leur point d'intersection.
2. Démontrer que les triangles SAC et SDB ont même centre de gravité.

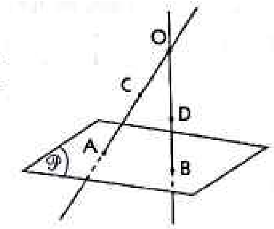
10 Soit un prisme droit ABCDEF, à bases triangulaires ABC et DEF. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [DF].
1. Déterminer la nature du quadrilatère IBEJ.
2. Soit O le point d'intersection des segments [IE] et [JB]. Les droites (AO) et (FC) sont-elles sécantes ?

Détermination d'intersections

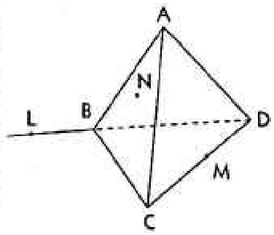
Pour chaque construction demandée on donnera un programme de construction justifié.

11 Sur la figure ci-dessous les points A et B appartiennent à $(\mathcal{P})$, les points C et D n'appartiennent pas à $(\mathcal{P})$, les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O.

Construire le point d'intersection de la droite (CD) et du plan $(\mathcal{P})$.



12 ABCD est un tétraèdre. L est un point de la droite (BD), M un point du segment [CD] et N un point de la face ABC, ces trois points n'étant pas alignés. Construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (LMN).

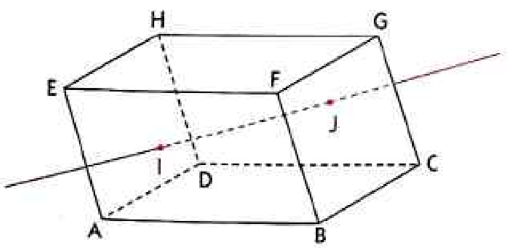


13 On considère un tétraèdre SABC. Soit E, F, G des points distincts des sommets respectivement situés sur les segments [SA], [SB], [SC]. On se place dans le cas où les droites (EG), (EF), (FG) sont sécantes au plan (ABC).

1. Démontrer que les plans (EFG) et (ABC) sont sécants selon une droite (Δ). Construire cette droite sur la figure.
2. Soit O le milieu de [EG]. Démontrer que la droite (SO) est sécante au plan (ABC). Construire le point K d'intersection sur la figure.
3. Soit P le centre de gravité du triangle EFG. Démontrer que la droite (SP) est sécante au plan (ABC) Construire le point I d'intersection sur la figure.

14 On considère un pavé ABCDEFGH. Soit I un point de la face ABFE, et J un point de la face DCGH (voir figure). On se propose de construire sur la figure en perspective proposée, le point d'intersection P de la droite (IJ) avec le plan (BFH).

1. Les droites parallèles à (AE) menées respectivement par I et J coupent respectivement les segments [EF] et [GH] en I' et J' et les segments [AB] et [CD] en I" et J". Démontrer que le quadrilatère I"I'J'J" est un parallélogramme.
2. Démontrer que les segments [HF] et [I'J'] se coupent et construire leur point d'intersection O sur la figure.
3. En déduire la construction de P.

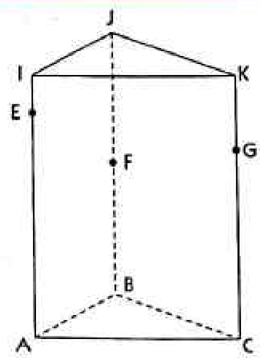


15 On considère un tétraèdre SABC et un plan $(\mathcal{Q})$ défini par trois points M, N, P tels que :
$M \in [SA]$ et $M \neq A$, $M \neq S$;
N et P ne sont pas situés sur les arêtes du tétraèdre ;
N appartient à la face SBC et P à la face SAC ;
(MP) et (SC) sont sécantes en I extérieur au segment [SC] ;
(MP) et (AC) sont sécantes en R appartenant au segment [AC].

1. Démontrer que le plan $(\mathcal{Q})$ est sécant aux quatre faces du tétraèdre.
2. Construire, sur une figure en perspective, la section plane du tétraèdre par le plan $(\mathcal{Q})$.

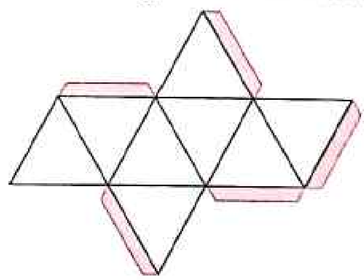
APPROFONDISSEMENT

16 Soit un prisme droit ABCIJK à base triangulaire. On le représente en perspective cavalière de sorte que la face ACKI soit de face et que la base soit représentée par un triangle ABC dont les dimensions sont :
AB = 2,5 cm ;
BC = 3,5 cm ;
AC = 5,5 cm.



La hauteur [AI] du prisme est de 7 cm.
Sur les arêtes [AI] , [BJ] et [CK] , on place trois points E, F, G tels que IE = 1 cm , JF = 3,5 cm et KG = 2 cm. Ces trois points définissent le plan (EFG). Soit M un point de [AI]. Déterminer l'intersection du prisme avec le plan $(\mathcal{P})$ passant par M, parallèle à (EFG) dans les cas suivants :
1. IM = 3 cm ;
2. IM = 5 cm.

17 1. Construire un octaèdre régulier de 6 cm d'arête d'après le patron ci-dessous. Déterminer le nombre de faces, d'arêtes, de sommets de ce solide.
2. Dessiner ce solide en perspective cavalière.
(α et k sont laissés à l'appréciation du dessinateur.)



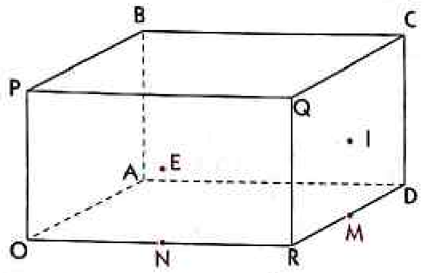
18 Soit une pyramide SABCD telle que la base ABCD est un parallélogramme de centre O.
Une droite (Δ) située dans le plan (ABC) tourne autour du point O. Lorsqu'elle n'est pas parallèle aux côtés du parallélogramme, elle coupe respectivement (AD) et (BC) en M et N, (AB) et (CD) en P et Q.
Déterminer la section de la pyramide par le plan défini par les droites sécantes (Δ) et (SO). On distinguera les cas : $M \in]AD[$; M = A ; M = D ; M extérieur à [AD].

19 Soit un prisme droit ABCDEFMNPQRS ayant pour base un hexagone régulier. Soit O le centre de la base ABCDEF.
1. Démontrer que les portions de plans définies par les triangles SFC, DQA, REB ont pour intersection un segment [OT] dont on précisera l'extrémité T.

2. Démontrer que les droites (QA), (RB), (SC), (MD), (NE) et (PF) sont concourantes.

20 Une pyramide de sommet S a pour base un parallélogramme ABCD de centre O. On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [SB] et [SC].
1. Quelle est la nature du quadrilatère AIJD ? Soit P le point d'intersection des diagonales [AJ] et [DI] du quadrilatère AIJD.
2. Soit I' et J' les intersections avec le plan (ABC) des parallèles à (SO) menées par I et J. Préciser leur position sur le plan de base.
3. Démontrer que P appartient à (SO).
4. Déterminer l'intersection du plan (AIJ) et de la droite (SO).

21 On considère un pavé droit ABCDOPQR. Soit E le centre de la face PQRO et I le centre de la face CDRQ, M le milieu de [RD] et N le milieu de [OR].



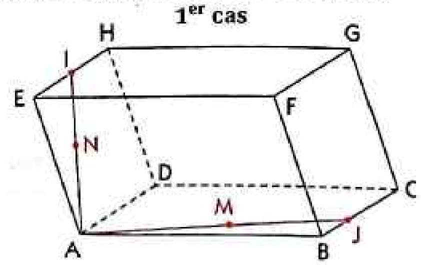
1. *a)* Déterminer le point d'intersection F de la droite (BE) avec le plan (ADR).
b) Déterminer le point d'intersection J de la droite (BI) avec le plan (ADR).
c) Démontrer que D, R, F sont alignés, ainsi que O, R, J.
2. On donne $AO = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB = h$.
a) Dessiner en vraie grandeur la face AORD (on prendra $a = 4$ cm pour le dessin). Placer sur la figure les points M,N,F,J.
b) Démontrer que le triangle AMN est rectangle.
3. Soit V le volume du pavé et v le volume du tétraèdre BAFJ.
a) Calculer V et v en fonction de a et h.
b) Vérifier que $\dfrac{V}{v} = 2$.

22 Soit un pavé ABCDEFGH, P le centre de la face ABCD.
1. Déterminer le point I, intersection de la droite (HP) avec le plan (ADF).
(On pourra s'intéresser à l'intersection des plans (ADF) et (DBF)).
2. *a)* Dessiner, en vue de face, HFBD. Placer P et I.
b) Calculer $\dfrac{ID}{IF}$.
(On pourra considérer les triangles IPD et IHF.)
3. *a)* Déterminer le point J, intersection de (EP) avec le plan (ADF).
b) Démontrer que : $\dfrac{IJ}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

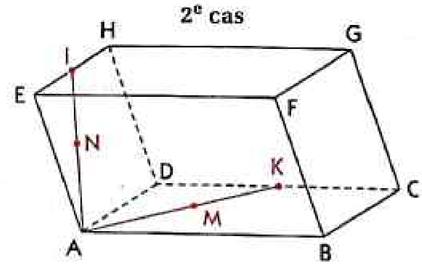
23 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée ABCD, I le milieu de [AB], J le milieu de [CD] et O le centre de ABCD.
1. *a)* Déterminer la section Σ de la pyramide par le plan ($\mathcal{P}$) contenant (IJ) et parallèle à la face SAD.
b) Quelle est la nature de la section Σ ?
2. On donne $AB = 2a$ et $OS = a\sqrt{2}$. Calculer le rapport des aires de Σ et de SAD.

24 Soit un pavé ABCDEFGH. On sait que les faces de ce solide sont des parallélogrammes situés dans des plans deux à deux parallèles. M est un point du plan (ABC) strictement intérieur au parallélogramme ABCD, N est un point du plan (ADH) strictement intérieur au parallélogramme ADHE.
1. Démontrer que les trois points A, M, N définissent un plan. Démontrer que ce plan est sécant à chacun des plans supports des faces du pavé.
2. Dans chacun des trois cas suivants, construire sur la figure en perspective proposée la section du pavé par le plan (AMN). On justifiera la construction.

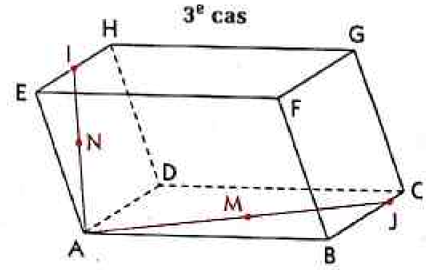
1^{er} cas



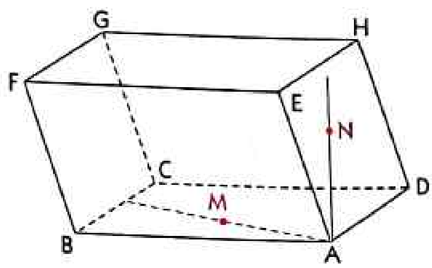
2^e cas



3^e cas



25 Soit un pavé ABCDEFGH.
Soit M un point de la face ABCD et N un point de la face ADHE, comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Démontrer que le plan (AMN) est sécant au plan (ADG). Construire leur droite d'intersection sur la figure reproduite à une plus grande échelle.
2. Démontrer que la droite (MN) est sécante au plan (ADG). Construire leur point d'intersection sur la figure.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

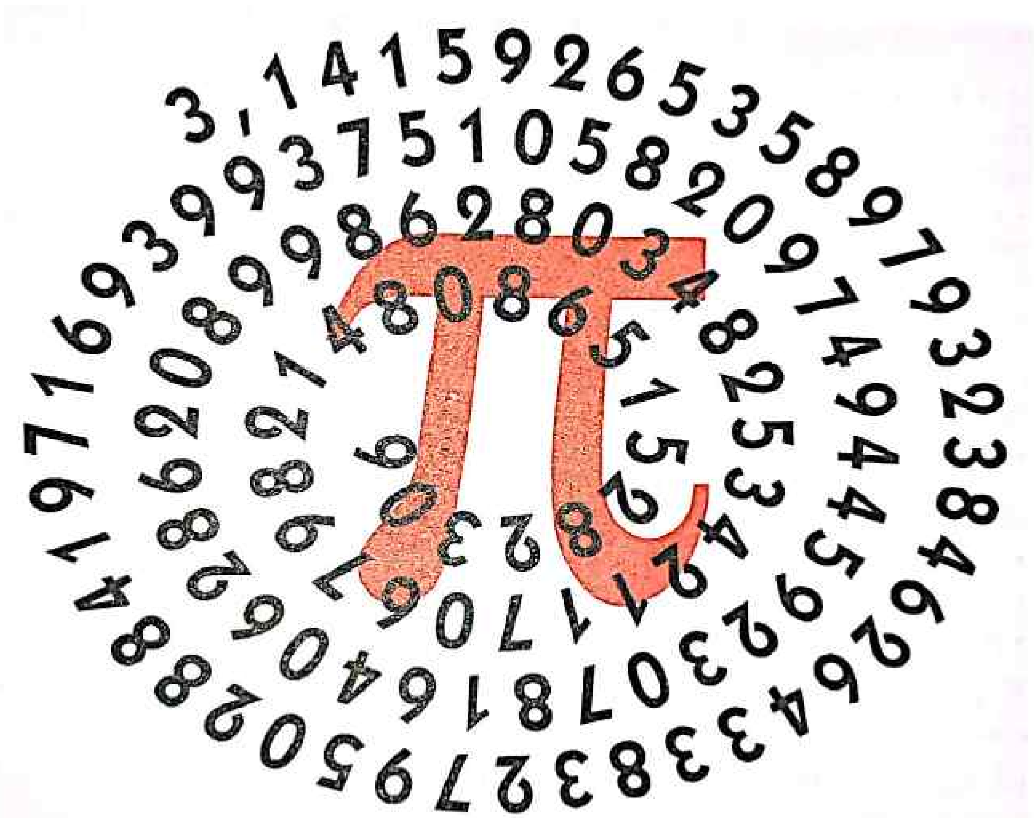
Tout a été créé par les nombres qui étaient le modèle exemplaire dans l'esprit du créateur.

Severinius BOECE (480-524, Rome)

8

Ensemble des nombres réels

Dans ce chapitre, après avoir précisé la notion de nombres réels, nous réviserons quelques règles de calculs, quelques propriétés sur les inégalités et la notion de valeurs approchées d'un nombre réel.



SOMMAIRE

Dans ce chapitre et pour toutes les constructions géométriques, on supposera qu'une unité de longueur a été choisie dans le plan.

1 Nombres rationnels et irrationnels

1.1. Nombres rationnels

Soit $(\mathscr{D})$ une droite munie d'un repère (O,I).
On dira qu'un nombre x est constructible si on peut construire, en utilisant uniquement une règle et un compas, le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse x.

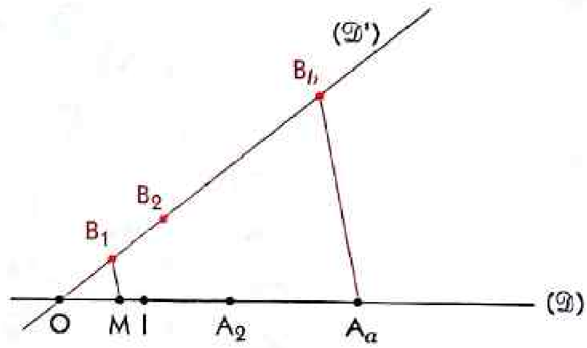
Dans les classes antérieures, on a vu que les nombres entiers relatifs sont constructibles : tout nombre entier relatif n est représenté par le point obtenu en reportant à l'aide du compas $|n|$ fois la distance OI à partir de O (sur la demi-droite [OI) si n est positif, sur la demi-droite opposée à [OI) si n est négatif).

Un nombre est rationnel lorsqu'il peut s'écrire sous la forme : $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ [1].

Démontrons que ces nombres sont constructibles.

Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel strictement positif.

- Construire sur $(\mathscr{D})$, à la règle et au compas, les points $A_2, A_3, \ldots, A_a$ d'abscisses respectives $2, 3, \ldots, a$ dans le repère (O,I).
- Sur une droite $(\mathscr{D}')$, sécante en O avec $(\mathscr{D})$, placer un point B_1 distinct de O ; construire ensuite, à la règle et au compas, les points $B_2, B_3, \ldots, B_b$ d'abscisses respectives $2, 3, \ldots, b$ dans le repère (O,B_1).
- Construire enfin, à la règle et au compas, le point d'intersection M de $(\mathscr{D})$ et de la droite parallèle à (B_bA_a) passant par B_1.



- Que vaut le quotient des distances $\frac{OB_b}{OB_1}$?
- Que vaut la distance OA_a ?
- À l'aide du théorème de Thalès, démontrer que : $OM = \frac{a}{b}$.

Si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel strictement négatif, démontrer qu'on peut se ramener au cas précédent en construisant le symétrique de M par rapport à O.

En déduire que tout nombre rationnel est constructible.

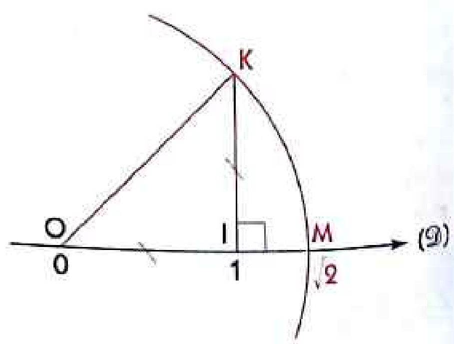
1.2. Nombres irrationnels

Nous donnons dans ce paragraphe un exemple de nombre constructible qui n'est pas rationnel : $\sqrt{2}$.

Construction de $\sqrt{2}$

D'après le théorème de Pythagore, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1 a pour mesure $\sqrt{2}$.

Pour construire sur $(\mathscr{D})$ le point d'abscisse $\sqrt{2}$, on construit donc un triangle rectangle OIK isocèle en I. Le cercle de centre O et de rayon l'hypoténuse de ce triangle recoupe la demi-droite [OI) au point M d'abscisse $\sqrt{2}$.



1. $\mathbb{N}^*$ *désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.*

Irrationalité de $\sqrt{2}$

• Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. On peut alors trouver une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. On en déduit que : $a^2 = 2b^2$.

Les tableaux suivants donnent le chiffre des unités de a^2 et de $2b^2$ en fonction du chiffre des unités des nombres a et b :

	Chiffre des unités									
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

	Chiffre des unités									
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2b^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

$a^2 = 2b^2$ ne peut être vrai que lorsque a et b se terminent par 0 ou lorsque a se termine par 0 et b par 5. Dans les deux cas, a et b seraient alors tous les deux multiples de 5, ce qui est contradictoire puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Ainsi, si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, on aboutirait à une contradiction. $\sqrt{2}$ est donc un nombre irrationnel.

L

La méthode de démonstration précédente est appelée *raisonnement par l'absurde*.

Son principe est le suivant : pour démontrer qu'une proposition (p)[2] est vraie, on prouve que la négation de cette proposition (non p) est fausse.

Pour cela :

– on suppose que (non p) est vraie ;

– on cherche à en déduire une proposition (q) que l'on sait fausse.

Ainsi, lorsque l'on y parvient, on aboutit à une contradiction et on a démontré que (non p) est fausse, c'est-à-dire que (p) est vraie.

Exemple

Dans la démonstration précédente :

(p) : « $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel » ;

(non p) : « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » ;

(q) : « il existe une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, où a et b sont tous deux multiples de 5 ».

Remarque

Parmi les nombres irrationnels, il en existe qui ne sont pas constructibles, par exemple le nombre π. Ce résultat fut laborieux à obtenir.

En effet, le problème de la constructibilité de π, connu sous le nom de quadrature du cercle, préoccupa de nombreux mathématiciens depuis l'antiquité jusqu'au XIX^e siècle. C'est un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques et un de ceux qui ont fait couler le plus d'encre. Ce n'est qu'en 1882 que Lindemann le résolut complètement en démontrant que π n'est pas constructible.

1.3. Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$. Il possède les propriétés suivantes :

– à tout point M d'une droite $(\mathcal{D})$ munie d'un repère (O,I), on peut associer un unique nombre réel appelé abscisse du point M dans le repère (O,I) ;

– réciproquement, pour tout nombre réel x, il existe un unique point M de $(\mathcal{D})$ admettant x pour abscisse dans le repère (O,I).

2. *Une proposition est une phrase qui est soit vraie, soit fausse.*

Autrement dit, l'application de $(\mathscr{D})$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point associe son abscisse dans (O,I), est une bijection de $(\mathscr{D})$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}+$ l'ensemble des nombres réels positifs, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses des points de la demi-droite [OI).
On note $\mathbb{R}-$ l'ensemble des nombres réels négatifs, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses des points de la demi-droite opposée à [OI).
On a donc : $\mathbb{R}+ \cup \mathbb{R}- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}+ \cap \mathbb{R}- = \{0\}$.
De même, on note respectivement $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$ l'ensemble des nombres réels non nuls, l'ensemble des nombres réels strictement positifs et l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.

Rappelons qu'on désigne par :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Par définition de ces ensembles, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.4. Travaux dirigés

1. Utiliser le raisonnement par l'absurde :

1°) pour démontrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel ;

2°) pour démontrer que $2 + \sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}-2}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}-5}$ sont des nombres irrationnels.

Solution guidée

1°) S'inspirer de la méthode utilisée pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2°) On pose $A = 2 + \sqrt{3}$. Exprimer $\sqrt{3}$ en fonction de A.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que A est un nombre irrationnel.

Procéder de même pour les deux autres nombres.

2. Démontrer que si a est un nombre réel ($a > 0$) constructible, $\sqrt{a}$ est constructible.

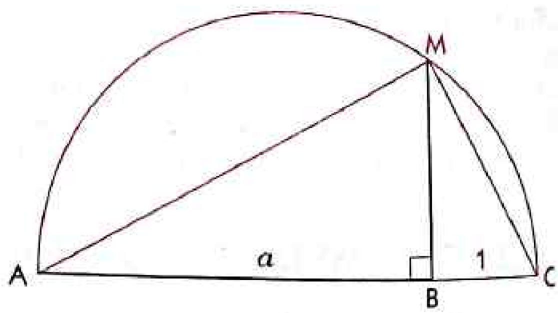
Solution guidée

Soit [AB] un segment de longueur a.

- Tracer à la règle et au compas le point C de la demi-droite [AB) tel que : AC = a + 1.
- Tracer un demi-cercle de diamètre [AC].

La droite perpendiculaire en B à (AC) coupe ce demi-cercle en un point M.

- Justifier que : mes $\widehat{BAM}$ = mes $\widehat{BMC}$.
- En déduire que : $\frac{BM}{BA} = \frac{BC}{BM}$.
- Conclure.



1.5. Rappel sur les calculs dans $\mathbb{R}$

Les définitions et propriétés de ce paragraphe ont été données dans le premier cycle pour les nombres rationnels ; elles s'étendent aux nombres réels. Nous les rappelons sans justification.

Quotients

Définition

Soit a un nombre réel, b un nombre réel non nul.

Le quotient de a par b est l'unique nombre réel x tel que : $bx = a$. On le note : $\frac{a}{b}$.

Remarque

$\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que b et d ne soient pas nuls, on a :

(1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; (2) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; (3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$;

si de plus $c \neq 0$,

(4) $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$; (5) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Puissances

Définition

• Soit a un nombre réel, n un nombre entier naturel non nul.

On pose : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

• De plus si $a \neq 0$, on pose : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$.

Propriétés

Pour tous nombres entiers relatifs m, n et pour tous nombres réels non nuls a, b, on a :

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$; (2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; (3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(4) $(ab)^n = a^n b^n$; (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; (6) $(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -a^n \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif.

$\sqrt{a}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré est a.

Remarque

$\sqrt{a}$ n'a de sens que si a est positif.

Propriétés

Pour tous nombres réels positifs a, b et pour tout nombre entier naturel n, on a :

(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; (2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (si $b \neq 0$) ; (3) $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$.

Remarque

$\sqrt{a+b}$ est en général différent de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; par exemple : $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$.

Propriété

Pour tout nombre réel positif a et tout nombre réel x, on a :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}.$$

Exercices

1.a Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme « la plus simple possible » :

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$; $\frac{8}{5}-\frac{4}{\sqrt{80}}$; $-\frac{7}{11}+\frac{7}{132}$;

$-\frac{400}{0,5}\times\frac{175}{18000}$; $\dfrac{\frac{10^{-3}}{4}}{\frac{10^{-7}}{24}}$.

1.b Soit a, b et c trois nombres réels deux à deux distincts. Simplifier les expressions suivantes :

$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$;

$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

1.c Écrire les nombres suivants sans dénominateur et à l'aide de puissances entières de nombres premiers :

$2^5\times 14^3$; $\frac{35^5}{21^4}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^8\times\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

1.d Écrire les nombres suivants sous la forme : $a+b\sqrt{n}$, où a et b sont des nombres rationnels et $n \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{1-\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\sqrt{5}}}$.

1.e 1. Mettre les nombres réels $4+2\sqrt{3}$ et $9-4\sqrt{5}$ sous la forme $(a+b\sqrt{c})^2$ où a, b et c sont des nombres entiers.

2. Écrire les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des nombres entiers :

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

2 Ordre dans $\mathbb{R}$

2.1. Inégalités dans $\mathbb{R}$

Nous avons utilisé dans les classes précédentes des relations du type « est inférieur ou égal à ». L'objet de ce paragraphe est de définir ces relations et de rappeler leurs propriétés.

Définitions et propriétés immédiates

Définitions

Soit a et b deux nombres réels ;
- **a est inférieur ou égal à b signifie que $b-a$ est un nombre réel positif ;**
- **a est strictement inférieur à b signifie que $b-a$ est un nombre réel strictement positif.**

Remarque

$\leq$ et $\geq$ sont les symboles d'inégalités larges ;
$<$ et $>$ sont les symboles d'inégalités strictes.

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b et c, on a :

(1) $a \leq a$;

(2) $a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a = b$;

(3) $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Remarque

Seule la propriété (3) reste vraie pour les inégalités strictes.

Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Toutes les propriétés suivantes restent vraies si on remplace partout les inégalités larges par les inégalités strictes correspondantes.

Propriétés

Soit a et b deux nombres réels.

(1) **Pour tout nombre réel c :** $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

(2) **Pour tout nombre réel $c \geq 0$:** $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

Pour tout nombre réel $c \leq 0$: $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$.

(3) **En particulier :** $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$.

Propriétés

(4) Pour tous nombres réels a, b, c et d : $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.

(5) Pour tous nombres réels a, b, c et d positifs : $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.

Remarque

Il n'existe pas de règle pour « soustraire » ou « diviser » membre à membre deux inégalités ; l'inégalité obtenue peut en effet être vraie ou fausse, comme le prouvent les exemples suivants :

$\begin{cases} 2 \leq 3 \\ 1 \leq 5 \end{cases}$ *mais* $2 - 1 \geq 3 - 5$ *et* $\dfrac{2}{1} \geq \dfrac{3}{5}$; $\begin{cases} 2 \leq 6 \\ 3 \leq 5 \end{cases}$ *et* $2 - 3 \leq 6 - 5$ *et* $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{6}{5}$.

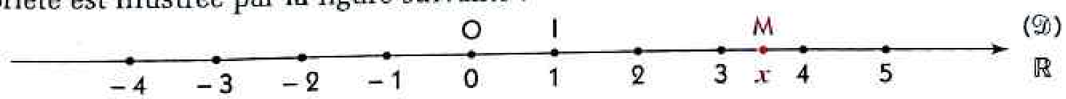
Propriétés

Pour tous nombres réels a et b positifs : (6) $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$; (7) $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs : (8) $a \leq b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Partie entière

On admet que, pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre entier relatif n vérifiant $n \leq x < n + 1$.
Cette propriété est illustrée par la figure suivante :



où (𝒟) est une droite munie d'un repère (O,I). Le point M de (𝒟), d'abscisse x, est situé entre deux points de (𝒟), d'abscisses entières consécutives n et $n + 1$.
Par exemple :
$8 \leq 8{,}7 < 9$; $3 \leq \pi < 4$; $-2 \leq -2 < -1$; $0 \leq 0 < 1$; $-6 \leq -5{,}7 < -5$; $-4 \leq -\pi < -3$.

Définition

La partie entière d'un nombre réel x est le nombre entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$.

Elle est notée $E(x)$.

Exemples

$E(8,7) = 8$; $E(\pi) = 3$; $E(-2) = -2$; $E(0) = 0$; $E(-5,7) = -6$; $E(-\pi) = -4$.

2.2. Travaux dirigés

1. Comparaison de nombres

Comparer les nombres réels suivants :

1°) $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$; $-\frac{3}{7}$ et $-\frac{4}{9}$; $\frac{34}{11}$ et $\frac{8}{3}$; $-\frac{81}{79}$ et $-\frac{77}{78}$.

2°) $5\sqrt{13}$ et 18 ; $\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{12\sqrt{2}}$; $2-2\sqrt{7}$ et $2-3\sqrt{3}$.

Solution guidée

Selon les cas, on choisira une technique de comparaison parmi celles rappelées ci-dessous :

M

Pour comparer deux nombres réels, on peut :
- les comparer à un nombre intermédiaire ;
- étudier le signe de leur différence ;
- s'ils sont strictement positifs, comparer leurs carrés, leurs racines carrées ou leurs inverses.

Remarque

Dans la comparaison de deux nombres réels, il peut être intéressant d'utiliser la calculatrice pour conjecturer ou vérifier le résultat.

2. Encadrement d'une somme, d'une différence

Soit a et b deux nombres réels vérifiant : $b < a < b + 1$ et $3 < b < 5$.
Donner un encadrement de $a + b$ et de $a - 2b$.

Solution guidée

Pour $a + b$:

1re méthode
Démontrer que : $3 < a < 6$.
En déduire que : $6 < a + b < 11$.

2e méthode
Démontrer que : $2b < a + b < 2b + 1$.
Démontrer que : $6 < 2b$ et $2b + 1 < 11$.
En déduire que : $6 < a + b < 11$.

Pour $a - 2b$:

1re méthode
Démontrer que : $3 < a < 6$ et $-10 < -2b < -6$.
En déduire que : $-7 < a - 2b < 0$.

2e méthode
Démontrer que : $-b < a - 2b < 1 - b$.
Démontrer que : $-5 < -b$ et $1 - b < -2$.
En déduire que : $-5 < a - 2b < -2$.

Les deux méthodes donnent des encadrements distincts pour $a - 2b$. On choisira le second qui fournit un résultat plus précis.

M

Pour encadrer une somme, on peut ajouter membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque terme de la somme.
Pour encadrer une différence, on peut :
- encadrer le premier terme ;
- encadrer l'opposé du deuxième terme ;
- ajouter membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenues.

3. Encadrement d'un produit, d'un quotient

Soit a et b deux nombres réels vérifiant : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -4$.
Donner un encadrement de $\frac{a+b}{ab}$.

Solution guidée

1re méthode
Vérifier que : $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Démontrer que : $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1$.

Encadrer successivement : $-b$, $-\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{b}$.

En déduire que : $\frac{1}{4} < \frac{a+b}{ab} < \frac{4}{5}$.

2e méthode
Démontrer que : $2 < -(a+b) < 4$.

Démontrer successivement que : $4 < -ab < 10$ et $\frac{1}{10} < -\frac{1}{ab} < \frac{1}{4}$.

En déduire que : $\frac{1}{5} < \frac{a+b}{ab} < 1$.

M

Pour encadrer un produit, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et multiplier membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque facteur du produit.

Pour encadrer un quotient, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et :
- encadrer le numérateur ;
- encadrer l'inverse du dénominateur ;
- multiplier membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenues.

4. Partie entière et encadrement, approximations décimales

1°) Soit x un nombre réel.
***a)* Démontrer que : $x - 1 < E(x) \leq x$.**
***b)* Démontrer que : $-\frac{1}{2} \leq x - E(x + \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.**

2°) On donne $\pi =$ 3,141 592 653 5...
***a)* Vérifier que : $\frac{E(10^3\pi)}{10^3}$ et $\frac{E(10^3\pi)+1}{10^3}$ sont respectivement les approximations décimales d'ordre 3 par défaut et par excès de π.**
***b)* Exprimer de même les approximations décimales d'ordre 5 par défaut et par excès de π en fonction de $E(10^5\pi)$.**

3°) Soit x un nombre réel et m un nombre entier naturel.
On pose : $d = \frac{E(10^m x)}{10^m}$ et $e = \frac{E(10^m x)+1}{10^m}$.
Que représentent e et d pour le nombre réel x ?

Solution guidée

1°) *a)* Poser $n = E(x)$ et utiliser les inégalités : $n \leq x < n + 1$.
b) Poser $p = E(x + \frac{1}{2})$ et utiliser les inégalités : $p \leq x + \frac{1}{2} < p + 1$.

2°) *a)* Vérifier que : $\frac{E(10^3\pi)}{10^3} = 3{,}141$ et $\frac{E(10^3\pi)+1}{10^3} = 3{,}142$.

3°) Démontrer que : $d \leq x < e$ et $e - d = 10^{-m}$. Conclure.

5. L'objet de ce travail dirigé est de constater que l'intervalle [0 ; 1] contient une infinité de nombres irrationnels.

On considère l'ensemble A des nombres de la forme $q\sqrt{2}$ où q est un nombre rationnel strictement compris entre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
1°) Démontrer que A est inclus dans [0 ; 1].

2°) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que tous les éléments de A sont des nombres irrationnels.
3°) Sachant que l'intervalle $]0 ; \frac{1}{2}[$ contient une infinité de nombres rationnels, démontrer que A contient une infinité d'éléments.

Solution

1°) Si x est un élément de A, il existe un nombre rationnel q tel que : $x = q\sqrt{2}$ et $0 < q < \frac{\sqrt{2}}{2}$; en multipliant les membres de cette inégalité par $\sqrt{2}$, on obtient : $0 < x < 1$.

Ainsi, tout élément de A est élément de $[0 ; 1]$ et l'ensemble A est inclus dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

2°) Si x est un élément de A, il existe un nombre rationnel non nul q tel que $x = q\sqrt{2}$, donc $\sqrt{2} = \frac{x}{q}$.

Par conséquent, si x était un nombre rationnel, $\sqrt{2}$ le serait aussi, ce qui est faux ; le nombre x est donc irrationnel. Ainsi, tous les éléments de A sont des nombres irrationnels.

3°) L'intervalle $]0 ; \frac{1}{2}[$ contient une infinité de nombres rationnels ; de plus à deux nombres rationnels distincts de cet intervalle correspondent deux éléments distincts de A. L'ensemble A contient donc une infinité d'éléments.

M Pour démontrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, il suffit de démontrer que tout élément de A est élément de B. En effet :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

6. Soit p et q deux nombres rationnels tels que $p < q$; nous allons construire un nombre irrationnel compris entre p et q.
Soit k un nombre irrationnel compris entre 0 et 1.
1°) Démontrer que $k(q-p)$ est un nombre irrationnel compris entre 0 et $q-p$.
2°) En déduire que $p + k(q-p)$ est un nombre irrationnel compris entre p et q.

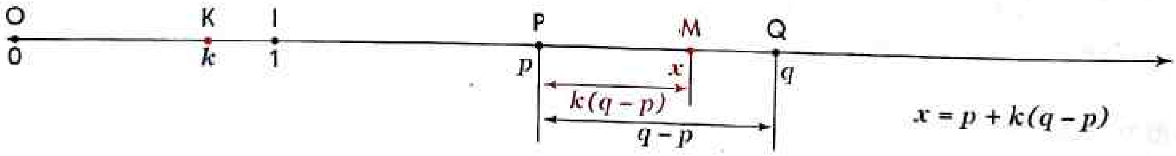
Solution

1°) $k = \frac{k(q-p)}{q-p}$, donc si $k(q-p)$ était un nombre rationnel, k le serait aussi, ce qui est faux ; $k(q-p)$ est donc un nombre irrationnel.

De plus : $0 < k < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < k(q-p) < q-p \qquad$ car $p < q$.

2°) Ajoutons p à chaque membre de l'inégalité précédente, on obtient : $p < p + k(q-p) < q$.

De plus $k(q-p)$ est un nombre irrationnel, donc $p + k(q-p)$ l'est aussi.



2.3. Majorant et minorant, maximum et minimum d'un ensemble

Définitions

Soit A un sous-ensemble[3] non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel $\mathcal{M}$ est un majorant de A si $\mathcal{M}$ est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.

3. Un sous-ensemble d'un ensemble E est une partie de E.

Exemples

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés. $\mathbb{N}$ est minoré par 0, -1, $-\pi$, mais n'est pas majoré.
- Soit a un nombre réel, l'intervalle $]-\infty\,;a[$ [4] est majoré par a mais n'est pas minoré.

Remarque

Un sous-ensemble majoré (respectivement minoré) de $\mathbb{R}$ admet une infinité de majorants (respectivement minorants). En effet, si $\mathcal{M}$ est un majorant (respectivement m est un minorant), tout nombre supérieur à $\mathcal{M}$ (respectivement inférieur à m) est aussi un majorant (respectivement un minorant).

Définitions

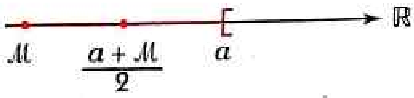
Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- **Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A est appelé maximum de A.**
- **Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A est appelé minimum de A.**

Exemples

- Toute partie finie[5] de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.
- Les maximum et minimum du segment $[0\,;1]$ sont respectivement 1 et 0.
- Soit x un nombre réel ; $E(x)$ est le maximum de l'ensemble des nombres entiers relatifs inférieurs ou égaux à x.
- Soit a un nombre réel ; l'intervalle $]-\infty\,;a[$ n'admet pas de maximum.

Démontrons-le par l'absurde. Supposons que $]-\infty\,;a[$ admette pour maximum le nombre réel $\mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ appartient à $]-\infty\,;a[$ donc : $\mathcal{M} < a$.



$\frac{a+\mathcal{M}}{2}$ appartient à l'intervalle $]\mathcal{M}\,;a[$, on a : $\mathcal{M} < \frac{a+\mathcal{M}}{2} < a$.

$\frac{a+\mathcal{M}}{2}$ est donc strictement supérieur à $\mathcal{M}$ et appartient à $]-\infty\,;a[$,

ce qui est contradictoire puisque $\mathcal{M}$ est le maximum de $]-\infty\,;a[$.

Donc $]-\infty\,;a[$ n'admet pas de maximum.

Remarques

- *Lorsqu'il existe, le maximum (respectivement le minimum) d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.*
- *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}$ un nombre réel. $\mathcal{M}$ est le maximum (respectivement le minimum) de A si et seulement si $\mathcal{M}$ est un majorant (respectivement un minorant) de A appartenant à A.*
- *Un sous-ensemble majoré (respectivement minoré) de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum (respectivement minimum) ; l'intervalle $]-\infty\,;a[$ ci-dessus en est un exemple.*

2.4. Travaux dirigés

Soit A l'ensemble des inverses des nombres entiers naturels non nuls.

1°) Démontrer que 1 est le maximum de A.
2°) Démontrer que l'ensemble A est minoré, mais n'admet pas de minimum.

Solution guidée

1°) • Démontrer que 1 appartient à A.

• Soit n un nombre entier naturel non nul. Démontrer que : $\frac{1}{n} \leq 1$.

• Conclure.

4. Les intervalles $]\leftarrow;a[$, $]\leftarrow;a]$, $]a\,;\rightarrow[$ et $[a\,;\rightarrow[$ seront désormais notés $]-\infty\,;a[$, $]-\infty\,;a]$, $]a\,;+\infty[$ et $[a\,;+\infty[$.

5. Une partie finie d'un ensemble est une partie qui contient un nombre fini d'éléments.

2°) • Démontrer que 0 est un minorant de A.

• Supposer que A possède un minimum m ;

– justifier l'existence d'un nombre entier naturel non nul n tel que : $m = \frac{1}{n}$;

– justifier que : $\frac{1}{n+1} \in A$;

– démontrer que : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$;

– conclure.

Exercices

2.a Comparer : $4 - 10\sqrt{7}$ et $4 - 8\sqrt{11}$; $\frac{-7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{-7}{2-\sqrt{3}}$.

2.b Trouver un encadrement de $\sqrt{17}$ après avoir calculé $(4{,}1)^2$ et $(4{,}2)^2$.

2.c **1.** Calculer $(3-\sqrt{2})^2$. Comparer les nombres $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ et $3-\sqrt{2}$.
2. Comparer les nombres $1-\sqrt{5}$ et $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$, puis les nombres $\sqrt{(\pi-\sqrt{10})^2}$ et $\pi - \sqrt{10}$.

2.d On donne : $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $-2{,}719 < a < -2{,}718$.
1. Donner un encadrement de $a\sqrt{3}$.
2. Donner un encadrement de a^2.

2.e On donne : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.
1. Donner les meilleures approximations décimales que l'on peut obtenir pour chacun des nombres :
$\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{15}{2}}$; $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.
2. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

2.f On considère l'ensemble B des nombres réels pouvant s'écrire sous la forme $\frac{n}{n+1}$, où n est un nombre entier naturel quelconque.
1. Démontrer que B admet 0 pour minimum.
2. Démontrer que B est majoré par 1 mais qu'il n'admet pas de maximum.

3 Valeur absolue

La valeur absolue a été définie en troisième en terme de distance. Cette notion est l'objet ci-après d'une nouvelle définition ainsi que d'un approfondissement.

3.1. Définition et propriétés

Définition

Soit a un nombre réel. Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est appelé valeur absolue de a et est noté $|a|$.

Exemples

• $|\sqrt{7}-2| = \sqrt{7}-2$ car $2-\sqrt{7} \leq 0 \leq \sqrt{7}-2$.
• $|3-\pi| = \pi - 3$ car $3 - \pi \leq 0 \leq \pi - 3$.

Remarque

Cette définition est équivalente à celle donnée en classe de troisième.

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b et tout nombre réel strictement positif r, on a :

(1) $|a| \geq 0$;

(2) $|a| = 0 \iff a = 0$;

(3) $|a| = |-a|$;

(4) $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$;

(5) $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b$;

(6) $\sqrt{a^2} = |a|$;

(7) $|ab| = |a|\,|b|$;

(8) Si $b \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|}$;

(9) Si $b \neq 0$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;

(10) $|a + b| \leq |a| + |b|$ **(inégalité triangulaire) ;**

(11) $|a| \leq r \iff -r \leq a \leq r$.

Démonstration

Nous démontrerons seulement les propriétés (10) et (11), les autres étant admises.

(10) Par définition de la valeur absolue, on a : $a \leq |a|$; $b \leq |b|$; $-a \leq |a|$; $-b \leq |b|$.

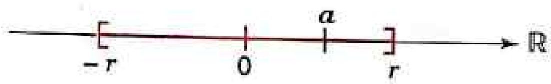
Donc : $a + b \leq |a| + |b|$ et $-(a + b) \leq |a| + |b|$.

$|a + b|$ étant le plus grand des deux nombres $a + b$ et $-(a + b)$, on déduit des deux inégalités précédentes que : $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(11) L'inégalité $|a| \leq r$ signifie que le plus grand des deux nombres a et $-a$ est inférieur ou égal à r, ce qui équivaut à dire que les deux nombres a et $-a$ sont inférieurs ou égaux à r.

On a donc : $|a| \leq r \iff \begin{cases} a \leq r \\ -a \leq r \end{cases}$

$\iff -r \leq a \leq r$.



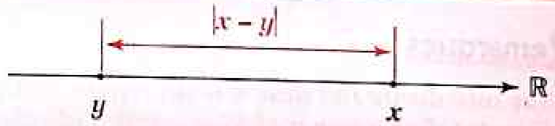
3.2. Distance de deux nombres réels

Définition

Définition

Soit x et y deux nombres réels.

Le nombre réel $|x - y|$ est appelé distance de x et y.



Remarque

Soit $(\mathcal{D})$ une droite munie d'un repère (O,I). Pour tous points M et N de $(\mathcal{D})$, d'abscisses respectives x et y, on a vu en classe de troisième que : $MN = |x - y|$. Ceci justifie le terme employé.

Valeurs approchées

Définition

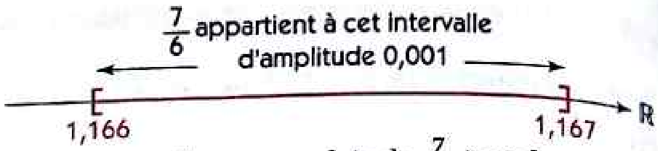
Soit x et y deux nombres réels et ε un nombre réel strictement positif.

y est une valeur approchée de x à ε près signifie que $|x - y| \leq \varepsilon$.

On note : $x \approx y$ à ε près ; le nombre ε est appelé incertitude de cette valeur approchée.

Exemples

• $1{,}166 \le \frac{7}{6} \le 1{,}167$



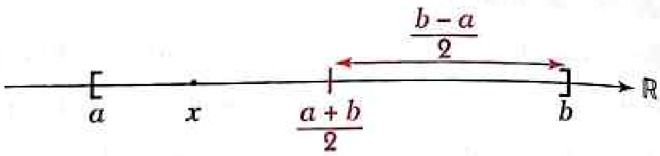
peut être illustré par le schéma ci-contre :
donc tout nombre réel y de l'intervalle $[1{,}166 ; 1{,}167]$ est une valeur approchée de $\frac{7}{6}$ à 10^{-3} près.

• $3{,}141\,59 \le \pi \le 3{,}141\,60$, donc tout nombre réel de l'intervalle $[3{,}141\,59 ; 3{,}141\,60]$ est une valeur approchée de π à 10^{-5} près.

Remarques

- *Soit x un nombre réel et m un nombre entier naturel. Les approximations décimales d'ordre m par défaut et par excès de x sont des valeurs approchées de x à 10^{-m} près.*
- *Soit x et y deux nombres réels : $x \approx y$ à ε près $\Leftrightarrow$ $y - \varepsilon \le x \le y + \varepsilon$.*
  La connaissance de x à ε près définit donc un encadrement de x d'amplitude 2ε.

  De même, la connaissance d'un encadrement de x : $a \le x \le b$, donne $\frac{a+b}{2}$ comme valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.



  Ainsi, dans les deux exemples précédents :

  1,166 5 est une valeur approchée de $\frac{7}{6}$ à 5×10^{-4} près ;

  3,141 595 est une valeur approchée de π à 5×10^{-6} près.

Résolution des inéquations du type $|x - a| \le r$

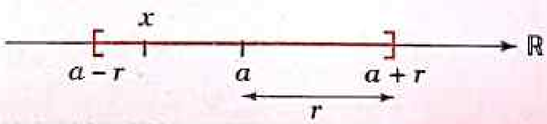
Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel x, on a :

$|x - a| \le r \quad \Leftrightarrow \quad a - r \le x \le a + r$

$\quad\quad\quad\quad \Leftrightarrow \quad x \in [a - r ; a + r]$.



Démonstration

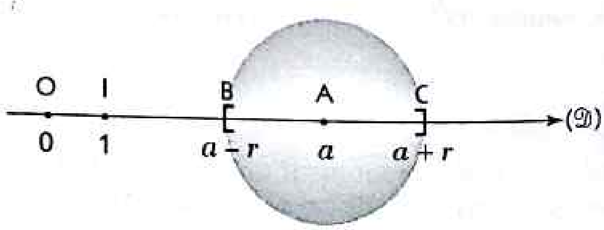
On utilise la propriété (11) § 3.1.

Pour tout nombre réel x, on a : $|x - a| \le r \quad \Leftrightarrow \quad -r \le x - a \le r$

$\quad\quad\quad\quad \Leftrightarrow \quad a - r \le x \le a + r$.

Remarques

- *Sur une droite $(\mathcal{D})$ munie d'un repère (O,I), soit A le point d'abscisse a et M le point d'abscisse x.*
  On a : $|x - a| \le r \quad \Leftrightarrow \quad AM \le r$.
  x est donc solution de l'inéquation : $|x - a| \le r$ si et seulement si M appartient au segment $[BC]$, intersection de $(\mathcal{D})$ avec le disque de centre A et de rayon r.

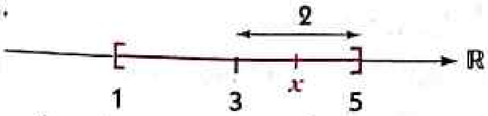


- *On démontrerait de même que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $|x - a| < r$ est l'intervalle $]a - r ; a + r[$.*
- *Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif ; les intervalles $[a - r ; a + r]$ et $]a - r ; a + r[$ sont appelés intervalles, respectivement fermé et ouvert, de centre a et de rayon r.*

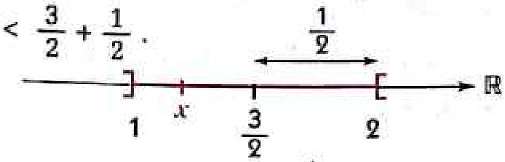
Exemples

Considérons les inéquations : (1) $|x - 3| \le 2$; (2) $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$;
(3) $|x + 1| > \frac{1}{2}$; (4) $|x - 2| \ge 1$.

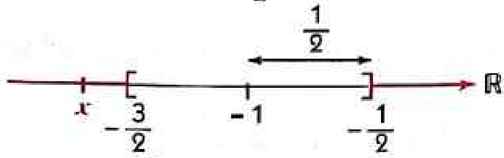
• Pour tout nombre réel x, on a : $|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow 3 - 2 \leq x \leq 3 + 2$.
L'ensemble des solutions de (1) est donc l'intervalle $[1 ; 5]$.



• Pour tout nombre réel x, on a : $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions de (2) est donc l'intervalle $]1 ; 2[$.

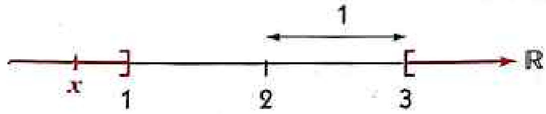


• Considérons l'inéquation (3') : $|x + 1| \leq \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions de (3') est l'intervalle $[-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}]$.
Les solutions de (3) sont les nombres réels qui ne sont pas solutions de (3'), c'est-à-dire ceux qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}]$.



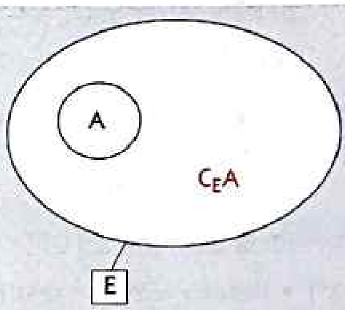
L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est donc $]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$. Cet ensemble est appelé complémentaire de $[-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ (*cf.* point logique ci-après).

• De même l'ensemble des solutions de (4) est le complémentaire de l'intervalle $]1 ; 3[$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble : $]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.



L

Soit A une partie d'un ensemble E ; le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On le note $C_E A$ (ou parfois $E \setminus A$).
On a donc : $A \cup C_E A = E$ et $A \cap C_E A = \emptyset$.
• $C_E \emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$.



Exemples
• L'ensemble des nombres irrationnels est le complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
• $C_{\mathbb{R}}[-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}] =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$.
• $C_{\mathbb{R}}\,]1 ; 3] =]-\infty ; 1] \cup]3 ; +\infty[$.

3.3. Travaux dirigés

1. a et b sont deux nombres réels. Démontrer que : $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Solution guidée

• Appliquer l'inégalité triangulaire à la somme $(a - b) + b$.
• En déduire que : $|a| - |b| \leq |a - b|$.
• Démontrer de même que : $|b| - |a| \leq |a - b|$.
• Conclure.

2. a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$; x est un élément de l'intervalle $]a ; b[$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel r strictement positif tel que :
$]x - r ; x + r[\subset]a ; b[$.

Solution guidée

r étant le plus petit des deux nombres $b - x$ et $x - a$:

- justifier que r est strictement positif ;
- démontrer que : $a \leq x - r < x + r \leq b$;
- conclure.

3. Soit x un nombre réel vérifiant $|x| \leq \frac{1}{2}$.

1°) *a)* Démontrer que : $\frac{1}{2} \leq 1 - x$.

**   *b)* En déduire que : $1 + x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1-x}$ à $2x^2$ près.**

2°) *a)* Démontrer que : $\frac{5}{4} \leq 1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}$.

**   *b)* En déduire que : $1 + \frac{x}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$ à $\frac{x^2}{5}$ près.**

3°) Donner des valeurs approchées des nombres réels $\frac{1}{0{,}9998}$ et $\sqrt{1{,}00015}$, en précisant l'incertitude de chacune d'elles.

Solution guidée

1°) *a)* Utiliser, après justification, l'inégalité : $-\frac{1}{2} \leq -x$.

b) Démontrer que : $\frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x}$.

Utiliser, après justification, les inégalités : $0 \leq \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2$.

2°) *a)* Justifier et utiliser les inégalités : $\frac{3}{4} \leq 1 + \frac{x}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \sqrt{1+x}$.

b) Démontrer que : $1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} = \dfrac{x^2}{4\left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)}$ puis utiliser le résultat de la question 2°) *a)*.

3°) • Poser $x = 2.10^{-4}$ et utiliser la question 1°) *b)*.

• Poser $x = 15.10^{-5}$ et utiliser la question 2°) *b)*.

3.4. Notation scientifique, ordre de grandeur

Notation scientifique

Le tableau suivant représente les opérations effectuées par une calculatrice et les affichages correspondants :

Opérations	Affichages	Significations
$19.10^6 \times 11.10^4$	2.09 12	$2{,}09 \times 10^{12}$
$0{,}000\,48 \div 12\,000$	4 - 08	4×10^{-8}
$(22.10^{-4}) \div (7.10^5)$	3.1428571 - 09	$3{,}142\,857\,1 \times 10^{-9}$

Les écritures $2{,}09 \times 10^{12}$; 4×10^{-8} ; $3{,}1428571 \times 10^{-9}$ sont appelées écritures normalisées ou notations scientifiques.

Définition

Un nombre réel A est exprimé en notation scientifique lorsqu'il est sous la forme : $A = a \times 10^p$, où p est un nombre entier relatif et a un nombre réel tel que : $1 \leq |a| < 10$.

Remarque

En pratique, sur les calculatrices, le nombre affiché a est un nombre décimal et $a \times 10^p$ est le nombre A ou une approximation de A.

Ordre de grandeur

Soit x un nombre réel d'écriture normalisée $a \times 10^p$ et α l'arrondi d'ordre 0 de a.
Le nombre décimal $\alpha \times 10^p$ est un ordre de grandeur de x.
L'utilisation des ordres de grandeur permet de contrôler rapidement des calculs numériques.

Exemple

$1{,}602 \times 10^{-19}$ a pour ordre de grandeur : 2×10^{-19}.
$2{,}99 \times 10^{8}$ a pour ordre de grandeur : 3×10^{8}.
$6{,}022 \times 10^{23}$ a pour ordre de grandeur : 6×10^{23}.
Comme $(2 \times 10^{-19}) \times (3 \times 10^{8}) \times (6 \times 10^{23}) = 3{,}6 \times 10^{13}$, on peut dire que 4×10^{13} est une approximation grossière de : $(1{,}602 \times 10^{-19}) \times (2{,}99 \times 10^{8}) \times (6{,}022 \times 10^{23})$.
Le résultat exact est : $2{,}884\,525\,956 \times 10^{13}$.

Remarques

- *Le produit (respectivement le quotient) des ordres de grandeur de deux nombres réels n'est pas toujours un arrondi du produit (respectivement du quotient) de ces deux nombres.*
- *Un calcul à l'aide d'ordres de grandeur permet d'obtenir rapidement une approximation grossière de la valeur d'une expression numérique.*

Exercices

3.a Écrire sans le symbole $|\ |$ les nombres suivants :
$|1-\sqrt{2}|$; $\left|\dfrac{\sqrt{7}-2}{3-\sqrt{10}}\right|$.

3.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$|x-3|=2$; $|2x-1|=3$; $|x-1|\le 2$;
$|x-3| > \dfrac{1}{2}$; $|x+4|>5$; $|x+2|\ge 3$.

3.c Donner une valeur approchée (sans oublier son incertitude) de x et de y en utilisant les encadrements suivants :
$2{,}15 < x < 2{,}18$; $3{,}14 < y < \dfrac{22}{7}$.

3.d Traduire par un encadrement chacune des informations suivantes :
0,818 est une valeur approchée de $\dfrac{9}{11}$ à 10^{-3} près ;
2,351 est une valeur approchée de A à 2×10^{-4} près.

3.e Sans la calculatrice, exprimer les résultats des opérations suivantes en notation scientifique :
$16\,000 \times 350$; $6 \times 10^{-3} \times 0{,}02$; $\dfrac{360 \times 10^5}{0{,}004}$;
$31{,}2 \times 10^{-15} - 17{,}3 \times 10^{-14}$; 20^5 ;
$(27{,}3 \times 10^{-7}) \times (-31 \times 10^{48})$;
$\dfrac{(0{,}025)^3 \times (0{,}02)^5}{(4\,000)^3}$.

3.f Sans la calculatrice, donner un ordre de grandeur de A dans les cas suivants :
$A = 9{,}054 \times 10^{-6} \times 7{,}525 \times 10^{-7}$;
$A = 2{,}975 \times 10^{-4} \div 6{,}524\,1 \times 10^{-5}$;
$A = \sqrt{9{,}342\,5 \times 10^{18}}$.

3.g 1. Vérifier que : $\dfrac{265}{153} \le \sqrt{3} \le \dfrac{1351}{780}$.
2. Calculer : $\dfrac{1351}{780} - \dfrac{265}{153}$.
3. En déduire que $\dfrac{1351}{780}$ et $\dfrac{265}{153}$ sont des valeurs approchées de $\sqrt{3}$ à 3×10^{-5} près.

3.h On donne un nombre réel positif x.
1. Démontrer que : $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.
2. Calculer $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ pour $x = 10^{-8}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Calculs dans ℝ

1 Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \;;\; \frac{1}{\frac{2}{3}} \;;\; \frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} \;;\; \frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} \;;\; \frac{4-\frac{2}{3}}{4};$$

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{7}}{\frac{7}{5}+\frac{3}{7}} \;;\; \frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}} \times \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}} \div \frac{2+\frac{5}{6}}{2-\frac{5}{6}}.$$

2 Écrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers :

$$\frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} \;;\; \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} \;;\; \frac{0{,}081 \times 0{,}36 \times 2560}{0{,}144 \times 2{,}16 \times 64};$$

$$\frac{(0{,}6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0{,}8)^3 \times (0{,}4)^4} \;;\; \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}.$$

3 Écrire les nombres suivants sous une forme plus simple (radicaux seulement au numérateur, les nombres écrits sous ces radicaux étant les plus petits possibles) :

$\sqrt{72}$; $\sqrt{675}$; $\sqrt{1080}$; $\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150}$;

$\sqrt{20} - 2\sqrt{125} + \sqrt{180}$; $-\dfrac{14}{\sqrt{7}}$;

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \;;\; \frac{\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}}{\sqrt{135}-\sqrt{15}}.$$

4 Démontrer les égalités suivantes :

$\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4{,}5}$; $\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = 1.$

5 Comparer les nombres réels suivants :

a) $2 + \sqrt{5}$ et $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ et $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}.$

6 Démontrer que pour $a > b \geq 0$:

a) $\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$;

b) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b).$

7 Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que : $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Sous réserve d'existence des différents quotients, démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \;;\; \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \;;$$

$$\frac{2a-3c}{5a+4c} = \frac{2b-3d}{5b+4d} \;;\; \frac{-a+2b}{3a+5b} = \frac{-c+2d}{3c+5d} \;;$$

$$\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2+d^2}{d^2} \;;\; \frac{a^2-c^2}{a^2+2c^2} = \frac{b^2-d^2}{b^2+2d^2}.$$

Ordre dans ℝ

8 Comparer les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{23}{99}$ et $\dfrac{231}{990}$; *b)* $\dfrac{99}{23}$ et $\dfrac{990}{231}$; *c)* $\dfrac{23}{99}$ et $\dfrac{239}{999}$;

d) 3^{11} et 9^5 ; *e)* $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$; *f)* $(\sqrt{5})^7$ et 5^4 ;

g) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{13} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{14} + \sqrt{7}$;

i) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; *j)* $7 - 3\sqrt{5}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

9 Ranger par ordre croissant les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{28}{27}$; $\dfrac{25}{28}$; $\dfrac{27}{28}$; $\dfrac{28}{26}$; $\dfrac{28}{25}$; $\dfrac{26}{28}$.

b) $\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$; $4 + \sqrt{19}$; $\sqrt{5}(\sqrt{3} + 2)$.

10 Soient a et b deux nombres réels de $]0 ; 1[$.

1. Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$?
2. Comparer $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ et $1 + \dfrac{1}{ab}$.

11 a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

1. Comparer $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a+c}{b+c}$.

2. *Application*

Comparer :

a) $\dfrac{3}{7}$ et $\dfrac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ et $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$.

12 a, b, c, d sont des nombres réels strictement positifs tels que : $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

1. Comparer : *a)* $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a+c}{b+d}$; *b)* $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{a+c}{b+d}$.

2. *Application*

Ranger par ordre croissant :

a) $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{8}{11}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$, $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$.

13 x et y sont deux nombres réels strictement positifs. Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$; *b)* si $x < y$ alors $x < \sqrt{xy} < y$;

c) $\dfrac{1}{x+y} < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; *d)* $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

14 Soient x et y deux nombres réels.

1. Développer $(y-x)(y^2+xy+x^2)$.
2. Démontrer que : $y^2 + xy + x^2 = (y + \frac{x}{2})^2 + \frac{3}{4}x^2$.
3. Déduire des questions précédentes que :

si $x \leq y$ alors $x^3 \leq y^3$.

15 Soit a un nombre réel.

1. On suppose $0 < a < 1$.

• Comparer : a et a^2 ; a et $\sqrt{a}$; a et $\dfrac{1}{a}$.

• Ranger dans l'ordre croissant : 1, a, $\sqrt{a}$, a^2 et $\dfrac{1}{a}$.

2. On suppose $a > 1$.
Ranger dans l'ordre croissant : 1, a, $\sqrt{a}$, a^2 et $\frac{1}{a}$.

16 **1.** Démontrer que pour tous nombres réels a et b on a : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. On suppose de plus que a et b sont positifs ; démontrer qu'alors on a : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

17 x, y et z sont trois nombres réels.
1. Démontrer que : $2xy \leq x^2 + y^2$ (1).
2. En utilisant (1) et deux autres inégalités du même type, démontrer que : $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$.

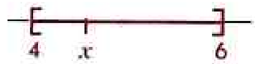
18 a, b, c et d désignent quatre nombres réels.
Démontrer que : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Valeur absolue

19 a et b sont deux nombres réels.
1. On suppose que : $|a + b| = |a| + |b|$ (1).
En élevant l'égalité précédente au carré, démontrer que :
$$|a|\,|b| = ab.$$
Que pouvez vous dire des signes de a et b ?
2. On suppose que a et b ont le même signe ; démontrer qu'alors l'égalité (1) est vérifiée.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$|x^2 - 3x + 1| = |x^2| + |-3x + 1|.$$

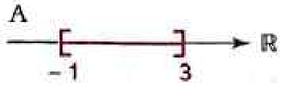
20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $|4x + 3| = 2$; *b)* $|-x - 1| = -2$.

21 Voici quatre façons de décrire une même propriété :
$x \in [2\,;\,6]$ (en termes **d'intervalle**) ;
$2 \leq x \leq 6$ (en termes **d'encadrement**) ;
$|x - 4| \leq 2$ (en termes de **valeur absolue**) ;

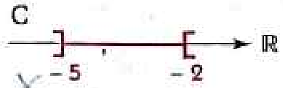
(par une **représentation graphique**).
Traduire de chaque façon les propriétés suivantes :
a) $x \in [2\,;\,3]$; *b)* $x \in \,]1\,;\,5[$;
c) $-6 \leq x \leq -2$; *d)* $-5 < 2x < 5$;
e) $|x + 2| \leq 2$; *f)* $|3 - x| < 4$;
g)


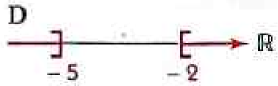
; *h)*


22 Caractériser par une inégalité du type $|x - a| \leq r$, $|x - a| \geq r$, $|x - a| < r$ ou $|x - a| > r$ les nombres réels x appartenant aux ensembles A, B, C et D représentés géométriquement par :

A


B


C


D


23 Représenter géométriquement et écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles l'ensemble des nombres réels x vérifiant :
a) $|x - 1| \leq 3$; *b)* $|2x - 1| \leq 2$; *c)* $|x + 2| < -2$;
d) $|x| > 1$; *e)* $|x - 2| \geq -\frac{1}{2}$; *f)* $1 < |3x - 1| \leq 3$.

Calculs approchés

24 Soit $A(x) = 2x^3 - 5$. Encadrer $A(\sqrt{2})$ sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

25 Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de : $x + y$; $x - y$; xy ; x^2 ; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{y}$.
a) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$.
b) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$.
c) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$.

26 On donne :
$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.
1. Donner le meilleur encadrement possible de :
$\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$; $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$.
2. Comparer $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.
Encadrer séparément ces deux nombres. Quelle observation faites-vous ?
3. Trouver les nombres entiers a et b tels que :
a) $a \times 10^{-2} < \sqrt{15} < (a+1) \times 10^{-2}$;
b) $b \times 10^{-2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < (b+1) \times 10^{-2}$.

Dans les exercices 27 à 29 on demande, dans les deux cas, d'encadrer avec le plus de précision possible les aires $\mathcal{A}$ et les volumes V des solides donnés. On donne $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

27 Pavé droit de côtés a, b, c. On rappelle que : $\mathcal{A} = 2(ab + ac + bc)$ et $V = abc$.
1° cas :
$3{,}15$ est une valeur approchée de a à 5×10^{-2} près ;
$2{,}35$ est une valeur approchée de b à 5×10^{-2} près ;
$4{,}25$ est une valeur approchée de c à 5×10^{-2} près.
2° cas :
$9{,}9 < a < 10$; $5{,}6 < b < 5{,}7$; $3{,}3 < c < 3{,}4$.

28 Cylindre de rayon R et de hauteur h. On rappelle que : $\mathcal{A} = 2\pi R(R + h)$ et $V = \pi R^2 h$.
1° cas : $2{,}5 < R < 2{,}6$ et $6 < h < 6{,}1$.
2° cas : $R \approx 4$ à 2×10^{-2} près et $h \approx 8$ à 10^{-1} près.

29 Sphère de rayon R. On rappelle que :
$\mathcal{A} = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.
1° cas : $7 < R < 7{,}3$. ***2° cas :*** $R \approx 6$ à 10^{-2} près.

APPROFONDISSEMENT

30 Soit x et y deux nombres réels strictement positifs, tels que : $x < y$.
Notons : $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.
1. Démontrer que : $x < h$ et $a < y$.
2. Démontrer que : $g < a$.
3. Démontrer que : $g^2 = ah$. En déduire que : $h < g$.
4. Ranger par ordre croissant les nombres :
x, y, a, g et h.
a, g et h sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y.

31 1. Démontrer que pour tout nombre entier naturel non nul n : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.
2. En déduire une expression simple du produit :
$(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{19^2})(1 - \frac{1}{20^2})$.

32 Soit n un nombre entier naturel, $n \geq 2$.
On pose : $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.
1. Calculer $S - \frac{1}{2}S$.
2. En déduire la valeur de S en fonction de n, puis l'inégalité $S < 2$.

33 1. n étant un nombre entier naturel, écrire sans radical au dénominateur l'expression : $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. En déduire une expression simple de la somme :
$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

34 Soit a_1, a_2, a_3 et a_4 des nombres réels positifs. A, Q, R et S sont les nombres réels positifs définis par :
- $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$;
- $Q \geq 0$ et $Q^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}$;
- $R = (a_1 - A) + (a_2 - A) + (a_3 - A) + (a_4 - A)$;
- $S = (a_1 - A)^2 + (a_2 - A)^2 + (a_3 - A)^2 + (a_4 - A)^2$.

1. Démontrer que la valeur de R est indépendante de celles de a_1, a_2, a_3 et a_4.
2. Exprimer S en fonction de A et Q. En déduire une inégalité entre A et Q.

A et Q sont respectivement appelés moyennes arithmétique et quadratique de a_1, a_2, a_3 et a_4.

35 x et y sont deux nombres réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$.
1. Démontrer que : $|xy| < 1$. En déduire que : $1 + xy > 0$.
2. Développer $(1 - x)(1 - y)$ et $(1 + x)(1 + y)$.
3. Démontrer que : $\left|\frac{x + y}{1 + xy}\right| < 1$.

36 1. Comparer les nombres 2 et $\sqrt{2}$.
2. Soit b un nombre réel vérifiant $b > \sqrt{2}$.
Démontrer les inégalités suivantes :
$$\frac{2}{b} < \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(b + \frac{2}{b}\right) > \sqrt{2}.$$
3. En utilisant les questions précédentes justifier les encadrements de $\sqrt{2}$ obtenus dans le tableau suivant :

b	$\frac{2}{b}$	Encadrements	$\frac{1}{2}\left(b + \frac{2}{b}\right)$
2	1	$1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$	$\frac{17}{12}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{577}{408}$	

4. Compléter le tableau de la question précédente. Déduire du dernier encadrement les 5 premières décimales de $\sqrt{2}$.

37 y est un nombre réel strictement positif.
1. Démontrer que :
si $y < \sqrt{5}$, alors $1 + \frac{4}{y+1} > \sqrt{5}$;
si $y > \sqrt{5}$ alors $1 + \frac{4}{y+1} < \sqrt{5}$.
2. En utilisant la question précédente, justifier les encadrements de $\sqrt{5}$ obtenus dans le tableau suivant :

y	$1 + \frac{4}{y+1}$	Encadrements
1	3	$1 < \sqrt{5} < 3$
3	2	$2 < \sqrt{5} < 3$
2	$\frac{7}{3}$	$2 < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{22}{10}$	$\frac{22}{10} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$

3. Compléter le tableau précédent. Déduire du dernier encadrement les deux premières décimales de $\sqrt{5}$.

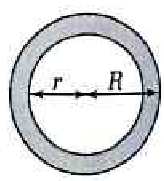
38 Un rectangle a une aire égale à 121 cm^2. Démontrer que sa longueur L et sa largeur l en cm vérifient : $l \leq 11 \leq L$.

39 Les arrondis d'ordre 2 de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont respectivement 1,73 et 2,24.
1. Donner les meilleurs encadrements de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ que l'on peut obtenir à partir de ces informations.
2. En utilisant les encadrements de $3\sqrt{5} + 3$ et $5\sqrt{3} + 1$, comparer ces deux nombres.

40 Les arrondis d'ordre 1 de π et $\sqrt{2}$ sont respectivement 3,1 et 1,4.
1. Trouver une valeur approchée de $\pi\sqrt{2}$, en précisant son incertitude.
2. En utilisant leurs valeurs approchées, comparer $5\sqrt{2}$ et $\frac{5}{2}\pi$.

41 Un morceau de métal, d'un volume de 21,5 cm^3 à 0,1 près, pèse 300 g à 0,2 près.
1. Donner un encadrement de sa masse volumique.
2. Donner une valeur approchée de cette masse volumique en précisant l'incertitude obtenue.

42 Deux cercles concentriques de rayons différents R et r définissent une couronne circulaire (partie grisée sur la figure).



1. Calculer l'aire de la couronne en fonction de R et r.
2. Sachant que les arrondis d'ordre 2 de R, r et π sont respectivement 2,56 ; 1,21 et 3,14, déterminer une valeur approchée de l'aire de la couronne, en précisant l'incertitude obtenue.

9

Fonctions

La notion de fonction s'est progressivement précisée au cours des siècles. Dans l'Antiquité, les BABYLONIENS ont établi des tables de carrés, de cubes, de racines carrées à l'usage des astronomes. Les GRECS s'intéressèrent à des lois physiques, par exemple en acoustique.

Frontispice des Actes du 1er Congrès International de Mathématiques en Août 1897 à Zurich. De haut en bas et de gauche à droite : Daniel Bernoulli, Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli, Léonhard Euler, Jacob Steiner.

Au XIVe siècle, ORESME construisit et utilisa des représentations graphiques reliant le temps à la vitesse. Ainsi, avec l'étude des problèmes de mouvement, l'idée de lois d'un type fonctionnel apparaît, avec, comme variable, le temps.
Au XVIe siècle, François VIÈTE, par son traité d'algèbre, contribua à améliorer les techniques du calcul littéral.
La notion de fonction fut alors dégagée à la fin du XVIIe siècle par LEIBNIZ et les frères BERNOULLI.
Le premier traité d'analyse fondé sur la notion de fonction fut écrit en 1748 par L. EULER.
C'est à la fin du XIXe siècle et au XXe siècle que la fonction prend sa forme actuelle avec GAUSS, CAUCHY, ABEL, FOURIER,...
Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.

SOMMAIRE

1 Généralités sur les fonctions

1.1. Notion de fonction

Dans des domaines aussi variés que les sciences physiques, la mécanique, la biologie, l'économie,... , les grandeurs rencontrées dépendent les unes des autres.

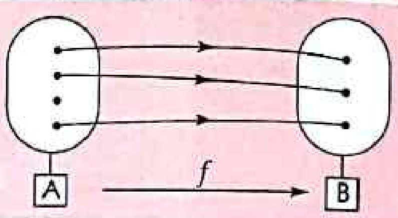
Ainsi, on dit : « exprimer le volume d'une sphère en fonction de son rayon, exprimer la distance parcourue en fonction du temps de parcours, exprimer le volume d'une pyramide en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur,... »

L'étude d'une grandeur qui dépend d'une autre ou de plusieurs autres met en évidence la notion de fonction.

Définition

A et B sont des ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.



Vocabulaire et notations

On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x, associe $f(x)$;
A est l'ensemble de départ, B l'ensemble d'arrivée de f ;
x est la variable, $f(x)$ l'image de x par f.

On note
$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x).$$

– Lorsque v est l'image de u par f, on dit que u est un antécédent de v par f. On écrit : $v = f(u)$.
– Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique.
– Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Dans la suite de ce chapitre et sauf indication contraire, pour une fonction d'une variable réelle, l'ensemble de départ sera $\mathbb{R}$.

Remarque

Une application d'un ensemble A dans un ensemble B est une fonction de A vers B.
Ainsi :
une symétrie, une translation sont des fonctions du plan vers le plan; les applications affines vues en troisième sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; en statistique, un caractère quantitatif est une fonction d'un ensemble (population) vers $\mathbb{R}$.

1.2. Exemples de fonctions

Fonction déterminée par une table

Un calendrier perpétuel est une table de correspondance entre d'une part un ensemble de dates et d'autre part l'ensemble des jours de la semaine.

En voici un :

ANNÉES DE 1857 À 2036							JANVIER	FÉVRIER	MARS	AVRIL	MAI	JUIN	JUILLET	AOÛT	SEPTEMBRE	OCTOBRE	NOVEMBRE	DÉCEMBRE	a	b	JOURS
1857	1885		1925	1953	1981	2009	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	1		DIM
1858	1886		1926	1954	1982	2010	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	2		LUN
1859	1887		1927	1955	1983	2011	16	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	3		MAR
1860	1888		1928	1956	1984	2012	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	4		MER
1861	1889	1901	1929	1957	1985	2013	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	5		JEU
1862	1890	1902	1930	1958	1986	2014	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	6		VEN
1863	1891	1903	1931	1959	1987	2015	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	7		SAM
1864	1892	1904	1932	1960	1988	2016	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	8	29	DIM
1865	1893	1905	1933	1961	1989	2017	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	9	30	LUN
1866	1894	1906	1934	1962	1990	2018	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	10	31	MAR
1867	1895	1907	1935	1963	1991	2019	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	11	32	MER
1868	1896	1908	1936	1964	1992	2020	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	12	33	JEU
1869	1897	1909	1937	1965	1993	2021	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	13	34	VEN
1870	1898	1910	1938	1966	1994	2022	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	14	35	SAM
1871	1899	1911	1939	1967	1995	2023	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	15	36	DIM
1872		1912	1940	1968	1996	2024	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	16	37	LUN
1873		1913	1941	1969	1997	2025	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	17		MAR
1874		1914	1942	1970	1998	2026	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	18		MER
1875		1915	1943	1971	1999	2027	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	19		JEU
1876		1916	1944	1972	2000	2028	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	20		VEN
1877	1900	1917	1945	1973	2001	2029	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	21		SAM
1878		1918	1946	1974	2002	2030	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	22		DIM
1879		1919	1947	1975	2003	2031	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	23		LUN
1880		1920	1948	1976	2004	2032	4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	24		MAR
1881		1921	1949	1977	2005	2033	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	25		MER
1882		1922	1950	1978	2006	2034	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	26		JEU
1883		1923	1951	1979	2007	2035	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	27		VEN
1884		1924	1952	1980	2008	2036	2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	28		SAM

Le mode d'emploi ci-dessous permet de trouver le jour de la semaine correspondant à la date :

J (Jour) M (Mois) A (Année)

- rechercher l'année A dans l'une des colonnes de gauche,
- suivre la ligne horizontale jusqu'à la colonne du mois M,
- ajouter le nombre J et le nombre situé à l'intersection de la ligne A et de la colonne M,
- rechercher cette somme dans l'une des colonnes a ou b,
- suivre la ligne horizontale de cette somme jusqu'à la dernière colonne, qui indique le jour de la semaine recherché.

Par exemple, le $\boxed{\text{06 octobre 1998}}$ a pour image $\boxed{\text{mardi}}$.

- Vérifier pour la date d'aujourd'hui.
- À quel jour de la semaine correspond le 1er janvier 2000 ?

- Expliquons pourquoi ce calendrier, muni de son mode d'emploi, détermine une fonction.

E désigne l'ensemble des dates, du 1er janvier 1857 au 31 décembre 2036.
F désigne l'ensemble des jours de la semaine.

Ainsi, ce calendrier perpétuel détermine la fonction de E vers F, qui, à une date, associe son jour de la semaine .

Fonctions déterminées par les touches d'une calculatrice

Les touches ci-dessous d'une calculatrice scientifique déterminent chacune une fonction.

sin cos tan ln e^x $\sqrt{}$

Cependant, l'affichage de la calculatrice donne en général une valeur approchée du nombre recherché, et non sa valeur exacte.

Par exemple, la touche ($\sqrt{\ }$) permet d'avoir accès à la fonction racine carrée, qui, d'un nombre positif, donne la racine carrée.
C'est une fonction numérique d'une variable réelle qui sera étudiée ultérieurement.

Touches	Affichage	
(4) (9) ($\sqrt{\ }$)	7	$\sqrt{49} = 7$.
(2) (8) ($\sqrt{\ }$)	5,2915026	Une valeur approchée de $\sqrt{28}$ est 5,2915.
(9) (+/–) ($\sqrt{\ }$)	Error	• Pourquoi la calculatrice affiche-t-elle « ERROR » ?

• Donner, à l'aide d'une calculatrice scientifique, une valeur approchée de la racine carrée de chacun des nombres suivants : 123 ; 4 501 ; 746.

Fonctions déterminées par une formule explicite

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

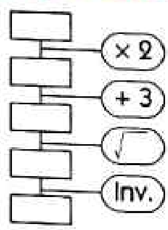
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminée par la formule explicite $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (1).

Cette formule traduit un programme de calcul de l'image par f du nombre réel x. La lettre « x » peut être remplacée par une autre lettre, c'est un « marqueur de place ».

La formule (1) peut s'écrire : $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2u+3}}$ ou encore : $f(\square) = \dfrac{1}{\sqrt{2\square+3}}$.

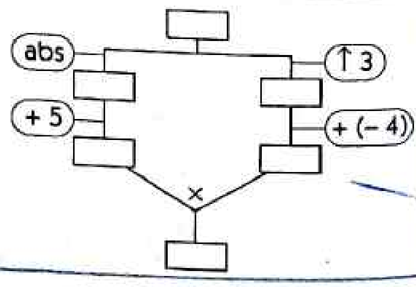
La formule (1) et le programme de calcul de l'image d'un nombre réel par f peuvent être illustrés par un schéma de calcul.

Formule de f	Programme de calcul de $f(x)$	Schéma de calcul de $f(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$	– Prendre un nombre réel, – multiplier ce nombre par 2, – ajouter 3, – prendre la racine carrée, – prendre l'inverse. On obtient $f(x)$.	

De même pour la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (|x| + 5)(x^3 - 4)$$

on obtient les résultats suivants :

Formule de g	Programme de calcul de $g(x)$	Schéma de calcul de $g(x)$
$g(x) = (\lvert x\rvert + 5)(x^3 - 4)$	Prendre un nombre réel. • D'une part : - prendre la valeur absolue, - ajouter 5. • D'autre part : - élever au cube, - ajouter (– 4). • Effectuer le produit de ces résultats. On obtient $g(x)$.	

1.3. Ensemble de définition

Présentation

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x+1}$.

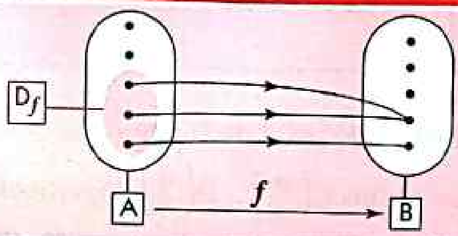
- Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants : -325 ; -2 ; 0 ; $2{,}7$; 4 ?
- Expliquer pourquoi les nombres suivants n'ont pas d'image par f : 5 ; 728 ; -1.

Le nombre -325 a une image par f ; on dit que f est définie en -325.
Chaque nombre de $[1 ; 3]$ a une image par f. On dit que f est définie sur $[1 ; 3]$.
$]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 4]$ est le plus grand ensemble sur lequel f est définie.
C'est l'ensemble de définition de f.

Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.
On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.



Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

Recherchons l'ensemble de définition D_f de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{2x-5}.$$

Contraintes d'exécution du programme de calcul de $f(x)$

$x \in D_f \iff x + 3 \geq 0$ et $2x - 5 \neq 0$.

Traitement des contraintes

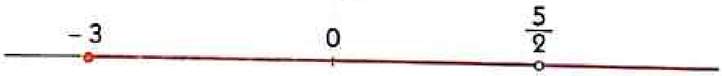
Résolution de l'inéquation $x + 3 \geq 0$; $x \geq -3$.

Résolution de l'équation $2x - 5 = 0$; $x = \frac{5}{2}$.

Par conséquent : $x \in D_f \iff x \geq -3$ et $x \neq \frac{5}{2}$.

Écriture et représentation graphique de D_f

$D_f = [-3 ; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$.



M

Pour déterminer l'ensemble de définition D_f d'une fonction f, on peut procéder de la façon suivante :
- on écrit toutes les conditions d'exécution du programme de calcul de $f(x)$;
- on précise les ensembles que déterminent les contraintes ;
- on écrit D_f à l'aide d'intervalles. (On pourra représenter D_f sur une droite graduée.)

1.4. Représentation graphique

Définition

Définition

Le plan est muni d'un repère.
f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition D_f.
On appelle représentation graphique de f, ou courbe représentative de f, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ où x est un élément de D_f.

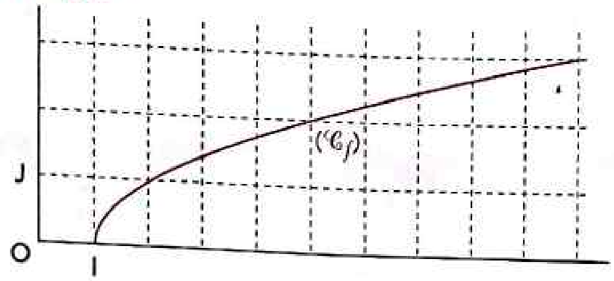
Notation et vocabulaire

On note habituellement $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

On a : $$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } y = f(x).$$

Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exemple



Le plan est muni du repère (O, I, J).
La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction définie sur [1 ; 10] par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

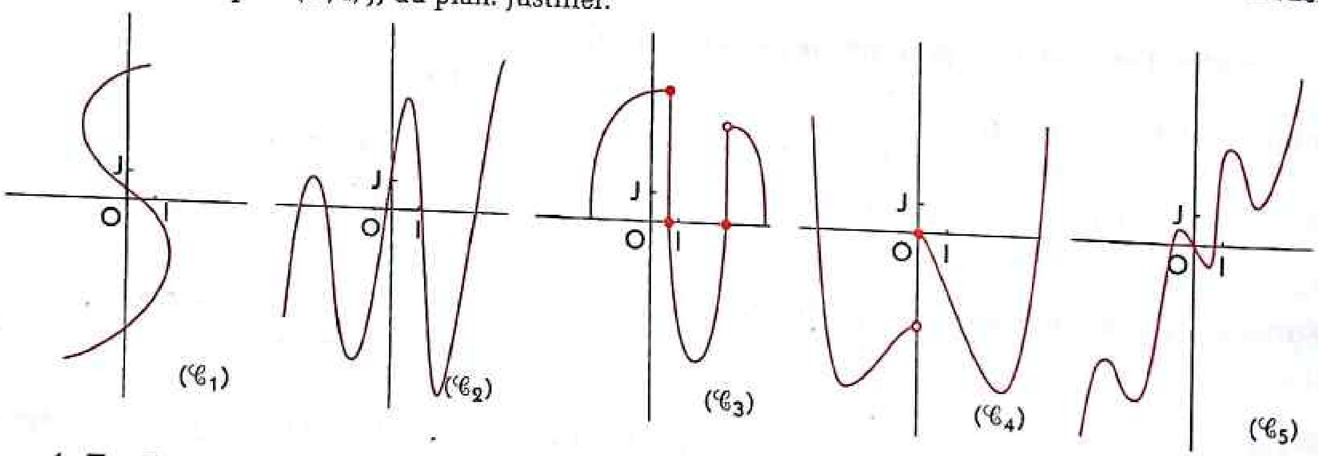
Les points $A\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ appartiennent à $(\mathscr{C}_f)$, car $f(5) = 2$ et $f(7) = \sqrt{6}$.

- Quel est le point de $(\mathscr{C}_f)$ qui a pour abscisse 3,8 ?
- Les points $C\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 8 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à $(\mathscr{C}_f)$?

On dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ a pour équation $y = \sqrt{x-1}$.

Reconnaissance de courbes représentatives de fonctions

Parmi les dessins ci-dessous, seuls $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ ne sont pas des courbes représentatives d'une fonction relativement au repère (O, I, J) du plan. Justifier.



1.5. Fonctions égales sur un ensemble

Présentation

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

- Justifier que :
  f et g sont définies sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$,
  pour tout élément x de $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$, $x - 1 = \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

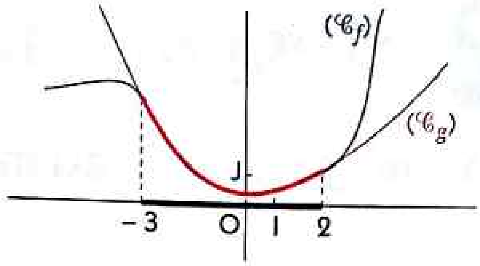
On dit que les fonctions f et g sont égales sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$.

Définition

f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E.
On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E, $f(x) = g(x)$.

Remarques

Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble. Ci-contre, les fonctions f et g sont égales sur [– 3 ; 2].



Exemple

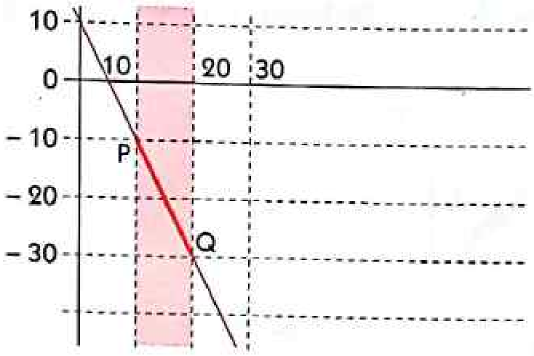
On considère la fonction $f : [10 ; 20] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -2x + 10.$

f n'est pas une application affine car elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

Cependant, sur [10 ; 20], elle est égale à l'application affine g définie par $g(x) = -2x + 10$.

Dans le plan muni d'un repère, marquons les points $P\begin{pmatrix}10\\-10\end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix}20\\-30\end{pmatrix}$.

Le segment [PQ] est la représentation graphique de f et son support, la droite (PQ), est la représentation graphique de g.



Exercices

1.a f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Le calcul de l'image d'un nombre réel x par cette fonction peut se faire à l'aide du programme de calcul suivant :
- prendre un nombre réel ;
- ajouter 2 ;
- élever au cube ;
- retrancher 5 ;
- prendre l'inverse.

Calculer l'image par f de chacun des nombres suivants : $1 ; 0 ; -3,5 ; \frac{4}{3}$.
Écrire une formule explicite qui détermine cette fonction.

1.b f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Le calcul de l'image d'un nombre réel x par cette fonction peut se faire à l'aide du programme de calcul suivant :
prendre un nombre réel ;
d'une part :
- multiplier par 2 ;
- ajouter 3 ;

d'autre part :
- ajouter 8 ;
- prendre la racine carrée ;
- prendre l'opposé ;

Effectuer la somme des nombres obtenus.
Écrire une formule explicite qui détermine cette fonction.

1.c f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :
$f(x) = \frac{65x}{93x + 458}$.
Donner l'image par f de chacun des nombres suivants : 527 ; – 316 ; 1 092 ; –16,358.
Donner l'antécédent par f de chacun des nombres suivants : 1 997 ; – 22 ; 4.

1.d Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes, définies par :

$f(x) = 1 - x$;

$g(x) = \frac{1}{1 + x}$;

$h(x) = \sqrt{-6x}$;

$i(x) = \frac{56}{x^2 - 17}$;

$l(x) = \sqrt{36 + 4x^2}$;

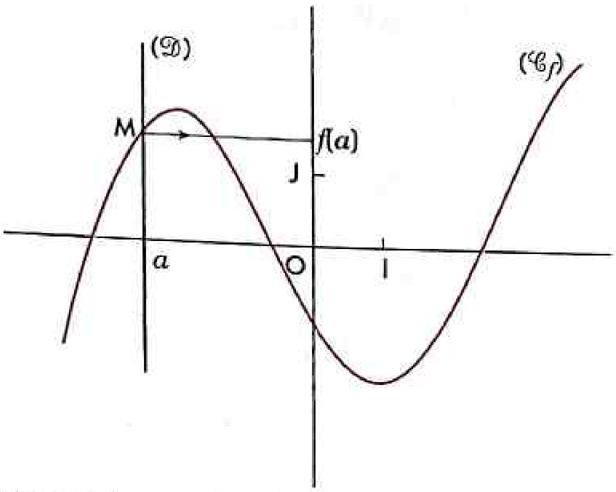
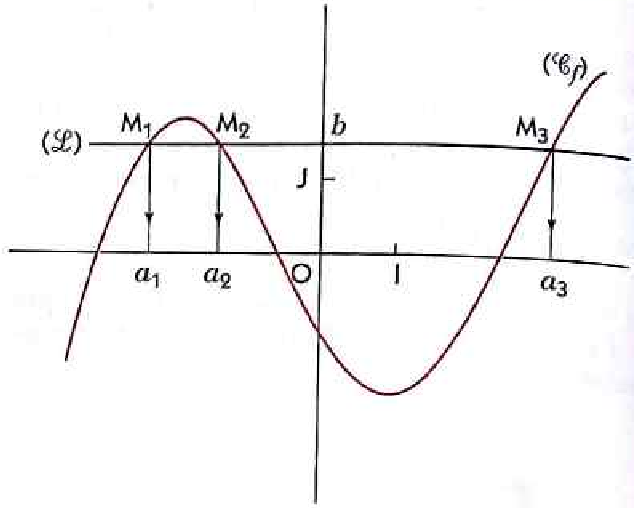
$m(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$;

$n(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$.

2 Étude graphique

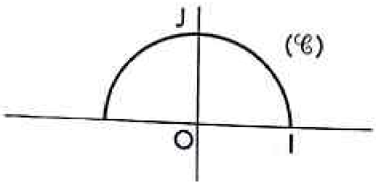
2.1. Image et antécédents d'un nombre

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Lecture d'image	Lecture d'antécédents
 L'image de a par f est l'ordonnée du point d'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = a$ et de $(\mathscr{C}_f)$.	 Les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection de la droite $(\mathscr{L})$ d'équation $y = b$ et de $(\mathscr{C}_f)$.

Exemple

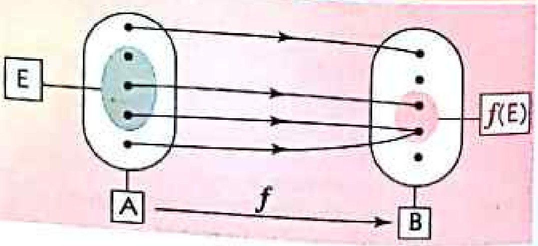
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
$(\mathscr{C})$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 1, situé dans le demi-plan d'ordonnées positives. $(\mathscr{C})$ est également la courbe représentative d'une fonction f.
Déterminer l'image par f de chacun des nombres :
$\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos 30° ; – cos 30° ; $-\frac{1}{2}$; 0.



2.2. Image directe d'un ensemble

Définition

f est une fonction de A vers B et E une partie de A.
On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E .
On le note f(E).

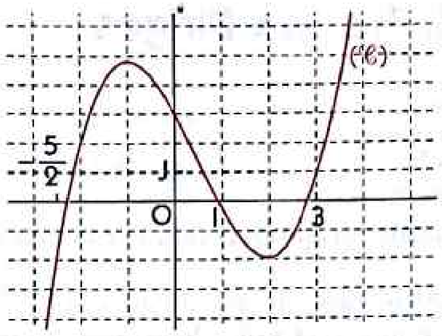


Exemple

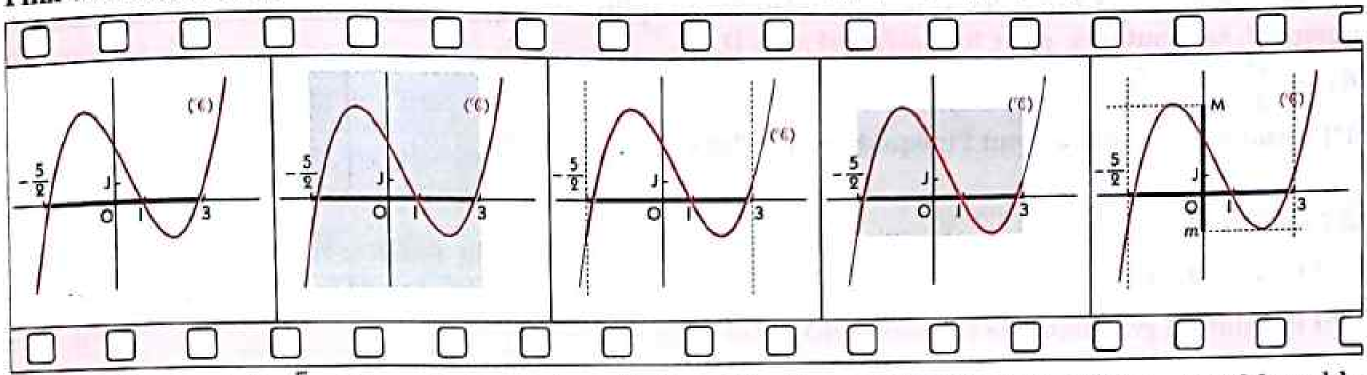
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$.
On veut trouver l'image directe par f de $[-\frac{5}{2} ; 3]$.
Comparer $f(-\frac{5}{2})$, $f(0)$ et $f(3)$.
L'image de 0 est-elle comprise entre l'image de $-\frac{5}{2}$ et l'image de 3 ?

Le plan est muni du repère (O, I, J).
La courbe ($\mathscr{C}$) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f.

Le film suivant illustre une méthode de détermination graphique de l'image directe de $[-\frac{5}{2} ; 3]$ par f.



Film de construction



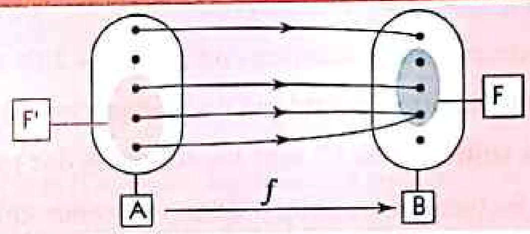
L'image directe de $[-\frac{5}{2} ; 3]$ par f est un intervalle $[m ; M]$, où m semble être égal à $f(2) = -2$ et M semble être égal à $\frac{19}{4}$. On peut vérifier par le calcul que $-2 = f(2)$ et $\frac{19}{4} = f(-1)$.

- Déterminer graphiquement l'image directe par f de l'intervalle $[-2 ; 1]$.

2.3. Image réciproque d'un ensemble

Définition

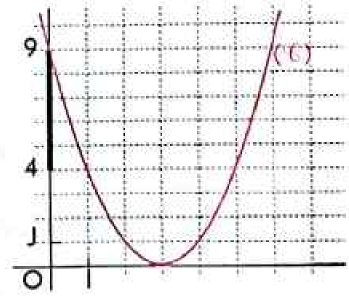
f est une fonction de A vers B et F une partie de B.
On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble F' des antécédents par f de tous les éléments de F.



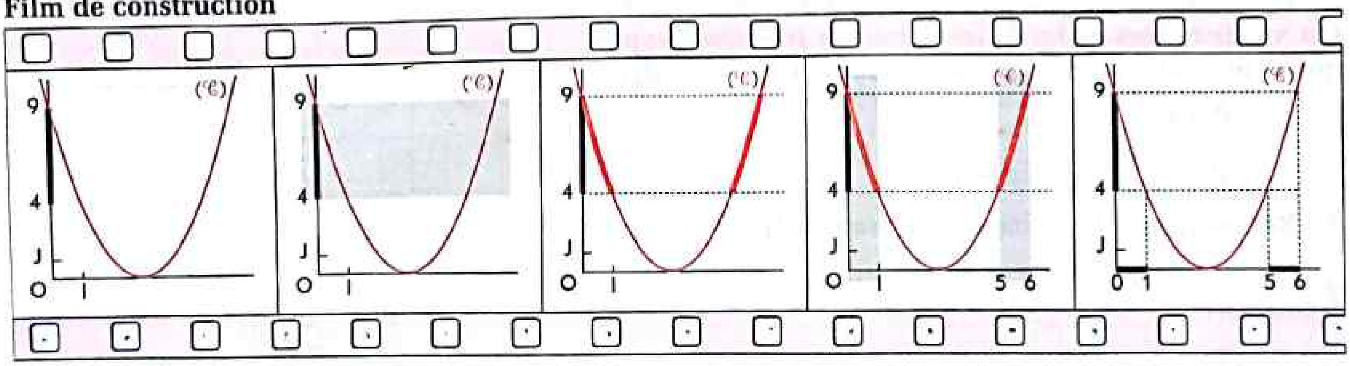
Exemple

Le plan est muni du repère (O, I, J).
La courbe ($\mathscr{C}$) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f, définie par $f(x) = (x-3)^2$.

Le film suivant illustre une méthode de détermination graphique de l'image réciproque de [4 ; 9] par cette fonction.



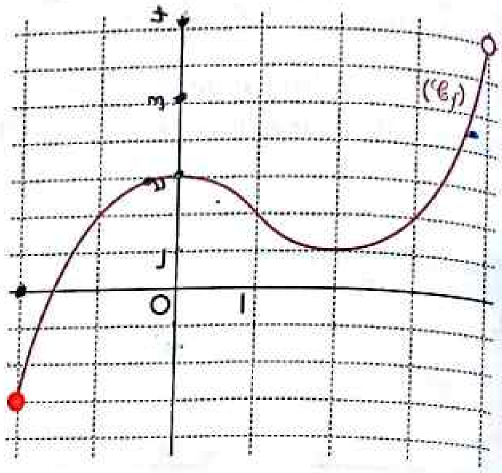
Film de construction



L'image réciproque de [4 ; 9] semble être $[0 ; 1] \cup [5 ; 6]$.

- Déterminer graphiquement l'image réciproque par f de [1 ; 4].

2.4. Travaux Dirigés



1. Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère la fonction f de représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) ci-contre.

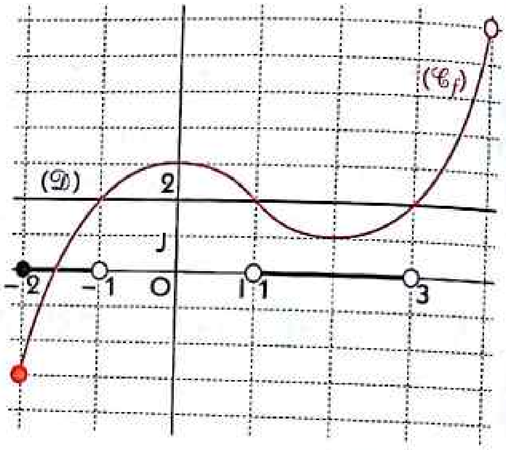
1°) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de f.

2°) Résoudre graphiquement l'équation (E) : $f(x) = 2$.
On vérifiera l'exactitude des solutions trouvées graphiquement, sachant que pour tout élément x de D_f

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{3} + 3.$$

3°) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : $f(x) < 2$.

Solution



1°) $D_f = [-2\,;4[$.

2°) Résolution graphique de l'équation (E) : $f(x) = 2$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des antécédents par f de 2.

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}_f$) avec la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $y = 2$.

La lecture du graphique donne trois solutions : -1 ; 1 ; 3.

Vérification

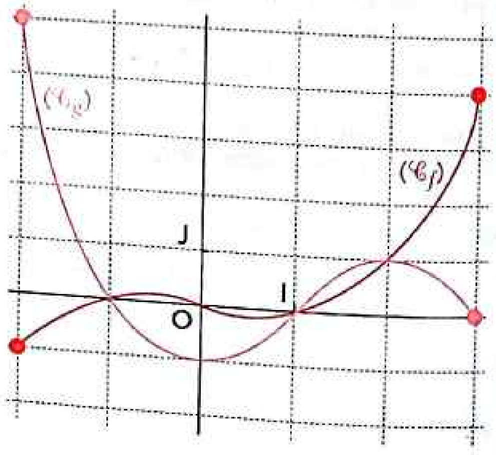
On a : $f(-1) = f(1) = f(3) = 2$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{-1\,;1\,;3\}$.

3°) Résolution graphique de l'inéquation (I) : $f(x) < 2$.

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de ($\mathscr{C}_f$) situés au dessous de la droite ($\mathscr{D}$).

La lecture du graphique donne pour ensemble des solutions : $[-2\,;-1[\,\cup\,]1\,;3[$.



2. Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère les fonctions f et g de représentations graphiques ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) ci-contre.

1°) Déterminer graphiquement les ensembles de définition D_f de f et D_g de g.

2°) Résoudre graphiquement l'équation (E) : $f(x) = g(x)$.
On vérifiera l'exactitude des solutions trouvées graphiquement, sachant que pour tout élément x de D_f ou D_g,

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - x),$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3).$$

3°) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : $f(x) > g(x)$.

Solution

1°) $D_f = D_g = [-2\,;3]$.

2°) Résolution graphique de l'équation (E) : $f(x) = g(x)$.

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_g)$.

La lecture de la représentation graphique donne trois solutions : – 1 ; 1 et 2.

Vérifications

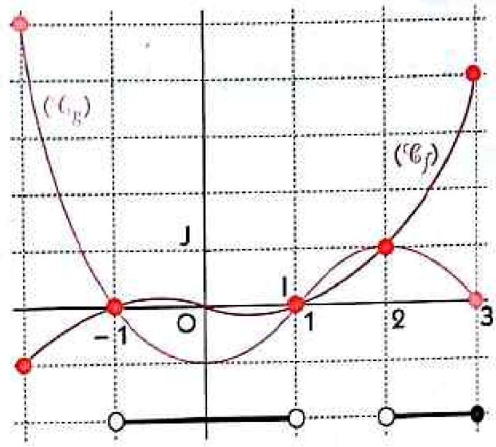
$f(-1) = g(-1) = 0$; $g(1) = f(1) = 0$; $f(2) = g(2) = 1$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est {– 1 ; 1 ; 2}.

3°) Résolution graphique de l'inéquation (I) : $f(x) > g(x)$.

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ situés au-dessus des points de même abscisse de $(\mathscr{C}_g)$.

La lecture de la représentation graphique donne pour ensemble des solutions $]-1\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ 3]$.



M

Pour résoudre graphiquement une équation du type : $f(x) = g(x)$, on peut procéder de la manière suivante :

- disposer des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$;
- l'ensemble des abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_g)$ est l'ensemble des solutions de l'équation.

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type : $f(x) < g(x)$, on peut procéder de la manière suivante :

- disposer des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$;
- L'ensemble des abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ situés au dessous de $(\mathscr{C}_g)$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

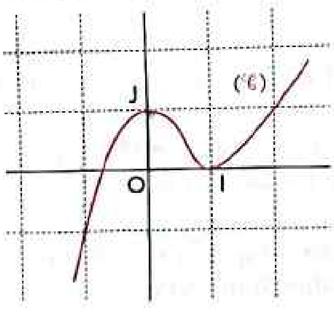
Remarque

En général, la résolution graphique de problèmes ne permet pas d'obtenir des résultats exacts. Cependant, lorsque l'utilisation de graphiques précède une résolution algébrique, elle autorise des conjectures qui permettent de mieux organiser le travail et d'éviter des calculs fastidieux.

Exercices

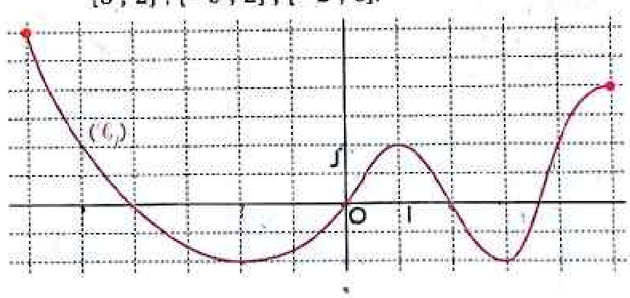
2.a $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction dans le plan muni du repère (O, I, J).

- Trouver deux nombres qui ont le nombre 1 pour image.
- Trouver le nombre qui a le nombre – 1 pour antécédent et celui qui a le nombre 1 pour antécédent.



2.b Le plan est muni du repère (O, I, J).
f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ représentée par le graphique ci-dessous.

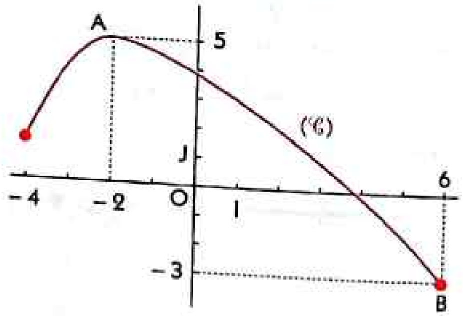
- Déterminer graphiquement l'image directe par f de chacun des intervalles suivants : $[-2\ ;\ 1]$; $[-2\ ;\ 3]$; $[-2\ ;\ 5]$.
- Déterminer graphiquement l'image réciproque par f de chacun des intervalles suivants : $[0\ ;\ 2]$; $[-3\ ;\ 2]$; $[-2\ ;\ 0]$.



3 Variations d'une fonction

3.1. Maximum, minimum d'une fonction.

Présentation



Le plan est muni du repère (O, I, J). f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $[-4 ; 6]$, de représentation graphique $(\mathscr{C})$ ci-contre.

On constate (graphiquement) que :

$f([-4 ; 6]) = [-3 ; 5]$,

$A\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ est le point de $(\mathscr{C})$ ayant la plus grande ordonnée,

$B\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ est le point de $(\mathscr{C})$ ayant la plus petite ordonnée.

On dit que :

sur l'intervalle $[-4 ; 6]$, f admet en -2 un maximum égal à 5,
sur l'intervalle $[-4 ; 6]$, f admet en 6 un minimum égal à -3.

Définitions

f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble E ; a est un élément de E.

Lorsque, quel que soit x de E, $f(a) \geq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur E.

Lorsque, quel que soit x de E, $f(a) \leq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur E.

Recherche du minimum (ou du maximum) d'une fonction

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + 2\sqrt{x-4}$.
Démontrons que f admet un minimum sur D_f.

L'ensemble de définition de f est $[4 ; +\infty[$.
Recherche d'un minorant de $f(E)$

$$\begin{array}{ll} x \in [4 ; +\infty[& \\ x-4 & \geq 0 \\ \sqrt{x-4} & \geq 0 \\ 2\sqrt{x-4} & \geq 0 \\ 1+2\sqrt{x-4} & \geq 1 \end{array}$$

Par conséquent, pour tout x élément de $[4 ; +\infty[$, $f(x) \geq 1$.

La fonction f admet en 4 un minimum égal à 1.

1 est-il le minimum de f sur $[4 ; +\infty[$?

Résolvons l'équation

$$\begin{array}{ll} f(x) & = 1 \\ 1+2\sqrt{x-4} & = 1 \\ 2\sqrt{x-4} & = 0 \\ \sqrt{x-4} & = 0 \\ x-4 & = 0 \\ x & = 4 \end{array}$$

Par conséquent, $f(4) = 1$.

3.2. Sens de variation d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle

On considère une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

– Lorsque sur l'intervalle K les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images, on dit que la fonction est croissante sur K. On illustre cette situation par une flèche montante dans un tableau appelé tableau de variation.

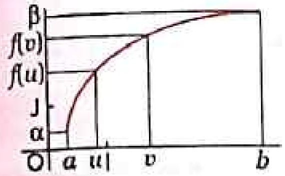
– Lorsque sur l'intervalle K les nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images, on dit que la fonction est décroissante sur K. On illustre cette situation par une flèche descendante dans le tableau de variation.

– Lorsque les nombres de l'intervalle K ont tous la même image, on dit que la fonction est constante sur K. On illustre cette situation par une flèche horizontale dans le tableau de variation.

Définitions

f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

On dit que :

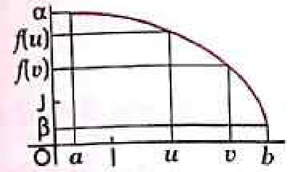


f est une fonction croissante sur K (resp. strictement croissante sur K) lorsque, pour tous éléments u et v de K,

$$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v).$$

(resp. $\quad u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$)

x	a	b
$f(x)$	α ↗	β

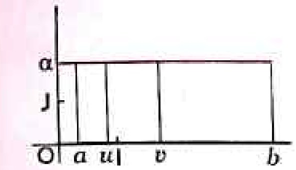


f est une fonction décroissante sur K (resp. strictement décroissante sur K) lorsque, pour tous éléments u et v de K,

$$u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v).$$

(resp. $\quad u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$)

x	a	b
$f(x)$	α ↘	β



f est une fonction constante sur K lorsque, pour tous éléments u et v de K,

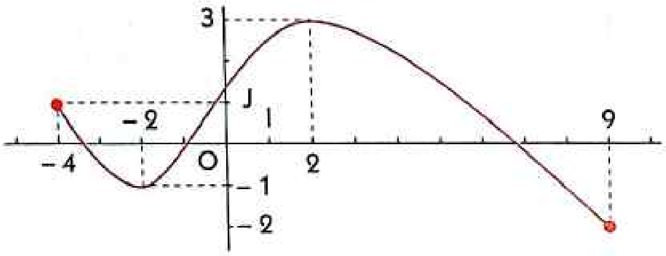
$$f(u) = f(v).$$

x	a	b
$f(x)$	α →	β

f est une fonction monotone sur K lorsqu'elle est
- soit croissante sur K,
- soit décroissante sur K.

f est une fonction strictement monotone sur K lorsqu'elle est
- soit strictement croissante sur K,
- soit strictement décroissante sur K.

Exemple



x	-4		-2		2		9
$f(x)$	1	↘	-1	↗	3	↘	-2

Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $[-4 ; 9]$, de représentation graphique ci-contre.
Les nombres -2 et 2 partagent l'ensemble de définition de f en trois intervalles sur lesquels f est strictement monotone :

f est strictement décroissante sur $[-4 ; -2]$,

f est strictement croissante sur $[-2 ; 2]$,

f est strictement décroissante sur $[2 ; 9]$.

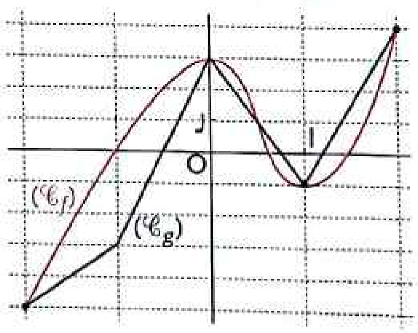
Les variations de f sont illustrées dans un tableau de variation.
On dit que l'on a étudié le sens de variation de la fonction f.

Vocabulaire

Étudier le sens de variation d'une fonction sur un ensemble, c'est :

Tableau de variation et fonctions

Un même tableau de variation peut être associé à plusieurs fonctions. Par exemple, les fonctions f et g, de représentations graphiques ci-contre, admettent le tableau de variation ci-dessous :



x	-2		0		1		2
y	-5	↗	3	↘	-1	↗	4

3.3. Travaux dirigés

1°) f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle K.

***a)* Démontrer que f est strictement croissante sur K si et seulement si, pour tous nombres réels distincts u et v de K, on a : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} > 0$.**

***b)* Établir un résultat analogue pour une fonction strictement décroissante sur K.**

2°) On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = -2x^2 - 2x + 5$.

***a)* Quel est le sens de variation de f sur les intervalles $[-1 ; -\frac{1}{2}]$ et $[-\frac{1}{2} ; 1]$?**

***b)* Établir le tableau de variation de f. Démontrer que f admet sur $[-1 ; 1]$ un maximum et un minimum dont on donnera les valeurs.**

Solution guidée

1°) *a)* Démontrer que f est strictement croissante sur K si et seulement si, pour tous nombres réels distincts u et v de K, $v - u$ et $f(v) - f(u)$ sont de même signe.

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur K si et seulement si, pour tous nombres réels distincts u et v de K, on a : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} < 0$.

2°) *a)* Pour tous nombres réels distincts u et v de $[-1 ; 1]$, on a : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = -2(v + u) - 2$.

Étudier le signe de cette expression pour u et v dans $[-1 ; -\frac{1}{2}]$, puis dans $[-\frac{1}{2} ; 1]$.

b) Utiliser le tableau de variation ci-contre pour donner un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-1 ; -\frac{1}{2}]$, puis à $[-\frac{1}{2} ; 1]$. Conclure.

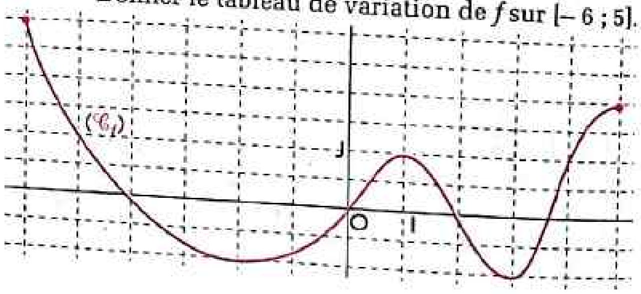
x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	5	↗	$\frac{11}{2}$	↘	1

Exercices

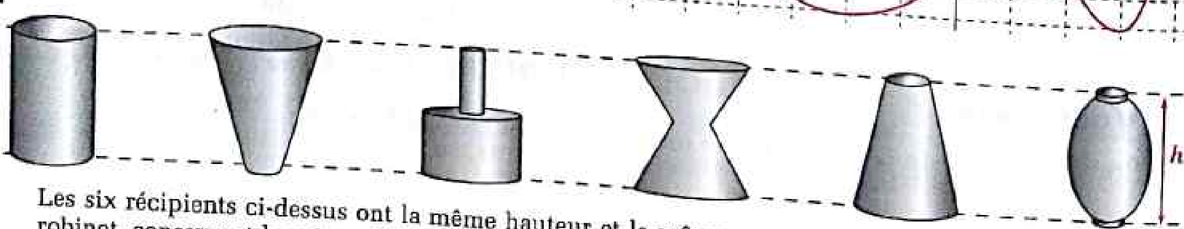
3.a On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -3(x + 7)^2 + 5$.
Démontrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$. Quel est ce maximum ?

3.b On considère l'application affine f définie par $f(x) = -5x + 2$.
Démontrer que f admet un maximum et un minimum sur tout intervalle $[a ; b]$.
Quels sont le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$?
Mêmes questions pour l'application affine g définie par $g(x) = 6x + 1$.

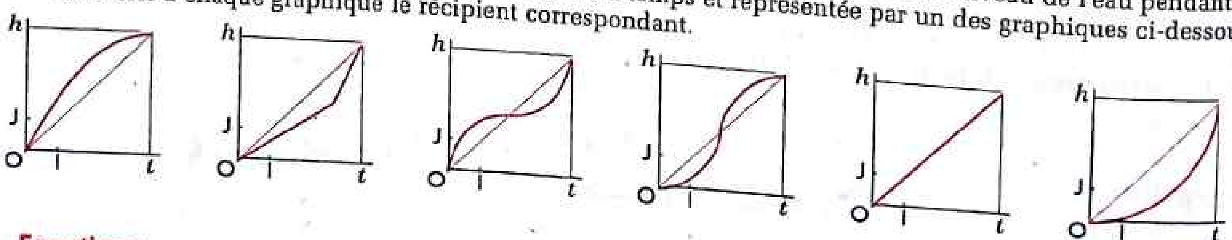
3.c Citer deux intervalles disjoints sur lesquels la fonction f représentée ci-dessous est décroissante.
Citer deux intervalles disjoints sur lesquels la fonction f est croissante.
Donner le tableau de variation de f sur $[-6 ; 5]$.



3.d



Les six récipients ci-dessus ont la même hauteur et la même capacité. On les remplit d'eau à l'aide d'un robinet conservant le même débit. Pour chacun des récipients, la variation du niveau de l'eau pendant la durée du remplissage est exprimée en fonction du temps et représentée par un des graphiques ci-dessous.
Associer à chaque graphique le récipient correspondant.



Exercices

Sauf indications contraires, l'ensemble de départ des fonctions ci-après est $\mathbb{R}$.
Le plan est muni du repère (O, I, J)

APPRENTISSAGE

Généralités sur les fonctions

1 Dans chacun des cas, établir un tableau donnant l'arrondi d'ordre 1 de $f(x)$, pour les valeurs suivantes de x : -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 11.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 2$.
b) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-1}$.
c) $f(x) = \sqrt{x+6}$.
d) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

2 Dans chacun des cas, établir un tableau donnant l'arrondi d'ordre 2 de $f(x)$, pour les valeurs suivantes de x : $18{,}5$; 19 ; -19 ; $\sqrt{5}$; $\sqrt{346}$.

a) $f(x) = 9x^2 + 3x - 17$.
b) $f(x) = \dfrac{21x+2}{3x-56}$.
c) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 8$.
d) $f(x) = \sqrt{x} + 35$.

3 **3** ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre O et de rayon 1.
[AA'] est un diamètre de ($\mathscr{C}$), B et C sont deux points de ($\mathscr{C}$) symétriques par rapport à (AA'). Les droites (AA') et (BC) se coupent au point H.
1. Démontrer que les triangles HAB et HBA' sont semblables.
2. On pose AH = x.
Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x.

4 f et g sont les fonctions définies par :
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$,
$g(x) = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{5}{x}$.
1. Trouver D_f et D_g.
2. Calculer l'image par f et g, de chacun des nombres suivants :
10^{-1} ; 10^2 ; 10^{-3} ; -10^{-1} ; -10^{-2} ; -10^3.

5 ABCD est un carré de centre O et de côté 4 cm, M est un point de [AC]. La perpendiculaire à (AC) en M coupe les côtés du carré aux points P et Q.
On pose AM = x. Exprimer PQ en fonction de x (*on distinguera deux cas : M ∈ [AO] et M ∈ [OC]*).

6 L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en C tel que AB = 6 et AC = x.
1. Calculer BC en fonction de x.
2. $\mathscr{A}$ est la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle ABC.
a) Calculer $\mathscr{A}(x)$.
b) Quel est l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$?

7 L'unité de longueur est le cm.
Un industriel fabrique des boîtes cylindriques, de volume 850. On appelle r le rayon de la base du cylindre formé par une de ces boîtes, h sa hauteur et $\mathscr{A}$ l'aire totale d'une boîte.
1. Exprimer h en fonction de r.
2. Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de r.

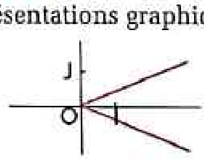
8 Soit A = $\{-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1 ; \sqrt{3} ; 2{,}5\}$
et f : $A \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{2}{|x|-1}$
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Trouver les antécédents de -4 et $\frac{1}{2}$.
3. Représenter graphiquement f.

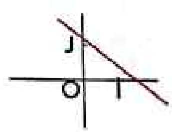
9 f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$.
($\mathscr{C}$) est la courbe représentative de f.
1. Parmi les points suivants, indiquer ceux qui appartiennent à ($\mathscr{C}$) : $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ordonnée du point de ($\mathscr{C}$) dont l'abscisse est $\frac{1}{2}$, dont l'abscisse est $-\frac{3}{4}$.

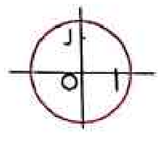
10 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

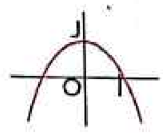
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$;
b) $f(x) = (3-2x)(5x+1)$;
c) $f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$;
e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-3}$;
f) $f(x) = \sqrt{-x}$;
g) $f(x) = \dfrac{1-5x}{2x+1}$;
h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$;
i) $f(x) = \sqrt{1-x}$;
j) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+7}}$.

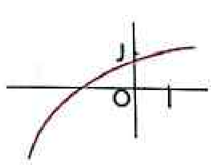
11 Parmi les courbes suivantes, indiquer les représentations graphiques de fonctions.

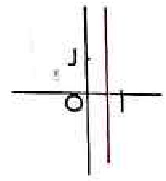
a)


b)


c)


d)


e)


f)


12 Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ ou non.

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$.
b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+1}$; $g(x) = |x| - 1$.
c) $f(x) = x$; $g(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+1}$.

d) $f(x) = |x^2 - 4|$;
$g : \begin{cases} \text{si } x \in [-2\ ;\ 2],\ g(x) = -x^2 + 4 \\ \text{si } x \notin [-2\ ;\ 2],\ g(x) = x^2 - 4. \end{cases}$

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f, D_g, puis le plus grand des ensembles sur lequel f et g coïncident.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $g(x) = x - 2$.

c) $f(x) = |x|$; $g(x) = (\sqrt{x})^2$.

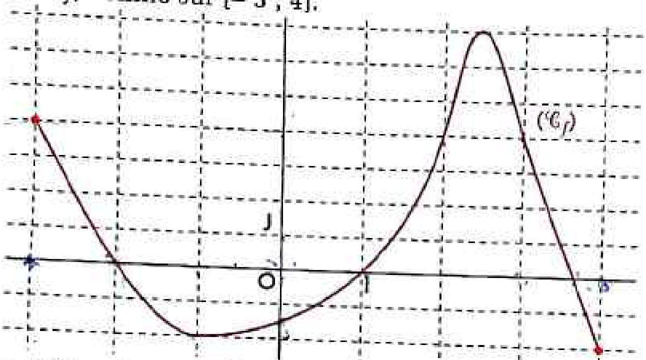
d) $f(x) = |x|$; $g(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$.

Étude graphique

14 Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -2x + 3$.

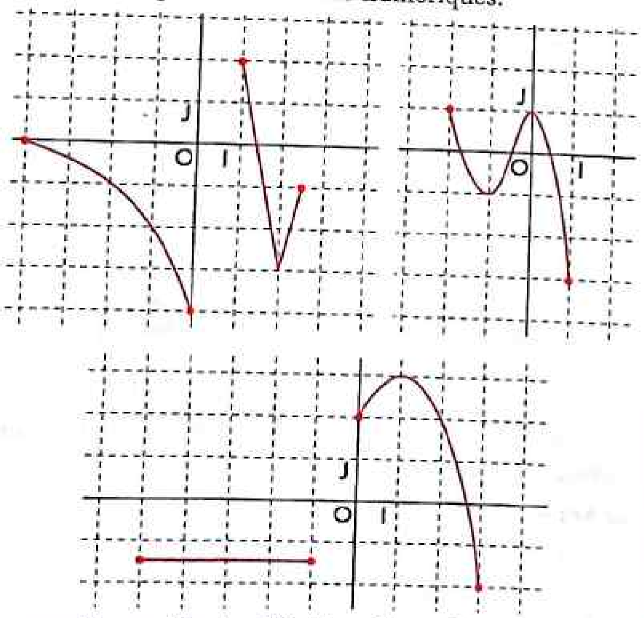
1. Déterminer l'image directe par f de $[-1\ ;\ 6]$.
2. Déterminer l'image réciproque par f de $[-4\ ;\ 5]$.

15 $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-3\ ;\ 4]$.



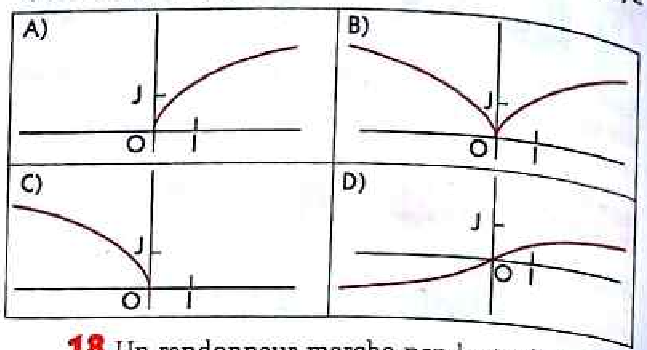
1. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des nombres réels suivants : -3 ; -2 ; 3 ; 4.
2. Déterminer graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres réels suivants : -2 ; 0 ; 4.

16 Les courbes ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions numériques.

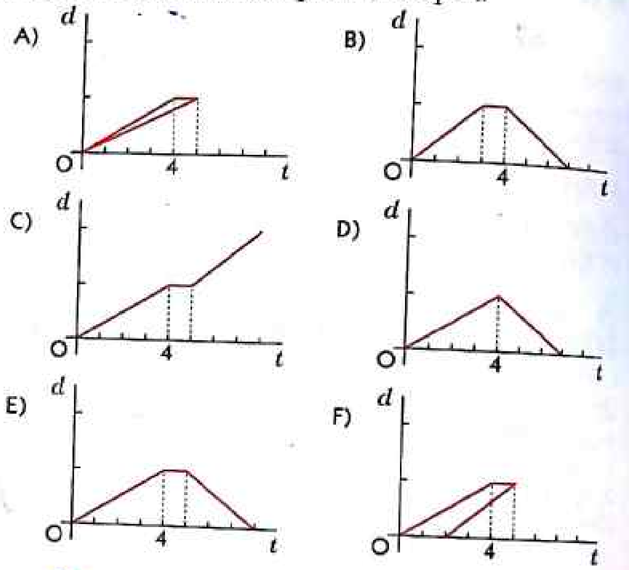


Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.

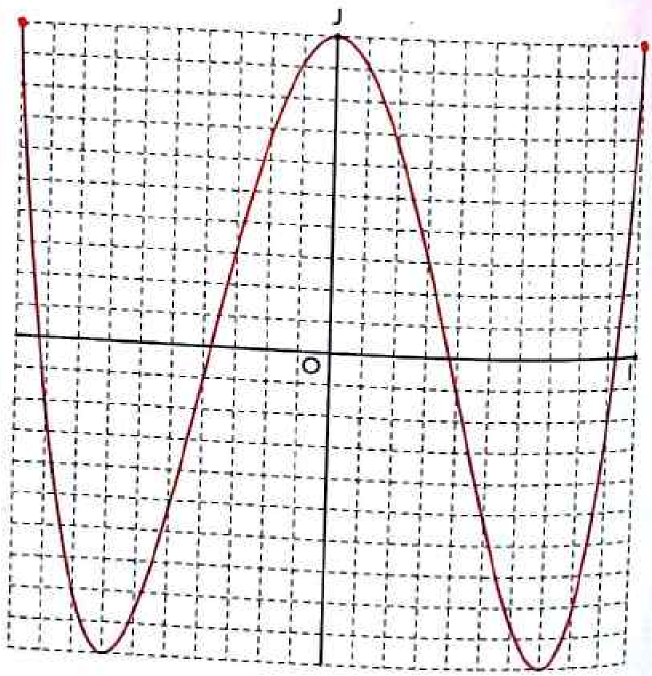
17 L'une des courbes ci-dessous est la représentation graphique partielle de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$. Préciser laquelle.



18 Un randonneur marche pendant 4 h à vitesse constante, se repose ensuite pendant 1 h, puis revient à son point de départ en 3 h, par le même chemin et à nouveau à vitesse constante.
Parmi les graphiques ci-dessous, indiquer celui qui traduit son mouvement, t désignant le temps et d la distance du marcheur à son point de départ.

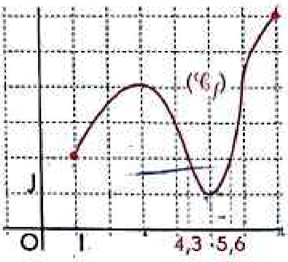


19 $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.



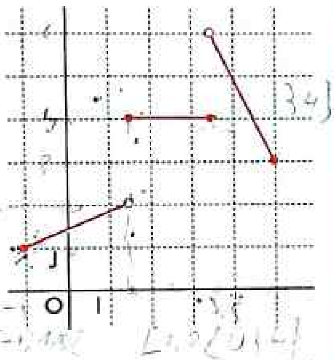
1. Trouver graphiquement l'ensemble des antécédents de zéro par la fonction f. On donnera un encadrement des résultats par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.
2. Déterminer graphiquement le signe de l'image par f de chacun des nombres : $-0{,}896$; $-0{,}412$; $0{,}612$; $0{,}299$; $-0{,}554$; $0{,}681$.

20 $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;7]$.



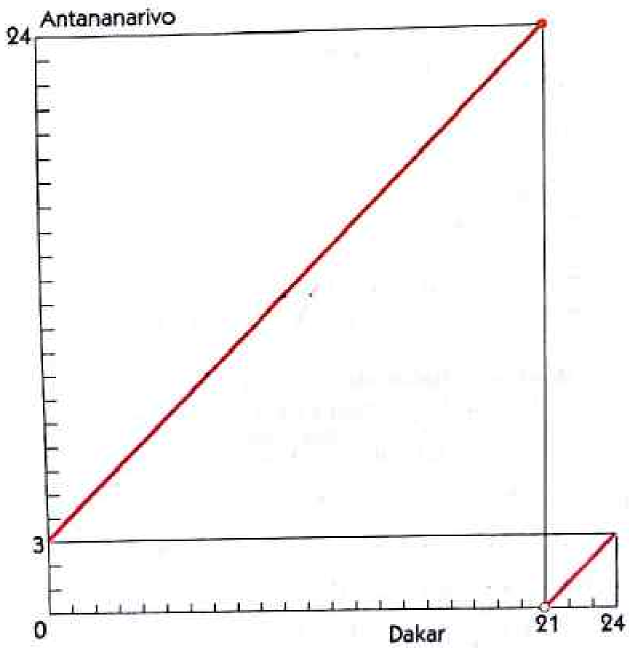
1. Déterminer graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants : $[1\,;5]$, $[3{,}5\,;6]$, $[3\,;5]$, $[1\,;7]$.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des antécédents de chacun des nombres suivants : 1 ; 4 ; 2 ; 6.
3. Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants : $[1\,;4]$, $[4\,;6]$, $[2\,;4]$.

21 $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1\,;5]$.



1. Déterminer graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants : $[1{,}5\,;3{,}5]$, $[-1\,;1{,}5]$, $[-1\,;5]$.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des antécédents de 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 .
3. Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants : $[1\,;2]$, $[3\,;6]$, $[1\,;4]$.

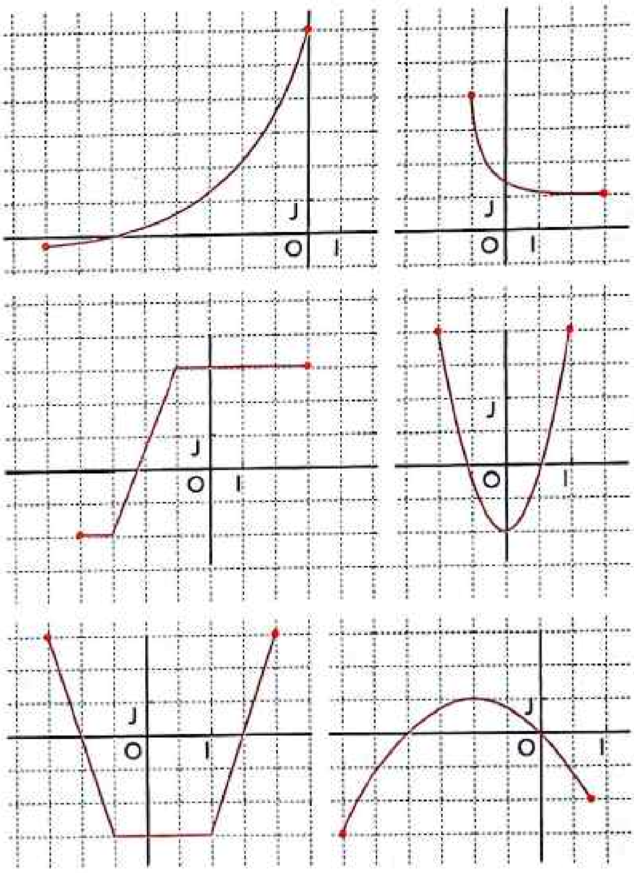
22 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f qui, à l'heure de Dakar, (heure G.M.T.) associe l'heure de Antananarivo.
1. Déterminer D_f.
2. Déterminer l'heure à Antananarivo lorsqu'il est 7h, 21h ou minuit à Dakar.



3. Déterminer l'heure à Dakar lorsqu'il est 1h, 13h ou 0h à Antananarivo.
4. M. Andrialala doit se rendre à un séminaire à Dakar. Son avion part d'Antananarivo à 19h, heure locale. La durée totale prévue pour son voyage est de 18h.
Trouver son heure d'arrivée à Dakar.
5. M. Andrialala désire téléphoner à son épouse, restée à Antananarivo, lorsqu'elle est au bureau (8-12h et 15-18h). Mais il ne peut téléphoner qu'en dehors des heures réservées aux travaux de son séminaire (8-12h et 14-18h). Déterminer, si elles existent, les plages horaires au cours desquelles M. Andrialala pourra appeler son épouse.

Variations d'une fonction

23 Dans chaque cas, étudier les variations de la fonction numérique f sur son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.



24 Démontrer que toute fonction numérique définie et décroissante sur $[a, b]$ admet un minimum et un maximum sur cet intervalle.

25 Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a < b < c$ et f une fonction numérique définie sur $[a, c]$.
1. *a)* Démontrer que si f est croissante sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors f est croissante sur $[a, c]$.
b) Donner un exemple d'une fonction croissante sur $[0\,;1[$ et $[1\,;2]$ qui ne le soit pas sur $[0\,;2]$.
2. *a)* Démontrer que si f est croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$, alors $f(b)$ est le maximum de f sur $[a, c]$.

b) Tracer la représentation graphique d'une fonction définie sur [0 ; 2], admettant $f(1)$ pour maximum sur cet intervalle, et qui ne soit ni croissante sur [0 ; 1] ni décroissante sur [1 ; 2].
3. Démontrer que si f est décroissante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, c]$, alors $f(b)$ est le minimum de f sur $[a, c]$.

26 Soit la fonction définie par :
$$g(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 9.$$
1. *a)* Calculer $g(-5)$; $g(-3)$, $g(0)$ et $g(1)$.
b) En déduire que la fonction g n'est ni croissante, ni décroissante sur $[-5 ; 1]$.
2. Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

APPROFONDISSEMENT

27 On considère la fonction définie par : $f(x) = (3x - 6)^2 + 1$.
1. Démontrer que f est croissante sur $[2 ; +\infty[$.
2. Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.
3. Démontrer que f n'est pas croissante sur [1 ; 5].

28 **1.** Démontrer que les fonctions suivantes présentent un maximum sur leur ensemble de définition.
a) $f(x) = -(x - 1)^2 + 4$.
b) $g(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$.
2. *a)* Étudier les variations de f sur $]-\infty ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$.
b) Étudier les variations de g sur $]-\infty ; 0]$ et $[0 ; +\infty[$.

29 **1.** Démontrer que les fonctions suivantes présentent un minimum sur leur ensemble de définition.
a) $f(x) = |x - 3| + 1$.
b) $g(x) = (x - 1)^2 + 3$.
c) $h(x) = \sqrt{2x - 1} - 4$.
2. *a)* Étudier les variations de f sur $]-\infty ; 3]$ et $[3 ; +\infty[$.
b) Étudier les variations de g sur $]-\infty ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$.
c) Étudier les variations de h sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

30 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit l'application $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$M \mapsto OM$.
1. Calculer les images des points O ; I ; $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'image directe du plan $\mathcal{P}$.
3. Déterminer, si cela est possible, les antécédents des nombres -2 ; 0 ; 2.
4. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation : $y = 1$.
a) Pour le point M de $(\mathcal{D})$ d'abscisse x, calculer $f(M)$.
b) Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ dont l'image est 2.

31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x) = x^3 - x + 2$.
1. Vérifier que, si $u \in \mathbb{R}+$ et $v \in \mathbb{R}+$,
$f(u) - f(v) = (u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1)$.
2. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et est strictement croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}+$ et en déduire le minimum de f sur cet intervalle.

32 **1.** Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Vérifier que, si $u \in D_f$ et $v \in D_f$:
$$f(u) - f(v) = \frac{-2(u - v)}{(u - 1)(v - 1)}.$$
c) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x - 5}{3x + 2}$.
S'inspirer de la méthode utilisée dans la question 1. pour démontrer que g est strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{2}{3}[$ et $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$.

33 **1.** Lorsque $0 \leq u < v$, comparer :
a) $2u^2$ et $2v^2$; *b)* $\frac{1}{u + 1}$ et $\frac{1}{v + 1}$.
En déduire le sens de variation de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x + 1}$.
2. Démontrer que la fonction g définie par
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ est monotone sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[0 ; +\infty[$.

34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$.
1. On suppose $1 \leq x \leq 4$.
a) En utilisant les propriétés des inégalités, donner un encadrement de $f(x)$.
b) En admettant que f est croissante sur $]-1 ; +\infty[$, donner un encadrement de $f(x)$.
c) Comparer la qualité des encadrements obtenus en *a)* et *b)*.
2. Mêmes questions si $-5 \leq x \leq -2$. (On admettra que f est encore croissante sur $]-\infty ; -1[$.)

35 ABC est un triangle équilatéral, de côté AB = 2, et M est un point du segment [BC]. On pose $BM = x$.
Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = AM$.
1. À partir de considérations géométriques, faire une conjecture sur le sens de variation de la fonction f et la valeur de son minimum.
2. *a)* Calculer $f(x)$ en fonction de x.
b) Compléter le tableau suivant et en déduire un tracé point par point de la courbe représentative de la fonction f.

x	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,5	1,8	2
$f(x)$									

3. *a)* Démontrer que, pour tous nombres réels distincts u et v de [0 ; 2], $f(u) - f(v)$ et $(u - v)(u + v - 2)$ ont le même signe.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur [0 ; 1] et [1 ; 2].
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f et retrouver les résultats conjecturés dans la question 1.

36 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle D, en utilisant le signe du rapport $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$, où a et b sont deux nombres réels distincts de D.
a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 8$; $D = [\frac{1}{3} ; +\infty[$.
b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$; $D =]-\infty ; -2]$.
c) $f(x) = x + \frac{5}{x}$; $D =]0 ; \sqrt{5}]$.

10 Polynômes et fractions rationnelles

Les polynômes et les fractions rationnelles jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques. L'objet de ce chapitre est de présenter quelques techniques de calcul, qui leurs sont propres et dont la connaissance s'avèrera essentielle par la suite.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad + 4 & x^2 - 2x + 2 \\ \hline
\underline{-x^4 + 2x^3 - 2x^2 \qquad\qquad} & x^2 + 2x + 2 \\
2x^3 - 2x^2 \qquad + 4 & \\
\underline{-2x^3 + 4x^2 - 4x \quad} & \\
2x^2 - 4x + 4 & \\
\underline{-2x^2 + 4x - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4 + 4}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 2x + 2$$

SOMMAIRE

1 Généralités sur les polynômes

1.1. Notion de polynôme

Introduction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = (1 - 2x)(x^2 - 3) - x^2(4 - x) + 5.$$

- Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
- Quel est le terme de degré 2 ? Quel est le terme constant ?
- Quel est le coefficient du monôme de plus haut degré ?

On a appris en classe de troisième que $f(x)$ est un polynôme de degré 3 dont la forme réduite et ordonnée est : $-x^3 - 3x^2 + 6x + 2$.

Nous allons, dans les paragraphes qui suivent, réviser et préciser ce vocabulaire.

Définitions et théorème fondamental

Définitions

- **Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.**

Toute fonction numérique f de la variable réelle x, définie par $f(x) = ax^n$, est appelée monôme de coefficient a et de degré n.

- **On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.**

Exemples

- $x \mapsto \sqrt{2}x^5$ est un monôme de coefficient $\sqrt{2}$ et de degré 5.
- $x \mapsto \frac{x^5}{7} - (1 - \sqrt{2})x^3 + 1$ est un polynôme.

Remarques

- *Un monôme est un polynôme (par exemple : $\sqrt{2}x^5 = \sqrt{2}x^5 + 2x^2 - 2x^2$).*
- *L'ensemble de définition d'un polynôme est $\mathbb{R}$.*
- $x \mapsto \frac{6}{x^2} + x^4$ *n'est pas un polynôme car son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$.*
- *La fonction nulle est un polynôme, appelé le polynôme nul (c'est, par exemple, la somme de $x \mapsto 2x^2$ et de $x \mapsto -2x^2$).*

Théorème fondamental

Tout polynôme non nul P(x) peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Nous admettrons ce théorème.

Définitions

Un polynôme écrit sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) est dit réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

- **n est appelé degré de P. On le note : d°P.**
- **Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n, $a_k x^k$ est appelé terme de degré k.**

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

– ils ont même degré ;

– les coefficients des termes de même degré sont égaux.

C'est une conséquence du théorème fondamental puisqu'un polynôme admet une seule forme réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes.

Remarque

Nous n'avons pas défini le degré du polynôme nul.

Dans la suite du cours, chaque fois que l'on fera référence au degré d'un polynôme, ce polynôme sera implicitement supposé non nul.

Racines d'un polynôme

Définition

On appelle racine d'un polynôme P tout nombre réel α tel que : $P(\alpha) = 0$.

Remarque

Déterminer les racines de P, c'est résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

Exemples

- $R(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ a pour racines : 0 et 2.
- Soit $Q(x) = x^2 + x - 2$. On vérifie aisément que : $Q(1) = 0$ et $Q(-2) = 0$.

– 2 et 1 sont donc des racines de Q.

Produit de polynômes

Soit P le polynôme de degré 5 défini par $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$.
Soit Q le polynôme de degré 3 défini par $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (3x^5 - 2x^3 + 4x + 1)(x^3 + 2x^2 - 1) \\ &= 3x^8 + 6x^7 - 2x^6 - 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 4x - 1. \end{aligned}$$

On constate que PQ est un polynôme de degré 8.

Propriété

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme, noté PQ.

On a : $d°(PQ) = d°P + d°Q$.

Démonstration

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$,

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \ (b_m \neq 0)$.

Le produit de deux monômes étant un monôme, le produit des polynômes P et Q est une somme de monômes, c'est-à-dire un polynôme.

Le terme de plus haut degré de PQ est le produit du terme de plus haut degré de P par le terme de plus haut degré de Q, c'est-à-dire : $(a_n x^n)(b_m x^m) = a_n b_m x^{n+m}$.

Comme $a_n b_m \neq 0$, PQ a pour degré : $n + m$.

Somme de polynômes

Soit $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$. Soit $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.
Soit $R(x) = x^5 + x^2 + 4$. Soit $S(x) = -3x^5 + x^2 + 4$.

On constate que :

- P et Q sont de degrés différents (5 et 3) et P + Q est un polynôme de degré 5 ;
- P et R sont de même degré (égal à 5) et P + R est un polynôme de degré 5 ;
- P et S sont de même degré (égal à 5) et P + S est un polynôme de degré 3.

Le seul cas où le degré de la somme n'est pas égal à 5, c'est-à-dire au degré du polynôme de plus haut degré, est celui où on ajoute deux polynômes de même degré ayant leurs termes de plus haut degré opposés.

Propriété

La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme, noté P + Q.
d°(P + Q) est inférieur ou égal au plus grand des nombres d°P et d°Q (égal lorsque d°P ≠ d°Q).

Démonstration

Soit P et Q des polynômes définis par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$,
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ $(b_m \neq 0)$.

P + Q est une somme de monômes donc un polynôme.

- Lorsque $m \neq n$, son terme de plus haut degré est m si $m > n$, n si $m < n$. Donc, d°(P + Q) est le plus grand des nombres m et n.
- Lorsque $m = n$, $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$.

Si $(a_n + b_n) = 0$, alors d°(P + Q) est inférieur à n.
Si $(a_n + b_n) \neq 0$, alors d°(P + Q) est égal à n.

1.2. Factorisations

Définiton

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Factorisations élémentaires

On peut dans certains cas, en observant attentivement le polynôme et en effectuant de légères modifications, reconnaître un facteur commun à plusieurs termes.

Exemples

- $P(x) = x(2-x) + 4x - 8$
$= x(2-x) + 4(x-2)$
$= x(2-x) - 4(2-x)$
$= (2-x)(x-4)$.

- $Q(x) = (x-3) - 2(x-3)^2 + x^2 - 3x$
$= (x-3) - 2(x-3)^2 + x(x-3)$
$= (x-3)\,[1 - 2(x-3) + x]$
$= (x-3)(7-x)$.

Factorisations utilisant des produits remarquables

Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
(3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;
(4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
(5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
(6) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;
(7) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Ces résultats sont faciles à établir. L'initiative en est laissée au lecteur.

Exemples

- $P(x) = 12x - 3x^3$
$= 3x(4 - x^2)$
$= 3x(2 - x)(2 + x)$.

- $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$= x^3 + 3x^2 \times 1 + 3x \times 1^2 + 1^3$
$= (x + 1)^3$.

- $R(x) = x^3 - 8 + (x - 2)(4x + 5)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)(4x + 5)$
$= (x - 2)[(x^2 + 2x + 4) + (4x + 5)]$
$= (x - 2)(x^2 + 6x + 9)$
$= (x - 2)(x + 3)^2$.

1.3. Travaux dirigés

1. Polynômes de degré 2 non factorisables

1°) Le polynôme P, défini par $P(x) = x^2 + 1$, admet-il une racine ?
2°) Lorsqu'un polynôme de degré 2 est factorisable, quel est le degré de ses facteurs ?
3°) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que P n'est pas factorisable.
4°) Parmi les polynômes Q, R et S, déterminer ceux qui sont factorisables :
$Q(x) = (x + 2)^2 - 3$; $R(x) = (x - 2)^2 + 3$; $S(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$.

Solution

1. Pour tout nombre réel x : $x^2 + 1 \geq 1$. Donc, pour tout nombre réel x : $P(x) \neq 0$.
Le polynôme P n'admet donc aucune racine dans $\mathbb{R}$.

2. Lorsqu'un polynôme de degré 2 est factorisable, chacun de ses facteurs a un degré non nul strictement inférieur à 2. Un tel polynôme est donc le produit de deux polynômes de degré 1.

3. Si P était factorisable, il pourrait s'exprimer sous la forme : $P = P_1P_2$, avec $d°P_1 = d°P_2 = 1$. En particulier, P_1 admettrait une racine qui serait aussi racine de P, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question 1. P n'est donc pas factorisable.

4. $Q(x) = (x + 2)^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$. Q est donc factorisable.

Pour tout nombre réel x : $R(x) \geq 3$. R n'admet donc aucune racine et est de degré 2. Un raisonnement identique à celui de la question précédente prouve que R n'est pas factorisable.

$S(x)$ est la somme de deux termes positifs, elle est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul.
Par conséquent : $S(x) = 0 \iff (x - 2)^2 = 0$ et $(x + 2)^2 = 0$
$\iff x = 2$ et $x = -2$.
S est un polynôme de degré 2 n'admettant aucune racine, il n'est donc pas factorisable.

2. Factoriser :

1°) $P(x) = x^3 - 27$; **2°) $Q(x) = x^6 - 64$;** **3°) $R(x) = 16x^4 - 81$;**
4°) $S(x) = x^4 + 4x^2 + 4$; **5°) $T(x) = x^4 + 4$;** **6°) $U(x) = x^4 + 1$.**

Solution

1°) $P(x) = x^3 - 3^3$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

2°) $Q(x) = (x^3)^2 - 8^2$
$= (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$;

3°) $R(x) = (4x^2)^2 - 9^2$
$= (4x^2 - 9)(4x^2 + 9)$
$= (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$;

4°) $S(x) = (x^2)^2 + 2x^2 \times 2 + 2^2$
$= (x^2 + 2)^2$;

5°) $T(x) = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$
$= (x^2)^2 + 2x^2 \times 2 + 2^2 - (2x)^2$
$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$;

6°) $U(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$
$= (x^2)^2 + 2x^2 \times 1 + 1^2 - (x\sqrt{2})^2$
$= (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2$
$= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$.

Remarque

Certains polynômes sont factorisables et n'admettent pourtant aucune racine ; T en est un exemple : pour tout nombre réel x, $T(x) \geq 4$, donc $T(x)$ n'admet pas de racine.
On démontre de même que U n'a pas de racine.

Exercices

1.a Réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les polynômes P, Q, R définis par :
$P(x) = (x^2 + 5)^2 + (2x - 3)^3$;
$Q(x) = (x^3 + 1)^3 + (x^4 - 1)^3$;
$R(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$.

1.b Soit les polynômes P, Q, R définis par :
$P(x) = (x^3 + x + 1)(-5x^7 + 3x^2 - 4)$;
$Q(x) = (x^2 - 1)^5$;
$R(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^n(x^{2n} - 1)$ (où n est un nombre entier naturel non nul donné).
Déterminer d°(P), d°(Q), d°(P + Q), d°(R).

1.c Factoriser les polynômes P, Q, R définis par :
$P(x) = x^2 - 1 + (1 - x)(2x - 3)$;
$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
$R(x) = x^3 - 1 + (x^2 + x + 1)(4x^2 + 3x + 2)$.

1.d On reprend les polynômes P, Q, R de l'exercice précédent.
1. Déterminer les racines de P et Q.
2. *a)* Démontrer que, pour tout nombre réel x :
$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.
En déduire que, pour tout nombre réel x :
$x^2 + x + 1 > 0$.
b) Déterminer les racines de R.

1.e Calculer mentalement : $2\,000^2 - 1\,999^2$.

1.f Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annule en -2 et 1, et qui prend la valeur 6 en 0.

2 Polynômes du second degré

2.1. Forme canonique

Introduction

L'objet de ce paragraphe est d'apprendre à écrire tout polynôme du second degré sous une forme particulière, appelée forme canonique, permettant de calculer aisément ses racines éventuelles et d'étudier son signe.
Commençons par deux exemples.

- Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

$x^2 + 2x$ est le début du développement de $(x + 1)^2$, on peut donc écrire : $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$.
D'où : $P(x) = (x + 1)^2 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$.

- Soit $Q(x) = 4x^2 - 12x + 10 = 4(x^2 - 3x + \frac{5}{2})$.

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $(x - \frac{3}{2})^2$, d'où : $x^2 - 3x = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$.
On a donc : $Q(x) = 4(x - \frac{3}{2})^2 + 1 = (2x - 3)^2 + 1$.

Cas général

On admet que, pour tout polynôme P du second degré, il existe des nombres réels a, α, β avec $a \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel x : $P(x) = a\big((x + \alpha)^2 + \beta\big)$. Cette écriture de $P(x)$ est appelée forme canonique.

M

Pour trouver la forme canonique de $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$:

– on met le nombre a en facteur : $P(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$;

– on considère que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $(x + \frac{b}{2a})^2$;

– on cherche le nombre β qu'il faut ajouter à $(x + \frac{b}{2a})^2$ pour obtenir $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$.

Factorisation d'un polynôme du second degré

Nous nous contenterons d'exposer la méthode sur des exemples.

• Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Sa forme canonique est : $P(x) = (x + 1)^2 - 4$.
On reconnaît une différence de deux carrés :

$$P(x) = [(x + 1) - 2]\,[(x + 1) + 2]$$
$$= (x - 1)\,(x + 3).$$

$P(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -3$.
P admet donc deux racines : -3 et 1.

• Soit $Q(x) = 4x^2 - 12x + 10$. On a vu dans l'introduction que $Q(x)$ pouvait se mettre sous la forme :
$Q(x) = (2x - 3)^2 + 1$.
Un carré étant toujours positif, on a pour tout nombre réel x : $Q(x) \geq 1$. Aucune valeur de x n'annule donc Q. Q n'a pas de racine.
Q n'est pas factorisable, sinon il serait le produit de deux polynômes de degré 1 et admettrait donc deux racines (éventuellement égales).

• Soit
$$R(x) = x^2 - 2x - 2$$
$$= (x - 1)^2 - 3$$
$$= (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2$$
$$= (x - 1 - \sqrt{3})\,(x - 1 + \sqrt{3}).$$

$R(x) = 0 \iff x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$.
R admet donc deux racines : $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

M

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré mis sous forme canonique : $P(x) = a\left((x + \alpha)^2 + \beta\right)$.

• Si $\beta > 0$, alors P n'admet pas de racine car $(x + \alpha)^2 + \beta$ est supérieur ou égal à β, donc strictement positif, pour toute valeur de x. P n'est pas factorisable, sinon, il le serait par un polynôme de degré 1 et donc admettrait une racine.

• Si $\beta < 0$, alors on factorise P en considérant $(x + \alpha)^2 + \beta$ comme une différence de deux carrés et on en déduit deux racines.

• Si $\beta = 0$, alors $P(x) = a(x + \alpha)^2$ et P admet une seule racine : $-\alpha$.

Remarque

On constate que, pour les polynômes du second degré, il y a équivalence entre l'existence de racines et l'existence d'une factorisation. Nous préciserons ce résultat dans la leçon 3 pour des polynômes de degré quelconque.

Étude du signe d'un polynôme du second degré

Nous nous contenterons d'exposer la méthode sur des exemples.

• Soit $Q(x) = 4x^2 - 12x + 10 = (2x - 3)^2 + 1$.
Un carré étant toujours positif, on a pour tout nombre réel x : $Q(x) > 0$.

• Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.
On étudie dans un tableau le signe de $(x - 1)$ et $(x + 3)$, puis celui de leur produit :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x)$ est donc strictement positif pour tout nombre réel x appartenant à :
$]-\infty\,;-3[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.

$P(x)$ est donc strictement négatif pour tout nombre réel x appartenant à $]-3\,;1[$.

$P(x)$ est nul pour $x = 1$ ou $x = -3$.

Remarques

- *Il faut faire attention à bien disposer dans l'ordre croissant les racines des différents facteurs sur la première ligne du tableau.*
- *Pour étudier le signe de chacun des facteurs, on peut utiliser le point méthode indiqué ci-dessous :*

M

Soit $P(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
Pour étudier le signe de $P(x)$,
on peut d'abord chercher sa racine α,
puis utiliser le tableau ci-contre :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

2.2. Travaux dirigés

Étudier le signe du polynôme P défini par $P(x) = -6x^2 - 5x + 4$.

Solution

- Factorisons $P(x)$ à l'aide de la forme canonique :

$$\begin{aligned} P(x) &= -6\left(x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}\right) \\ &= -6\left(\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{25}{144} - \frac{96}{144}\right) \\ &= -6\left(\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2\right) \\ &= -6\left(x + \frac{5}{12} + \frac{11}{12}\right)\left(x + \frac{5}{12} - \frac{11}{12}\right) \\ &= -6\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= (3x+4)(1-2x). \end{aligned}$$

- Étudions ensuite le signe de chaque facteur et récapitulons les résultats dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous pouvons conclure :

pour tout x appartenant à $\{-\frac{4}{3}\,;\frac{1}{2}\}$, $P(x) = 0$;
pour tout x appartenant à $]-\infty\,;-\frac{4}{3}[\ \cup\ ]\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $P(x) < 0$;
pour tout x appartenant à $]-\frac{4}{3}\,;\frac{1}{2}[$, $P(x) > 0$.

Exercices

2.a Trouver les racines, s'il en existe, des polynômes P, Q, R, S définis par :
$P(x) = x^2 - 5x + 4$; $Q(x) = x^2 + 3x + 4$;
$R(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$; $S(x) = x^2 - x - 1$.

2.b Étudier le signe des polynômes P, Q, R, S de l'exercice précédent.

3 Factorisation par $x - \alpha$

3.1. Théorème fondamental

Théorème

Soit P un polynôme et α un nombre réel.

α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

pour tout nombre réel x, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

$Q(x)$ est appelé quotient de $P(x)$ par $x - \alpha$.

Démonstration

- Supposons que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$. Alors : $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$.

Donc, α est racine de P.

- Supposons que : $P(\alpha) = 0$.

Posons : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, où $a_n \neq 0$.

$P(x + \alpha) = a_n(x + \alpha)^n + a_{n-1}(x + \alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(x + \alpha) + a_0$.

$x \mapsto P(x + \alpha)$ est donc un polynôme P' de degré n.

Posons : $P'(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

$P'(0) = P(0 + \alpha) = P(\alpha) = 0$. D'où : $b_0 = 0$.

Donc : $P'(x) = x(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_1)$.

$P(x) = P'(x - \alpha) = (x - \alpha)\,[b_n(x - \alpha)^{n-1} + b_{n-1}(x - \alpha)^{n-2} + \ldots + b_1]$.

En posant $Q(x) = b_n(x - \alpha)^{n-1} + b_{n-1}(x - \alpha)^{n-2} + \ldots + b_1$, on a bien : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

L Pour démontrer que (p) $\Leftrightarrow$ (q), il est souvent utile de démontrer que : [(p) $\Rightarrow$ (q)] et [(q) $\Rightarrow$ (p)].

Exemple

Dans la démonstration précédente, on avait :

(p) : il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre réel x, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$;

(q) : $P(\alpha) = 0$.

Conséquences

(1) Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

(2) Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n + 1)$ valeurs distinctes sont égaux.

Démonstration

(1) Raisonnons par l'absurde.

Supposons que P admette au moins $(n + 1)$ racines distinctes : $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

- α_0 étant racine de P, il existe un polynôme non nul Q_0 tel que, pour tout nombre réel x :

$P(x) = (x - \alpha_0)Q_0(x)$.

• α_1 étant racine de P mais pas de $x \mapsto x - \alpha_0$, α_1 est racine de Q_0.

Il existe donc un polynôme non nul Q_1 tel que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)Q_1(x)$.

• α_2 étant racine de P mais pas de $x \mapsto (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)$, α_2 est racine de Q_1.

Il existe donc un polynôme non nul Q_2 tel que, pour tout nombre réel x :

$P(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_2(x)$.

• On démontre ainsi, de proche en proche, qu'il existe un polynôme non nul Q_n tel que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)Q_n(x)$.

Le degré du polynôme $x \mapsto (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$ est $n + 1$.

On en déduit que : $d^\circ P \geq n + 1$. Ce qui est contradictoire. Donc, P admet au plus n racines.

(2) Soit P et Q deux polynômes, de degrés inférieurs ou égaux à n, coïncidant en $(n + 1)$ valeurs distinctes. Ces valeurs annulent le polynôme P – Q. Donc, P – Q, s'il est non nul, est un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant plus de n racines. C'est impossible d'après (1). P – Q est donc nul. Donc, P = Q.

3.2. Déterminations pratiques du quotient de $P(x)$ par $x - \alpha$

Méthode des coefficients indéterminés

Nous allons exposer la méthode sur un exemple.

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.
$P(1) = 0$, donc il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre réel x, on ait : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
Le degré de P étant égal à la somme des degrés de $x \mapsto x - 1$ et de Q, Q est de degré 2.
Le terme de plus haut degré de $P(x)$ étant égal au produit des termes de plus haut degré de $(x - 1)$ et de $Q(x)$, le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est 2.
Posons : $Q(x) = 2x^2 + bx + c$, où b et c sont deux nombres réels à déterminer.
Pour tout nombre réel x : $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(2x^2 + bx + c)$.

Pour tout nombre réel x, $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 2x^3 + (b - 2)x^2 + (c - b)x - c \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2 = -1 \\ c - b = -4 \\ -c = 3 \end{cases}$

Il vient : $P(x) = (x - 1)(2x^2 + x - 3)$. $\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -3. \end{cases}$

1 est une racine évidente de Q. En faisant un raisonnement analogue au précédent, on démontre que : $2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$.
On en déduit que : $P(x) = (x - 1)^2(2x + 3)$.
On dit que 1 est une racine double de P et $-\frac{3}{2}$ une racine simple.

Remarque

Il est très facile de se rendre compte si 0, 1 ou – 1 est racine d'un polynôme. Lorsque c'est le cas, on dit que le polynôme admet une racine évidente.

Division euclidienne

L'algorithme permettant d'effectuer le quotient de deux nombres entiers naturels se généralise aux polynômes. On dispose les calculs de la même façon et, à chaque étape, on détermine le quotient par x du terme de plus haut degré du reste (cf. calculs ci-après).

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ x^2 & -\ 4x & +\ 3 & \quad x-1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\ 2x^2 & & & \quad 2x^2+x-3 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & -\ 4x & +\ 3 & \\
 & -\ x^2 & +\ x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 3x & +\ 3 & \\
 & & +\ 3x & -\ 3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi, $P(x) = (x-1)(2x^2+x-3)$.

De plus : $2x^2+x-3 = 2(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$

et $x^2+\frac{1}{2}x = (x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}$.

Donc : $P(x) = (x-1)^2(2x+3)$.

M Pour factoriser un polynôme, on peut essayer successivement les méthodes suivantes :
- trouver un facteur commun ;
- reconnaître un produit remarquable ;
- trouver une racine évidente α et diviser par $x-\alpha$;
- dans le cas d'un polynôme de degré 2, le mettre sous forme canonique.

3.3. Travaux dirigés

Étudier le signe de $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

Solution

Factorisons $P(x)$: -1 est racine évidente ; on peut donc factoriser $P(x)$ par $(x+1)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -\ 7x & -\ 6 & \quad x+1 \\ \cline{5-5}
-\ x^3 & -\ x^2 & & & \quad x^2-x-6 \\ \cline{1-4}
 & -\ x^2 & -\ 7x & -\ 6 & \\
 & x^2 & +\ x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 6x & -\ 6 & \\
 & & 6x & +\ 6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3-7x-6 &= (x+1)(x^2-x-6) ; \\
x^2-x-6 &= (x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{25}{4} \\
&= (x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{2})\,(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}) \\
&= (x-3)(x+2) ; \\
x^3-7x-6 &= (x+1)(x-3)(x+2).
\end{aligned}
$$

Dressons un tableau des signes :

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]-1\,;3[$ $\quad P(x) < 0$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-2\,;-1[\ \cup\ ]3\,;+\infty[$ $\quad P(x) > 0$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $\{-2\,;-1\,;3\}$ $\quad P(x) = 0$.

Exercices

3.a Diviser $P(x)$ par $x-\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = -5x^2+2x+7$ et $\alpha = -1$;
2. $P(x) = 3x^3-2x-1$ et $\alpha = 1$;
3. $P(x) = -2x^3-x^2+4x-4$ et $\alpha = -2$.

3.b Factoriser les polynômes P, Q et R définis par :

$P(x) = x^3+x^2-4x-4$;

$Q(x) = x^3+2x^2+x+2$;

$R(x) = x^3-3x^2-x+3$.

3.c Étudier le signe des polynômes P et Q définis par :

$P(x) = -x^3+3x+2$;

$Q(x) = x^4+x^3-7x^2-x+6$.

4 Fractions rationnelles

4.1. Généralités

Présentation

Définition

Toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes, est appelée fraction rationnelle.

Remarque

Soit P et Q deux polynômes ; la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ a pour ensemble de définition le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des racines de Q.

Exemples

Soit les fonctions numériques f, g et h respectivement définies par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \; ; \quad g(x) = -2x + \frac{x-3}{1-x} \; ; \quad h(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3}.$$

• f est le quotient des polynômes $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ et $x \mapsto 1$. f est donc une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

• L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $g(x) = \frac{-2x(1-x) + x - 3}{1-x} = \frac{2x^2 - x - 3}{1-x}$.

g est le quotient des polynômes $x \mapsto 2x^2 - x - 3$ et $x \mapsto 1 - x$. g est donc une fraction rationnelle.

• h est le quotient des polynômes $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ et $x \mapsto x^2 + 3$. h est donc une fraction rationnelle.
Pour tout nombre réel x : $x^2 + 3 \neq 0$. Donc : $D_h = \mathbb{R}$.

Simplification de fractions rationnelles

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 6}{9 - x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2 - 1}$.

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 \, ; 3\}$.
3 est une racine commune du dénominateur et du numérateur de f.
On peut donc les factoriser tous deux par $x - 3$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-3 \, ; 3\}$: $f(x) = -\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = -\frac{x+2}{x+3}$.

• $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 \, ; 1\}$.
Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-1 \, ; 1\}$:

$$g(x) = \frac{x + 1 + 3(x-1) - 2x}{x^2 - 1} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x+1}.$$

Remarque

Considérons les deux fractions rationnelles suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2 - 4} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x-2}.$$

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 \, ; 2\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
De plus, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2 \, ; 2\}$: $f(x) = g(x)$.
Les deux fractions rationnelles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 \, ; 2\}$, mais ne sont pas égales puisque $D_f \neq D_g$.

4.2. Travaux dirigés

1. Soit P et Q les deux polynômes définis par : $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = x - 2$.

1°) On désigne par f la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ et par P' le polynôme défini par : $P'(x) = P(x) - P(2)$.

***a)* Effectuer la division euclidienne de P' par Q.**

***b)* En déduire l'existence de trois nombres réels a, b et c tels que :**

pour tout nombre réel x appartenant à D_f, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 2x + 1$ et $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction f. Soit x un nombre réel distinct de 2, M et P les points d'abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

***a)* Calculer PM en fonction de x.**

***b)* Démontrer qu'il existe un nombre réel α tel que : $|x| > \alpha \Rightarrow PM < \frac{1}{10}$.**

Solution

1°) *a)* On a : $P(2) = 3$. Donc, pour tout nombre réel x : $P'(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} x - 2 & 2x + 1 \\ 0 & \end{array}$$

On a, pour tout nombre réel x : $P'(x) = (2x + 1)(x - 2)$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(x) = \frac{P'(x) + 3}{x - 2} = \frac{(2x + 1)(x - 2) + 3}{x - 2} = 2x + 1 + \frac{3}{x - 2}.$$

2°) *a)* On a : $PM = |f(x) - (2x + 1)| = \left|\frac{3}{x - 2}\right|$.

b) On a : $PM < \frac{1}{10} \Leftrightarrow |x - 2| > 30$. De plus : $|x| - 2 \leq |x - 2|$.

Donc : $|x| > 32 \Rightarrow |x - 2| > 30 \Rightarrow PM < \frac{1}{10}$.

2. Étudier le signe de la fraction rationnelle $f : x \mapsto -x + 4 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{25}{2(x+3)}$.

Solution guidée

- Déterminer l'ensemble de définition de f.
- Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1 ; -3\}$: $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(2 - x)}{(x + 3)(x - 1)}$.
- Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

Exercices

4.a Trouver, dans chaque cas, l'ensemble de définition de la fraction rationnelle f :

1. $f(x) = \frac{-3x}{x^2 - x + 1}$;
2. $f(x) = 4x + \frac{x - 1}{9 - x^2}$.

4.b Simplifier les fractions rationnelles P et Q définies par :

$P(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$;

$Q(x) = 1 - \frac{5x - 10}{x^2 - 4}$.

4.c Étudier le signe des fractions rationnelles R et T définies par :

$R(x) = 1 - \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{x^2 + x}$;

$T(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15}{x + 2}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Polynômes

1 Parmi les fonctions numériques suivantes, reconnaître celles qui sont des polynômes et préciser leurs degrés :

$x \mapsto (x\sqrt{3}-1)(x^2+\pi)$; $x \mapsto \sqrt{x^4-5x^2+7}$;

$x \mapsto \dfrac{3x^3-5x^2+7x}{\sqrt{5}}$; $x \mapsto \dfrac{x^4-81}{x^2+9}$;

$x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{7}{x}+x^2$; $x \mapsto 3x^6-|x|+5$.

2 Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré des polynômes P, Q et R :

$P(x)=(x^2+1)(3-x^4)$;
$Q(x)=(x^3-2x^2)(x^5-3x)-x^8$;
$R(x)=(x-2)(1-x^2)-x(1-x^2)+(x-5)(3-2x)$.

3 On donne :

$P(x)=10x^3-5x^2+7x-3$,
$Q(x)=x^5-5x^2+3$,
$R(x)=7x^3-3x^2+2x$.

Déterminer :

$P(x)+Q(x)+R(x)$; $P(x)+Q(x)-R(x)$;
$P(x)-Q(x)-R(x)$; $Q(x)-\big(P(x)-R(x)\big)$.

4 Factoriser :

$P(x)=(2x+1)(x-3)-(4x+5)(3-x)$;
$Q(x)=2x^2+5x-3$;
$R(x)=(x^2-4)^2-(x+2)^2$;
$S(x)=x^3-2x^2-5x+6$;
$T(x)=x^4+x^3-4x-16$.

5 Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

$P(x)=-4(x+3)(2x-5)$;
$Q(x)=x^2+1$;
$R(x)=9-16x^4$;
$S(x)=(3x-4)(x+3)-36x^2+64$.

6 Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :
$P(x)=-4(5x-7)(x\sqrt{3}-4)$.
Trouver le signe des nombres : $P(\sqrt{2})$; $P(\frac{7}{5})$; $P(2)$; $P(1997)$.

7 1. Trouver un polynôme admettant pour racines -2 et 3.
2. Trouver un polynôme admettant pour racines -1 ; 0 et 5.
3. Existe-t-il un polynôme de degré 10 admettant pour racines -1 ; 0 et 5 ?
4. Existe-t-il un polynôme de degré 10 n'admettant pour racines que -1 ; 0 et 5 ?

8 Déterminer tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annulent en -2 et 1. Quel est celui qui prend la valeur 6 en 0 ?

9 Démontrer que, pour tout nombre réel x :
$x^5-1=(x-1)\big((x^2+3x+1)^2-5x(x+1)^2\big)$

Application

Décomposer le nombre $5^{25}-1$ en un produit de trois facteurs.

10 Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2 :
– mettre $P(x)$ sous la forme canonique ;
– déterminer les racines éventuelles de P ;
– étudier le signe de $P(x)$.

1. $P(x)=x^2+2x-1$.
2. $P(x)=-x^2+x-1$.
3. $P(x)=x^2-7x+6$.
4. $P(x)=-5x^2+x+1$.
5. $P(x)=x^2+2x+2$.
6. $P(x)=\frac{1}{2}x^2+5x-1$.
7. $P(x)=3x^2+5x-1$.
8. $P(x)=169x^2+13x-1$.

11 Démontrer que, pour tous nombres réels x et y :

$xy=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2$.

Application

Démontrer que tout produit de deux nombres entiers de même parité peut s'écrire comme différence de deux carrés de nombres entiers.

✓ **12** On donne un polynôme P et un nombre réel α.
Dans chacun des cas suivants :
– vérifier que $P(x)$ est factorisable par $x-\alpha$;
– déterminer le quotient de $P(x)$ par $x-\alpha$;
– factoriser, si possible, ce quotient ;
– étudier le signe de $P(x)$.

1. $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$ et $\alpha=2$.
2. $P(x)=-2x^3+7x^2-12x+9$ et $\alpha=\frac{3}{2}$.
3. $P(x)=2x^3+3x^2-12x-9$ et $\alpha=-3$.
4. $P(x)=-3x^3+2x^2+9x-6$ et $\alpha=\sqrt{3}$.

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit factorisable par g, factoriser f puis étudier son signe.

1. $f(x)=ax^3-4x^2+7x-6$ et $g(x)=x-2$.
2. $f(x)=x^4+2x^3+ax-2$ et $g(x)=x+2$.
3. $f(x)=x^3-3x^2-4x+a$ et $g(x)=x^2-4$.

14 On considère le polynôme P défini par :
$P(x)=x^4+2x^2+9$.
Factoriser P.
On pourra s'inspirer du second travail dirigé § 1.3.

15 On considère le polynôme P défini par :
$P(x)=(x^2-1)^2+(2x)^2$.
1. Développer, réduire et ordonner P.
2. Factoriser P.
3. Trouver deux nombres entiers p et q tels que : $p^2+q^2=101^2$.

Fractions rationnelles

16 Donner un exemple de fraction rationnelle :
1. s'annulant en -1 et 2 et ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$;
2. s'annulant en -5 ; 0 ; $\frac{3}{2}$ et ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-4, 6\}$.

17 Dans chacun des cas suivants :
– déterminer l'ensemble de définition D_f de la fraction rationnelle f ;
– simplifier $f(x)$ sur D_f ;
– étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}$.

2. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$.

18 On considère la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{-x + 2}$.

Trouver un polynôme P de degré 1 et un nombre réel c tels que, pour tout nombre réel x différent de 2 :

$f(x) = P(x) + \dfrac{c}{-x + 2}$.

(On pourra s'inspirer du premier travail dirigé du § 4.2.)

19 On considère la fraction rationnelle g définie par : $g(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 10}{x - 4}$.

Trouver un polynôme P de degré 2 et un nombre réel c tels que, pour tout nombre réel x différent de 4 :

$g(x) = P(x) + \dfrac{c}{x - 4}$.

(On pourra s'inspirer du premier travail dirigé du § 4.2.)

20 Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}.$$

21 1. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3.$$

2. Déterminer les nombres réels c et d tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$c(x + 3) + d(x - 3) = 12.$$

3. On considère la fraction rationnelle f définie par :

$f(x) = \dfrac{6^3}{x^4 - 81}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Déduire de la première question qu'il existe deux nombres réels α' et β' tels que, pour tout élément x de D_f, on ait : $f(x) = \dfrac{\alpha'}{x^2 + 9} + \dfrac{\beta'}{x^2 - 9}$.
c) Démontrer qu'il existe trois nombres réels α, β et γ tels que, pour tout élément x de D_f, on ait :

$f(x) = \dfrac{\alpha}{x + 3} + \dfrac{\beta}{x - 3} + \dfrac{\gamma}{x^2 + 9}$.

22 1. Trouver des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x différent de 1, on ait :

$\dfrac{x}{1 - x} = a + \dfrac{b}{1 - x}$.

2. Démontrer que, pour tout x élément de $[\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}]$ on a : $1 \leq \dfrac{x}{1 - x} \leq 2$.

APPROFONDISSEMENT

23 Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère le polynôme P_n défini par : $P_n(x) = x^n + 1$.
1. Démontrer que si n est impair, P_n est factorisable.
2. La réciproque est-elle vraie ?

24 Déterminer deux nombres réels a et b tel que pour tout nombre réel x, on ait :
$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + ax + b)^2$.
En déduire le résultat suivant : « le produit de 4 nombres entiers relatifs non nuls et consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait ».
Vérifier ce résultat sur au moins 4 exemples (nombres positifs ou nombres négatifs).

25 D'après « The Mathematics Teacher », Sept 1983.
On considère les égalités suivantes :

$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$; $2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$;
$3 \times \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4}$; $4 \times \frac{4}{5} = 4 - \frac{4}{5}$;
$5 \times \frac{5}{6} = 5 - \frac{5}{6}$.

1. Vérifier ces égalités.
2. Quelles généralisations suggèrent-elles ?
3. Prouver ces généralisations.

26 Mêmes questions pour les égalités :
$2 + 2 = 2 \times 2$;
$3 + 1{,}5 = 3 \times 1{,}5$;
$5 + 1{,}25 = 5 \times 1{,}25$;
$11 + 1{,}1 = 11 \times 1{,}1$.

27 a, b et c sont trois nombres réels distincts. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)}.$$

1. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x) = 1$.

28 Soit a, b deux nombres réels distincts.
On définit le polynôme P par :
$P(x) = a^2(b - x) + b^2(x - a) + x^2(a - b)$.
1. Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x :
$P(x) = (x - a)(x - b)\,P_1(x)$.
2. Quel est le degré de P_1 ? Déterminer P_1. En déduire une factorisation de $P(x)$.

29 On considère une feuille rectangulaire de périmètre donné p et de longueur x.
1. On prend : $p = 4$.
a) Exprimer l'aire de la feuille en fonction de x.
b) Pour quelle valeur de x, cette aire est-elle maximale ?
2. Mêmes questions pour $p = 10$.
3. Cas général : p est un nombre réel strictement positif. Déterminer, en fonction de p, la valeur de x pour laquelle l'aire de la feuille est maximale.

30 Sur une droite $(\mathscr{D})$ munie d'un repère (O,I), on considère des points fixes A, B, C d'abscisses respectives a, b, c.

Soit M un point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse x.

1. Exprimer en fonction de a, b, c et x le nombre réel :
$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$.

2. Quel est le degré maximal du polynôme P obtenu à la question précédente ?

3. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$. Qu'en déduire pour P ? Conclure.

31 Soit a, b et c trois nombres réels deux à deux distincts. On désigne par Q_a, Q_b, Q_c et P les polynômes définis par :

$Q_a(x) = (b-c)(x-a)\left((x+a)^2 + (b+c)^2\right)$;

$Q_b(x) = (c-a)(x-b)\left((x+b)^2 + (c+a)^2\right)$;

$Q_c(x) = (a-b)(x-c)\left((x+c)^2 + (a+b)^2\right)$;

$P(x) = Q_a(x) + Q_b(x) + Q_c(x)$.

1. Quels sont les termes de plus haut degré de Q_a, Q_b et Q_c ? En déduire sans autres calculs que P est nul ou de degré inférieur ou égal à 2.

2. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
En déduire que P est le polynôme nul.

32 Soit p et q des nombres entiers relatifs ($p \neq 0$), on dit que p divise q s'il existe un nombre entier k tel que : $q = p \times k$.

[Par exemple, – 5 divise 10 car 10 = (– 5) (– 2).]

1. Soit $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme où les coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 appartiennent à $\mathbb{Z}$ et où a_0 est non nul. On suppose qu'il existe un nombre entier relatif m racine de P.

Justifier que m divise a_0 *[On pourra remarquer que : $P(x) = (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0$].*

2. On considère le polynôme Q défini par :
$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$.

a) Existe-t-il un nombre entier pair qui soit racine de Q ?

b) Factoriser Q *[On pourra chercher un nombre entier qui soit racine de Q].*

3. En procédant de même, factoriser les polynômes R et S définis par :

$R(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$,

$S(x) = x^3 + 9x^2 + 16x + 14$.

33 Soit b, c, d et e des nombres réels, a un nombre réel non nul et f le polynôme défini pour tout nombre réel x par :

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

1. On considère la propriété (p) :
pour tout nombre réel x non nul, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$.

a) Démontrer que si f vérifie la propriété (p) et si α est une racine non nulle de f, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f.

b) Démontrer que f vérifie la propriété (p) si et seulement si $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$.

En déduire en particulier que 0 n'est pas racine de f.

*c) **Application***

Soit le polynôme f défini par :

$$f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2.$$

Mettre f sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.

2. On suppose désormais que f vérifie la propriété (p).

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul :

$\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$.

b) Soit α un nombre réel non nul. Démontrer que α est une racine de f si et seulement si $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ est une racine du polynôme g défini pour tout nombre réel x par :

$g(x) = ax^2 + bx + c - 2a$.

*c) **Application***

Soit f et g les polynômes définis pour tout nombre réel x par :

$f(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$;

$g(x) = 6x^2 - 35x + 50$.

Déterminer les racines de g, puis celles de f.

34 **1.** Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie, pour tout nombre réel x : $P(x+1) - P(x) = x^2$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Démontrer que :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = P(n+1) - P(1)$.

b) En déduire que :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Vérifier ce résultat sur quelques exemples.

35 **1.** Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$x^3 = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$.

2. Soit f le polynôme défini par : $f(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$.

Démontrer que : $f(x+1) - f(x) = x^3$.

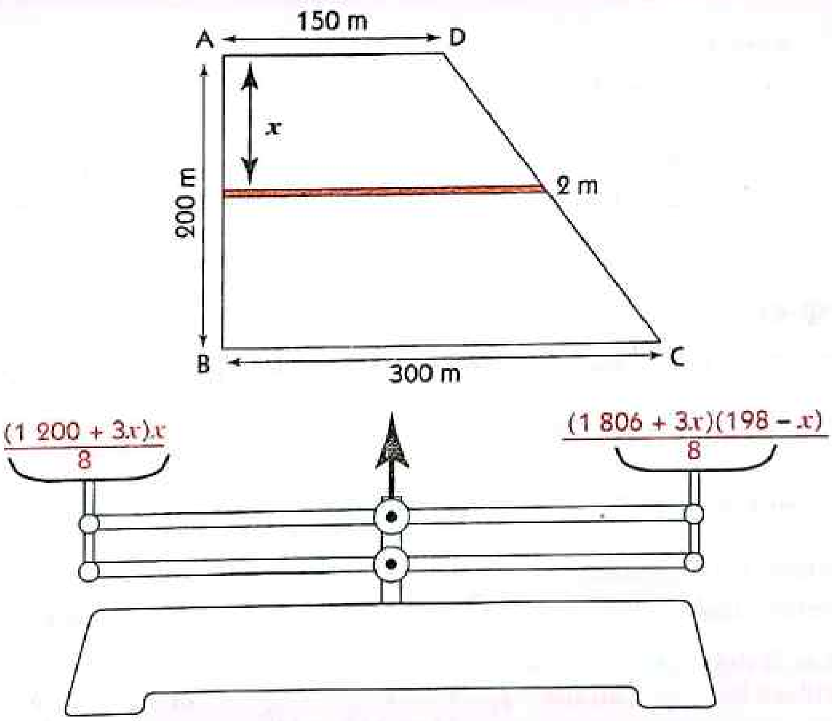
3. En utilisant une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, démontrer que :

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11

Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

De nombreux problèmes issus des diverses branches des mathématiques, des différentes sciences et du domaine technique conduisent à des équations à une inconnue. Vous en avez déjà rencontré beaucoup dans le premier cycle. Compte tenu des techniques de calcul nouvelles sur les polynômes et les fractions rationnelles que nous avons apprises au chapitre précédent, nous pouvons aborder maintenant un plus large éventail de situations et apprendre à résoudre des équations plus complexes.



SOMMAIRE

1 Généralités

1.1. Équations et inéquations

Soit x un nombre réel.
Considérons l'égalité (E) : $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{2x+1}$.
Suivant les valeurs de x, cette égalité peut :
– être vraie, par exemple pour $x = -3$ ou $x = 1$;
– être fausse, par exemple pour $x = 0$ ou $x = 3$;
– n'avoir aucun sens ; c'est le cas pour $x = -2$, $x = 2$ et $x = -\frac{1}{2}$.
Nous dirons que (E) est une équation d'inconnue x.
Avant de résoudre une telle équation, il convient de préciser les contraintes sur l'inconnue :
$x \neq -2$, $x \neq 2$ et $x \neq -\frac{1}{2}$;
-3 et 1 sont des solutions de (E).
Cette équation a-t-elle d'autres solutions ?
Pour répondre à cette question, on recherche toutes les solutions de (E). C'est ce qu'on appelle résoudre l'équation (E).

Définitions

Soit A et B deux ensembles.

- **(E) : « $f(x) = g(x)$ », où f et g sont deux fonctions de A vers B, est appelée équation dans A, d'inconnue x.**
- **Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) = g(\alpha)$ est appelé solution de l'équation (E).**
- **Résoudre dans A l'équation (E), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (E).**

Remarques

- *Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance, les équations $f(x) = g(x)$ et $f(t) = g(t)$ ont le même ensemble de solutions.*
- *Avant de résoudre une équation, il convient, si nécessaire, de préciser les contraintes sur l'inconnue.*

Exemples

- Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{x}{(2x-1)(x+3)} = \frac{x}{4}$;
– contraintes sur l'inconnue : $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -3$;
– les nombres réels 1 et 0 sont des solutions de (E) ; 6 n'est pas solution de (E).
- Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
On considère les applications $f_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$, $M \mapsto \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $f_2 : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto AM$;
– l'équation (E_1) : $f_1(M) = \vec{0}$ a pour unique solution le point I, milieu de [AB] ;
– l'équation (E_2) : $f_2(M) = 1$ a pour ensemble de solutions le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.

On définit de même les inéquations :

Définitions

Soit A un ensemble.

- **(I) : « $f(x) \leq g(x)$ », où f et g sont deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$, est appelée inéquation dans A, d'inconnue x.**
- **Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ est appelé solution de l'inéquation (I).**
- **Résoudre dans A l'inéquation (I), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (I).**

Remarque

Pour les inéquations, l'ensemble d'arrivée des fonctions f et g doit être ℝ, puisqu'il s'agit de comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Exemples

• Soit à résoudre dans ℝ l'inéquation (I) : $\dfrac{(x-1)^2}{3x-5} \leq 1$;

– contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$;

– le nombre réel – 1 est solution de (I) puisque $-\frac{1}{2} \leq 1$.

• Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, f l'application définie par $f: \begin{array}{l}\mathcal{P} \to \mathbb{R} \\ M \mapsto AM\end{array}$ et (I) l'inéquation : $f(M) \leq 1$.

L'ensemble des solutions de (I) est le disque fermé de centre A et de rayon 1.

1.2. Résolution d'équations

Pour résoudre une équation, on procède généralement par transformations d'écritures utilisant les règles de calcul relatives aux égalités dans ℝ.

En particulier, une équation aura les mêmes solutions que l'équation obtenue :

- en ajoutant un même nombre réel aux deux membres de cette équation ;
- en multipliant les deux membres de cette équation par un même nombre réel non nul.

De telles équations sont dites équivalentes.

Définition

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple

Soit à résoudre dans ℝ l'équation (E) : $\dfrac{x+2}{5x+19} = \dfrac{x-3}{10x-26}$.

– Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\}$.

– Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\}$, on a :

(E) $\Leftrightarrow (x+2)(10x-26) = (x-3)(5x+19)$ (on a multiplié les deux membres par $(5x+19)(10x-26)$)

$\Leftrightarrow 10x^2 - 6x - 52 = 5x^2 + 4x - 57$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0$ (on a ajouté $-(5x^2 + 4x - 57)$ aux deux membres)

$\Leftrightarrow 5(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$.

Le nombre réel 1 appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\}$, il est l'unique solution de (E).

Remarques

• *On peut aussi résoudre certaines équations par implications directes ; dans ce cas, les solutions de l'équation initiale sont solutions de l'équation finale, mais la réciproque peut être fausse.*
Considérons par exemple dans ℝ l'équation (E) : $-2x = |x+1|$.
Pour résoudre cette équation, on peut raisonner par équivalences ou par implications directes.

Raisonnement par équivalences

– Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}_-$; en effet, les deux membres de (E) doivent être positifs.

– Donc, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_-$ on a :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (E') : (-2x)^2 = (x+1)^2\\ &\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 2x + 1\\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x+1) = 0\end{aligned}$$

(E') admet une seule solution dans $\mathbb{R}_-$: $-\frac{1}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Raisonnement par implications

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow (E') : (-2x)^2 = (x+1)^2\\ &\Rightarrow (x-1)(3x+1) = 0\\ &\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

Vérification

$(-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ et $\left|-\frac{1}{3} + 1\right| = \frac{2}{3}$,

donc : $-\frac{1}{3}$ est solution de (E).

$(-2) \times 1 = -2$ et $|1 + 1| = 2$,

donc : 1 n'est pas solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

• *Dans une résolution par implications directes, certaines solutions de l'équation finale peuvent ne pas être solutions de l'équation à résoudre, il est donc nécessaire de vérifier chacune des solutions obtenues.*

• *Dans une résolution par équivalences, cette vérification est théoriquement inutile ; toutefois, en pratique, elle permet de détecter d'éventuelles erreurs de calculs, il est donc fortement conseillé de la faire.*

M

Pour résoudre une équation (E), on peut utiliser l'un des procédés suivants :

• chercher une équation (E') immédiatement résoluble et équivalente à (E) : les solutions de (E') sont alors les solutions de (E) ; cette méthode nécessite de bien préciser les contraintes sur l'inconnue ;

• chercher une équation (E') immédiatement résoluble, telle que l'on ait seulement : (E) $\Rightarrow$ (E') ; toute solution de (E) est donc nécessairement une solution de (E') ; on résout ensuite (E') et on détermine, parmi les solutions de (E'), celles qui sont solutions de (E).

1.3. Résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation, on procède généralement par transformations d'écritures utilisant les règles de calcul relatives aux inégalités dans $\mathbb{R}$.

En particulier, une inéquation aura les mêmes solutions que l'inéquation obtenue :

- en ajoutant un même nombre réel aux deux membres de cette inéquation ;
- en multipliant les deux membres de cette inéquation par un même nombre réel strictement positif.

De telles inéquations sont dites équivalentes.

Définition

Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (I) : $\dfrac{x+2}{5x+19} < \dfrac{x-3}{10x-26}$.

– Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\}$.

– Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\}$, on a :

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{5x+19} - \dfrac{x-3}{10x-26} < 0$ (on a ajouté $-\dfrac{x-3}{10x-26}$ aux deux membres de (I))

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(10x-26)-(x-3)(5x+19)}{(5x+19)(10x-26)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-10x+5}{(5x+19)(10x-26)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)^2}{(5x+19)(10x-26)} < 0$$

Posons $f(x) = \dfrac{5(x-1)^2}{(5x+19)(10x-26)}$.

Déterminons le signe de $f(x)$, pour x distinct de $-\frac{19}{5}$ et $\frac{13}{5}$, à l'aide du tableau ci-contre.

x	$-\infty$		$-\frac{19}{5}$		1		$\frac{13}{5}$		$+\infty$
$5(x-1)^2$		+	‖	+	0	+	‖	+	
$5x+19$		–		+		+		+	
$10x-26$		–		–		–		+	
$f(x)$		+	‖	–	0	–	‖	+	

L'ensemble des solutions de (I) est : $]-\frac{19}{5}\,;1[\,\cup\,]1\,;\frac{13}{5}[$.

Remarques

• *Pour résoudre l'équation du §1.2, on a multiplié les deux membres par $(10x-26)(5x+19)$. Faire de même pour l'inéquation de l'exemple ci-dessus serait extrêmement délicat, et impliquerait une discussion sur le signe de $(10x-26)(5x+19)$.*
Dans la plupart des cas, pour résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$, on écrit l'inéquation $f(x) - g(x) < 0$ qui lui est équivalente, puis on cherche à déterminer le signe de $f(x) - g(x)$, souvent à l'aide de factorisations.
• *Une inéquation a souvent une infinité de solutions. Il est donc impossible de procéder par implications, puis de vérifier que les solutions obtenues sont bien des solutions de l'inéquation initiale.*

Exercices

1.a Résoudre successivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$\frac{(x-2)(2x-7)(x^2-9)(7x-23)}{x-3} = 0.$$

1.b Démontrer que dans chacun des cas suivants les équations (E_1) et (E_2) dans A sont équivalentes.

1. $(E_1) : \frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{3} - 4$
   $(E_2) : 3x - 18 = 2x - 24$ $\quad$ $A = \mathbb{R}$.
2. $(E_1) : |x-2| = 5$
   $(E_2) : (x-2)^2 = 25$ $\quad$ $A = \mathbb{R}$.
3. $(E_1) : x + x^3 = 4x$
   $(E_2) : 1 + x^2 = 4$ $\quad$ $A = \mathbb{R}^*$.
4. $(E_1) : \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x-1}{2x+1}$
   $(E_2) : (2x+1)^2 = (x-1)^2$ $\quad$ $A = \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}$.

1.c Dans chacun des cas suivants, les inéquations (I_1) et (I_2) dans A sont-elles équivalentes ?

1. $(I_1) : \frac{x}{2} - 3 \leq \frac{x}{3} - 4$
   $(I_2) : 3x - 18 \leq 2x - 24$ $\quad$ $A = \mathbb{R}$.
2. $(I_1) : |x-2| \leq 5$
   $(I_2) : (x-2)^2 \leq 25$ $\quad$ $A = \mathbb{R}$.
3. $(I_1) : x + x^3 \leq 4x$
   $(I_2) : 1 + x^2 \leq 4$ $\quad$ $A = \mathbb{R}^*$.
4. $(I_1) : \frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2x+1}$
   $(I_2) : (2x+1)^2 \leq (x-1)^2$ $\quad$ $A = \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}$.

1.d On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) :

$$\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

1. Préciser les contraintes sur l'inconnue pour la résolution de cette inéquation.
2. Démontrer que pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a : (I) $\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0$.
3. Résoudre l'inéquation (I).

2 Équations et inéquations liant deux polynômes

2.1. Méthodes de résolution

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$:

(E) : $x^3 + x + 6 = 2(8 - x - 3x^2)$. | (I) : $x^3 + x + 6 \leq 2(8 - x - 3x^2)$.

• En retranchant $2(8 - x - 3x^2)$ à chacun des membres de (E) et de (I), on obtient :

(E) $\Leftrightarrow x^3 + x + 6 - 2(8 - x - 3x^2) = 0$
$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$.

(I) $\Leftrightarrow x^3 + x + 6 - 2(8 - x - 3x^2) \leq 0$
$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 3x - 10 \leq 0$.

• Résoudre (E) revient à chercher les racines du polynôme $x \mapsto x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ et résoudre (I) revient à étudier le signe de ce même polynôme. Les techniques permettant d'y parvenir ont été étudiées au chapitre 10.

M

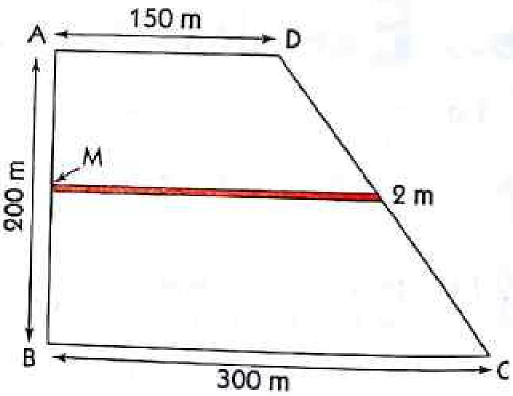
Pour résoudre une équation du type $P(x) = P'(x)$, où P et P' sont des polynômes, on peut procéder comme suit :
- se ramener à une équation du type $Q(x) = 0$, où Q est un polynôme ;
- factoriser Q ;
- déterminer les racines de Q.

Pour résoudre une inéquation du type $P(x) \leq P'(x)$, où P et P' sont des polynômes, on peut procéder comme suit :
- se ramener à une inéquation du type $Q(x) \leq 0$, où Q est un polynôme ;
- factoriser Q ;
- étudier le signe de Q dans un tableau de signes.

2.2. Travaux dirigés

1. Un champ ABCD, ayant la forme d'un trapèze rectangle, a les dimensions indiquées sur la figure ci-contre. On veut le partager en deux champs de même superficie en traçant une allée rectiligne de 2 m de large parallèle aux bases (cf. figure).

De quel point M de [AB], doit-on partir pour tracer l'allée ?



Solution

Choix de l'inconnue

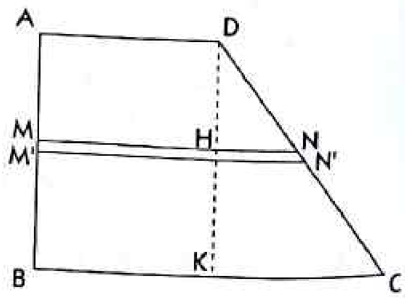
Choisissons pour inconnue : $x = AM$.

x étant une longueur que l'on doit retrancher de 200, on a : $0 < x < 200$.

Mise en équation

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{HN}{KC} = \dfrac{DH}{DK}$.

D'où : $HN = \dfrac{150x}{200} = \dfrac{3x}{4}$. D'où : $MN = 150 + \dfrac{3x}{4}$.



Soit M' le point du segment [AB] tel que : $AM' = x + 2$.

On démontre de même que : $M'N' = 150 + \dfrac{3(x+2)}{4}$.

L'aire en m² du trapèze AMND est : $\dfrac{(AD + MN)AM}{2} = \dfrac{(1200 + 3x)x}{8}$.

Celle du trapèze M'BCN' est : $\dfrac{(M'N' + BC)BM'}{2} = \dfrac{1\,806 + 3x}{8}(198 - x)$.

On a donc à résoudre dans]0 ; 200[l'équation (E) : $\dfrac{(1\,200 + 3x)x}{8} = \dfrac{1\,806 + 3x}{8}(198 - x)$.

Résolution de l'équation

Pour tout x appartenant à]0 ; 200[:

(E) $\Leftrightarrow x^2 + 402x - 59\,598 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 201)^2 - 99\,999 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{11\,111} - 201$ ou $x = -3\sqrt{11\,111} - 201$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{11\,111} - 201$ (car $-3\sqrt{11\,111} - 201$ n'appartient pas à]0 ; 200[).

Vérification

$3\sqrt{11\,111} - 201 \approx 115{,}23$.

Pour $x \approx 115{,}23$, l'aire en m² de AMND est : $\dfrac{(1\,200 + 3x)x}{8} \approx 22\,264$;

l'aire en m² de M'N'BC est : $\dfrac{1\,806 + 3x}{8}(198 - x) \approx 22\,262$.

Conclusion

Pour commencer à tracer l'allée, il faut donc se placer sur [AB] à 115,23 m du point A.

M Pour résoudre un problème conduisant à une équation, on peut suivre les cinq étapes suivantes :

– *choix de l'inconnue* : on choisit dans l'énoncé ce qu'on prendra pour inconnue et on précise les contraintes sur cette inconnue ;

– *mise en équation* : on traduit l'énoncé en langage mathématique pour en tirer une équation ;

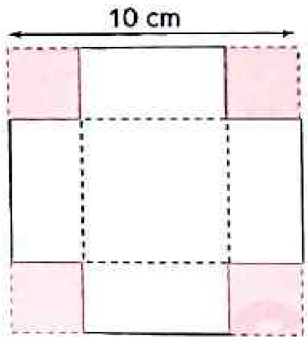
– *résolution de l'équation dans A* ;

– *vérification* : on refait si possible les calculs en substituant à l'inconnue la ou les valeurs trouvées ;

– *conclusion* : on interprète le résultat pour répondre en langage courant à la question posée.

2. Aux quatre coins d'une feuille carrée de côté 10 cm, on découpe quatre petits carrés de même dimension. En repliant les bords suivant les pointillés (cf. figure ci-contre), on obtient une boîte.

Déterminer la dimension des quatre petits carrés qu'il faut découper pour obtenir une boîte dont le volume soit supérieur ou égal à 48 cm³.



Solution

Choix de l'inconnue

Choisissons pour inconnue x la longueur en cm des côtés des quatre petits carrés.
x étant une longueur que l'on doit retrancher deux fois de 10, on a : $0 < x < 5$.

Mise en inéquation

La boîte a pour base un carré de côté $(10 - 2x)$ cm et pour hauteur x cm.
Son volume en cm³ est donc : $(10 - 2x)^2x$.
On a donc à résoudre dans]0 ; 5[l'inéquation (I) : $(10 - 2x)^2x \geq 48$.

Résolution de l'inéquation

(I) $\Leftrightarrow (5 - x)^2x - 12 \geq 0$.
Nous devons chercher une racine du polynôme P défini par : $P(x) = (5 - x)^2x - 12$.
Pour cela, nous allons d'abord regarder s'il n'existe pas un nombre entier naturel x tel que : $(5 - x)^2x = 12$.
Or, $12 = 2^2 \times 3$. Les seuls carrés entiers divisant 12 sont donc 1 et 4 ; par conséquent, si x est un nombre entier naturel, il ne peut être égal qu'à 12 ou 3. 12 n'est manifestement pas solution.
Par contre : $(5 - 3)^2 \times 3 = 12$. Donc, 3 est bien racine de P. $P(x)$ est factorisable par $x - 3$:

$P(x) = (5 - x)^2x - 12$

$= x^3 - 10x^2 + 25x - 12$

$= (x - 3)(x^2 - 7x + 4)$.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 4 &= (x - \tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{33}{4} \\ &= \left(x - \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc : $P(x) = (x-3)(x-a)(x-b)$, où $a = \dfrac{7-\sqrt{33}}{2} \approx 0{,}63$ et $b = \dfrac{7+\sqrt{33}}{2} \approx 6{,}37$.

Étudions le signe de $P(x)$ sur $]0\ ;\ 5[$ à l'aide du tableau ci-contre :

x	0		a		3		5
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-b$		$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5-x)^2x - 12 \geq 0$ dans $]0\ ;\ 5[$ est donc : $[a\ ;\ 3]$.

Conclusion

On doit donc découper des carrés dont la longueur des côtés est comprise entre 0,63 cm et 3 cm.

Remarque

Pour résoudre un problème conduisant à une inéquation, on procède comme pour ceux conduisant à une équation. Mais, l'ensemble des solutions étant souvent infini, comme dans l'exemple ci-dessus, il n'est pas toujours possible de faire une vérification.

Exercices

2.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $(3x-1)(2x+9) + 1 - 9x^2 = (1-3x)(5x-8)$;
2. $(x+1)^3 = 1 - x^2$.

2.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$(2x^2 - x + 1)(x+5) = (x+2)(x^2+5) + x(5x-11)$.

2.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1. $x^2 + x \geq x + 1$; 2. $x^3 + x^2 \geq x + 1$.

2.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$(2x^2 - x + 1)(x+5) \geq (x+2)(x^2+5) + x(5x-11)$.

2.e 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $(x+1)(2x^2 - 4x + 2) \leq (x+1)(x^2 - 2)$;
b) $(x+1)(x^2-2) \leq 2x^2(x^2-2)$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient :
$(x+1)(2x^2 - 4x + 2) \leq (x+1)(x^2-2) \leq 2x^2(x^2-2)$.

2.f Déterminer l'ensemble des nombres entiers relatifs n tels que le carré de n soit supérieur ou égal à la somme des carrés de $n+1$ et $n+2$.

3 Équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

3.1. Méthodes de résolution

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, (E) : $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{2}{x-1}$; (I) : $\dfrac{x}{x^2-1} \leq \dfrac{2}{x-1}$.

– Les contraintes sur l'inconnue, pour (E) et pour (I), sont : $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$.

– On sait, d'après la propriété (5) sur les quotients du § 1.5 du chapitre 8, que :
(E) $\Leftrightarrow x(x-1) = 2(x^2-1)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$.

On est donc ramené à résoudre une équation liant deux polynômes.
Pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

(E) $\Leftrightarrow x(x-1) = 2(x^2-1)$
$\Leftrightarrow (x-1)[x - 2(x+1)] = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(-x-2) = 0$.

Il faut faire très attention avant de conclure : x devant appartenir à $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, la solution 1 est à rejeter. L'équation admet une seule solution : -2.

• Pour (I), on ne peut pas utiliser le même procédé car, pour tous nombres réels a, b, c, d, où b et d ne sont pas nuls, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ n'implique pas $ad \leq bc$ comme le montre le contre-exemple[1] suivant :

$\frac{-2}{3} \leq \frac{1}{-2}$; mais, $(-2) \times (-2)$ n'est pas inférieur à 3×1.

Par contre, pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} - \frac{2(x+1)}{x^2-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-2}{x^2-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-2}{(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$-x-2$		+	0	−		−		−	
$x+1$		−		−		+		+	
$x-1$		−		−		−		+	
$\mathrm{T}(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	

On est donc amené à étudier le signe d'une fraction rationnelle (cf. le travail dirigé 3 du § 4.1 du chapitre 10) ;

posons $\mathrm{T}(x) = \frac{-x-2}{x^2-1}$; l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : $[-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

M

Soit une équation du type $\mathrm{R}(x) = \mathrm{R}'(x)$ où R et R' sont des fractions rationnelles :

– contraintes sur l'inconnue : x n'annule aucun des dénominateurs ;

– on se ramène à une équation du type $\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}'(x)$, où P et P' sont des polynômes, en utilisant la propriété : pour tous nombres réels a, b, c et d ($b \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Soit une inéquation du type $\mathrm{R}(x) \leq \mathrm{R}'(x)$ où R et R' sont des fractions rationnelles :

– contraintes sur l'inconnue : x n'annule aucun des dénominateurs ;

– en retranchant $\mathrm{R}'(x)$ à chacun des membres de l'inégalité et en réduisant $\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}'(x)$ au même dénominateur, on se ramène à une inéquation du type $\mathrm{T}(x) \leq 0$ où T est une fraction rationnelle ;

– on étudie, à l'aide d'un tableau, le signe du numérateur et du dénominateur de $\mathrm{T}(x)$.

3.2. Travaux dirigés

1. On dit qu'un rectangle est d'or lorsque le rapport de la longueur à la largeur est égal au rapport du demi-périmètre à la longueur. Trouver les dimensions de tous les rectangles d'or dont la longueur dépasse exactement la largeur de 2 cm.

Solution

Choix de l'inconnue

Choisissons pour inconnue x la longueur en cm du rectangle. Comme elle doit dépasser la largeur de 2, x appartient à $]2 ; +\infty[$ (contraintes sur l'inconnue).

Mise en équation

La largeur en cm est : $x - 2$.

Le rectangle est d'or si et seulement si : $\frac{x}{x-2} = \frac{x+x-2}{x}$.

1. Lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété n'est pas vraie dans le cas général, on exhibe un exemple pour lequel elle est fausse. Un tel exemple s'appelle contre-exemple.

On a donc à résoudre sur $]2 ; +\infty[$ l'équation : $\frac{x}{x-2} = \frac{2x-2}{x}$.

Résolution de l'équation

Pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} = \frac{2x-2}{x} &\Leftrightarrow x^2 = 2(x-2)(x-1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{5} \text{ ou } x = 3 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$3 - \sqrt{5}$ n'appartenant pas à $]2 ; +\infty[$, l'équation admet sur $]2 ; +\infty[$ une seule solution : $3 + \sqrt{5}$.

Vérification

Pour $x = 3 + \sqrt{5}$: $\frac{x}{x-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

$\frac{2x-2}{x} = \frac{4+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(4+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion

Un rectangle d'or dont la longueur dépasse la largeur de 2 cm a pour longueur $(3 + \sqrt{5})$ cm (à peu près 5,23 cm) et pour largeur $(1 + \sqrt{5})$ cm (à peu près 3,23 cm).

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations (I) : $\frac{x-2}{x-1} \leq \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2}$.

Solution guidée

- Précisez les contraintes sur l'inconnue.
- Démontrer que, pour tout x satisfaisant à ces contraintes : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^2-1}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \\ \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0. \end{cases}$
- En déduire que, pour tout x satisfaisant à ces contraintes : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \leq 0 \\ \frac{x}{1-x} \leq 0. \end{cases}$
- Étudier les signes de $\frac{x-3}{x-2}$ et $\frac{x}{1-x}$ dans un même tableau.
- En déduire que l'ensemble des solutions de (I) dans $\mathbb{R}$ est $]2 ; 3]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{x^2-8x+7}{x^3-4x^2-10x-77} = 0$.

Solution

Dans ce cas, il est difficile de déterminer les valeurs de x qui annulent le dénominateur (donc, de préciser les contraintes sur l'inconnue) ; on cherchera les racines du numérateur et on fera une vérification pour chacune d'elles.

On constate que 1 est racine évidente du numérateur.

En divisant $x^2 - 8x + 7$ par $x - 1$, on trouve : $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$. 1 et 7 sont donc les deux seules valeurs annulant le numérateur.

Pour savoir si ces deux nombres sont solutions de (E), il suffit de vérifier qu'ils n'annulent pas le dénominateur :

– pour $x = 1$, $x^3 - 4x^2 - 10x - 77 = -90$; donc, 1 est solution ;

– pour $x = 7$, $x^3 - 4x^2 - 10x - 77 = 0$; donc, 7 n'est pas solution.

(E) admet 1 pour seule solution.

Exercices

3.a Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\frac{4}{x+4} = \frac{3}{x-3}$;

b) $1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x-2}{(x-2)(x+1)}$;

c) $\frac{x-1}{2x^3-5x+2} = \frac{1}{2x^2}$.

3.b Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $\frac{3}{x+3} \leq \frac{2}{x+2}$;

b) $\frac{x+1}{x} \leq \frac{x}{x+1}$;

c) $1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \leq \frac{x^2+2x-2}{(x-2)(x+1)}$.

3.c Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante :

$\frac{x^2-7}{x-3} \leq 2x\frac{5-x}{x^2-9}$.

4 Équations et inéquations avec valeurs absolues

4.1. Méthodes de résolution

• Considérons l'équation dans ℝ, (E) : $|2x-5| = |x-1|$.
On sait que deux nombres réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.
On a donc, pour tout nombre réel x :
(E) $\Leftrightarrow 2x-5 = x-1$ ou $2x-5 = -x+1$
$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$.
(E) admet donc la paire $\{2 ; 4\}$ pour ensemble de solutions.

M Pour résoudre une équation (E) du type $|f(x)| = |g(x)|$, on peut :
– utiliser l'équivalence suivante : (E) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$;
– résoudre successivement les équations $(E_1) : f(x) = g(x)$ et $(E_2) : f(x) = -g(x)$.
L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions de (E_1) et (E_2).

• Considérons l'inéquation dans ℝ, (I) : $|x^2+x-3| \leq |2x-1|$.
Les deux membres de l'inégalité étant positifs, on a, pour tout nombre réel x :

(I) $\Leftrightarrow (x^2+x-3)^2 \leq (2x-1)^2$
$\Leftrightarrow (x^2+x-3)^2 - (2x-1)^2 \leq 0$
$\Leftrightarrow (x^2-x-2)(x^2+3x-4) \leq 0$.

-1 et 1 sont des racines évidentes respectives des polynômes $x \mapsto x^2-x-2$ et $x \mapsto x^2+3x-4$.
On obtient après factorisation : (I) $\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-1)(x+4) \leq 0$.
Posons $P(x) = (x+1)(x-2)(x-1)(x+4)$.

On obtient le tableau de signes ci-contre :

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(I) admet donc pour ensemble de solutions : $[-4 ; -1] \cup [1 ; 2]$.

M Pour résoudre une inéquation (I) du type : $|f(x)| \leq |g(x)|$, on peut :
– utiliser successivement les équivalences suivantes : (I) $\Leftrightarrow (f(x))^2 \leq (g(x))^2$

$$\Leftrightarrow (f(x))^2 - (g(x))^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0 ;$$

– résoudre ensuite par les méthodes habituelles l'inéquation (I') : $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0.$

4.2. Travaux dirigés

1. Soit ($\mathscr{D}$) une droite munie d'un repère (O, I). On désigne par A, B, C et D les points de ($\mathscr{D}$) d'abscisses respectives – 7, 4, 8 et 5.

Déterminer l'ensemble E des points M de ($\mathscr{D}$) tels que : MA × MB = MC × MD.

Solution guidée

Soit x un nombre réel et M le point de ($\mathscr{D}$) d'abscisse x.

- Exprimer en fonction de x les distances MA, MB, MC et MD.
- En déduire que M appartient à E si et seulement si $|x^2 + 3x - 28| = |x^2 - 13x + 40|$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(E_1) : x^2 + 3x - 28 = x^2 - 13x + 40$;
  $(E_2) : x^2 + 3x - 28 = -x^2 + 13x - 40.$
- Conclure.

2. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit ($\mathscr{D}$) la droite d'équation $x - y - 3 = 0$. Déterminer l'ensemble S des points de ($\mathscr{D}$) qui sont au moins deux fois plus proches de (OI) que de (OJ).

Solution guidée

Soit M un point de ($\mathscr{D}$) d'abscisse x.

- Exprimer en fonction de x les distances de M aux droites (OJ) et (OI).
- Démontrer que M appartient à S si et seulement si x vérifie l'inéquation (I) : $|x - 3| \leq \frac{1}{2}|x|$.
- Résoudre (I).
- Conclure.

Exercices

4.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $|3x - 1| = |x + 5|$;
b) $|7 - x| = 2$;
c) $|3x - 2| = x^2$;
d) $|x^2 + 3x + 2| = 4|2x - 1|$.

4.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $|x - 1| \leq |2x + 3|$;
b) $\left|\dfrac{3x - 1}{x - 3}\right| \leq 1$;
c) $|x^2 - 5x + 10| < |x^2 - 9x + 14|$.

4.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $|x - 2| = x - 2$;
b) $|2x - 5| = x + 3$.

4.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $|x - 1| < 2x + 3$;
b) $|x + 2| \geq 3x - 4$.

5 Autres exemples

5.1. D'autres équations avec valeurs absolues

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = x^2 + 3x - 4$.

Solution guidée

- Préciser les contraintes sur l'inconnue.
- Étudier le signe de $\dfrac{x-1}{x}$.
- Factoriser $x^2 + 3x - 4$.
- Démontrer que si $x \in]-\infty\,;0[\cup [1\,;+\infty[$: (E) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-1) = 0$.
- Résoudre (E) sur $]-\infty\,;0[\cup [1\,;+\infty[$.
- Résoudre de même (E) sur $]0\,;1]$.
- En déduire, après vérification, que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est : $\{-2-\sqrt{5}\,;1\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\big|x - |x-1|\big| = 1$.

Solution

$$\begin{aligned}
\big|x - |x-1|\big| = 1 &\Leftrightarrow \big|x - |x-1|\big|^2 = 1 && \text{(car les deux membres sont positifs)}\\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x|x-1| + x^2 - 2x + 1 = 1\\
&\Leftrightarrow 2x(x - 1 - |x-1|) = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad |x-1| = x-1\\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 \geq 0 && \text{(car : } |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0\text{).}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc : $\{0\} \cup [1\,;+\infty[$.

5.2. Utilisation d'une inconnue auxiliaire.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{x^4 - 3x^2 - 1}{x-2} = x + 2$.

Solution guidée

- Précisez les contraintes sur l'inconnue.
- Démontrer que pour tout x satisfaisant à ces contraintes, (E) $\Leftrightarrow$ (E') : $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.
- Démontrer que x est solution de (E') si et seulement si x^2 est solution de (E'') : $X^2 - 4X + 3 = 0$.
- Résoudre (E'').
- En déduire les solutions de (E).

Exercices

5.a Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |2x+1| - |x-3| + 3x + 1$.

1. Exprimer $f(x)$ sans les symboles de valeur absolue.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = 0$.

5.b Résoudre en utilisant une inconnue auxiliaire les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{3x}{x+2} + 1 = \dfrac{-4x}{x+2} + \dfrac{1}{4}$;

b) $x + \sqrt{x-2} - 8 = 0$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Généralités

1 1. On considère les équations,
$(E_1) : x^3 = x$; $(E_2) : x^2 = 1$.
(E_1) et (E_2) sont-elles équivalentes dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{R}^*$?
2. Obtient-on toujours une équation équivalente à une équation donnée en multipliant ses deux membres par une même expression ?
3. Obtient-on toujours une équation équivalente à une équation donnée en élevant ses deux membres au carré ?
4. Deux nombres réels sont-ils toujours dans le même ordre que leurs inverses ? Sinon, dans quel cas est-ce vrai ?
5. Une équation du premier degré peut-elle avoir deux solutions distinctes ?
6. Une équation du second degré a-t-elle toujours deux solutions distinctes ?

2 Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation « $x\sqrt{x} + x^2 = 0$ », un élève écrit qu'elle équivaut à « $x\sqrt{x} = -x^2$ », puis il élève les deux membres au carré et obtient « $x^3 = x^4$ », d'où il tire « $x^3(1-x) = 0$ » et en conclut que l'ensemble des solutions est $\{0,1\}$. Quelle faute de raisonnement l'élève a-t-il faite ?

3 Préciser les contraintes pour la résolution de chacune des équations ou inéquations suivantes :
a) $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x}{x+2}$; *b)* $\sqrt{9-x^2} = \dfrac{1}{x}$;
c) $\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$; *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}} \geq \sqrt{-x^2+4x-3}$.

Mise en équations

4 Fofana a aujourd'hui 38 ans et son fils a 13 ans. Dans combien d'années Fofana aura-t-il le double de l'âge de son fils ?

5 Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1 200 m^2, sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

6 Une personne a placé une somme de 45 000 F à un taux de t % pendant un an. L'ensemble du capital ainsi obtenu est ensuite placé à un taux de $(t+2)$% et produit alors un intérêt pendant un an de 4 860 F.
1. Démontrer que t vérifie l'équation :
$$t^2 + 102\,t - 880 = 0.$$
2. Mettre sous forme canonique le polynôme P défini par : $P(t) = t^2 + 102\,t - 880$. Calculer t.

7 Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose. Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 500 F, il lui reste 400 F. De quelle somme disposait-elle au départ ?

8 Un représentant commercial a le choix entre deux modes de rémunération :
mode 1 : il perçoit un fixe de 100 000 F par mois plus une commission de 5% sur le montant de ses ventes.
mode 2 : il perçoit un fixe de 120 000 F par mois plus une commission de 2% sur le montant de ses ventes.
À partir de quel montant des ventes, le mode 1 est-il le plus avantageux ?

9 Un producteur de spectacle loue une salle à 53 170 F pour organiser un spectacle. Chaque billet d'entrée est vendu 200 F. À partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

10 Un automobiliste qui relie deux villes distantes de 250 km a calculé que s'il augmentait sa vitesse moyenne de 10 km/h, il arriverait 1 h 15 min plus tôt à destination. Quelle est sa vitesse moyenne sur ce trajet ?

11 Un motocycliste se lance à 8 h à la poursuite d'un cycliste, parti 2 heures plus tôt et qui roule à la vitesse de 20 km/h. Dans quelle période de temps rattrapera-t-il le cycliste, si sa vitesse est comprise entre 50 km/h et 60 km/h ?

12 D'après APMEP
Un jardin carré a été entouré d'un mur de 40 cm d'épaisseur. Il en a résulté une diminution de superficie de 84 m^2. Combien mesure le côté du carré restant à l'intérieur du mur ?

Équations et inéquations liant deux polynômes

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $3x + \dfrac{x+1}{2} = 8 + x$;
b) $x + 1 + \dfrac{x+4}{4} = \dfrac{x+2}{2} + \dfrac{x+3}{3}$;
c) $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{x-10}{6} = \dfrac{x+1}{12} + 1$;
d) $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 2(x-2)(x+1) + 38$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(x^2-4)^2 = (x-2)^2$;
b) $(2x+3)(3-4x) - (4x-3)^2 = 4x\,(4x-3)$;
c) $10x(x+2) = 3(3x+7)$.

15 Résoudre, successivement dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{Z}$, les équations suivantes :
a) $2 - x = 4 - x^2$; *b)* $x^2 - 1 = x^3 + 1$;
c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; *d)* $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x^4 - x = 2 - 2x^3$;
b) $(2x-3)^2(3x+2) = 11x^3 - 34\,x^2 + 12\,x + 32$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2 - x > 4 - x^2$;
b) $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$;
c) $x^2 - 1 \geq x^3 + 1$;
d) $-9x^2 + 6x - 1 < 0$;
e) $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$;
f) $7x < 2x^2 + 6$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $5x^3 - 3x^2 - x + 6 \leq x^3 + 2x^2 - 5x - 7$;
b) $x^4 + 2x^3 + x - 1 \leq x^3 + x^2 + 1$.

Équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{3}{5x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{40}$;
b) $\dfrac{(2x-1)^2}{x^2-1} = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$;
c) $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x-1}$;
d) $\dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{2x+5}{x}$;
b) $\dfrac{6x^2+x+2}{2x+3} = \dfrac{3x^2-x-2}{x-3}$.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $x + 1 = -\dfrac{9}{2x}$;
b) $x(x+1) \geq -\dfrac{9}{2}$;
c) $x + 1 \geq -\dfrac{9}{2x}$;
d) $2x \geq -\dfrac{9}{x+1}$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{3x-1}{x^2-1} \geq \dfrac{2}{x+1}$.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x-2}{x+1} < \dfrac{2x+5}{x}$;
b) $\dfrac{2}{(x-1)^2} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$;
c) $\dfrac{x}{x-2} \leq \dfrac{6}{x-1}$;
d) $\dfrac{x^3}{x^2-2} \leq 1$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{4x-1}{x-1} \leq \dfrac{2x+3}{x+1}$;
b) $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq \dfrac{x+7}{x+1}$.

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x}{x^2-1} \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$;
b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-4} \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+4}$.

Équations et inéquations avec valeurs absolues

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|2x-5| = |7-x|$;
b) $|3x-1| = 5$;
c) $|x^2-5x+13| = |6x-15|$;
d) $|4x^2-x-9| = |2x^2-5x-3|$.

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|2x-1| < 3$;
b) $|2x+3| \geq |7x-12|$;
c) $|2x-1| \leq |x+4|$.

28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $3|2x+1| \leq 4|x-2|$;
b) $|x^2-5x-15| < |6x+13|$;
c) $|2x^2-x+1| \geq |5x^2-3x-22|$.

Autres exemples

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|2-x| = x^2+1$;
b) $|x^2-1| = 1-x^2$;
c) $|5x^3 - 10\sqrt{3}x^2 + 12x - 8\sqrt{2}| = 2 - \sqrt{7}$;
d) $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| = \dfrac{1}{|x-1|}$.

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$;
b) $(2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 + 15 = 0$;
c) $(2x^2+1)^4 - 8(2x^2+1)^2 + 15 = 0$.

APPROFONDISSEMENT

31 On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$x(x^2+1) = 30$.
Trouver une solution de (E) qui soit un nombre entier, puis résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

32 On considère l'équation (E) :
$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 1\,120$.
1. En décomposant 1 120 en un produit de 4 nombres entiers, trouver une solution de (E) qui soit un nombre entier.
2. Démontrer que si α est solution de (E), alors $-\alpha$ est aussi solution de (E).
3. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

33 Soit l'équation (E) : $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6}$.
Trouver une solution de l'équation (E) qui soit une nombre entier, puis résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\dfrac{|1-|x||}{2-|x|} = 1 + |x|$.

35 On considère l'équation suivante

$$(E) : \frac{1 + \dfrac{1+x}{1+\dfrac{1}{x}}}{1 - \dfrac{1-x}{1-\dfrac{1}{x}}} = 1.$$

Résoudre (E) en précisant, à chaque étape de la résolution, les contraintes sur l'inconnue.

36 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$x - \frac{2}{|x|} \leq \frac{2-|x|}{x}$.

37 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{|x+1|}{1-|x|} \leq 1$.

38 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

a) $|x+2| \leq (x-1)|3x-2|$;

b) $|x^2 - 5x + 3| \leq 2x - 3$;

c) $|x-1| + |x-3| = 4$.

Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

39 **1.** On considère l'équation (E) : $3\sqrt{9-x^2} = x$.

a) Préciser les contraintes sur l'inconnue.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

2. De la même façon, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$x^2 - \sqrt{4-x^2} + 2 = 0$.

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\frac{x^2+|x|+2}{x^2-|x|+2} = 2$.

41 Soit l'inéquation :

(I) : $\frac{(2+x)^2+(2-x)^2}{(2+x)^2-(2-x)^2} < -\frac{3}{5}$.

1. Préciser les contraintes sur l'inconnue.

2. Résoudre (I) dans $\mathbb{R}$.

42 **Posé par Newton dans son « arithmétique universelle »**

Un marchand possède une certaine somme d'argent. La première année, il dépense 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. La deuxième année, il dépense encore 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. La troisième année, il dépense à nouveau 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. Il se trouve alors deux fois plus riche que la première année. Quel était son capital initial ?

Pérelman

43 **D'après APMEP**

Une dame charitable rencontre un premier mendiant auquel elle donne la moitié de l'argent qu'elle a dans son portefeuille, plus 100 F. Au deuxième mendiant, elle donne la moitié de ce qui lui reste plus 100 F. Elle donne enfin la moitié de ce qui lui reste au troisième mendiant, plus 100 F. Il lui reste alors une seule pièce de 100 F. Quelle somme avait-elle au début de sa promenade ?

44 Un train mesurant 800 m de long roule à la vitesse de 50 km/h.

1. Quel temps met-il pour traverser entièrement un pont de 200 m de long ?

2. Quel temps met ce train pour dépasser ou croiser entièrement une colonne de troupe longue de 100 m et qui se déplace à la vitesse de 5 km/h :

a) dans le même sens que le train ?

b) dans le sens contraire à celui du train ?

45 À un certain arrêt de bus, il a été établi que, pendant les 30 premières secondes de démarrage, la distance d (en mètres) parcourue par le bus et le temps t (en secondes) mis pour effectuer ce parcours, sont liés par la relation : $d = \frac{t^2}{10}$.

1. Au moment où le bus démarre, un cycliste apparaît derrière le bus, à 22,5 m de l'arrêt, à la vitesse de 18 km/h.

a) À quelle distance de l'arrêt de bus rattrape-t-il le bus ?

b) Avec les données de l'énoncé, peut-on assurer que le bus redépassera le cycliste ?

2. Au moment où démarre le bus, apparaît aussi à 22,5 m de l'arrêt un passager potentiel qui se met aussitôt à poursuivre le bus à la vitesse constante v.

a) Si $v = 9$ km/h, peut-il rattraper le bus ? Sinon, quelle est la distance minimale qui le séparera du bus pendant la poursuite ?

b) Quelle est la valeur minimale de v pour que ce passager puisse rattraper le bus ?

46 Un commerçant vend des pagnes au prix marqué de 6 000 F l'un. Cependant, il est résolu à accorder jusqu'à 10% au plus de remise à ses clients, suivant le marchandage de chacun.

1. Quelle est la gamme des prix de vente d'un pagne ?

2. Donner un encadrement de la recette R_n issue de la vente de n pagnes.

3. À la fin d'une journée, le commerçant se rend compte qu'il a eu une recette de 57 000 F. Montrer que le nombre de pagnes vendus ne peut être que 10.

4. Sur les 10 pagnes vendus à 57 000 F, est-il possible qu'il ait vendu 6 pagnes sans remise ?

5. Trouver les nombres possibles de pagnes (sur les 10) susceptibles d'avoir été vendus avec exactement une remise de 4%.

47 Le cadran d'une montre à aiguilles est gradué de 0 h à 12 h (0 h et 12 h coïncident).

1. À quels instants précis l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes sont-elles superposées ?

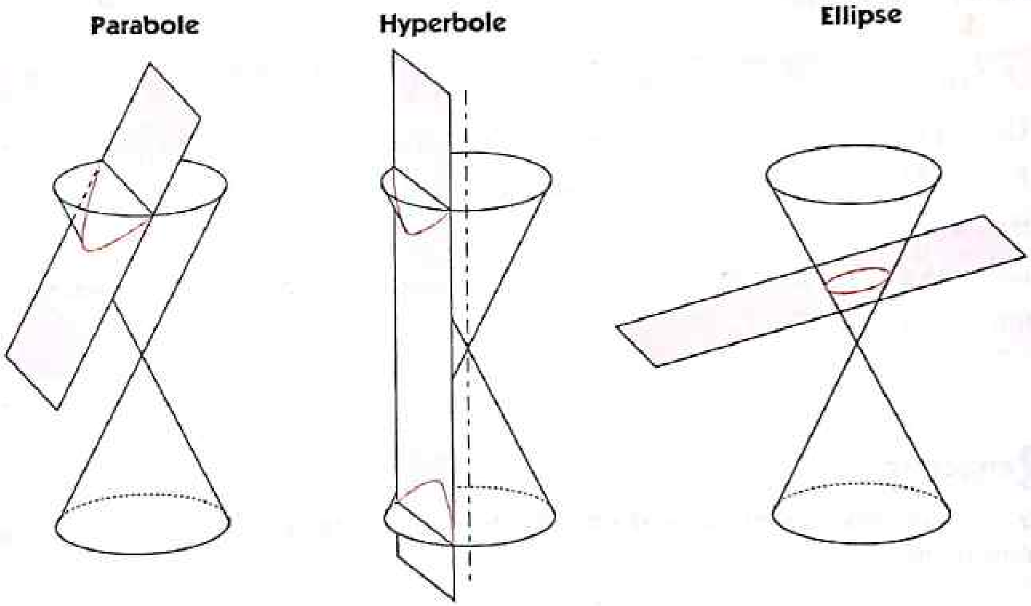
2. À quels instants précis sont-elles dans le prolongement l'une de l'autre ?

12 Études de fonctions

Apollonius a vécu à Alexandrie et à Paganie de la fin du III^e siècle au début du II^e siècle avant J.C.

Dans son ouvrage capital, le traité sur les coniques, Apollonius étudia par la technique de la géométrie algébrique les sections planes des cônes de révolution. Il est le premier à leur donner les noms qu'elles portent jusqu'à nos jours.

Fermat et Descartes trouveront chez Apollonius les bases de la méthode des coordonnées. En traduisant les véritables calculs géométriques de leur modèle dans le calcul littéral, ils débouchèrent sur la géométrie analytique.



SOMMAIRE

1 Fonctions affines par intervalles

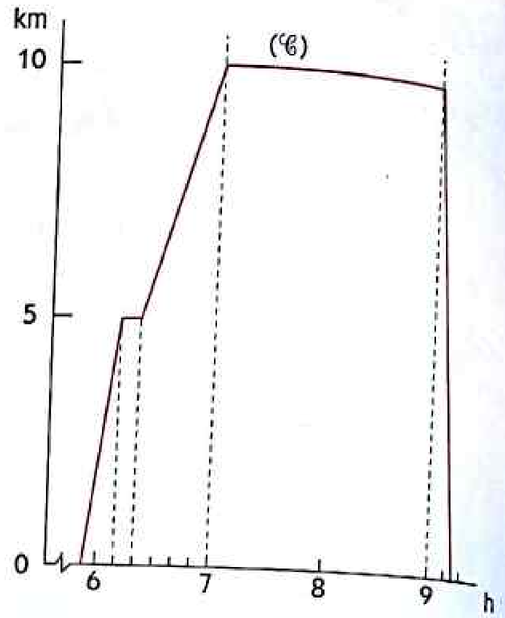
1.1. Exemples de fonctions affines par intervalles

Introduction

Dramane habite Bamako et est inscrit dans un lycée situé à 10 km de son domicile.
Le vendredi matin il a deux heures de cours et effectue de la manière suivante, le trajet domicile-lycée-domicile.
– Pour se rendre au lycée il emprunte le bus (1) ; à mi-chemin, il utilise le bus (2) après une attente de 10 minutes.
– Après le cours, il rentre en voiture avec sa mère qui roule à une vitesse constante de 40 km à l'heure.
Son trajet est traduit par la courbe ($\mathscr{C}$) ci-contre.

- Quelle est la vitesse moyenne de chaque bus ?
- Déterminer par le calcul l'heure d'arrivée au domicile.
- La courbe ($\mathscr{C}$) est la réunion de cinq segments. ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction qui coïncide sur des intervalles avec des fonctions affines.

Préciser ces intervalles et la fonction affine qui correspond à chaque intervalle.



Définitions

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction numérique *f* d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels *f* coïncide avec une fonction affine.

Lorsque sur chacun de ces intervalles *f* coïncide avec une fonction constante, on dit que *f* est une fonction en escalier.

Remarque

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi-droites.

Fonction définie par intervalles

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère la fonction f affine par intervalles définie par :

– pour $x \in [-3\ ;-1[$, $f(x) = -2x + 3$;
– pour $x \in [-1\ ;3[$, $f(x) = 5$;
– pour $x \in [3\ ;4]$, $f(x) = 3x$.

- Calculons l'image par f de chacun des nombres suivants : -3 ; -1 ; 3 ; 4.
- Construisons la représentation graphique de la fonction f.

La fonction f est bien une fonction affine par intervalles. En effet elle coïncide respectivement sur les intervalles $[-3\ ;-1[$, $[-1\ ;3[$, $[3\ ;4]$ avec les fonctions affines suivantes :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x + 3$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5$; $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$.

Ensemble de définition de f

$D_f = [-3\,;-1[\cup [-1\,;3[\cup [3\,;4] = [-3\,;4]$.

-1 et 3 sont les valeurs pivots de D_f ;

-3 et 4 sont les extrémités de D_f.

Calcul d'images

On a : $-3 \in [-3\,;-1[$; donc : $f(-3) = f_1(-3) = -2(-3) + 3 = 9$.

On calcule de la même manière les autres images. On obtient :

$f(-1) = f_2(-1) = 5$; $f(3) = f_3(3) = 9$; $f(4) = f_3(4) = 12$.

Représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f

Elle est obtenue à partir des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ d'équations suivantes :

$(\mathscr{D}_1) : y = -2x + 3$

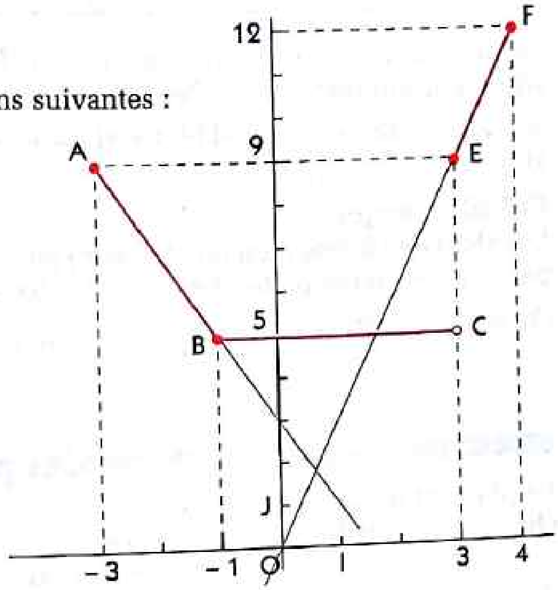
	A	B
x	-3	-1
y	9	5

$(\mathscr{D}_2) : y = 5$

	B	C
x	-1	3
y	5	5

$(\mathscr{D}_3) : y = 3x$

	E	F
x	3	4
y	9	12



$(\mathscr{C}_f) = [AB] \cup]BC[\cup [EF]$.

La fonction valeur absolue

On veut étudier la fonction valeur absolue, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

Ensemble de définition de f

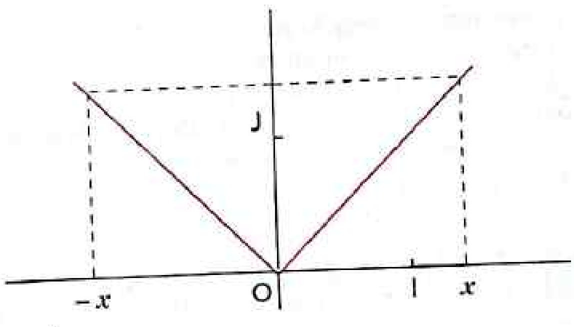
$D_f = \mathbb{R}$.

La fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-x$	0	x

- Démontrer que, le plan étant muni du repère orthogonal (O, I, J), la représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à (OJ).

Représentation graphique



Fonction dont l'expression contient des valeurs absolues

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1 - |5x - 2|$.

- Justifions que f est une fonction affine par intervalles.
- Calculons l'image par f de chacun des nombres suivants : 0 ; 0,4 ; 1.
- Construisons la représentation graphique de f.

Ensemble de définition de f

$D_f = \mathbb{R}$.

Transformation d'écriture de f(x)

Nous allons exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue ; pour cela il faut connaître le signe de $(5x - 2)$ suivant les valeurs de x.

La valeur pivot de D_f est le nombre qui annule $(5x - 2)$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
signe de $5x-2$	$-$	0	$+$
expression de $\|5x-2\|$	$-(5x-2)$	0	$5x-2$
expression de $f(x)$	$6x-1$	$\frac{7}{5}$	$-4x+3$

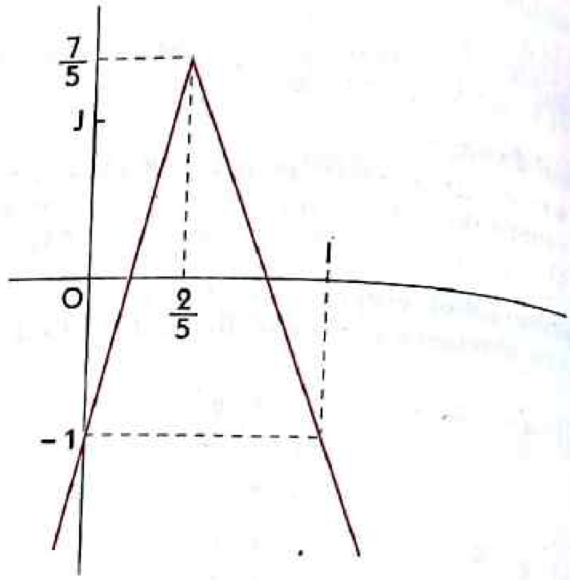
Le tableau ci-dessus montre que f est une fonction affine par intervalles car elle est égale sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\frac{2}{5}]$ et $[\frac{2}{5}\,;+\infty[$ à une fonction affine.

Calcul d'images

Le calcul de l'image d'un nombre par f peut se faire par la formule explicite : $f(x) = x + 1 - |5x - 2|$.

On obtient : $f(0) = -1$; $f(\frac{2}{5}) = \frac{7}{5}$; $f(1) = -1$.

Représentation graphique



Fonctions déterminées par max ou min

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \max(4x - 1\,;x + 2)$

définie par : $f(x) = 4x - 1$, si $4x - 1 \geq x + 2$,

$f(x) = x + 2$, si $x + 2 \geq 4x - 1$.

• Sans transformer l'écriture de $f(x)$, construire la représentation graphique de f.

• En se référant à la représentation graphique de f,

– justifier que f est une fonction affine par intervalles ;

– écrire $f(x)$ sans le symbole « max ».

Représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de f

($\mathscr{D}_1$) est la droite d'équation : $y = x + 2$.

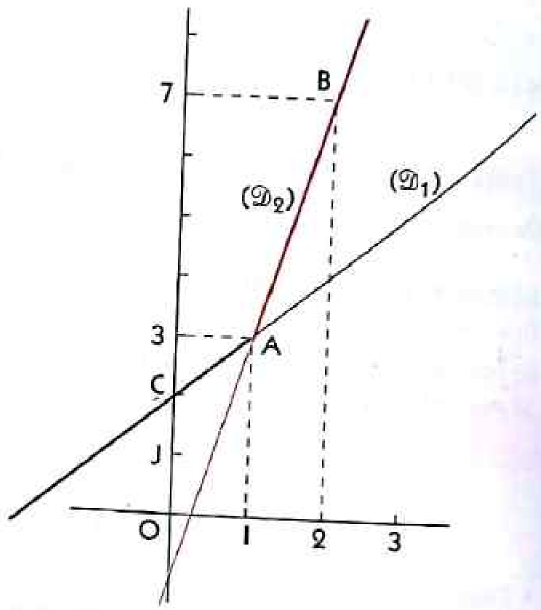
($\mathscr{D}_2$) est la droite d'équation : $y = 4x - 1$.

A est le point d'intersection de ($\mathscr{D}_1$) et ($\mathscr{D}_2$).

B est le point de ($\mathscr{D}_2$) d'abscisse 2.

C est le point de ($\mathscr{D}_1$) d'abscisse 0.

$(\mathscr{C}_f) = [AC) \cup [AB)$.



La fonction f est une fonction affine par intervalles car la représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) est une réunion de demi-droites.

Transformation d'écriture de f(x)

De la représentation graphique ($\mathscr{C}_f$), on déduit le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$x+2$	3	$4x-1$

Fonction partie entière

On veut étudier la fonction partie entière, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$, $E(x)$ étant la partie entière de x.

La fonction partie entière est une fonction en escalier définie sur $\mathbb{R}$.

En effet,

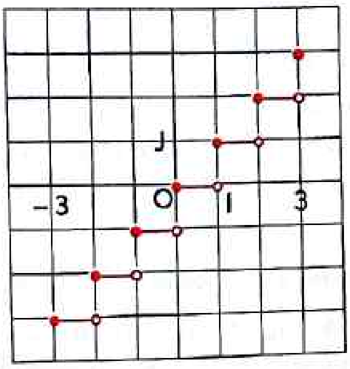
– son ensemble de définition est $\mathbb{R}$;

– pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif n : $x \in [n\,;n+1[\Leftrightarrow E(x) = n$.

• Quelle est l'image de chacun des nombres suivants : -575 ; $-13{,}7$; 0 ; 12,9 ; 478 ?

• Démontrer que, le plan étant muni du repère (O, I, J), on peut obtenir la représentation graphique sur [− 3 ; 3] de la fonction partie entière en appliquant, à partir de [OI[des translations successives de vecteur $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$ ou de vecteur $-\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.

Représentation graphique



1.2. Travaux dirigés

1. On considère la fonction mantisse, m : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - E(x)$.

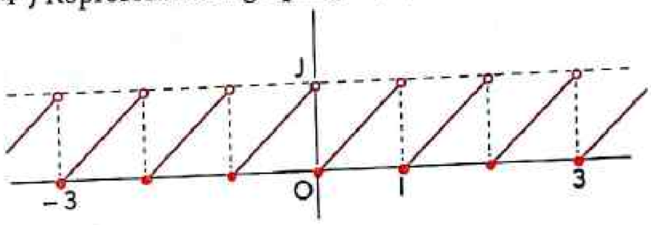
Le nombre $m(x)$ est la mantisse du nombre réel x.

1°) Quelle est la mantisse de chacun des nombres suivants : − 575 ; 13,7 ; 0 ; 12,9 ; 478 ?
2°) Quel est l'ensemble des antécédents de 0 ?
3°) Justifier que la fonction mantisse est une fonction affine par intervalles.
4°) Représenter graphiquement cette fonction.

Solution

1°) Calcul d'images
$m(-575) = m(0) = m(478) = 0$;
$m(-13{,}7) = -13{,}7 - (-14) = 0{,}3$;
$m(12{,}9) = 12{,}9 - 12 = 0{,}9$.
2°) L'ensemble des antécédents de 0 est $\mathbb{Z}$.
3°) La fonction mantisse est une fonction affine par intervalles. En effet, pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif n :
$x \in [n\,;\, n+1[\Leftrightarrow m(x) = x - n$.

4°) Représentation graphique ($\mathscr{C}$)



2. On considère la fonction affine par intervalles définie par :

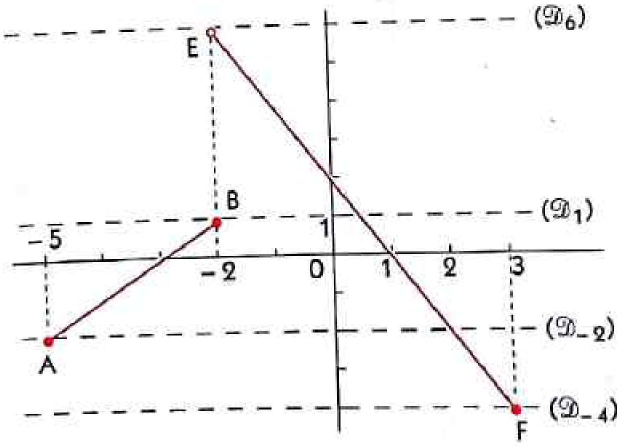
− pour $x \in [-5\,;\,-2]$, $f(x) = x + 3$,
− pour $x \in]-2\,;\,3]$, $f(x) = -2x + 2$.

On veut résoudre l'équation (E_m) : $f(x) = m$ (m étant un nombre réel donné).
1°) Utiliser le graphique pour trouver, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation (E_m) et situer chaque solution dans les intervalles [− 5 ; − 2] et]− 2 ; 3].
2°) Résoudre algébriquement, avec l'aide du graphique, chacune des équations (E_{-3}) et (E_{-1}).

Solution

1°) Utilisation du graphique
m est un nombre réel. Désignons par :
($\mathscr{C}_f$) la courbe d'équation : $y = f(x)$;
($\mathscr{D}_m$) la droite d'équation : $y = m$.
On a : ($\mathscr{C}_f$) = [AB] ∪]EF].
Les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{D}_m$) sont les solutions de l'équation (E_m).
Le graphique ci-contre donne les résultats suivants :

lorsque $m < -4$, (E_m) n'a pas de solution ;
lorsque $-4 \leq m < -2$, (E_m) admet une seule solution qui est dans]− 2 ; 3] ;



lorsque $-2 \leq m \leq 1$, (E_m) admet deux solutions, l'une dans $[-5\,;-2]$ et l'autre dans $]-2\,;3]$;
lorsque $1 < m < 6$, (E_m) admet une seule solution qui est dans $]-2\,;3]$;
lorsque $6 \leq m$, (E_m) n'a pas de solution.

2°) Résolution de l'équation $(E_{-3}) : f(x) = -3$.
On a vu graphiquement que l'équation (E_{-3}) admet une solution unique. Cette solution est située dans l'intervalle $]-2\,;3]$; c'est la solution de l'équation : $-2x + 2 = -3$;

donc $x = \frac{5}{2}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_{-3}) est $\{\frac{5}{2}\}$.

Résolution de l'équation $(E_{-1}) : f(x) = -1$.
On a vu graphiquement que l'équation (E_{-1}) admet deux solutions ;

l'une, située dans $[-5\,;-2]$, est la solution de l'équation : $x + 3 = -1$;
donc : $x = -4$.

l'autre, située dans $]-2\,;3]$, est la solution de l'équation : $-2x + 2 = -1$;
donc : $x = \frac{3}{2}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_{-1}) est $\{-4\,;\frac{3}{2}\}$.

Exercices

1.a 1. Représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
- pour $-8 \leq x < -2$, $f(x) = 2x + 1$;
- pour $-2 \leq x \leq 2$, $f(x) = 3x - 1$;
- pour $2 < x \leq 5$, $f(x) = x + 4$.

2. La fonction est-elle croissante sur son ensemble de définition ?

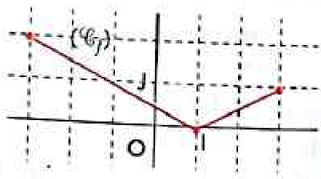
1.b Représenter graphiquement la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
- pour $x \in]-\infty\,;-2[$, $f(x) = -1$;
- pour $x \in [-2\,;1[$, $f(x) = -2$;
- pour $x \in [1\,;5[$, $f(x) = 4$;
- pour $x \in [5\,;+\infty[$, $f(x) = 6$.

1.c On considère la fonction numérique
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x-3| - |2x+1|$.

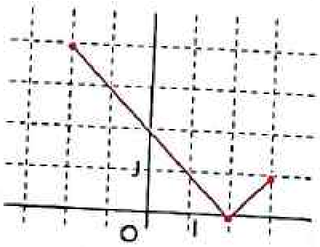
1. Justifier que f est une fonction affine par intervalles.
2. Construire la représentation graphique de f.

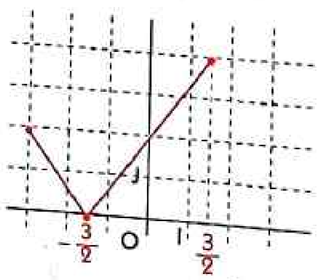
1.d Construire la représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \min(2x - 1\,;x + 1)$
définie par : $f(x) = 2x - 1$, si $2x - 1 \leq x + 1$;
$f(x) = x + 1$, si $x + 1 \leq 2x - 1$.

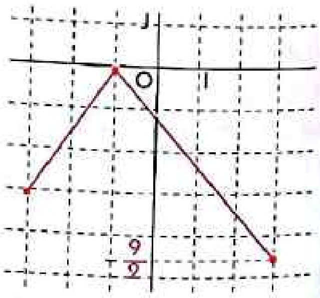
1.e 1. Vérifier que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-3\,;+3]$ par $f(x) = \left|\frac{x-1}{2}\right|$.



2. Définir à l'aide d'une valeur absolue les trois fonctions qui admettent pour représentations graphiques chacune des courbes suivantes :







2 Fonctions élémentaires

2.1. Introduction

Nous avons vu, dans la leçon précédente qu'il n'est pas nécessaire d'étudier le sens de variàtion d'une fonction affine par intervalles, pour construire sa représentation graphique.

Nous verrons ultérieurement que cette remarque est valable pour toutes les fonctions dont on connaît l'allure générale de la représentation graphique.

Montrons qu'il est, dans certains cas, indispensable d'établir le tableau de variation d'une fonction avant de construire sa représentation graphique.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 1$.

En utilisant la table de valeurs 1, on obtient une représentation graphique partielle 1 qui pourrait laisser penser que f est une fonction croissante sur [0 ; 1].

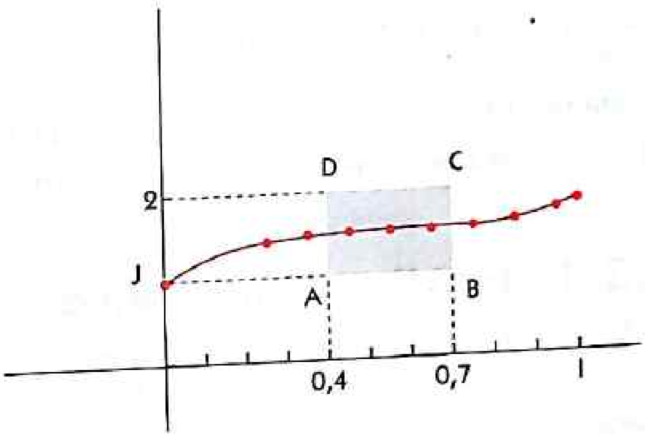
Table de valeurs 1

x	$f(x)$
0	1
0,25	1,458 33
0,35	1,519 17
0,45	1,54
0,55	1,540 83
0,65	1,541 67
0,75	1,562 5
0,85	1,623 33
0,95	1,744 17
1	1,833 33

Table de valeurs 2

x	$f(x)$
0,4	1,533 33
0,42	1,536 76
0,44	1,539 15
0,46	1,540 65
0,48	1,541 44
0,5	1,541 67
0,52	1,541 49
0,54	1,541 08
0,58	1,540 17
0,6	1,540 00
0,62	1,540 23
0,7	1,548 33

Représentation graphique partielle 1



- Utiliser la table de valeurs 2 pour justifier que la fonction f n'est pas croissante sur [0,4 ; 0,7].
- On pourrait éventuellement construire une représentation graphique partielle 2 associée à cette table.

Celle-ci donnerait une allure plus précise de la courbe représentative de f dans la fenêtre ABCD.

Remarque

Le sens de variation d'une fonction f donne l'allure de la représentation graphique de cette fonction. Une incompatibilité entre le tableau de variation et la représentation graphique d'une fonction est une preuve d'erreur.

2.2. La fonction carré

On veut étudier la fonction carré, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Variations de la fonction carré

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation

Soit u et v deux nombres réels tels que : $u < v$.
On veut comparer u^2 et v^2. On sait que :
- $u < v \leq 0 \Rightarrow u^2 > v^2$; donc la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
- $0 \leq u < v \Rightarrow u^2 < v^2$; donc la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Elle admet en 0 un minimum égal à 0.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
x^2		16	↘	0	↗	16	↗

On tracera la représentation graphique sur l'intervalle [– 4 ; 4].

Représentation graphique de la fonction carré

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Table de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

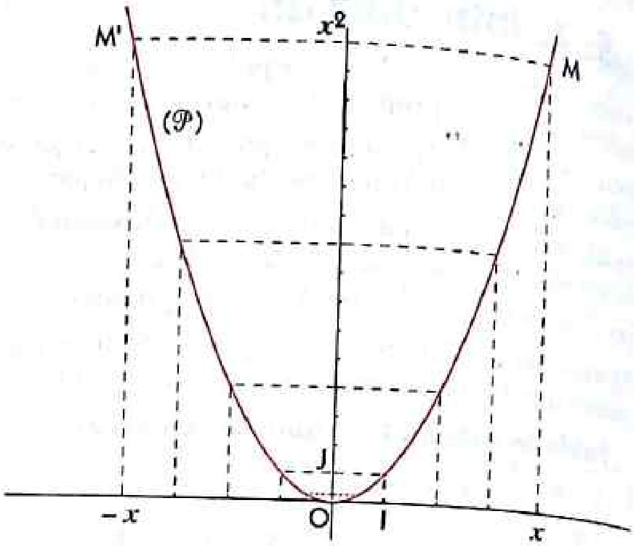
Pour tracer la courbe ($\mathcal{P}$) avec plus de précision sur $[-1 ; 1]$ établir une 2^e table de valeurs avec un pas de 0,1.

On admet que la représentation graphique ($\mathcal{P}$) de la fonction carré est une ligne d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

Démontrons que (OJ) est un axe de symétrie de la courbe ($\mathcal{P}$).

Soit x un nombre réel et $M(x ; x^2)$ le point de ($\mathcal{P}$) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à (OJ) est le point $M'(-x ; x^2)$. M' est un point de ($\mathcal{P}$) car $x^2 = (-x)^2$.

Représentation graphique



Ainsi, tout point M de ($\mathcal{P}$) a pour symétrique par rapport à (OJ) un point M' de ($\mathcal{P}$).

On dit que ($\mathcal{P}$) est **une parabole de sommet O et d'axe (OJ).**

2.3. La fonction racine carrée

On veut étudier la fonction racine carrée, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$.

Variations de la fonction racine carrée

Ensemble de définition

$D_f = [0 ; +\infty[$.

Sens de variation

Soit u et v deux nombres réels.
On a vu en classe de troisième que :
$0 \leq u < v \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{u} < \sqrt{v}$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Elle admet en 0 un minimum égal à 0.

Tableau de variation

x	0	16	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	4 ↗	

On tracera la représentation graphique sur l'intervalle [0 ; 16].

Représentation graphique de la fonction racine carrée

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

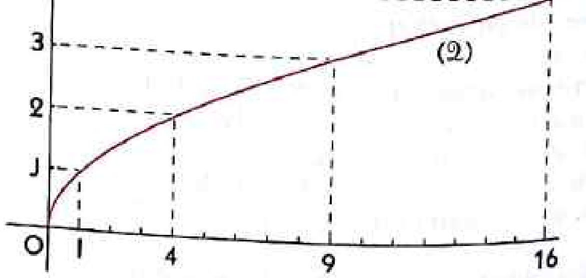
Table de valeurs

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

Pour tracer la courbe ($\mathcal{Q}$) avec plus de précision sur $[0 ; 1]$ établir une 2^e table de valeurs avec un pas de 0,1.

On admet que la représentation graphique ($\mathcal{Q}$) de la fonction racine carrée est une ligne d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

Représentation graphique



2.4. La fonction inverse

On veut étudier la fonction inverse, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Variations de la fonction inverse

Ensemble de définition

$D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Sens de variation

Soit u et v deux nombres réels.
On a vu en classe de troisième que :
$$u < v < 0 \Rightarrow \frac{1}{u} > \frac{1}{v} \quad ; \quad 0 < u < v \Rightarrow \frac{1}{u} > \frac{1}{v}.$$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	4	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	$-\frac{1}{4}$	-4 ↘	‖	4 ↘	$\frac{1}{4}$ ↘	

Dans le tableau de variation, les deux barres indiquent que la fonction n'est pas définie en 0.

On tracera la représentation graphique sur les intervalles $[-4\,;-\frac{1}{4}]$ et $[\frac{1}{4}\,;4]$.

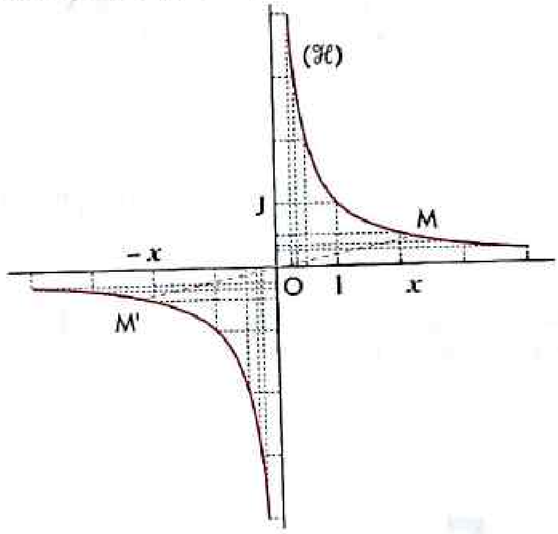
Représentation graphique de la fonction inverse

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Table de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	-3	-4	X	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Représentation graphique



On admet que la représentation graphique ($\mathscr{H}$) de la fonction inverse est constituée de deux branches disjointes, chacune d'elles étant une ligne d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

Démontrons que le point O est un centre de symétrie de la courbe ($\mathscr{H}$).

Soit x un nombre réel non nul, $M(x\,;\frac{1}{x})$ le point de ($\mathscr{H}$) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à O est le point $M'(-x\,;-\frac{1}{x})$.

M' est un point de ($\mathscr{H}$) car : $-\frac{1}{x} = \frac{1}{-x}$.

Ainsi, tout point M de ($\mathscr{H}$) a pour symétrique par rapport à O, un point M' de ($\mathscr{H}$).

On dit que ($\mathscr{H}$) est **une hyperbole de centre O**.

2.5. La fonction cube

On veut étudier la fonction cube, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$.

Variations de la fonction cube

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation

Soit u et v deux nombres réels tels que : $u < v$.
On veut comparer u^3 et v^3.

On sait que : $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + u\,v + v^2)$.

Or $u^2 + u\,v + v^2 = \left(u + \dfrac{v}{2}\right)^2 + \dfrac{3v^2}{4}$;

donc $u^2 + u\,v + v^2 > 0$ (somme de deux carrés).

Par conséquent : $u < v \Rightarrow u^3 < v^3$.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^3	↗	-8	0	8	↗

On tracera la représentation graphique sur l'intervalle [– 2 ; 2].

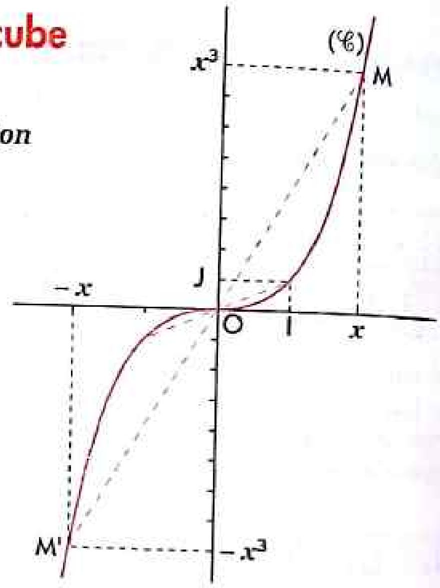
Représentation graphique de la fonction cube

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Table de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
x^3	-8	-1	0	1	8

Représentation graphique



On admet que la représentation graphique (𝒞) de la fonction cube est une ligne d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

Démontrer que le point O est un centre de symétrie de la courbe (𝒞).

Exercices

2.a On considère les fonctions
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad x \mapsto ax$

(a étant un nombre réel non nul).

1. Dans le plan muni d'un repère, construire (sur le même dessin) les représentations graphiques de f et de g dans chacun des cas suivants :
$a = 2$; $a = \dfrac{1}{2}$; $a = -2$; $a = -\dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre, graphiquement pour chaque valeur de a, l'équation (E) : $f(x) = g(x)$.
3. Pour quelles valeurs de a l'équation (E) n'admet-elle pas de solution ?

2.b Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x}$.
1. Démontrer que f est croissante sur son ensemble de définition.
2. Dans le plan muni d'un repère, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0 ; 9]$.

3 Utilisation des fonctions élémentaires

3.1. Comparaison des nombres a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{a}$ $(a > 0)$

À l'aide de graphiques, on veut comparer un nombre positif, son carré, son cube, sa racine carrée et son inverse.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on considère les courbes suivantes :

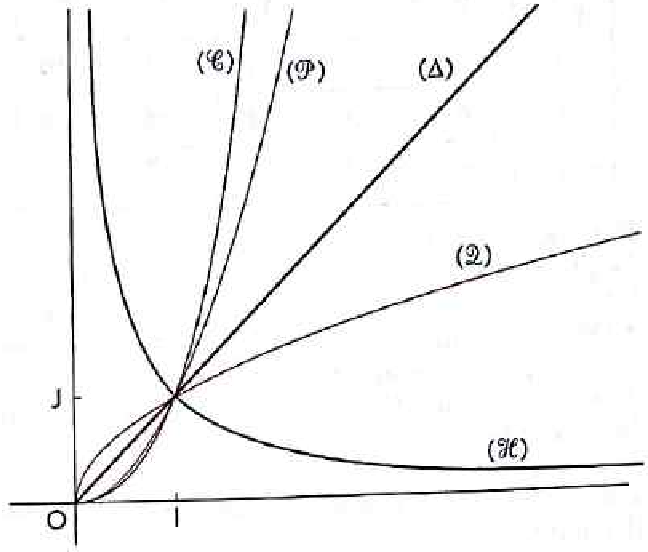
$(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$ $(x \geq 0)$;

$(\mathcal{Q})$ d'équation $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$;

(Δ) d'équation $y = x$ $(x \geq 0)$;

$(\mathcal{H})$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;

$(\mathcal{C})$ d'équation $y = x^3$ $(x \geq 0)$.



Les positions relatives de ces courbes permettent de retrouver et d'illustrer la propriété suivante.

Propriété

Pour tout nombre réel a,

- **si $0 < a < 1$,** alors $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$;
- **si $a > 1$,** alors $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

3.2. Fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Étude de la fonction $x \mapsto ax^2$

a étant un nombre réel non nul, on veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2$.

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation.

Soit u et v deux nombres réels tels que : $u < v$.

On sait que : $u < v \leq 0 \Rightarrow u^2 > v^2$; $0 \leq u < v \Rightarrow u^2 < v^2$.

Par conséquent :

pour $a > 0$

$u < v \leq 0 \Rightarrow au^2 > av^2$

$0 \leq u < v \Rightarrow au^2 < av^2$.

pour $a < 0$

$u < v \leq 0 \Rightarrow au^2 < av^2$

$0 \leq u < v \Rightarrow au^2 > av^2$.

Tableaux de variation

$a > 0$

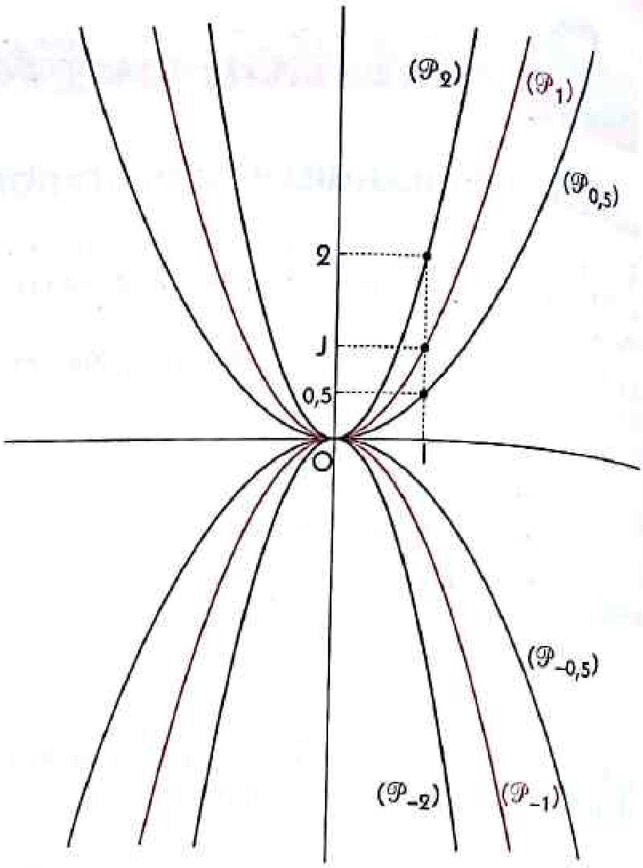
x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
ax^2	↘	a	0	a	↗

$a < 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
ax^2	↗	a	0	a	↘

Table de valeurs

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
$2x^2$	0	2	8	18	32
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8
$-x^2$	0	-1	-4	-9	-16
$-2x^2$	0	-2	-8	-18	-32
$-\frac{1}{2}x^2$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8



Représentations graphiques

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
On désigne par $(\mathcal{P}_a)$ la courbe d'équation $y = ax^2$.

- Démontrer que les courbes $(\mathcal{P}_a)$ et $(\mathcal{P}_{-a})$ sont symétriques par rapport à (OI).
- Démontrer que (OJ) est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{P}_a)$.

Les courbes $(\mathcal{P}_a)$ sont des paraboles de sommet O et d'axe (OJ).

Étude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

a étant un nombre réel non nul, on veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{a}{x}$.

Ensemble de définition

$D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Sens de variation

u et v sont deux nombres réels non nuls, tels que : $u < v$.

On sait que : $u < v < 0 \Rightarrow \frac{1}{u} > \frac{1}{v}$; $0 < u < v \Rightarrow \frac{1}{u} > \frac{1}{v}$.

Par conséquent :

pour $a > 0$

$u < v < 0 \Rightarrow \frac{a}{u} > \frac{a}{v}$

$0 < u < v \Rightarrow \frac{a}{u} > \frac{a}{v}$.

pour $a < 0$

$u < v < 0 \Rightarrow \frac{a}{u} < \frac{a}{v}$

$0 < u < v \Rightarrow \frac{a}{u} < \frac{a}{v}$.

Tableaux de variation

$a > 0$

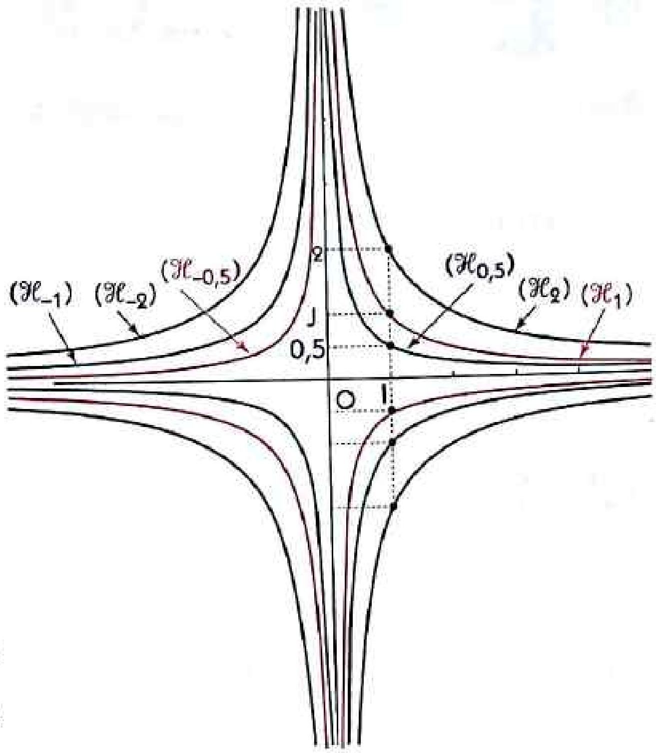
x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	↘	$-a$ ↘	‖	↘ a	↘

$a < 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	↗	$-a$ ↗	‖	↗ a	↗

Table de valeurs

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{x}$	8	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2x}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{x}$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{2}{x}$	-8	-6	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2x}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$



Représentations graphiques

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

On désigne par ($\mathcal{H}_a$) la courbe d'équation $y = \dfrac{a}{x}$.

- Démontrer que les courbes ($\mathcal{H}_a$) et ($\mathcal{H}_{-a}$) sont symétriques par rapport à (OI).
- Démontrer que O est un centre de symétrie pour la courbe ($\mathcal{H}_a$).

Les courbes ($\mathcal{H}_a$) sont des hyperboles de centre O.

3.3. Travaux dirigés

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 - 6x + 5$.

Étudier les variations de la fonction f.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$.
Soit u et v deux nombres réels tels que : $u < v$. On a : $u - 1 < v - 1$.
On sait que la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Supposons $u - 1 < v - 1 \leq 0$
c'est-à-dire $u < v \leq 1$.
On a :
$$(u-1)^2 > (v-1)^2$$
$$3(u-1)^2 > 3(v-1)^2$$
$$3(u-1)^2 + 2 > 3(v-1)^2 + 2$$
donc $f(u) > f(v)$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1]$.

Supposons $0 \leq u - 1 < v - 1$
c'est-à-dire $1 \leq u < v$.
On a :
$$(u-1)^2 < (v-1)^2$$
$$3(u-1)^2 < 3(v-1)^2$$
$$3(u-1)^2 + 2 < 3(v-1)^2 + 2$$
donc $f(u) < f(v)$.
f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exercices

3.a On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x différent de 1, $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$.
2. Étudier le sens de variation de g.

3.b Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x^2 + x + 1$;

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5(x-1)^3 + 2$;

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+3}{4x+1}$;

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -5\sqrt{3x+1}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Fonctions affines par intervalles

1 Dans chacun des cas ci-dessous, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que f est affine par intervalles.

a) $f(x) = |3x - 1|$;
b) $f(x) = 7x + 1 - |4x + 3|$;
c) $f(x) = |2x + 3| + |x - 5|$.

2 Dans chacun des cas ci-dessous, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que f est affine par intervalles.

a) $f(x) = \max(1 ; 2x - 3)$; *b)* $f(x) = \min(x ; 3x + 1)$;
c) $f(x) = \max(3x - 1 ; x - 1)$; *d)* $f(x) = \min(x + 3 ; -1)$.

3 Construire la représentation graphique de la fonction affine par intervalles f dans chacun des cas suivants.

a) pour $x \in]-2 ; 1]$, $f(x) = 3x + 1$,
pour $x \in]1 ; 3]$, $f(x) = 4$,
pour $x \in]3 ; 6]$, $f(x) = -2x + 3$;

b) pour $x \in]-\infty ; 1]$, $f(x) = 5$,
pour $x \in]1 ; 7[$, $f(x) = 3$,
pour $x \in [7 ; +\infty[$, $f(x) = 2$.

4 **1.** Construire la représentation graphique d'une fonction f affine par intervalles qui admet le tableau de variation ci-dessous :

x	-3		-1		4		7
$f(x)$	-2	↘	-5	↗	3	↘	1

2. Définir explicitement cette fonction.

5 Lorsqu'il est 13 h à Yaoundé, il est 7 h à New-York. Construire une représentation graphique de la fonction qui à l'heure de Yaoundé fait correspondre l'heure de New-York.

6 Soit la fonction numérique définie par :
$$f(x) = \frac{4x^2 - 9}{|2x - 3|}.$$
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Démontrer que f est une fonction affine par intervalles.
3. Représenter graphiquement f.

7 Soit la fonction définie sur l'intervalle $[2, 8]$ par : $f(x) = |x - 2| + |x - 4| - |2x - 6|$.
1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue sur chacun des intervalles $[2 ; 3]$; $[3 ; 4]$ et $[4 ; 8]$.
2. Donner les variations de f sur ces intervalles.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

8 Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les points $A(-3 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $C(1 ; 3)$, $D(2,5 ; 4)$, $E(5 ; -1)$, $F(7 ; 2)$.
On désigne par f la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est
$[AB[\cup [BC[\cup [CD[\cup [DE[\cup [EF]$.
1. Déterminer f par une formule explicite sur chaque intervalle.
2. Calculer $f(-1,5)$, $f(-0,5)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5,5)$.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de chacun des nombres suivants :
-1 ; $-0,5$; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; $3,5$; 4 et 5.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Déterminer graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants :
$[-3 ; -1,5]$; $[-0,5 ; 0,5]$; $[3 ; 4]$; $[4 ; 6]$; $[-3 ; 4]$.
Contrôler chaque résultat par le calcul.
6. Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants :
$[-1 ; 0]$; $[-0,5 ; 0,5]$; $[1 ; 2]$; $[2 ; 3]$; $[1 ; 5]$.
Contrôler chaque résultat par le calcul.

9 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Tracer sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto |x + 3|$ et $x \mapsto 3x - 5$.
2. Résoudre graphiquement l'équation :
$|x + 3| = 3x - 5$.
3. Résoudre graphiquement les équations :
a) $|2x - 1| = 7$; *b)* $|2x - 1| = |x + 1|$.

10 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Tracer sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto |3x - 1|$ et $x \mapsto 2x + 1$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation :
$|3x - 1| < 2x + 1$.
3. Résoudre graphiquement les inéquations :
a) $|2x - 3| < 5$; *b)* $|4x - 3| > |2x - 3|$.

11 On donne les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \min(x + 1 ; 1 - x)$ et $g(x) = \max(x + 1 ; 1 - x)$
1. Calculer les images par f et g de chacun des nombres suivants : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2.
2. Construire la représentation graphique de f et celle de g.
3. Établir le tableau de variation de chacune de ces fonctions.

12 [AB] est un segment de 4 cm et M un point de [AB]. Dans l'un des demi-plans délimités par (AB), on trace les carrés ACDM et MEFB. On pose $AM = x$. On désigne par f la fonction qui à x associe le périmètre du polygone ACDEFB.
1. Calculer $f(x)$.
2. Représenter graphiquement f.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction g, qui à x associe le double du périmètre de ACDM.
4. Résoudre l'équation : $g(x) = f(x)$.

Fonctions élémentaires

13 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $3 \leq |x| \leq 4$; *b)* $-3 < \frac{1}{x} < 1$;

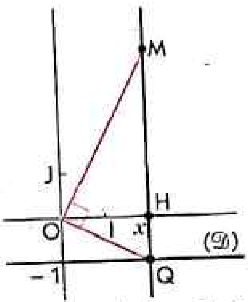
c) $\frac{3}{4} < \sqrt{x} < 2$; *d)* $-3 < x^2 \leq 4$.

14 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Tracer sur le même graphique, les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$.
2. Résoudre graphiquement l'équation : $x^2 = |x|$.
3. Résoudre graphiquement l'équation : $x^3 = 3x + 2$.

15 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Tracer sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x + 2$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2 + x - 2 \leq 0$.

16 Résoudre graphiquement le système d'équations : $\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

17 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). ($\mathscr{D}$) est la droite d'équation $y = -1$.
On considère un nombre réel non nul x et on désigne par Q, H et M les points d'abscisse x appartenant respectivement à ($\mathscr{D}$), (OI) et à la droite passant par O et perpendiculaire à (OQ).



1. Démontrer que le point M appartient à la parabole ($\mathscr{P}$) d'équation $y = x^2$.
2. Donner une méthode de construction point par point de ($\mathscr{P}$) utilisant l'équerre.

Utilisation des fonctions élémentaires

18 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x|$.
1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Construire la représentation graphique de f.

19 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Déterminer le nombre réel a pour que l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ passe par le point A(5 ; – 0,6).
2. Démontrer que les points B(– 6 ; 0,5) ; C(– 1,5 ; 2) et D(– 3 ; 1) appartiennent à cette hyperbole.

20 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Donner dix points du plan dont le produit des coordonnées est 2,1.
2. Trouver une fonction dont la représentation graphique est une hyperbole passant par ces points.

21 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne la fonction f : $[-3 ; 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{\mathrm{E}(x)},$$

$\mathrm{E}(x)$ étant la partie entière de x.
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Construire la représentation graphique de f.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1.

22 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne la fonction f : $[-2 ; 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x\mathrm{E}(x),$$

$\mathrm{E}(x)$ étant la partie entière de x.
1. Compléter le tableau suivant :

x	– 2	– 1	0	1	2
$f(x)$					

2. Quelles sont les images par f de chacun des nombres suivants : – 1,9 ; – 0,7 ; 0,1 ; 1,8 ?
3. Construire la représentation graphique de f.
4. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : [0 ; 2] ; [0 ; 1] ; [– 2 ; 0] ; [– 2 ; – 1].

23 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = x\,|x|$ et $g(x) = x^3$.
1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Tracer sur le même graphique la courbe représentative de g.
3. *a)* Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Comparer, pour tout nombre réel x, $f(x)$ et $g(x)$.

24 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = (x + 2)^2 - 1$.
1. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2]$ et $[-2 ; +\infty[$ puis tracer sa représentation graphique ($\mathscr{C}$).
2. Tracer le symétrique ($\mathscr{C}_1$) de ($\mathscr{C}$) par rapport à O et trouver une équation de ($\mathscr{C}_1$).
3. Tracer le symétrique ($\mathscr{C}_2$) de ($\mathscr{C}$) par rapport à (OI) et trouver une équation de ($\mathscr{C}_2$).
4. Tracer le symétrique ($\mathscr{C}_3$) de ($\mathscr{C}$) par rapport à (OJ) et trouver une équation de ($\mathscr{C}_3$).

APPROFONDISSEMENT

25 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3x}{2x - 4}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout x appartenant à D_f, $f(x) = a + \frac{b}{2x - 4}$.
3. Démontrer que 1 est un minorant de $f([3 ; 7])$.
4. Démontrer que 3 est un majorant de $f([-3 ; -1])$.

26 Une banque propose des taux d'intérêt compris entre 2% et 10%.
1. Pour obtenir un intérêt de 60 000 F après un an, exprimer en fonction du taux t le capital qu'on doit placer.

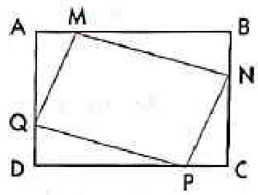
2. Soit f la fonction qui, au taux t, associe le capital C. Représenter graphiquement cette fonction.

27 La loi de Mariotte s'exprime ainsi : pour une masse donnée de gaz et à température constante, le produit PV de la pression de ce gaz par son volume est constant.
Une étude expérimentale, au moyen d'un gaz enfermé dans un cylindre dont le volume est variable grâce à un piston, a permis, par le biais d'un manomètre, d'établir la pression en fonction du volume :

V	17,5	18,5	20	21,5	23,5	26	27	28,5	31,5
P	112,8	103,1	102,6	89,9	84,1	78,9	73,2	67	66,2

1. Si la loi de Mariotte s'applique, quelle est la nature de la fonction qui, au volume, associe la pression ?
2. Représenter l'ensemble des points M(V, P) en prenant 1 cm en abscisse pour 2 unités de volume et 1 cm en ordonnée pour 10 unités de pression, l'origine étant placée en $M_0(15,60)$.
3. Calculer la moyenne des produits PV expérimentaux. Donner une équation de la courbe $V \mapsto P(V)$.
Représenter cette courbe sur le même graphique que l'ensemble des points M(V, P). Conclusion ?

28 ABCD est un rectangle tel que :
AB = 6 cm et
BC = 4 cm.
M, N, P, Q appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD] et [DA].



De plus on a : AM = BN = CP = DQ.
Où faut-il placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?

29 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). OMPN est un rectangle tel que M, N et P appartiennent respectivement à [OI], [OJ] et [IJ].
1. On considère la fonction f qui à l'abscisse x du point M associe le demi-périmètre du rectangle OMPN.
a) Trouver une équation de la droite (IJ).
b) Calculer $f(x)$.
c) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. On désigne par $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe l'aire du rectangle OMPN.
a) Calculer $\mathcal{A}(x)$.
b) Étudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$.
c) Trouver le maximum de $\mathcal{A}$ sur [0 ; 1].

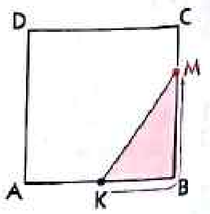
30 ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC). On suppose BC = 3 et AH = 2.
On considère un point M de [AH]. La droite parallèle à (BC) passant par M coupe (AB) en P et (AC) en Q.
On pose AM = x. On désigne par $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe l'aire du triangle APQ.
1. Calculer $\mathcal{A}(x)$.
2. Déterminer par calcul la position de M sur [AH] pour laquelle l'aire du triangle APQ est la moitié de celle du triangle ABC.
3. Construire la courbe représentative ($\mathscr{C}$) de $\mathcal{A}$.

31 Le plan est muni d'un repère.
Un magasin de location de cassettes vidéo propose à ses clients trois formules de location :
– FORMULE 1 : 24 000 F d'abonnement annuel et 1 500 F par cassette louée ;
– FORMULE 2 : 12 000 F d'abonnement annuel et 2 000 F par cassette louée ;
– FORMULE 3 : pas d'abonnement et 3 000 F par cassette louée.
1. Quelle est la formule la plus économique pour la location annuelle de 10 cassettes ? de 20 cassettes ? de 30 cassettes ?
2. *a)* Pour chaque formule, exprimer la somme annuelle à débourser en fonction du nombre x de cassettes louées.
b) Tracer, sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions associées à ces trois formules.
c) Ayant choisi la première formule, un client a dépensé 51 000 F. A-t-il choisi la formule la plus économique ?
3. Indiquer la formule la plus économique suivant le nombre de cassettes que l'on prévoit de louer.

32 ABCD est un rectangle tel que AB = 3, BC = 2.
Soit M un point du segment [AB] distinct de A. On pose AM = x.
Les droites (DM) et (BC) sont sécantes en N.
1. Calculer CN en fonction de x.
2. On désigne par f la fonction qui, à x, associe CN.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Représenter graphiquement f.

33 On considère un rectangle ABCD de dimensions AB = l et BC = L ($L \geq l$). On construit, extérieurement à ce rectangle, le carré BEFC de côté L.
ABCD est dit rectangle harmonieux (ou rectangle d'or) lorsque ses dimensions sont proportionnelles à celles du rectangle AEFD, c'est-à-dire lorsque : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$.
1. On pose $x = \frac{L}{l}$. Vérifier que le rectangle ABCD est harmonieux si $x = 1 + \frac{1}{x}$.
2. On veut déterminer le nombre réel positif x_0, solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$.
a) Sur le même graphique, représenter les fonctions f et g définies par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
b) En déduire un encadrement de x_0 par deux nombres décimaux d'ordre 1.
c) Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

34 ABCD est un carré de côté 2 cm. K est le milieu du segment [AB]. Une fourmi M part du point K et tourne autour du carré dans le sens de la flèche. On appelle x la distance parcourue par M.

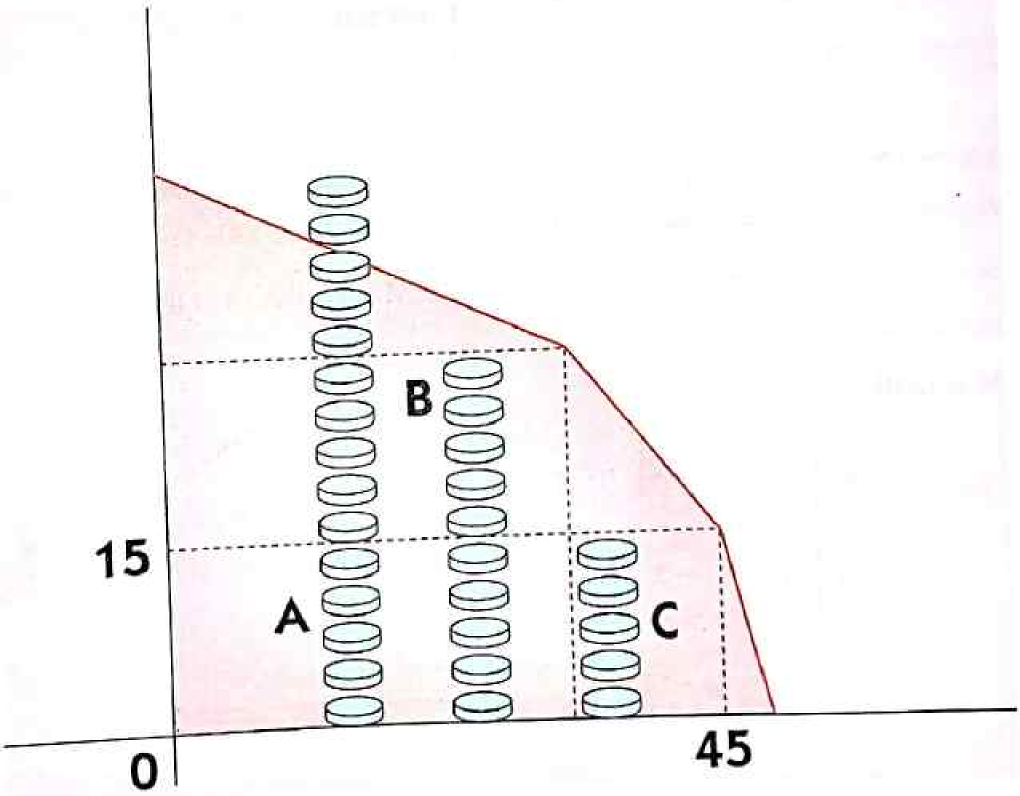


1. Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ du domaine coloré.
2. Le plan est muni d'un repère. Tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$ sur [0 ; 8].
3. Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}(x)$ est-elle égale aux deux tiers de l'aire du carré ?

13

Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Dans ce chapitre nous nous proposons de conjuguer études numérique et graphique pour résoudre des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues réelles. On révisera les méthodes vues en classe de troisième. On apprendra à mettre en équations un problème concret ou historique, issu de la géométrie ou de l'économie.



SOMMAIRE

1 Généralités

1.1. Des systèmes pour résoudre un problème

1. Un camion transporte du riz et du soja ; le riz est conditionné en sacs de dix kilos et le soja en sacs de cinq kilos. On veut embarquer au minimum 150 sacs de riz et 160 sacs de soja. Le chargement total ne doit pas excéder trois tonnes et on veut qu'il y ait au moins autant de sacs de riz que de sacs de soja. On veut trouver le nombre de sacs de riz et le nombre de sacs de soja. Écrire des inéquations qui traduisent les renseignements donnés par l'énoncé.

Soit x le nombre de sacs de riz et y le nombre de sacs de soja.
On veut qu'il y ait au moins autant de sacs de riz que de sacs de soja. Donc : $x \geq y$.
On veut embarquer au minimum 150 sacs de riz et 160 sacs de soja. Donc : $x \geq 150$ et $y \geq 160$.
Le chargement total ne doit pas excéder trois tonnes. Donc : $10x + 5y \leq 3\,000$.
Les renseignements donnés par l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \geq 150 \\ y \geq 160 \\ 10x + 5y \leq 3\,000. \end{cases}$$

2. Dans le plan muni du repère (O, I, J), on considère les deux points $A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Écrire un système d'équations et d'inéquations qui représente le segment [AB].

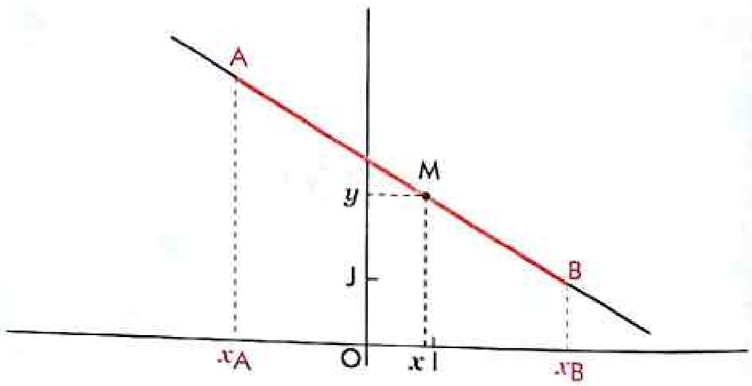
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan. Il faut écrire que M appartient à la droite (AB) et que son abscisse est comprise entre celle de A et celle de B :

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (AB) \\ x_A \leq x \leq x_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 14 = 0 \\ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



1.2. Définitions

Les systèmes étudiés dans ce chapitre ont deux inconnues et sont constitués d'équations ou d'inéquations ; une solution d'un tel système est un couple $(x_1 ; y_1)$ de nombres réels qui vérifie toutes les équations ou inéquations du système.

- Les contraintes du système sont celles de chacune des équations ou inéquations de ce système.
- Résoudre un système, c'est trouver dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions communes aux équations ou inéquations qui composent le système.
- Deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque

L'ensemble des solutions d'un système est l'intersection des ensembles de solutions des équations ou inéquations qu'il contient.

Exemple

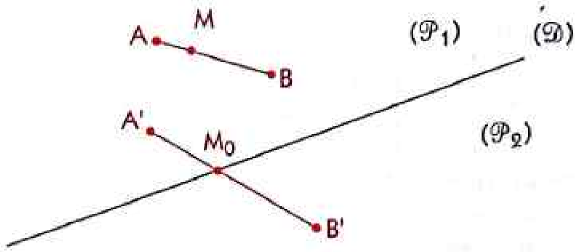
Reprenons le premier système obtenu au § 1.1.

Il s'agit d'un système dont les solutions ne peuvent être que des couples de nombres entiers naturels (x et y représentent des nombres de sacs). On peut démontrer qu'il est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - 160 \geq 0 \\ 2x + y - 600 \leq 0. \end{cases}$$

Les couples (200 ; 170), (190 ; 180), (183 ; 177) sont des solutions de ce système.
On verra ultérieurement comment donner toutes les solutions d'un tel système.

1.3. Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Nous admettrons que toute droite ($\mathcal{D}$) partage le plan en deux demi-plans ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) tels que :

- si A et B sont deux points de ($\mathcal{P}_1$) (resp. de ($\mathcal{P}_2$)), alors tous les points du segment [AB] appartiennent à ($\mathcal{P}_1$) (resp. ($\mathcal{P}_2$)) ;
- Si A' est un point de ($\mathcal{P}_1$) et B' un point de ($\mathcal{P}_2$), alors il existe un unique point M_0 de ($\mathcal{D}$) appartenant à [A'B'].

Théorème fondamental

Soit (O, I, J) un repère du plan et ($\mathcal{D}$) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.

Soit ($\mathcal{P}_1$) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $ax + by + c > 0$.

Soit ($\mathcal{P}_2$) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $ax + by + c < 0$.

($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) sont les deux demi-plans ouverts de frontière ($\mathcal{D}$).

Démonstration

Posons $f(M) = ax + by + c$.

Nous savons que la relation $f(M) = 0$ caractérise les points de ($\mathcal{D}$), donc $f(M)$ ne s'annule que sur ($\mathcal{D}$).

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts n'appartenant pas à ($\mathcal{D}$).

- $f(A) \neq 0$ et $f(B) \neq 0$.
- Démontrons que si $f(A)f(B) > 0$, alors, pour tout point M du segment [AB], $f(M)f(A) > 0$:
  pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du segment [AB], il existe $t \in [0 ; 1]$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$;

  on a donc : $\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$;

$$\begin{aligned} f(M) &= ax_A + at(x_B - x_A) + by_A + bt(y_B - y_A) + c \\ &= ax_A + by_A + c + t(ax_B + by_B + c - ax_A - by_A - c) \\ &= f(A) + t\big(f(B) - f(A)\big) \\ &= (1 - t)f(A) + tf(B) ; \end{aligned}$$

$f(M)f(A) = (1 - t)f(A)^2 + tf(B)f(A)$;

$f(M)f(A) \geq 0$ car $0 \leq t \leq 1$ et $f(B)f(A) > 0$;

$f(M)f(A) \neq 0$ car une somme de deux termes positifs ne peut être nulle que si chacun de ces termes est nul ; c'est impossible ici, car :
$(1 - t)f(A)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ et $tf(B)f(A) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Donc, pout tout point M du segment [AB], $f(M)f(A) > 0$.

- Supposons maintenant que A et B soient de part et d'autre de $(\mathscr{D})$, c'est-à-dire que :

  A soit dans l'un des demi-plans ouverts de frontière $(\mathscr{D})$, que nous noterons $(\mathscr{P}_A)$,

  B soit dans l'autre demi-plan ouvert de frontière $(\mathscr{D})$, que nous noterons $(\mathscr{P}_B)$.

Soit M_0 le point de $(\mathscr{D})$ appartenant à [AB].

$f(M_0) = 0 \Rightarrow f(A)f(B) < 0$ (sinon, d'après ce qui précéde, on aurait $f(M_0)f(A) > 0$ et $f(M_0) \neq 0$).

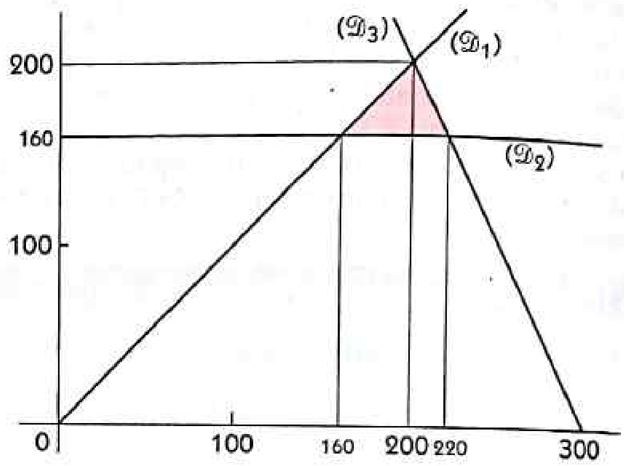
On peut toujours supposer que $f(A) > 0$ et $f(B) < 0$ et alors, selon le même raisonnement :

pour tout point $M \in (\mathscr{P}_A)$, M et B sont de part et d'autre de $(\mathscr{D})$, donc $f(M)f(B) < 0$ et $f(M) > 0$,

pour tout point $M \in (\mathscr{P}_B)$, M et A sont de part et d'autre de $(\mathscr{D})$, donc $f(M)f(A) < 0$ et $f(M) < 0$.

Exemple

Soit à résoudre $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - 160 \geq 0 \\ 2x + y - 600 \leq 0. \end{cases}$



Dans un repère (O, I, J), on construit les droites
$(\mathscr{D}_1) : x - y = 0$;
$(\mathscr{D}_2) : y - 160 = 0$;
$(\mathscr{D}_3) : 2x + y - 600 = 0$.

Pour déterminer les demi-plans qui conviennent, on choisit un point particulier.
Par exemple, pour O, origine du repère, l'expression $2x + y - 600$ est négative.
C'est donc le demi-plan contenant ce point pour lequel on a : $2x + y - 600 \leq 0$.

On procède de même pour les deux autres inéquations, mais pour la première, il faut prendre un autre point que l'origine, par exemple I, car $x - y$ s'annule en O.
L'ensemble des points M vérifiant le système est représenté par la surface du triangle colorié sur la figure (bords compris).

Les solutions étant des nombres entiers naturels, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des couples $(x ; y)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour lesquels $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est situé à l'intérieur de ce triangle (bords compris).

M

Pour résoudre une inéquation du type $ax + by + c < 0$,

- on construit dans le plan, muni d'un repère (O, I, J), la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $ax + by + c = 0$;
- on choisit un point particulier à l'extérieur de $(\mathscr{D})$, par exemple, O, I ou J :
  – si l'expression $ax + by + c$ est strictement négative pour les coordonnées de ce point, le demi-plan ouvert de frontière $(\mathscr{D})$ contenant ce point représente l'ensemble des solutions ;
  – sinon, l'ensemble des solutions est représenté par l'autre demi-plan ouvert ;
- on conclut en tenant compte des contraintes.

On procède de même pour une inéquation du type $ax + by + c \leq 0$; l'ensemble des solutions est, dans ce cas, représenté par un demi-plan fermé (c'est-à-dire un demi-plan contenant la frontière $(\mathscr{D})$).

1.4. Utilisation du déterminant

L'ensemble des solutions d'un système de deux équations à deux inconnues est représenté par l'intersection de deux droites. Ces droites sont soit strictement parallèles, soit sécantes, soit confondues. Le système a donc soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.
Pour savoir dans quel cas on est, il est commode d'utiliser le déterminant du système.

Définition

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

Le nombre $ab' - a'b$, noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, est appelé déterminant du système (S).

Propriété

Un système de deux équations à deux inconnues admet un seul couple solution si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ (dans un repère orthonormé).

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont respectivement normaux à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$. Le système (S) admet une seule solution si et seulement si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ab' - ba' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Exemple

Soit a et b deux nombres réels. Considérons le système $\begin{cases} ax + 3y + b = 0 \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$

Son déterminant est égal à $2a - 3$.

- Si $a \neq \frac{3}{2}$, le système admet une seule solution. Pour la déterminer, on utilise une des méthodes vues en classe de troisième :

par substitution :
- on tire de la seconde équation : $x = -2y - 1$;
- on reporte cette valeur dans la première équation et on tire : $y = \dfrac{a - b}{3 - 2a}$;
- on remplace y par sa valeur dans la seconde équation et on tire : $x = \dfrac{2b - 3}{3 - 2a}$.

par combinaisons :
- on multiplie par a chacun des membres de la seconde équation et on soustrait membre à membre les deux équations, on obtient : $3y - 2ay + b - a = 0$; d'où on tire : $y = \dfrac{a - b}{3 - 2a}$;
- on multiplie chacun des membres de la première équation par 2, chacun des membres de la seconde équation par 3 et on soustrait membre à membre les deux équations ; on obtient : $2ax - 3x + 2b - 3 = 0$; d'où on tire : $x = \dfrac{2b - 3}{3 - 2a}$.

Dans les deux méthodes, on démontre seulement que, s'il existe un couple solution, ce couple est nécessairement $\left(\dfrac{2b - 3}{3 - 2a}, \dfrac{a - b}{3 - 2a}\right)$.

On pourrait se dispenser de vérifier que ce couple est bien solution du système puisque, son déterminant étant non nul, l'existence d'une solution unique est assurée et cette solution ne peut être que le couple trouvé. Mais, ce serait dommage de se priver d'une vérification, une erreur de calcul étant toujours possible.

• Si $a = \frac{3}{2}$, le système admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions représentées par une droite. Pour savoir dans quel cas on est, il suffit de regarder si une solution particulière de l'une des équations est solution de l'autre.

Par exemple, $(-1 ; 0)$ est une solution évidente de $x + 2y + 1 = 0$. En reportant ces valeurs dans la première équation, on obtient : $-\frac{3}{2} + b = 0$.

Ainsi :

– si $a = b = \frac{3}{2}$, tous les couples $(x ; y)$ vérifiant : $x + 2y + 1 = 0$, sont solutions du système.

– si $a = \frac{3}{2}$ et $b \neq \frac{3}{2}$, le système n'admet pas de solution.

M

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on peut calculer le déterminant :

• s'il est non nul, le système admet une seule solution que l'on détermine par substitution ou combinaisons linéaires ;

• s'il est nul, on vérifie si une solution particulière de l'une des équations est solution de l'autre :

– si c'est le cas, le système admet une infinité de solutions représentées par une droite ;

– sinon, le système n'admet pas de solution.

Exercices

1.a Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x + 15y = 21 \\ 2x + 10y = 14 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x + 15y = 1 \\ 2x + 10y = -1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 5x - y = 17 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 7 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}7y = 1{,}5 \\ 0{,}6x + 0{,}5y = 0{,}7 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 0{,}25x - 3{,}5y = 0 \\ -1{,}5x + 21y = 3 \end{cases}$.

1.b Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x\sqrt{2} + 2y = 3 \\ x + y\sqrt{2} = 5 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x\sqrt{3} + y = \sqrt{3} \\ 3x + y\sqrt{3} = 3 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x + y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -0{,}4x + 0{,}8y = -2 \end{cases}$;

1.c Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $x + y \geq 0$; *b)* $x - y + 4 \leq 0$;

c) $x - 2y + 8 > 0$; *d)* $3x + 2y < 0$.

1.d Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - y + 2 \leq 0 \\ x + 2y - 1 > 0 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} x - 2y \geq 1 \\ y - \frac{x}{2} \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$; *d)* $0 < x + 3y \leq 2$.

2 Résolutions

2.1. Systèmes de plus de deux équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Résolution graphique

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On considère le système de n équations du premier degré à deux inconnues

$$(S) : \begin{cases} (E_1) \\ (E_2) \\ \dots \\ (E_n). \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), chaque équation (E_1), (E_2), ..., (E_n) est celle d'une droite $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, ..., $(\mathcal{D}_n)$.
Les solutions du système (S) sont donc les couples de coordonnées des points communs à toutes ces droites.

Trois cas peuvent alors se présenter :
- $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, ..., $(\mathcal{D}_n)$ sont confondues, le système admet alors une infinité de solutions qui sont les couples de coordonnées de tous les points de cette droite ;
- $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, ..., $(\mathcal{D}_n)$ sont concourantes en un point A, le système admet alors pour solution unique le couple de coordonnées de A ;
- dans tous les autres cas, il n'y a aucune solution.

Travaux dirigés

1. Résoudre le système : $\begin{cases} 30x + 15y = 11 \\ 2x + y = 4 \\ 28x + 14y = 19. \end{cases}$

Solution guidée

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$ les droites d'équations respectives : $30x + 15y = 11$, $2x + y = 4$, $28x + 14y = 19$.

- Démontrer que $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont parallèles.
- Démontrer que le point $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D}_2)$ mais n'appartient pas à $(\mathcal{D}_1)$.
- Conclure.

2. Résoudre le système : $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = -2 \\ 7x + y = 16. \end{cases}$

Solution guidée

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$ les droites d'équations respectives : $x - y = 0$, $2x - 3y = -2$, $7x + y = 16$.

- Construire les droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$. Quelle conjecture peut-on faire ?
- Démontrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes en un point A dont on donnera le couple de coordonnées.
- Démontrer que A appartient à $(\mathcal{D}_3)$.
- Conclure.

2.2. Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On considère le système de n inéquations du premier degré à deux inconnues

$$(S) : \begin{cases} (I_1) \\ (I_2) \\ \dots \\ (I_n). \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère (O, I, J), chaque inéquation (I_1), (I_2), ...,(I_n) caractérise un demi-plan $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, ..., $(\mathcal{P}_n)$.
Les solutions du système (S) sont donc les couples de coordonnées des points communs à ces demi-plans.

Travaux dirigés

1. Résoudre graphiquement le système d'inéquations (S) : $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \\ x + 2y + 6 \geq 0 \\ 5x - 3y - 9 \leq 0. \end{cases}$

Solution guidée

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$, $(\mathcal{D}_4)$ les droites d'équations respectives :
$2x - 3y + 6 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$, $5x - 3y - 9 = 0$.

Soit $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$, $(\mathcal{P}_4)$ les demi-plans d'inéquations respectives :
$2x - 3y + 6 \geq 0$, $x - 3 \leq 0$, $x + 2y + 6 \geq 0$, $5x - 3y - 9 \leq 0$.

- Construire $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$ et $(\mathcal{D}_4)$.
- Vérifier que O n'appartient à aucune des droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$ et $(\mathcal{D}_4)$.
- Pour chacun des demi-plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ et $(\mathcal{P}_4)$, préciser si O lui appartient ou non.
- Hachurer l'ensemble des points du plan dont les couples de coordonnées sont solutions du système (S).

2. Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ x + 2y + 2 \geq 0 \\ 2x - 5y + 20 = 0. \end{cases}$

Solution guidée

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$, $(\mathcal{D}_4)$ les droites d'équations respectives :
$x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$, $2x - 5y + 20 = 0$.

Soit $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ les demi-plans d'inéquations respectives :
$x - 1 \leq 0$, $y - 1 \geq 0$, $x + 2y + 2 \geq 0$.

- Construire $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$.
- Vérifier que O n'appartient à aucune des droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$.
- Pour chacun des demi-plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$, préciser si O lui appartient ou non.
- Hachurer l'ensemble $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \cap (\mathcal{P}_3)$.
- Construire $(\mathcal{D}_4)$.
- Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \cap (\mathcal{P}_3) \cap (\mathcal{D}_4)$?
- Conclure.

2.3. Changement d'inconnues

Dans certains cas qui paraissent complexes, on peut se ramener à un système du premier degré en effectuant un changement d'inconnue. Nous en donnons ici deux exemples.

Travaux dirigés

1. Résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 3x^2 + y = 14. \end{cases}$

Solution guidée

On pose $X = x^2$ et on désigne par (S'_1) le système : $\begin{cases} X \geq 0 \\ X - y = 2 \\ 3X + y = 14. \end{cases}$

On a alors : (x, y) solution de $(S_1) \Leftrightarrow (X, y)$ solution de (S'_1).
- Résoudre (S'_1).
- En déduire les solutions de (S_1).

2. **Résoudre le système (S_2) :** $\begin{cases} x - \dfrac{1}{y} = -3 \\ -2x + \dfrac{5}{y} = 12. \end{cases}$

Solution guidée

On pose $Y = \dfrac{1}{y}$ et on désigne par (S'_2) le système : $\begin{cases} Y \neq 0 \\ x - Y = -3 \\ -2x + 5Y = 12. \end{cases}$

On a alors : (x, y) solution de $(S_2) \Leftrightarrow (x, Y)$ solution de (S'_2).
- Résoudre (S'_2).
- En déduire les solutions de (S_2).

2.4. Exemple de programmation linéaire

Introduction

On a représenté ci-contre l'ensemble S des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y \leq 13 \\ 5x - 6y \leq 14 \\ y - 7x \leq 10. \end{cases}$$

On veut chercher un point A de S tel que $y - 2x$ soit maximal.

Soit p un nombre réel et $(\mathscr{D}_p)$ la droite d'équation $y - 2x = p$.

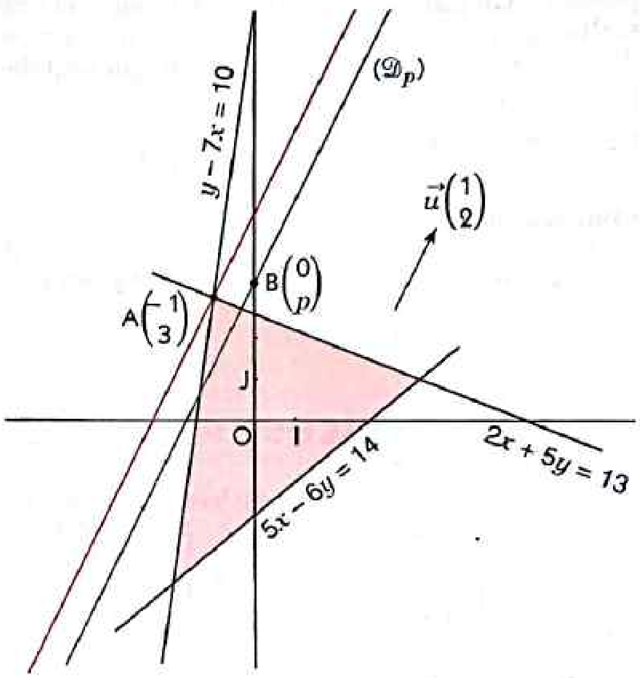
$(\mathscr{D}_p)$ passe par $B\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

p sera donc maximal lorsque l'ordonnée du point d'intersection de $(\mathscr{D}_p)$ avec l'axe des ordonnées sera maximale.

On s'aperçoit graphiquement que ceci est obtenu lorsque $(\mathscr{D}_p)$ passe par $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, point d'intersection des droites d'équations :

$$2x + 5y = 13 \quad \text{et} \quad y - 7x = 10.$$

Le maximum de $y - 2x$ sur S est donc atteint au point A.



Exemple de problème de programmation linéaire

Une entreprise fabrique des fauteuils et des chaises à l'aide de trois machines A, B et C. Pour fabriquer un fauteuil il faut utiliser les machines A et B pendant une heure, la machine C pendant trois heures. Pour fabriquer une chaise on utilise les machines A et C pendant une heure, la machine B pendant deux heures. Mais les machines ne sont disponibles que 60 heures pour A, 90 heures pour B, 150 heures pour C. Un fauteuil génère un bénéfice de 10 000 F et une chaise 5 000 F. Combien faut-il fabriquer de fauteuils et de chaises pour obtenir, dans ces conditions, un bénéfice maximum ?

Mathématisation du problème

Soit x et y les nombres respectifs de fauteuils et de chaises à fabriquer ; x et y sont des nombres entiers naturels.

Pour fabriquer x fauteuils et y chaises le temps d'utilisation de la machine A est $x + y$, celui de la machine B est $x + 2y$ et celui de la machine C est $3x + y$.

Les contraintes données dans l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x + y \leq 60 \\ x + 2y \leq 90 \\ 3x + y \leq 150. \end{cases}$$

Le bénéfice sera : $b = 10\,000x + 5\,000y$.

Résolution
On résout graphiquement le système. Les points à coordonnées entières de la zone hachurée représentent les couples solutions. Il s'agit de choisir la ou les solutions qui donnent le meilleur bénéfice ; on dit que l'on a un problème d'optimisation.
Considérons la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

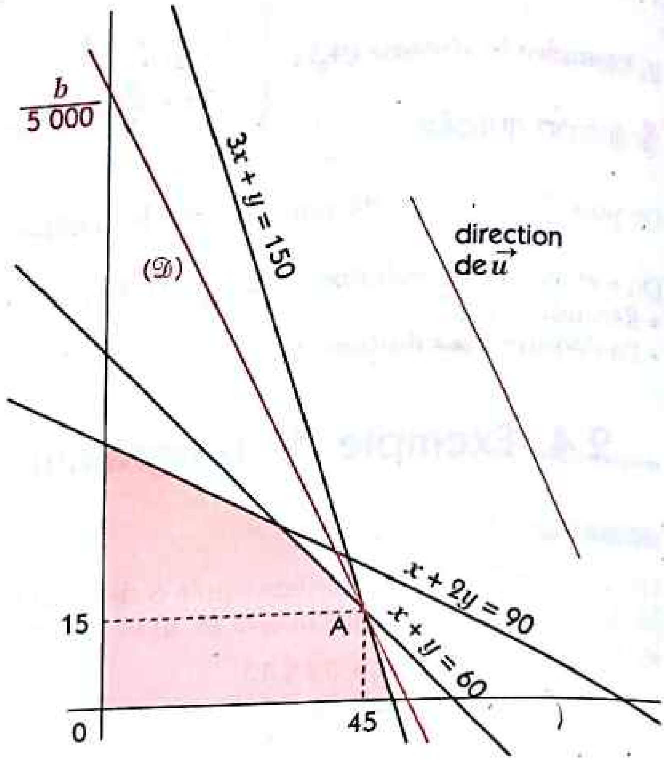
$$10\,000x + 5\,000y = b.$$

Lorsque b varie, cette droite garde la même direction et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

L'ordonnée à l'origine de cette droite est $\frac{b}{5\,000}$.

Pour avoir b maximal, il faut donc choisir x et y de sorte que l'ordonnée à l'origine soit la plus grande possible. Graphiquement on constate que cela est réalisé pour le point A d'intersection des droites d'équations $3x + y = 150$ et $x + y = 60$, qui sont des frontières de la zone permise.

Les coordonnées de ce point sont $\begin{pmatrix}45\\15\end{pmatrix}$.



Conclusion
Le bénéfice maximal est donc obtenu par la fabrication de 45 fauteuils et de 15 chaises ; il est de $45 \times 10\,000 + 15 \times 5\,000$, c'est à dire 525 000 F.

Exercices

2.a Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 3 \leq 0 \\ 2y - 1 \geq 0 \\ 4 - y \geq x. \end{cases}$

2.b Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{y} = 17 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$

(on posera $X = \frac{1}{x}$ *et* $Y = \frac{1}{y}$*)* ;

2. $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 7 \end{cases}$

(on posera $X = \sqrt{x}$ *et* $Y = \sqrt{y}$*)*.

2.c 1. Résoudre le système : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 8y = 2 \end{cases}$.

2. En déduire la résolution des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2|x| - 3|y| = 1 \\ 5|x| - 8|y| = 2 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - 3y^2 = 1 \\ \dfrac{5}{x} - 8y^2 = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x^2 + \dfrac{3}{y+1} = 1 \\ 5x^2 + \dfrac{8}{y+1} = 2 \end{cases}$; *d)* $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{(y+1)^2} = 1 \\ \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{8}{(y+1)^2} = 2 \end{cases}$.

2.d Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} |x - 1| \leq 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} |3 - 2y| > 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$.

2.e Le plan est muni du repère (O, I, J).

1. Représenter graphiquement l'ensemble E des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} 4x + y - 4 \leq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Parmi les points de E, quel est celui dont les coordonnées rendent maximal $2x + y$? Quelle est la valeur de ce maximum ?

2. Représenter graphiquement l'ensemble F des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x - y \leq 5 \\ x + 2y \leq 2 \\ 5x + 2y \geq 8. \end{cases}$$

Parmi les points de F, quel est celui dont les coordonnées rendent minimal $4y - x$? Quelle est la valeur de ce minimum ?

Exercices

APPRENTISSAGE

Systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1 Préciser, sans les résoudre, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases}$;

$(S_3) : \begin{cases} 9x - 5y = 39 \\ 15x - 3y = 81 \end{cases}$; $(S_4) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - \frac{y}{3} = 1. \end{cases}$

2 Sans faire de calculs, dire si le système suivant admet ou non une solution unique :

$\begin{cases} 122\,678x - 57\,332y - 2\,198 = 0 \\ 19\,245x + 52\,954y - 753 = 0. \end{cases}$

3 Interpréter géométriquement puis résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ \frac{1}{2}x + y = 2 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 1{,}5y = 3. \end{cases}$

4 Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 5x - 7y = 38 \\ -3x + 4y = -11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{3}{2} \\ 36x + 18y = 90 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + \frac{3}{2}y = -4 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 7{,}2x - 5{,}4y = 6{,}3 \\ 8x - 6y = 9. \end{cases}$

5 Préciser, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 2x + my = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} mx + y = -2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$;

$(S_3) : \begin{cases} 2mx + 4y = 2m \\ (2m - 3)x + (m - 1)y = 1. \end{cases}$

6 Les systèmes suivants admettent-ils une solution unique ?

$(S_1) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 2 \\ 3x - y + 5 = 0. \end{cases}$

$(S_2) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = \frac{1 - y}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y + x\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$

7 Résoudre les systèmes :

$(S_1) : \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \\ x + y = 2. \end{cases}$

8 Utiliser un changement d'inconnue pour résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 2y^2 - x^2 = 14 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -3 \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 23 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{y} = 15 \\ \frac{1}{2x - 2} - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 4\sqrt{x} - \sqrt{y} = 19 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 11 \\ -y^2 - x^2 = -1. \end{cases}$

9 Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x^2 + 4x - y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 + 6x - 2y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 3 = 0 \\ 3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 12 = 0. \end{cases}$

10 1. Construire un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ayant pour seule solution le couple (1 ; 1).
2. Construire un système de deux équations du premier degré à deux inconnues n'ayant aucune solution.
3. Construire un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ayant une infinité de solutions.

11 On donne le système : $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + 5y = -3. \end{cases}$

Parmi les systèmes suivants, lesquels sont équivalents au système donné ?

1. $\begin{cases} x = 3y + 4 \\ 11y = -11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x - y = 2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 5x - 15y = 5 \\ 6x - 18y = 9 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0. \end{cases}$

12 Démontrer que si un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, à coefficients non nuls, a une infinité de solutions, les deux équations ont leurs coefficients proportionnels.

Résolution de problèmes par mise en équations

13 Saliou a 575 F en pièces de 25 F et 50 F. Il a en tout 16 pièces. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

14 Déterminer un nombre entier de deux chiffres dont la somme des chiffres est 10 et tel qu'en permutant les deux chiffres le nombre augmente de 54.

15 Peut-on déterminer un nombre entier de deux chiffres dont la somme des chiffres est 10 et tel qu'en permutant les deux chiffres le nombre augmente de 50 ?

Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

16 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

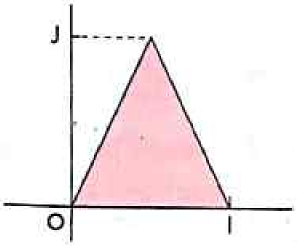
a) $2x - 3y \leq 5$; *b)* $x + 3y > 4$;
c) $x < 2y - 3$; *d)* $5y - 2x \geq 1$.

17 L'ensemble des solutions d'un des systèmes suivants est représenté dans le plan muni du repère (O, I, J) par l'ensemble colorié ci-dessous. Préciser lequel ?

$(S_1) : \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 2x + y - 2 \leq 0 \\ y \leq 1. \end{cases}$

$(S_2) : \begin{cases} y \leq 2x \\ y + 2x \leq 2 \\ y \geq 0. \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x. \end{cases}$



18 Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 2y - 1 < 0 \\ -3x - 8y + 71 > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x - 2y - 1 > 0 \\ -3x - 8y + 71 > 0 \\ x + y > 0. \end{cases}$

19 Déterminer graphiquement les solutions entières des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + 2y - 8 \leq 0 \\ 5x - y - 21 \geq 0 \\ x - 4y - 8 \leq 0 \\ -3x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x + 2y - 8 \leq 0 \\ 5x - y - 21 \leq 0 \\ x - 4y - 8 \leq 0 \\ -3x + 2y - 6 \leq 0. \end{cases}$

20 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

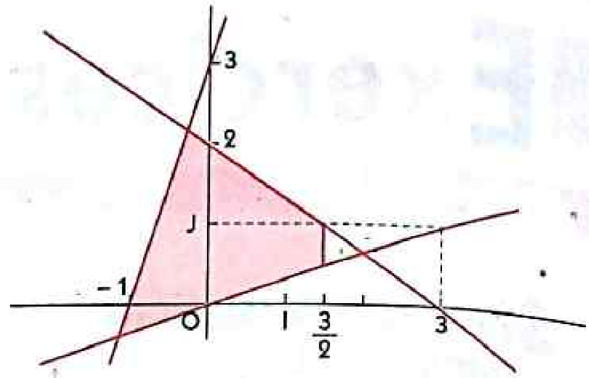
1. On considère les points : $A\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du triangle ABC (bords inclus).

2. On considère les points $A'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B'\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $C'\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D'\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du quadrilatère A'B'C'D' (bords inclus).

3. On considère les points $A''\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $B''\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $C''\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$; $D''\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $E''\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du polygone A"B"C"D"E" (bords exclus).

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du carré de centre O, dont un sommet a pour abscisse 4 et ordonnée 0 (bords exclus).

22 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur (bords inclus) du polygone colorié ci-dessous.



23 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :
$\begin{cases} 5y - 6 \leq 3x + 3y \leq 15 - 2y \\ y \geq 0. \end{cases}$
Représenter graphiquement E.

APPROFONDISSEMENT

24 1. Déterminer les couples (p, q) de nombres entiers relatifs tels que : $pq = 3$.
2. En déduire tous les couples $(x ; y)$ de nombres entiers relatifs tels que : $x^2 - y^2 = 3$.

25 Dans un triangle isocèle, l'angle obtus formé par les bissectrices des deux angles égaux est le triple de l'angle au sommet. Calculer les mesures des angles de ce triangle.

26 1. Déterminer tous les triangles rectangles de périmètre 12 dont un des côtés de l'angle droit a pour mesure 4.
2. Soit a et p des nombres strictement positifs tels que $p > 2a$. Déterminer tous les triangles rectangles de périmètre p dont un des côtés de l'angle droit a pour mesure a.

27 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Représenter l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant :
$\begin{cases} |2x + 3y| \leq 5 \\ |3x - 2y| \leq 5. \end{cases}$

28 Le plan est muni d'un repère repère (O, I, J).
Représenter l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant :
$\begin{cases} \dfrac{x + y + 1}{x - y - 1} \geq 0 \\ 2x - y - 2 = 0. \end{cases}$

29 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
1. Représenter graphiquement les ensembles E_1 et E_2 des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :
$E_1 : xy > 0$; $E_2 : x^2 - y^2 > 0$.
2. En déduire la résolution graphique du système :
$\begin{cases} x^2 - y^2 > 0 \\ xy > 0. \end{cases}$

30 Le plan est muni d'un repère repère (O, I, J).
Représenter l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant :
$\begin{cases} x^2 - (y + 1)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0. \end{cases}$

31 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que :

$|x+y| = |x| + |y|$.

1. Justifier que E n'est pas vide.

2. Démontrer que :

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow |xy| = xy.$$

3. Représenter graphiquement E.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $|x| + |y| = 1$.

1. Les points $A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à E ?

2. Déterminer les points d'intersection de E avec chacune des droites (OI) et (OJ).

3. Démontrer que (OI) et (OJ) sont des axes de symétrie pour E.

4. Représenter graphiquement l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} x+y=1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

En déduire la représentation graphique de E.

5. Représenter graphiquement l'ensemble F des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $|x| + |y| \leq 1$.

33 Un imprimeur achète auprès d'un grossiste 15 bidons d'encre et 20 cartons de feuilles de papier vélin. À la réception, une partie de la facture est illisible. Voici ce que le comptable a pu déchiffrer *(un point d'interrogation a été mis à la place des nombres illisibles)* :

Articles	Quantités	Prix unitaire H.T.	Prix H.T.
encre noire	10	40 900 F	?
encre rouge	2	63 900 F	?
encre bleue	1	51 900 F	?
encre jaune	2	72 900 F	?
carton de vélin 80g	?	24 000 F	?
carton de vélin extra	?	32 000 F	?
		Total H.T. :	1 310 500 F
		T.V.A. :	?
		Total T.T.C. :	1 572 600 F

Pouvez-vous aider le comptable à reconstituer la facture ?
Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée ?

34 Une statuette en bronze a une masse de 1,7 kg pour un volume de 200 cm^3. Le bronze est un alliage de cuivre, de masse volumique 8,9 g/cm^3 et d'étain, de masse volumique 7,3 g/cm^3.

1. Quels sont, en pourcentages de volume, les proportions de cuivre et d'étain dans la statuette ?

2. Déterminer la masse de cuivre et la masse d'étain que contient la statuette.

35 Un laboratoire dispose de deux cuves d'acide chlorhydrique, l'une où il est concentré à 10^{-2} mol/l et l'autre où il est concentré à 10^{-4} mol/l.

Alors qu'il n'a plus d'eau distillée, un laborantin doit préparer un bidon de 20 l d'acide chlorhydrique concentré à $3{,}07 \times 10^{-3}$ mol/l.

Quelle quantité devra-t-il prélever dans chacune des cuves ?

36 Deux villages A et B sont distants de 18 km et reliés par une piste rectiligne. Quarante cinq minutes après son départ de A, un marcheur se dirigeant vers B croise un autre marcheur parti de B et se dirigeant vers A. Ils conviennent qu'ils feront battre le tam-tam lorsqu'ils arriveront à destination. On entend le tam-tam du village A une heure et quart après leur rencontre et celui du village B quinze minutes après celui de A. Calculer la vitesse moyenne de chacun des marcheurs.

37 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. On considère l'application du plan dans lui-même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 5 \\ y' = x - y + 3. \end{cases}$

a) Trouver l'image de O.

b) Trouver le ou les points, s'ils existent, qui ont O pour image.

c) Démontrer que l'application est une bijection.

2. On considère l'application f du plan dans lui-même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels tels que : $ab' - a'b \neq 0$.

Quelle est l'image de O ? Démontrer que f est une bijection.

38 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère l'application du plan dans lui-même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = 9x + 3y - 5 \\ y' = 12x + 4y + 3. \end{cases}$

1. Trouver l'image de O.

2. Le point O est-il l'image d'un point du plan ?

3. Trouver le ou les points, s'ils existent, qui ont pour image le point $A\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$.

4. Démontrer que les images de tous les points du plan appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$$4x - 3y + 29 = 0.$$

5. Démontrer que tout point M_0 de $(\mathcal{D})$ est l'image de tous les points d'une droite $(\mathcal{D}_0)$ que l'on déterminera en fonction de M_0.

39 J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera 154. Quels sont nos âges aujourd'hui ?

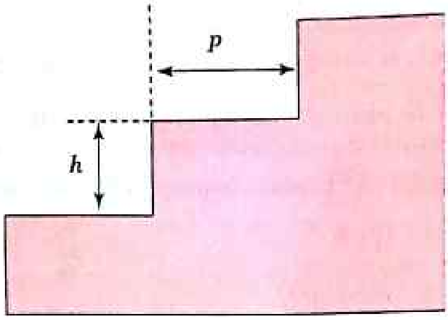
40 Soit s et d deux nombres entiers naturels. On cherche à déterminer un nombre entier naturel de deux chiffres tel que la somme de ses chiffres soit s et tel qu'en permutant les deux chiffres le nombre augmente de d.

1. Démontrer que, pour que le problème ait une solution, il faut que : $1 \leq s \leq 18$ et $9 \leq d \leq 72$.

2. Démontrer que, pour que le problème ait une solution, il faut que d soit un multiple de 9 et que s et d soient de même parité.

3. Les quatre conditions trouvées aux questions **1.** et **2.** sont-elles suffisantes pour que le problème ait une solution ?

41 Pour un bon confort (et une bonne esthétique), on respecte généralement, dans la construction d'un escalier, les règles suivantes : $2h + p = 64$ et $h \leq 25$, où h et p désignent, en cm, respectivement la hauteur et la profondeur d'une marche.



Dans une cour, on dispose d'un espace permettant de construire un escalier pour accéder à l'étage. La profondeur totale (somme des profondeurs des marches) disponible est au maximum de 1,60 m.
À quelle hauteur maximale l'escalier peut-il monter en respectant les normes fixées ?
(On pourra préalablement déterminer le nombre maximum de marches de l'escalier projeté).

42 Au marché, Mme Koné achète dix ananas, deux mangues, huit bananes et paye 1 400 F ; Mme Kouassi achète quatre ananas, quatre mangues, six bananes et paye 900 F ; Mme Touré achète deux ananas, dix mangues et dix bananes.

1. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels a et b tels que : $\begin{cases} 10a + 4b = 2 \\ 2a + 4b = 10 \\ 8a + 6b = 10. \end{cases}$

2. En déduire combien payera Mme Touré, sachant que le prix unitaire de chaque type de fruit est le même pour les trois dames.

43 *L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur de sin 15°.*
Soit A et B deux points du plan tels que AB = 4. On construit un point C tel que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ mesurent respectivement 45° et 120°.
1. En utilisant le théorème des sinus, exprimer sin 15° en fonction de AC.
2. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On pose $x = AC$ et $y = HC$.
3. Déterminer un système de deux équations vérifié par le couple $(x ; y)$.
4. Calculer x. En déduire la valeur de sin 15°.

44 Un artisan sculpteur produit des objets A et des objets B. La confection d'un objet A nécessite 6 000 F de matières premières, coûte 25 000 F de main-d'œuvre et sa vente génère un bénéfice de 10 800 F. La fabrication d'un objet B nécessite 14 000 F de matières premières, coûte 15 000 F de main-d'œuvre et sa vente génère un bénéfice de 9 000 F. Chaque jour, l'artisan limite ses frais d'investissement à 250 000 F pour la main-d'œuvre et à 112 000 F pour les matières premières.
On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués en une journée.
1. Exprimer, en fonction de x et y, la dépense journalière pour la main-d'œuvre et la dépense journalière pour les matières premières.
2. $(x ; y)$ représentant les coordonnées d'un point M, déterminer graphiquement l'ensemble des points du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'artisan.
3. Exprimer, en fonction de x et y, le bénéfice journalier g réalisé, puis déterminer la production journalière pour laquelle g est maximal.

45 Un marchand de glaces vend des glaces en cornets à une ou deux boules. Chaque jour il dispose de 60 cornets de chaque sorte. Il vend au plus 100 cornets par jour et il dispose d'une quantité de crème glacée lui permettant de faire 150 boules. Le bénéfice réalisé est de 100 F pour un cornet à une boule et de 250 F pour un cornet à deux boules. Déterminer le bénéfice maximum qu'il peut espérer réaliser en un jour.

46 Dans un zoo, on nourrit les animaux en leur fournissant un minimum quotidien de 120 kg de glucides, 90 kg de protides et 60 kg de lipides. Il existe deux aliments préparés, A et B, dont les teneurs en glucides, protides, lipides sont indiqués ci-dessous pour un sac :

	Glucides	Protides	Lipides
A	3 kg	3 kg	1 kg
B	2 kg	1 kg	2 kg

Un sac du produit A coûte 5 000 F et un sac du produit B coûte 2 500 F. Combien de sacs de chaque catégorie faut-il utiliser chaque jour pour nourrir les animaux au moindre coût ?
Quelle sera alors la dépense quotidienne ?

47 Un confiseur fabrique et ensache un mélange de bonbons et de caramels. Le nombre de bonbons est supérieur ou égal à la moitié du nombre de caramels, mais inférieur ou égal au double de ce nombre. Un sachet contient au plus 30 friandises. Quel est le contenu du sachet donnant un bénéfice maximal :
1. si le bénéfice est de 30 F par bonbon et de 15 F par caramel ?
2. si le bénéfice est de 15 F par bonbon et de 25 F par caramel ?
3. si le bénéfice est le même (20 F) pour un bonbon et pour un caramel ?
Dans chaque cas, calculer le bénéfice réalisé.
(On pourra représenter la situation à l'aide d'un système d'axes dans lequel 1 cm représente deux caramels en abscisse et deux bonbons en ordonnée).

14 Statistiques

À l'origine, la statistique permettait de recueillir et de décrire des données numériques concernant des états ou des sociétés humaines. Un exemple nous est donné par l'Égypte ancienne où le Pharaon exigeait de ses sujets la déclaration de leurs noms, professions et moyens de subsistance afin de mieux les contrôler. D'autres exemples sont relatés en Chine des millénaires avant Jésus-Christ.

La statistique était essentiellement descriptive à cette époque. Ce n'est qu'à partir du XVI^e siècle qu'elle a évolué vers l'analyse des données, essentiellement grâce à l'astronomie : la position d'un objet céleste s'établit à partir d'une série d'observations. On verra alors apparaître successivement les paramètres de position, puis de dispersion.

Photo D.R.

Pendant le Marathon de Yaoundé (Cameroun).

SOMMAIRE

1 Organisation des données

La statistique, telle qu'elle a été étudiée dans les classes précédentes, consiste, dans un premier temps, à recueillir des données concernant un caractère commun à tous les individus d'une population. On procède ensuite à la mise en ordre des données : à chaque modalité (« valeur » non nécessairement numérique prise par le caractère), on fait correspondre son effectif, c'est à dire le nombre d'individus relatif à cette modalité. On obtient ainsi une série statistique.

1.1. Exemples

Caractère qualitatif (1)

La bibliothèque d'un lycée contient dans ses rayons 2 000 livres, ainsi répertoriés :

Genre	manuel scolaire	roman	poésie	document
Effectif	700	800	100	400

La population étudiée est l'ensemble des ouvrages de la bibliothèque. Le caractère (genre de l'ouvrage) prend quatre modalités non numériques. Il est dit qualitatif.

Caractère quantitatif (2)

Une enquête portant sur le nombre d'enfants dans chacun des 50 foyers d'un village a donné :

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2

L'effectif total est 50. Les modalités sont des nombres. Ce caractère est dit quantitatif.

Caractère quantitatif à modalités regroupées en classes (3)

À l'issue des épreuves écrites d'un examen, le jury répartit, en fonction de la note (sur 20) obtenue, les candidats en six catégories : refusés, admissibles, admis mention passable, admis mention assez bien, admis mention bien, admis mention très bien. Ces données sont organisées dans le tableau ci-dessous :

Note obtenue	[0 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 20]
Effectif	504	518	854	336	140	28

Le caractère étudié est la note obtenue par les candidats. Les modalités sont regroupées en classes, chaque classe correspondant à une catégorie (refusés, admissibles, etc.). Ici les classes ne sont pas d'amplitudes égales : les classes [0 ; 8[, [8 ; 10[et [16 ; 20] ont pour amplitudes respectives 8, 2 et 4.

1.2. Notations

Notation indicielle

Soit un ensemble à p éléments. On peut convenir par commodité de les numéroter de 1 à p. Le premier sera noté x_1, le deuxième x_2, ainsi de suite jusqu'au dernier noté x_p.
Avec cette convention, l'ensemble sera noté $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, les points de suspension représentant les éléments non écrits. Pour tout nombre entier i compris entre 1 et p, le $i^{\text{ème}}$ élément est noté x_i.

- Les nombres 1, 2, ..., i, ..., p sont appelés indices ;
- x_i se lit « x indice i » ou simplement « x, i ».

Exemple

Reprenons la série statistique donnant le nombre d'enfants dans les foyers d'un village (§ 1.1).
Cette série comporte 9 modalités rangées, selon l'usage, par ordre croissant. Notons les de x_1 à x_9. Par exemple, $x_1 = 0$, $x_8 = 9$.
Par convention, leurs effectifs seront notés de n_1 à n_9. Ainsi, $n_1 = 2$, $n_8 = 4$.
En abrégé, la série statistique ci-dessus peut être notée $(x_i\,;\,n_i)_{1 \leq i \leq 9}$.
D'une manière générale, une série statistique dont le caractère prend p modalités sera notée $(x_i\,;\,n_i)_{1 \leq i \leq p}$, n_i étant l'effectif de la modalité x_i.
Si N est l'effectif total de la série, la fréquence de la modalité x_i est le nombre $\frac{n_i}{N}$, noté f_i.
La fréquence f_i appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$. En effet : $0 \leq n_i \leq N \Rightarrow 0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1$.

Notation Σ

Gardons le même exemple. L'effectif total de la série (nombre de foyers dans le village) est :

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_9 = 50.$$

On note cette somme $\sum_{i=1}^{9} n_i$, ce qui se lit : « somme des n_i, pour i variant de 1 à 9 ».

D'une manière générale, p nombres $u_1, u_2, \dots, u_p$ étant donnés, on note :

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Propriétés

Soit p un nombre entier naturel non nul, $u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$, r et a des nombres réels.

On a : (1) $\sum_{i=1}^{p}(u_i + r) = \left(\sum_{i=1}^{p} u_i\right) + pr$; (2) $\sum_{i=1}^{p}(u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i + \sum_{i=1}^{p} v_i$; (3) $\sum_{i=1}^{p} au_i = a\sum_{i=1}^{p} u_i$.

Démonstration

Pour démontrer la première égalité, explicitons la somme du premier membre :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}(u_i + r) &= (u_1 + r) + (u_2 + r) + (u_3 + r) + \dots + (u_p + r)\\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p) + \underbrace{(r + r + r + \dots + r)}_{p \text{ fois}}\\ &= \sum_{i=1}^{p} u_i \qquad\qquad + \qquad\qquad pr\end{aligned}$$

On démontre de façon analogue les égalités (2) et (3).

Exemple

Soit une série statistique $(x_i\,;\,n_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'effectif total N.

La somme des fréquences des différentes modalités de cette série est égale à 1.

En effet : $\sum_{i=1}^{p} f_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i$ [*d'après la propriété* (3)]

$$= \frac{1}{N}N = 1.$$

1.3. Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries statistiques à caractère quantitatif dont les modalités ne sont pas regroupées en classes.

Introduction

Reprenons l'exemple (2) § 1.1. On peut se poser les questions suivantes :
1. Quel est le nombre de foyers ayant 5 ou moins de 5 enfants ?

2. Quel est le nombre de foyers ayant 7 ou plus de 7 enfants ?
3. D'une manière générale, x étant un nombre entier naturel compris entre 0 et 10, quel est le nombre de foyers ayant x ou plus de x enfants ? x ou moins de x enfants ?
Pour répondre à ces questions, on construit le tableau suivant appelé tableau des effectifs cumulés :

Nombre d'enfant(s) : x_i	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif : n_i	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Effectif cumulé croissant	2	5	10	14	25	36	44	48	50
Effectif cumulé décroissant	50	48	45	40	36	25	14	6	2

L'effectif cumulé croissant de la modalité x_k est $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
L'effectif cumulé décroissant de la modalité x_k est $n_k + n_{k+1} + \dots + n_9$.
On peut ainsi lire directement :
- il y a 25 foyers ayant 5 ou moins de 5 enfants ;
- il y a 14 foyers ayant 7 ou plus de 7 enfants.

Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Définitions

Soit $(x_i\,;\,n_i)_{1 \leq i \leq p}$ une série statistique dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- **On appelle effectif cumulé croissant (resp. décroissant) de la modalité x_k la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (resp. supérieures ou égales) à x_k.**
- **On appelle fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) de la modalité x_k le quotient de son effectif cumulé croissant (resp. décroissant) par l'effectif total de la série.**

Donc, en notant N_k (resp. N'_k) l'effectif cumulé croissant (resp. décroissant), F_k (resp. F'_k) la fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) de la modalité x_k et N l'effectif total, on a :

$$N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i \quad ; \quad N'_k = \sum_{i=k}^{p} n_i \quad ; \quad F_k = \frac{N_k}{N} \quad ; \quad F'_k = \frac{N'_k}{N}.$$

Remarques

- *N_k (resp. N'_k) est le nombre d'individus dont la modalité est inférieure ou égale (resp. supérieure ou égale) à x_k.*
- $F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ *et* $F'_k = \sum_{i=k}^{p} f_i$.
- $N_1 = n_1 \;;\; N'_1 = N \;;\; F_1 = f_1 \;;\; F'_1 = 1.$
- *Soit k un nombre entier naturel non nul strictement inférieur à p.*

On a :
$$N_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} n_i = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) + n_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) + n_{k+1}.$$

D'où : $N_{k+1} = N_k + n_{k+1}$.

On démontre de même que : $N'_{k+1} = N'_k - n_k \quad ; \quad F_{k+1} = F_k + f_{k+1} \quad ; \quad F'_{k+1} = F'_k - f_k$.

Ces égalités sont utilisées de proche en proche pour établir les tableaux d'effectifs ou de fréquences cumulés.

Exercices

1.a On a relevé les salaires mensuels, exprimés en milliers de francs CFA, des ouvriers d'un atelier de mécanique :

65	83	53	115	94	51	75	71	102	76	105
81	83	77	58	55	90	64	100	108	68	53
51	75	83	80	95	78	91	79	74	110	77
90	92	84	88	85	64	71				

On regroupe ces données en cinq classes : [50 ; 70[, [70 ; 80[, [80 ; 90[, [90 ; 100[et [100 ; 120[.
Établir le tableau des effectifs et des fréquences.

1.b Dans une classe de seconde, les notes obtenues par les élèves à la dernière composition de mathématiques se répartissent ainsi :

Note	2	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	1	2	3	4	4	7	7	9	5	2	3	2	1

1. Quel est l'effectif total de cette série ?
2. Calculer les fréquences, les fréquences cumulées croissantes et décroissantes (les résultats seront présentés dans le même tableau).
3. Quel est le pourcentage des élèves qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 10 ?

1.c On considère deux suites de nombres : $(u_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq 4}$.

1. Exprimer en fonction de $\sum_{i=1}^{4} u_i$ et de $\sum_{i=1}^{4} v_i$: *a)* $\sum_{i=1}^{4} 2u_i$; *b)* $\sum_{i=1}^{4} (2u_i + 3v_i)$; *c)* $\sum_{i=1}^{4} (2u_i + 3v_i - 5)$.

2. Vérifier les résultats établis à la question précédente dans le cas des données suivantes :
$u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; $u_4 = 9$; $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $v_3 = 4$; $v_4 = 11$.

1.d 1. Relevez la première lettre du nom de famille de chaque élève de votre classe. Quel type de caractère est ainsi étudié ?
2. Regrouper les données obtenues dans un tableau où apparaîtront les modalités, leurs effectifs et leurs fréquences.

2 Graphiques

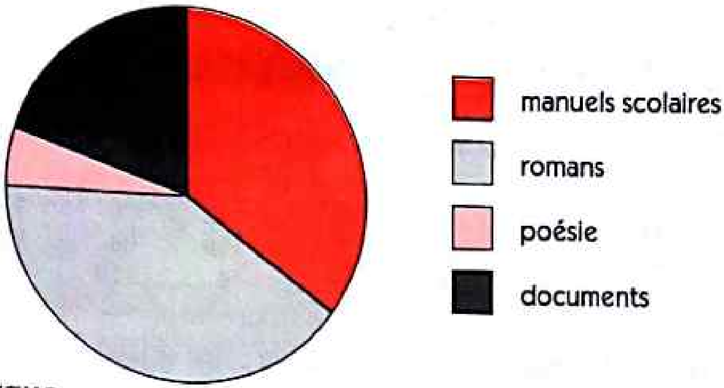
Les informations données par une série statistique peuvent être visualisées par une représentation graphique facilitant leur compréhension.

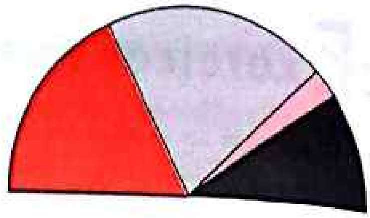
2.1. Diagrammes circulaires - Diagrammes semi-circulaires

Dans un diagramme circulaire ou semi-circulaire, chaque modalité est représentée par un secteur circulaire de mesure, donc d'aire, proportionnelle à son effectif ou à sa fréquence.

Exemple
Reprenons l'exemple (1) § 1.1. Les diagrammes sont construits à l'aide du tableau de proportionnalité :

Genre	manuel scolaire	roman	poésie	document	total
Fréquence	35 %	40 %	5%	20 %	100 %
Mesure du secteur circulaire (diagramme circulaire)	126°	144°	18°	72°	360°
Mesure de l'angle (diagramme semi-circulaire)	63°	72°	9°	36°	180°





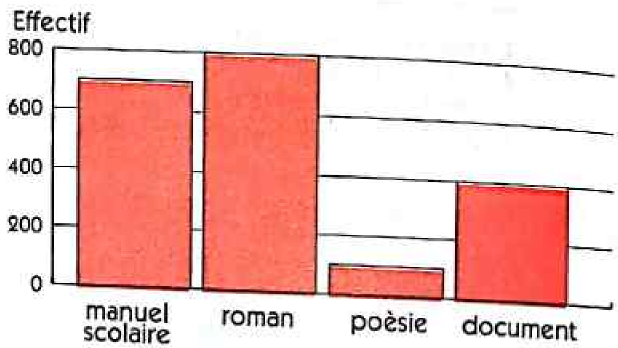
Remarque

N'importe quelle série statistique peut être représentée par de tels diagrammes, pourvu que le nombre de modalités ne soit pas trop élevé. Toutefois, on les utilise plutôt pour des séries à caractère qualitatif.

2.2. Diagrammes à bandes

Gardons le même exemple. Les modalités sont cette fois représentées par des rectangles ayant la même « base » et des « hauteurs » proportionnelles à leurs effectifs (ou fréquences).
Une telle représentation est appelée diagramme à bandes.

Genre	manuel scolaire	roman	poèsie	document
Effectif	700	800	100	400



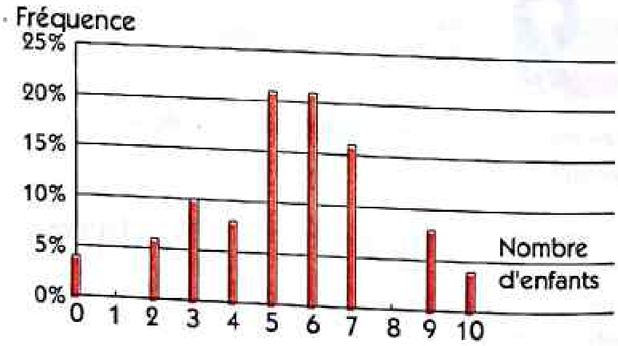
Remarques

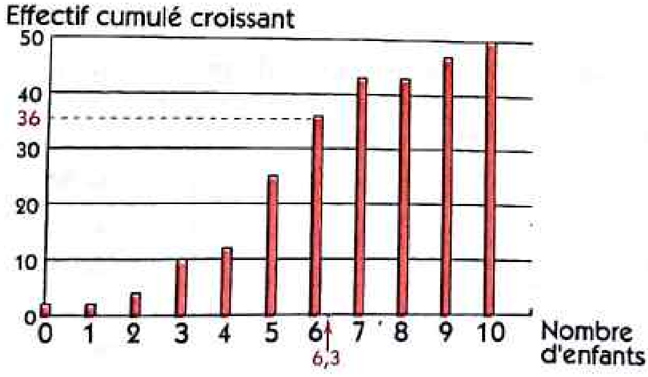
- *Les diagrammes à bandes sont plutôt utilisés pour représenter des séries statistiques à caractère qualitatif.*
- *Les graphiques suivants ne peuvent être dressés que dans le cas de séries statistiques à caractère quantitatif.*

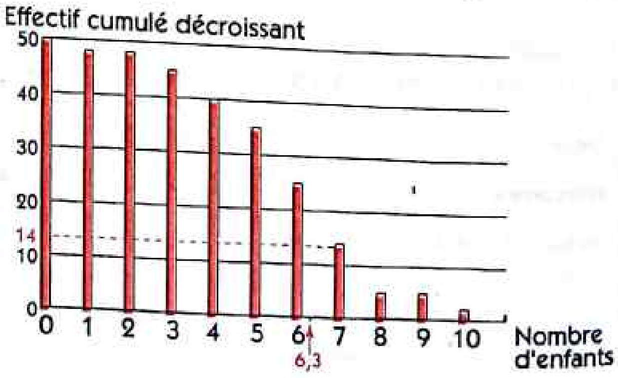
2.3. Diagrammes en bâtons

Pour des données non regroupées en classes, on peut représenter les effectifs ou les fréquences par un diagramme en bâtons comme sur la figure ci-contre (exemple (2) §1.1).
On peut lire sur ce graphique que la plupart des foyers de ce village ont entre 5 et 7 enfants.

Gardons le même exemple. On peut aussi utiliser les diagrammes en bâtons pour représenter les effectifs ou les fréquences cumulés :





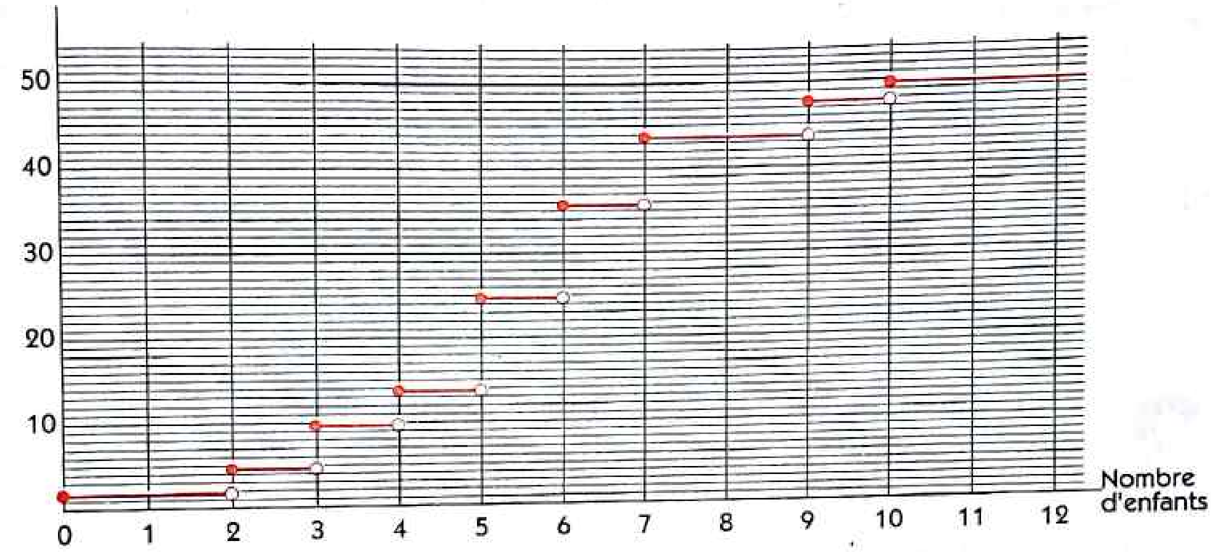


On suppose que le nombre moyen d'enfants par foyer dans ce pays est 6,3.
On lit sur le premier graphique que 36 foyers du village sont en dessous de la moyenne nationale et sur le second que 14 foyers sont au dessus de cette moyenne.

2.4. Diagrammes cumulatifs

On peut représenter les effectifs (ou les fréquences) cumulés croissants par un diagramme cumulatif.
On a représenté ci-dessous les effectifs cumulés relatifs à l'exemple précédent :

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Effectif cumulé croissant	2	5	10	14	25	36	44	48	50



Remarque

Le diagramme des fréquences cumulées croissantes sera le même que celui des effectifs cumulés croissants, seule l'unité sur l'axe des ordonnées change. Sur cet exemple, à l'effectif total (50), on fera correspondre la fréquence 1.

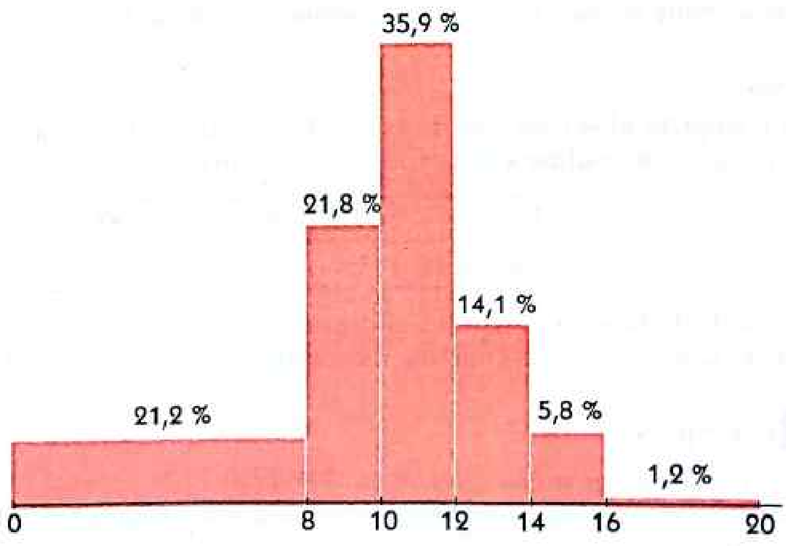
2.5. Histogrammes

Dans le cas d'un caractère quantitatif regroupé en classes, on peut représenter la série par un ensemble de rectangles appelé histogramme.

Chaque rectangle a pour « base » l'amplitude d'une classe et une aire proportionnelle à son effectif (ou à sa fréquence).

Si les classes sont d'amplitudes égales, la « hauteur « de chaque rectangle est donc proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante ; sinon, la présence d'un axe des ordonnées est dépourvue de sens.

On a construit ici l'histogramme relatif aux données de l'exemple (3) §1.1.



D'un point de vue pratique, si on note h_i la « hauteur » du rectangle représentant la $i^{ème}$ classe et a_i son amplitude, l'écriture de la proportionnalité des produits $a_i h_i$ (aires des rectangles) et des effectifs correspondants permet de déterminer toutes les hauteurs, une fois choisie l'une d'entre elles.

Dans notre exemple, il vient : $\frac{8h_1}{504} = \frac{2h_2}{518} = \frac{2h_3}{854} = \frac{2h_4}{336} = \frac{2h_5}{140} = \frac{4h_6}{28}$.

Pour l'histogramme ci-dessus, on a choisi $h_6 = 1$ mm.

Exercices

2.a On donne la population bovine, exprimée en milliers de têtes, dans quatre pays, pour l'année 1996 (d'après ATLASECO 1997).

Pays	Cameroun	Mali	Niger	Tchad
Bovins	5 000	5 500	4 750	4 750

1. Dresser le tableau des fréquences de cette série statistique.
2. Construire le diagramme circulaire relatif à cette série.

2.b On reprend les données de l'exercice 1.b.
1. Construire le diagramme en bâtons des effectifs.
2. Construire le diagramme cumulatif des effectifs.

2.c En reprenant les données de l'exercice 1.a, construire l'histogramme relatif à cette série.

2.d Un test proposé à une classe de 40 élèves comprenait 4 questions. Le tableau ci-dessous indique le nombre (n_i) d'élèves ayant répondu correctement à x_i questions.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	3	8	16	7	6

Sur le même graphique, en utilisant deux couleurs différentes, tracer les diagrammes en bâtons des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

3 Caractéristiques de position

Il arrive que l'on veuille résumer une série statistique par un seul nombre appelé caractéristique de position qui donne une idée sur les valeurs prises par le caractère. Les trois caractéristiques de position les plus utilisées sont le mode, la moyenne et la médiane, ces deux dernières ne concernant que des séries à caractère quantitatif, dont nous supposerons ici les modalités non regroupées en classes.

3.1. Mode

Définition

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal.

Exemple

Une enquête effectuée à la demande d'un fabriquant de chaussures et portant sur les pointures d'une population masculine a donné les résultats suivants :

Pointure	39	40	41	42	43	44	45	46
Fréquence	5%	10%	13%	17%	20%	17%	13%	5%

Le mode de la série statistique ci-dessus est 43, ce que l'on peut exprimer en langage courant en disant que la pointure la plus courante dans cette population est le 43.

Remarques

- *Certaines séries statistiques, comme celle de l'exemple (2) §1.1., admettent plusieurs modes.*
- *Cette caractéristique de position prend toute sa signification si une modalité domine nettement les autres.*

3.2. Moyenne

Définition

Reprenons la série statistique de l'exercice 1.b. Pour calculer la moyenne m des notes obtenues par les élèves, on peut additionner toutes les notes et diviser le total par le nombre d'élèves, soit 50.
Mais il semble plus judicieux d'utiliser le fait que les données ont été organisées : plutôt que d'avoir à additionner, par exemple, neuf nombres 12, il est plus rapide d'effectuer 12×9.

On a : $$m = \frac{(1 \times 2) + (2 \times 5) + (3 \times 7) + (4 \times 8) + (4 \times 9) + (7 \times 10) + (7 \times 11)}{50}$$
$$+ \frac{(9 \times 12) + (5 \times 13) + (2 \times 14) + (3 \times 15) + (2 \times 16) + (1 \times 18)}{50}$$
$$= \frac{544}{50}$$
$$= 10{,}88.$$

Définition

Pour une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)_{1 \leq i \leq p}$, la moyenne est le nombre, noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$

Remarque

La moyenne peut s'exprimer aussi en fonction des modalités et de leur fréquence.

Disposition pratique

Pour calculer la moyenne, on peut dresser le tableau suivant :

x_i	2	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	Total
n_i	1	2	3	4	4	7	7	9	5	2	3	2	1	50
$n_i x_i$	2	10	21	32	36	70	77	108	65	28	45	32	18	544

La moyenne se calcule alors facilement : $\bar{x} = \frac{544}{50} = 10{,}88$.

3.3. Médiane

Introduction

• On relève les âges d'un groupe de 15 personnes et on les range par ordre croissant :

12, 12, 13, 13, 13, 15, 16, $\boxed{16}$, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19.

$\boxed{16}$ est le 8^e^ élément de cette série statistique.
Il y a 7 éléments placés avant $\boxed{16}$ et 7 éléments placés après $\boxed{16}$.
Le nombre réel M = 16 est la valeur médiane (ou la médiane) de la série statistique.
• Une personne, âgée de 18 ans, vient se joindre au groupe précédent. La série, ordonnée, devient :

12, 12, 13, 13, 13, 15, 16, $\boxed{16}$, $\boxed{17}$, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19.

Maintenant, il y a 7 éléments placés avant $\boxed{16}$ et 7 éléments placés après $\boxed{17}$.
On conviendra d'appeler médiane de cette série statistique tout nombre réel M de l'intervalle [16 ; 17].
L'intervalle [16 ; 17] est appelé intervalle médian de la série statistique.

Définition et détermination pratique

Définition

On appelle médiane d'une série statistique d'effectif total N tout nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure ou égale à M et le nombre d'individus de modalité inférieure ou égale à M soient tous deux au moins égaux à $\frac{N}{2}$.

Remarques

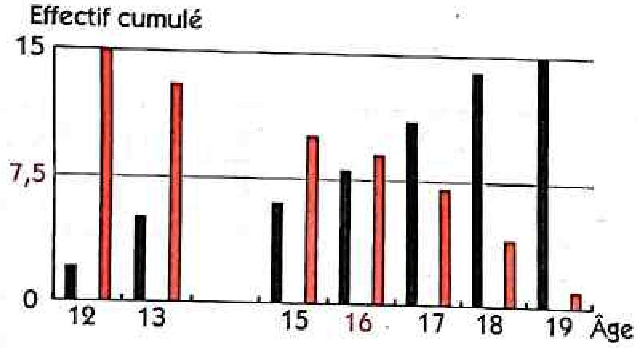
- *Il existe d'autres définitions, plus restrictives, de la médiane. Toutes mettent en évidence la notion intuitive de partage d'une population en deux groupes de même effectif.*
- *Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série.*
- *Une médiane peut être un nombre réel unique ou tout nombre d'un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$.*

Exemples

Pour la détermination pratique de la médiane (ou de l'intervalle médian), on peut utiliser les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants.
Reprenons les données des deux exemples de l'introduction.

- *1^er exemple :*

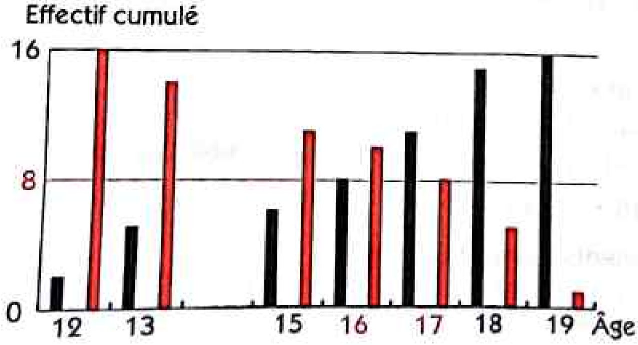
Âge	12	13	15	16	17	18	19
Effectif	2	3	1	2	3	3	1
Effectif cumulé croissant	2	5	6	8	11	14	15
Effectif cumulé décroissant	15	13	10	9	7	4	1



Dans ce cas, seule la modalité 16 a un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = 7{,}5$.
Donc la médiane est 16.

- *2^e exemple :*

Âge	12	13	15	16	17	18	19
Effectif	2	3	1	2	3	4	1
Effectif cumulé croissant	2	5	6	8	11	15	16
Effectif cumulé décroissant	16	14	11	10	8	5	1



Dans ce cas, les modalités 16 et 17 ont un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = 8$.
Donc tout nombre réel M de l'intervalle [16 ; 17] est une médiane de la série.

Exercices

3.a On considère la série suivante de notes obtenues lors d'un devoir dans une classe de 50 élèves :

Note	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	1	2	2	4	5	7	7	9	5	2	3	2	1

1. Quel est le mode de cette série statistique ?
2. Construire le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Déterminer la moyenne de cette série.
4. Représenter les effectifs cumulés croissants et décroissants par un diagramme en bâtons.
En déduire la médiane de cette série.

3.b Les pointures d'un stock de 500 chaussures sont ainsi réparties :

Pointure	40	41	42	43	44	45	46	47
Effectif	30	10	10	200	20	200	20	10

1. Quels sont les modes de cette série statistique ?
2. Construire le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants. En déduire une médiane de cette série.
3. Déterminer la moyenne de cette série.

4 Caractéristiques de dispersion

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries statistiques à caractère quantitatif dont les modalités ne sont pas regroupées en classes.
La moyenne est une caractéristique de position ; elle n'apporte aucune information sur la répartition des individus autour d'elle : on ne sait pas s'ils sont plutôt proches ou plutôt éloignés d'elle. Une caractéristique de dispersion est un nombre qui permet de rendre compte de cette situation, ce nombre peut être considéré en un certain sens comme « l'éloignement moyen » des individus de la moyenne. En attribuant différents sens mathématiques au terme « éloignement moyen » on obtiendra différentes caractéristiques de dispersion. Nous ne définirons ici que trois caractéristiques de dispersion : l'écart moyen, la variance et l'écart type.

4.1. Écart moyen

Les notes en mathématiques de deux élèves A et B sont consignées dans les tableaux suivants :

Élève A

Note	8	9	12	13
Effectif	2	3	2	1

Élève B

Note	8	9	10	11	12
Effectif	1	1	4	1	1

Ces deux élèves ont la même moyenne 10. Mais un examen de la distribution des notes montre des différences sur leur régularité.
Pour faire ressortir cet aspect, on peut calculer la distance moyenne entre les notes et la moyenne .

- Pour l'élève A : $e_A = \dfrac{2|8-10| + 3|9-10| + 2|12-10| + |13-10|}{8} = 1{,}75.$
- Pour l'élève B : $e_B = \dfrac{|8-10| + |9-10| + 4|10-10| + |11-10| + |12-10|}{8} = 0{,}625.$

Ainsi $e_B < e_A$. Les notes de l'élève B sont moins dispersées que celles de l'élève A : l'élève B est plus régulier que l'élève A.
Les nombres réels e_A et e_B sont appelés écarts moyens.

Définition

Soit une série statistique $(x_i\,;\,n_i)_{1 \le i \le p}$ de moyenne $\bar{x}$. L'écart moyen est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + n_p|x_p - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{p} n_i}.$$

4.2 Variance - Écart type

Définitions

On peut également calculer la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. On obtient :

- Pour l'élève A : $V_A = \dfrac{2(8-10)^2 + 3(9-10)^2 + 2(12-10)^2 + (13-10)^2}{8} = 3{,}5.$
- Pour l'élève B : $V_B = \dfrac{(8-10)^2 + (9-10)^2 + 4(10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2}{8} = 1{,}25.$

Le nombre réel V_A (resp. V_B) est appelé variance de la série des notes de l'élève A (resp. B).
On utilise beaucoup la racine carrée de la variance, appelée écart type.
Dans notre exemple, les écarts types sont les nombres σ_A et σ_B définis par :

$$\sigma_A = \sqrt{V_A} \approx 1{,}87 \quad \text{et} \quad \sigma_B = \sqrt{V_B} \approx 1{,}12.$$

Définition

Soit une série statistique $(x_i\,;\,n_i)_{1 \le i \le p}$ de moyenne $\bar{x}$.

- **La variance est le nombre réel V défini par :**

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}.$$

- **L'écart type est le nombre réel positif σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.**

Formule de König

Propriété

Soit une série statistique $(x_i\,;\,n_i)_{1 \le i \le p}$ de moyenne $\bar{x}$, d'effectif N et de variance V.

$$\text{On a :} \quad V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2.$$

Démonstration

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{n_1(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + n_2(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + n_p(x_p^2 - 2x_p\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$$

$$= \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} - 2\bar{x} \,.\, \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N} + \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_p}{N} \,.\, \bar{x}^2$$

$$V = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$
$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2.$$

Remarque

On peut retenir cette formule en se rappelant la phrase suivante :
« la variance est la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne ».

Exemple

On utilise cette formule pour calculer la variance et l'écart type d'une série statistique en disposant un tableau de la façon suivante :

x_i	8	9	12	13	Total
n_i	2	3	2	1	8
$n_i x_i$	16	27	24	13	80
$n_i x_i^2$	128	243	288	169	828

Par conséquent, la variance est :

$$\frac{828}{8} - \left(\frac{80}{8}\right)^2 = 103{,}5 - 100 = 3{,}5.$$

Les calculatrices possèdent en général un mode statistique 1 et un mode statistique 2. En seconde, on n'aura à utiliser que le premier.

Il donne la possibilité de rentrer les données rapidement en tapant chaque valeur du caractère avec son effectif. On utilise pour cela une touche nommée, en général, DATA. Pour plus de détails sur la façon de procéder, se reporter au mode d'emploi spécifique à chaque calculatrice, sans oublier de regarder par la même occasion comment on peut corriger une donnée lorsqu'on s'est trompé. Les erreurs sont fréquentes surtout lorsque le nombre de données est important. Et il serait alors particulièrement ennuyeux d'avoir à tout recommencer.

Une fois les données rentrées, éventuellement corrigées, vous disposerez, en général, d'un certain nombre de touches vous donnant :

– l'effectif total : $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$;

– la moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$;

– l'écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}$;

– la somme des carrés des modalités : $\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2$.

Exemple

x_i	1,55	1,60	1,63	1,65	1,68	1,70	1,74	1,81	1,84	1,88
n_i	7	8	8	10	7	20	18	11	8	3

$N = 100$; $\bar{x} = 1{,}705\,4$; $\sigma \approx 0{,}084\,7$; $\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 = 291{,}556\,4$.

On peut vérifier la formule : $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 2{,}915\,564 - (1{,}705\,4)^2 = 0{,}007\,174\,8.$

4.3. Travaux dirigés

1. Deux usines A et B d'un même groupe industriel produisent des ampoules de 60 W et de 75 W . Des tests de qualité sont menés dans chacune des usines. Les résultats obtenus sont reportés dans les tableaux suivants :

60 W	A	B	Total
ampoules testées	7 000	3 000	
ampoules défectueuses	30	10	
taux de fiabilité			

75 W	A	B	Total
ampoules testées	6 000	11 000	
ampoules défectueuses	40	70	
taux de fiabilité			

1°) *a)* Compléter les tableaux ci-dessus.

***b)* D'après ces tableaux, laquelle des deux usines semble avoir la production de meilleure qualité ?**

2°) *a)* On garde les mêmes données mais on ne distingue plus les ampoules suivant leurs puissances. Compléter le tableau ci-contre.

***b)* D'après ce tableau, laquelle des deux usines semble avoir la production de meilleure qualité ?**

3°) Conclure.

	A	B	Total
ampoules testées	13 000		
ampoules défectueuses			
taux de fiabilité			

Solution

1°) *a)*

60 W	A	B	Total
ampoules testées	7 000	3 000	10 000
ampoules défectueuses	30	10	40
taux de fiabilité	99,57%	99,67%	99,6%

75 W	A	B	Total
ampoules testées	6 000	11 000	17 000
ampoules défectueuses	40	70	110
taux de fiabilité	99,33%	99,36%	99,35%

b) Sur chaque type d'ampoule, l'usine B obtient un meilleur taux de fiabilité que l'usine A. Il semble qu'elle ait une production de meilleure qualité que l'usine A.

2°) *a)*

	A	B	Total
ampoules testées	13 000	14 000	27 000
ampoules défectueuses	70	80	150
taux de fiabilité	99,46%	99,42%	99,44%

b) Sur la totalité des ampoules testées, l'usine A obtient un meilleur taux de fiabilité que l'usine B. Il semble qu'elle ait une production de meilleure qualité que l'usine B.

3°) En analysant de deux façons différentes des données statistiques, on peut parfois en tirer des conclusions contradictoires.

2. 1°) Suite à une enquête portant sur un caractère quantitatif d'une population d'effectif total N, on a obtenu une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$ dont la moyenne est notée $\overline{x_N}$. A cette population, on ajoute un nouvel individu dont le caractère prend la modalité x'_1. On obtient ainsi une nouvelle série statistique d'effectif total N + 1, dont on note la moyenne $\overline{x_{N+1}}$.

Démontrer que : $\overline{x_{N+1}} = \dfrac{N\,\overline{x_N} + x'_1}{N+1}$ (1).

Application : Le professeur de mathématiques de la classe de seconde C1 a réparti les notes obtenues par 44 élèves de la classe lors du dernier devoir dans le tableau :

Note	3	5	7	9	10	11	12	13	15	17	18
Effectif	3	4	2	5	5	8	5	6	3	1	2

Il a calculé la moyenne de la série : 10,5. Or il y a en fait 45 élèves dans la classe, mais l'un d'entre eux a rendu sa copie en retard. Il obtient finalement la note 6. Calculer la moyenne des notes des 45 élèves.

2°) On effectue maintenant deux enquêtes étudiant le même caractère quantitatif sur deux populations disjointes d'effectifs totaux respectifs N_1 et N_2.
On obtient ainsi deux séries statistiques de moyennes respectives $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$. On regroupe les deux séries en une seule d'effectif total $N = N_1 + N_2$ et de moyenne $\overline{x_N}$.

Démontrer que : $\overline{x_N} = \dfrac{N_1 \overline{x_1} + N_2 \overline{x_2}}{N_1 + N_2}$ (2).

Application : le professeur de la classe de seconde C1 (question 1° b) est également en charge de la classe de seconde C3 qui comporte 40 élèves. Au même devoir, les notes obtenues par ces derniers sont réparties dans le tableau :

Note	4	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18
Effectif	2	2	1	3	3	8	4	5	5	4	3

La moyenne des notes de cette classe est 11,25. Calculer directement la moyenne de l'ensemble des deux classes (y compris le retardataire de la seconde C1), puis vérifier le résultat obtenu en regroupant les deux séries en une seule.

Solution guidée

Les égalités (1) et (2) se démontrent de la même manière, en remarquant que, pour une série statistique $(x_i \,;\, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'effectif total N, si on note S la somme $\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$, S est la somme des valeurs du caractère prises par tous les individus, et on a : $\bar{x} = \dfrac{S}{N}$ et donc $S = N\bar{x}$.

1°) Établir que la somme des valeurs du caractère prises par les N + 1 individus est égale à $N\overline{x_N} + x_1'$. Conclure.

Application : la moyenne des 45 élèves est $\dfrac{44 \times 10{,}5 + 6}{45} = 10{,}4$.

2°) Établir que la somme des valeurs du caractère prises par les $N_1 + N_2$ individus est égale à $N_1 \overline{x_1} + N_2 \overline{x_2}$. Conclure.

Application : la moyenne des notes des deux classes est $\dfrac{45 \times 10{,}4 + 40 \times 11{,}25}{85} = 10{,}8$.

Remarques

- *L'égalité (1) est un cas particulier de l'égalité (2). Elle correspond au cas où l'une des deux séries initiales de la question 2. a un effectif total égal à 1.*
- *L'utilisation de la notation Σ serait ici délicate car certaines modalités peuvent apparaître dans les deux séries ou seulement dans l'une des deux.*

Exercices

4.a On relève les âges d'un groupe de 15 personnes (exemple d'introduction du § 3.3).
1. Calculer la moyenne de la série et compléter le tableau ci-dessous.
2. Déterminer l'écart moyen et l'écart type de cette série.

Âge (x_i)	12	13	15	16	17	18	19	Total
Effectif (n_i)	2	3	1	2	3	3	1	
$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$								
$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$								
x_i^2								
$n_i x_i^2$								

4.b On reprend les données de l'exemple (2) §1.1.
Déterminer de deux manières différentes l'écart type de cette série.

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2

Exercices

APPRENTISSAGE

Notation Σ

1 On considère le tableau suivant :

i	1	2	3	4	Total
u_i	2	3	5	6	
v_i	-1	4	-2	-7	
u_i^2					
v_i^2					
$u_i\, v_i$					
$(u_i + v_i)^2$					

1. Compléter le tableau.

2. Comparer $\left(\sum_{i=1}^{4} u_i\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{4} u_i^2$, puis $\left(\sum_{i=1}^{4} v_i\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{4} v_i^2$.

3. *a)* Exprimer $\sum_{i=1}^{4}(u_i + v_i)^2$ en fonction de $\sum_{i=1}^{4} u_i^2$, de $\sum_{i=1}^{4} v_i^2$ et de $\sum_{i=1}^{4} u_i \times v_i$.

b) Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableau.

2 Reprendre, sans expliciter les sommes notées à l'aide du symbole Σ, la rédaction de la démonstration de la formule de Kœnig (§4.2) en partant de la définition de l'écart type :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{x})^2}{N}.$$

Représentations graphiques

3 *« Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !*
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages. »

Ce « poème » a été utilisé par des générations de lycéens pour retrouver les trente premières décimales du nombre π en comptant les lettres des mots qui le composent. On s'intéressera ici à la population des voyelles de ce texte.

1. Déterminer les effectifs des cinq modalités : « a », « e », « i », « o » et « u ».

2. Représenter la série statistique obtenue par un diagramme circulaire.

4 On a relevé la taille (en mètre) de 50 individus. Les résultats obtenus sont les suivants :

1,71	1,72	1,82	1,57	1,75	1,78
1,96	1,67	1,63	1,72	1,67	1,73
1,77	1,69	1,78	1,71	1,82	1,62
1,74	1,69	1,7	1,79	1,65	1,75
1,7	1,84	1,64	1,73	1,68	1,74
1,78	1,68	1,79	1,74	1,6	1,73
1,72	1,79	1,74	1,75	1,68	1,74
1,69	1,73	1,64	1,74	1,67	1,72
1,63	1,75.				

1. Regrouper les données dans un tableau suivant les classes [1,5 ; 1,6[; [1,6 ; 1,65[; [1,65 ; 1,7[; [1,7 ; 1,75[; [1,75 ; 1,8[; [1,8 ; 1,9[; [1,9 ; 2].

2. Construire l'histogramme correspondant (une classe d'amplitude 0,1 sera représentée par un rectangle de base 3 cm et le rectangle représentant la classe [1,65 ; 1,7[aura une hauteur de 2 cm).

5 Le tableau ci-dessous recense les têtes de bétail (bovins et ovins) dans huit pays :

	Bovins (× 1 000)	Fréquence	Ovins (× 1 000)	Fréquence (%)
Bénin	1 250			3,35
Burkina	4 250			19,85
Cameroun	5 000			13,7
Guinée	1 750			1,6
Mali	5 500			18,6
Niger	4 750			18,75
Sénégal	2 750			16,6
Tchad	4 750			7,55
TOTAL			28 000	

1. Compléter le tableau (on arrondira les fréquences à 10^{-3} près).

2. Dessiner un diagramme circulaire représentant la répartition de la population de bovins de ces huit pays.

3. Représenter par un diagramme à bandes les effectifs de la population ovine de ces huit pays.

6 Une série de tests sur la durée de vie (en années) de composants électroniques a donné les résultats suivants :

Durée	[0 ; 1,5[	[1,5 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[
Effectif	13	37	37	54

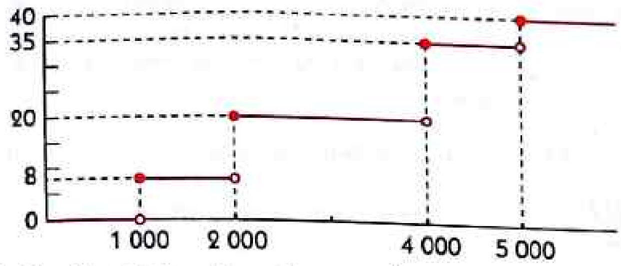
Durée	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[
Effectif	80	?	53	42

Durée	[5,5 ; 6[	[6 ; 6,5[	[6,5 ; 7,5[	[7,5 ; 9[
Effectif	32	23	33	26

1. La fréquence de la classe [4 ; 4,5[est 0,14. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?

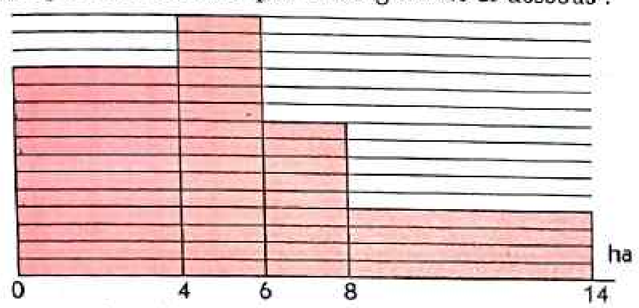
2. Construire un histogramme de cette série.

7 Soit une série statistique représentée par le diagramme cumulatif suivant :



1. Quelle est la nature du caractère étudié et quelles sont ses modalités ?
2. Dresser le tableau des effectifs et des fréquences de cette série.

8 Un enquêteur a relevé les superficies des 60 exploitations agricoles d'un village, puis a regroupé ces données en quatre classes : moins de 4 ha, de 4 à 6 ha, de 6 à 8 ha et de 8 à 14 ha. Il a représenté la série statistique ainsi obtenue par l'histogramme ci-dessous :



Dresser le tableau des effectifs et des fréquences de cette série.

Caractéristiques de position

9 Relever l'âge et la taille de chaque élève de la classe.
1. Dresser le tableau des effectifs et des fréquences pour le caractère « âge ». Déterminer le mode et calculer l'âge moyen des élèves.
2. Après avoir regroupé les tailles en classes d'amplitude de 5 cm, dresser le tableau des effectifs correspondant à ces classes et construire l'histogramme de cette série statistique.

10 On a relevé, dans le tableau suivant, la première lettre du nom de famille d'un groupe d'individus :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	27	18	14	3	7	17	8	0

J	K	L	M	N	O	P	Q	R
3	4	17	16	6	2	11	0	12

S	T	U	V	W	X	Y	Z
5	8	0	8	3	0	0	1

1. Quel est le mode de la série ?
2. Calculer la fréquence de l'ensemble des individus dont le nom commence :

a) par une voyelle ;
b) par une des cinq premières lettres de l'alphabet ;
c) par une des cinq dernières lettres de l'alphabet.

11 Pendant un mois (30 jours), un client pointilleux a pesé chaque jour, à un demi-gramme près, les quatre baguettes de pain que lui livre son boulanger.

Il a inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Masse	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
140	24		
140,5	20		
141	16		
141,5	14		
142	13		
142,5	10		
143	9		
143,5	7		
144	3		
144,5	2		
145	2		

1. Compléter le tableau.
2. Calculer la moyenne de cette série statistique. En déduire la quantité moyenne de pain (en grammes) achetée chaque jour par ce client.
3. Représenter les effectifs cumulés croissants et décroissants par un diagramme en bâtons et en déduire la médiane (ou un intervalle médian) de cette série.

12 Dans le but d'équiper le laboratoire de son établissement, l'intendant achète des calculatrices dont les prix varient de 1 000 à 4 500 Francs .

1. Compléter le tableau suivant :

Prix (en F)	Effectif	Effectif cumulé	Fréquence	Fréq. cum. croissante
1 000		1		
1 500		6		
2 000		23		
2 500		38		
3 000		49		
3 500		57		
4 000		62		
4 500		64		
Total			1	

2. Quelle est la fréquence des calculatrices achetées au prix de 3 500 F ? Quelle est la fréquence des calculatrices dont le prix est supérieur ou égal à 2 000 F ? à 3 000 F ?
3. Calculer le coût total de cet achat et le prix moyen d'une calculatrice.

13 La moyenne des notes de Français d'un élève à l'issue des neuf premiers devoirs est 11,75 sur 20.
Quelle meilleure moyenne peut-il espérer obtenir après un dixième et dernier devoir ?
Sa moyenne peut-elle être inférieure à 10 à l'issue de ce dernier devoir ?

14 La moyenne des notes d'un élève en Mathématiques est actuellement de 12,5 sur 20. Avec une note de 16 sur 20 au prochain contrôle, cette moyenne passerait à 13.
Quel est le nombre de contrôles effectués à ce jour ?

Caractéristiques de dispersion

15 On lance deux dés 60 fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus.
On obtient le tableau suivant :

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

1. Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.
2. Construire les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants.
En déduire la valeur de la médiane.

16 Lors du contrôle d'un lot de 400 pointes, on a relevé la taille (en mm) de chacune d'elles, et regroupé les résultats dans le tableau suivant :

Taille (en mm)	Effectif
28,5	2
28,8	9
29,1	5
29,4	15
29,7	60
30	165
30,3	95
30,6	21
30,9	15
31,2	9
31,5	4

1. Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série.
2. Quel est le pourcentage du nombre de pointes dont la taille est comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$?

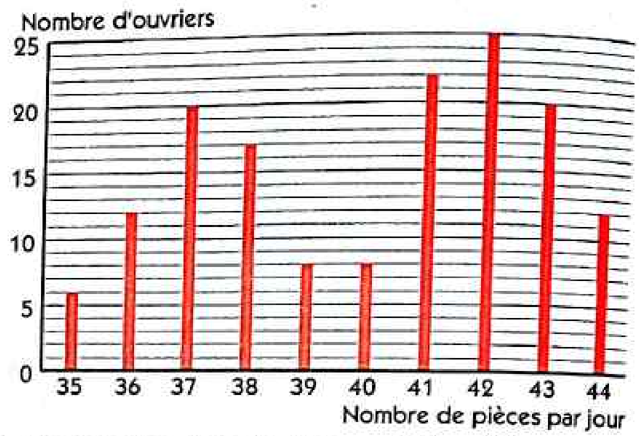
17 Un professeur de Français recense le nombre de livres lus par chacun de ses 180 élèves au cours du dernier mois.
Il obtient le résultat suivant :
18 élèves n'ont lu aucun livre,
72 élèves ont lu 1 livre,
45 élèves ont lu 2 livres,
36 élèves ont lu 3 livres,
9 élèves ont lu 4 livres.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif					
Fréquence					
Fréquence (en %)					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					

2. Combien d'élèves ont lu au moins 2 livres ? moins de 2 livres ?
3. Quel est le mode de cette série statistique ? Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type.
4. Représenter le résultat de cette enquête par un diagramme circulaire.

18 Une usine utilise deux types de machine, M_1 et M_2, pour produire la même pièce. La direction a relevé la production journalière de chacun de ses ouvriers :
– les ouvriers travaillant sur une machine M_1 produisent entre 35 et 39 pièces par jour ;
– les ouvriers travaillant sur une machine M_2 produisent entre 40 et 44 pièces par jour.
On regroupe ces données dans le diagramme en bâtons suivant :



1. Organiser les données dans un tableau faisant apparaître les effectifs (nombre d'ouvriers) n_i correspondant à chaque modalité (nombre de pièces) x_i, ainsi que les produits $n_i x_i$ et $n_i x_i^2$.
2. Calculer la production journalière moyenne :
a) des ouvriers travaillant sur la machine M_1 ;
b) des ouvriers travaillant sur la machine M_2 ;
c) de l'ensemble des ouvriers.
3. Déterminer le mode, la médiane et calculer l'écart type de cette série.

APPROFONDISSEMENT

19 On relève les tailles, en cm, des élèves d'une classe de seconde et on les regroupe en classes selon le tableau suivant :

Taille	Effectif
[154 ; 158[	2
[158 ; 162[	5
[162 ; 164[	5
[164 ; 166[	7
[166 ; 168[	8
[168 ; 170[	10
[170 ; 172[	8
[172 ; 174[	7
[174 ; 178[	6
[178 ; 182[	2

1. Dresser l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

2. Combien y a-t-il d'élèves dont la taille est supérieure à 1,70 m ? dont la taille est strictement inférieure à 1,66 m ?
3. On procède à un nouveau regroupement de cette série en classes de même amplitude, égale à 4 cm. Dresser l'histogramme correspondant.

20 Un statisticien a regroupé les résultats d'une enquête portant sur une population de 1 100 individus en une série statistique qu'il a présentée sous forme d'un tableau. En jouant, son fils a malencontreusement effacé une grande partie du tableau qui se présente maintenant comme ceci :

Modalité	Effectif	Fréquence	Effectif cumulé croissant
0	55		
1			
2			671
3			
4		16 %	

1. Reconstituer le tableau ci-dessus, sachant que la moyenne de la série est 2,26.
2. Tracer le diagramme cumulatif de cette série.

21 Ce tableau indique l'effectif féminin des séries A (Littéraire), C (Sciences Mathématiques), D (Sciences Expérimentales) des classes Terminales en Côte d'Ivoire, de 89/90 à 93/94 :

	90/91	91/92	92/93	93/94
TA	3 726	5 187	5 468	6 450
TC	83	96	89	94
TD	2 168	3 083	3 047	3 453
Total				

1. Compléter le tableau.
2. Construire un diagramme à bandes des effectifs par année scolaire :
a) des élèves de la série littéraire (TA),
b) des élèves des séries scientifiques (TC + TD),
c) de l'ensemble des élèves.
3. Dresser, pour chaque année scolaire, un tableau des fréquences de chaque série et construire les diagrammes circulaires correspondants.
4. Calculer, pour chaque année scolaire, le pourcentage des élèves de la série C par rapport au total des élèves des séries scientifiques.

22 Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le nombre d'habitants, en 1995, et la superficie de huit pays. On appelle densité de la population, le nombre d'habitants au km².

	Habitants (× 1 000)	Superficie (en km²)	Densité
Bénin	5 400	112 620	
Burkina-Faso	10 140	274 200	
Cameroun	13 500	475 440	
Congo	2 600	342 000	
Côte d'Ivoire	13 800	322 460	
Gabon	1 100	267 670	
Guinée	6 560	248 860	
Mali	10 600	1 240 000	
TOTAL			

1. Compléter le tableau.
2. Représenter les effectifs des populations de ces pays par un diagramme à bandes.
3. Calculer le pourcentage des superficies de chaque pays, par rapport à la superficie totale des huit pays ; dessiner le diagramme circulaire correspondant.
4. Calculer la densité de la population pour l'ensemble des huit pays. Cette densité est-elle la « moyenne des densités » ?

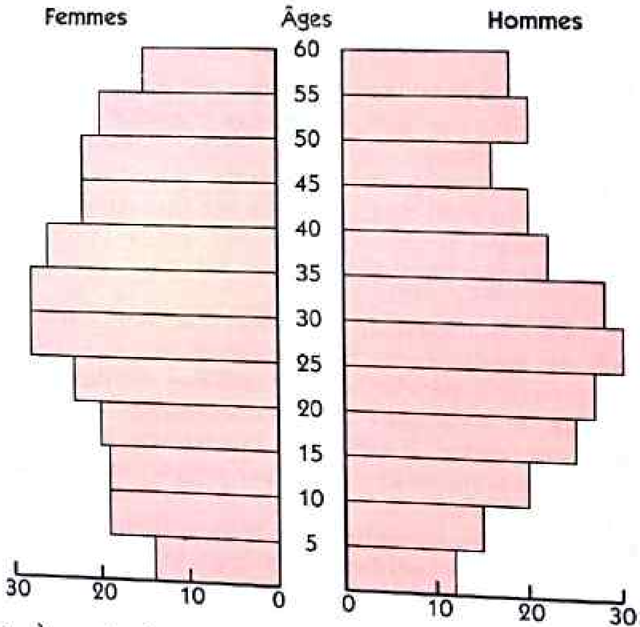
23 Construire une série de onze notes (sur 20) dont la médiane est 9 et la moyenne est 12.

24 Un médecin a noté le nombre d'interventions qu'il a dû effectuer de nuit au cours d'une année. Il a regroupé ces données dans le tableau suivant :

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de nuits	70	115	82	58	25	12	3
Fréquence							

1. Quel peut être le nombre maximum de sorties en une semaine ?
2. Compléter le tableau ci-dessus.
3. Quel est le nombre total de sorties de nuit effectuées par ce médecin pendant l'année ?
4. Quelle est la médiane de cette série statistique ?
5. Calculer la moyenne des interventions par nuit. En déduire le nombre moyen de sorties par semaine.

25 On répartit en classes d'amplitude 5 ans les âges de la population masculine et féminine d'un village. On a représenté ci-dessous la pyramide de ces âges (par exemple, il y a 28 hommes de 30 à 35 ans et 20 femmes de 15 à 20 ans) :



1. À partir de cette pyramide, dresser le tableau des effectifs des populations masculine et féminine de ce village et en déduire la population totale du village.
2. Construire une nouvelle pyramide des âges en prenant des classes d'amplitude 10 ans.

26 Les élèves de trois sections de seconde ont traité le même devoir de Mathématiques. Le tableau suivant donne, pour chaque section, les notes obtenues :

Note	2ᵉC1	2ᵉ C2	2ᵉ C3	TOTAL
7	1	5	14	
8	2	3	1	
9	3	5	4	
10	7	5	2	
11	11	4	2	
12	8	5	2	
13	6	6	1	
14	5	5	1	
15	4	5	10	
16	3	7	13	
TOTAL				

1. Pour chacune des sections, dresser un tableau des effectifs, des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.
2. Calculer la moyenne, le mode, l'écart moyen et l'écart type de chaque série.
Vérifier que chaque groupe a la même moyenne.
En est-il de même pour les écarts types et les écarts moyens ?
3. Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type pour l'ensemble des élèves des trois sections.

27 Les masses des 100 élèves d'une classe de seconde sont données ci-dessous (en kg) :

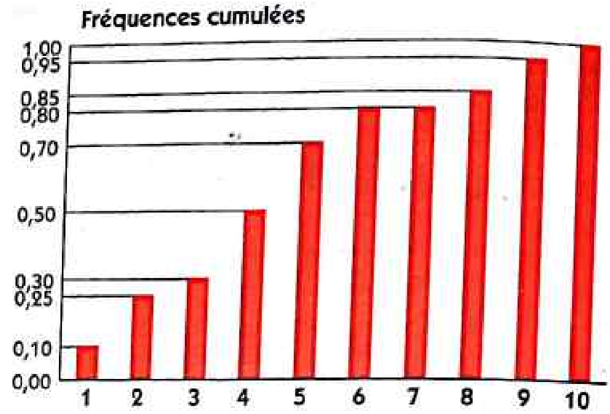
60 ; 69 ; 61 ; 54 ; 81 ; 64 ; 65 ; 56 ; 58 ; 75 ; 68 ; 80 ; 75 ; 51 ; 66 ; 64 ; 69 ; 53 ; 57 ; 80 ; 58 ; 66 ; 63 ; 58 ; 73 ; 81 ; 57 ; 67 ; 64 ; 51 ; 66 ; 73 ; 73 ; 58 ; 69 ; 65 ; 70 ; 58 ; 68 ; 54 ; 75 ; 69 ; 63 ; 70 ; 57 ; 64 ; 72 ; 77 ; 51 ; 65 ; 65 ; 55 ; 68 ; 64 ; 64 ; 65 ; 80 ; 77 ; 54 ; 64 ; 81 ; 61 ; 60 ; 63 ; 75 ; 76 ; 75 ; 82 ; 58 ; 70 ; 87 ; 72 ; 64 ; 63 ; 60 ; 69 ; 62 ; 71 ; 65 ; 70 ; 65 ; 65 ; 51 ; 65 ; 60 ; 66 ; 67 ; 63 ; 67 ; 59 ; 69 ; 87 ; 81 ; 69 ; 60 ; 64 ; 68 ; 66 ; 60 ; 69.

1. Construire le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. En déduire la médiane (ou l'intervalle médian).
2. Calculer la masse moyenne m des élèves.
3. Calculer l'écart type σ de cette série statistique.
4. Déterminer le pourcentage des élèves ayant une masse comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$.

28 Un journaliste a constaté que, dans son pays, 24% des étudiants inscrits dans un établissement d'enseignement supérieur sont issus d'une famille d'agriculteurs et 13% sont issus d'une famille d'ouvriers. Dans son journal, il écrit : « À l'Université, les enfants d'ouvriers sont désavantagés par rapport aux enfants d'agriculteurs ».
1. Les données recueillies par le journaliste sont-elles suffisantes pour justifier cette affirmation ?
2. Sinon, à quelles conditions cette affirmation est-elle vraie ? À quelles conditions est-elle fausse ?
(On pourra noter x et y les pourcentages respectifs d'agriculteurs et d'ouvriers dans la population totale de ce pays).

29 La moyenne des salaires mensuels dans une usine est 125 000 F et l'écart type est 20 000 F.
1. Quelle sera la nouvelle moyenne et le nouvel écart type si on augmente chaque salaire de 2 500 F ?
2. Mêmes questions, si on augmente chaque salaire de 2%.

30 On donne ci-dessous le diagramme en bâtons des fréquences cumulées croissantes d'une série statistique dont l'effectif total est N = 640.



1. Dresser, à partir de ce diagramme, le tableau des effectifs, des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
2. Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type.
3. Reproduire le diagramme ci-dessus et construire, dans le même repère, le diagramme en bâtons des fréquences cumulées décroissantes.
En déduire les valeurs de la médiane.

31 Les résultats d'une enquête portant sur les salaires dans une entreprise sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Décile 1	
	29 800
Décile 2	
	50 900
Décile 3	
	71 000
Décile 4	
	89 800
Décile 5	
	102 200
Décile 6	
	123 600
Décile 7	
	150 300
Décile 8	
	194 500
Décile 9	
	269 300
Décile 10	

La population des employés a été répartie en « déciles », un décile regroupant 10% des salariés. Le tableau se lit ainsi : 10% des salariés gagnent moins de 29 800 F, 10% gagnent entre 29 800 et 50 900 F et ainsi de suite, jusqu'aux 10% qui gagnent plus de 269 300 F.
1. Quel est le salaire médian dans l'entreprise ?
2. Quel est le pourcentage des employés dont le salaire est compris entre 71 000 et 150 300 F ?
3. Donner un encadrement du salaire moyen des 90% des employés les moins bien payés.
4. Est-il possible que la moyenne générale des salaires soit égale à 100 000 F ?