« Rien ne va de soi. Rien n’est donné. Tout est construit. » GASTON BACHELARD (1864 - 1962)

Université Cheikh Anta Diop de Dakar
(U.C.A.D.)
DEPATEMENT DE MATHEMATIQUES

FASCICULE DE MATHEMATIQUES

FASCICULE DE MATHEMATIQUES

3e

Présenté par :

Monsieur Ibrahima Coly Professeur de **M.S.P**

E- mail : icoly77@gmail.com / Tel : **77 030 41 46**

« Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » GASTON BACHELARD (1864 - 1962)

PROGRESSION HARMONISEE DE MATHEMATIQUES / IA KAOLACK

PREMIER TRIMESTRE	
ACTIVITES GEOMETRIQUES	**ACTIVITES NUMERIQUES**
1). Théorème de Thalès **2).** Relations trigonométriques dans un triangle rectangle	**1).** Racine carrée **2).** Equations et inéquations du 1er degré à une inconnue
NOEL	
DEUXIEME TRIMESTRE	
3). Angles inscrits **4).** Géométrie dans l'espace **5).**Vecteurs	**3).**Statistique
PAQUES	
TROISIEME TRIMESTRE	
6). Repérage dans le plan **7).**Transformations du plan	**4).** Equations et systèmes d'équations à deux inconnues Inéquations et systèmes d'inéquations à deux inconnues **5).**Applications affines et applications affines par intervalles

FASCICULE DE MATHEMATIQUES 3^{e}

ACTIVITES NUMERIQUES

« Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » GASTON BACHELARD (1864 - 1962)

FORMAT DE FICHE DE MATHEMATIQUES

Etablissement :	**Classe :**		**Date :**
Prénom et Nom du prestataire	**Effectif total**	**G :** **F :**	**Durée :**

TITRE :		
Objectif général		
Objectif spécifiques		
Matériel et supports didactiques	**Pour l'élève**	
	Pour le professeur	
Prérequis		
Sources :		
PLAN DU COURS		
Introduction :		

DEROULEMENT DE LA LEÇON					**Observations**
Moments didactiques Significatifs		**Stratégies**		**Traces écrites**	-difficultés rencontrés - la pertinence des stratégies -Etc. **Pour améliorer les pratiques ultérieures**
Titre de la séquence	**D urée**	**Activité du prof**	**Activité de l'élève**		
I* :……………..	…….	Recopie l'acti. au tableau	Recopie ds son cahier l'acti. 1	Activité1 : ……………………… ……. Correction que l'élève doit prendre ds son cahier	

Révélateur	
Os. sp. 1	
Os. sp. 1	
…	
…	

« Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » GASTON BACHELARD (1864 - 1962)

CHAPITRE I:

RACINE CARREE

DURREE : **12 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant **doit maîtriser** l'usage des propriétés de la **racine carrée** pour résoudre des problèmes.

Objectifs spécifiques : Au terme de la leçon, l'apprenant devra être capable de :

- Restituer la définition, la notation de la racine carrée d'un nombre positif non nul ;
- Calculer la valeur exacte ou une valeur approchée d'une racine carrée ;
- Reconnaître la notation $\mathbb{R}$;
- Calculer la valeur numérique d'une expression littérales dans $\mathbb{R}$;
- Utiliser les propriétés de la racine carrée ; de la valeur absolue d'un réel ;
- Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient ;
- Comparer des réels écrits avec des radicaux ;
- Ecrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre ;
- Déterminer : la valeur exacte d'une expression comportant un radical ; une valeur approchée d'une expression comportant un radical à partir d'un encadrement de ce radical ou avec la calculatrice

Sources :

- ✓ **Loi d'orientation 91. 22 du 16 Février 1991** ;
- ✓ Manuels : CIAM 3ème ; Excellence 3ème
- ✓ Site web : http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 31min
  http://www.maths-vidéos.com, consulté le 26 / 01 / 2015 à 13 h 47min
  http://www.mathscyr.free.fr, consulté le 30 / 10 / 2016 à 12 h 18 min
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Produit AB nul ; Calcul de l'aire du carré ; Théorème de Pythagore : Opérations et propriétés dans $\mathbb{Q}$: commutativité de l'addition, puissance, calcul littéral (développement et factorisation)

PLAN DU COURS

I° Rappels règles de calcul dans $\mathbb{Q}$	V - 3 – 2) Vocabulaire et méthode :
1) Distributivité	V - 3 – 3) Exercice d'application :
2) Identités remarquables ;	**V - 4) Racine et puissances :**
3) Factorisation - Développement	V - 4 – 1) Activité :
4) Quotient	V - 4 – 2) Propriété :
5) Simplification d'une expression :	V - 4 – 3) Exercice d'application :
II° Définition et notation	**V - 5) Comparaison de réels comportant des radicaux :**
II - 1) Activité	V - 5 – 1) Activité :
II - 2) Définition et notation	V - 5 – 2) Propriétés :
II - 3) Conséquence de la définition	V - 5 – 3) Exercice d'application :
❖ Remarque	**V - 6) Intervalle :**
III° Nombre irrationnel, ensemble $\mathbb{R}$:	V - 6 – 1) Activité :
III - 1) Activité :	V - 6 – 2) Intervalles :
III - 2) Nombres irrationnels, ensemble $\mathbb{R}$:	V - 6 – 3) Exercice d'application :
❖ Remarque :	**VI° Racine carrée du carré d'un réel**
IV° Propriétés :	VI – 1) Activité :
IV - 1) Activité :	VI – 2) Propriétés :
IV - 2) Propriété :	VI – 3) Exercice d'application :
IV - 3) Exercice d'application :	

Introduction :

Par la diagonale d'un carré de côté **1cm**, les pythagoriciens trouvent le nombre $\sqrt{2}$ en **430 av. J. C.** Ils le gardèrent longtemps secret. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors.
Se pose l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré de côté **1cm** « incommensurabilité de racine de 2 et du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre (le nombre π) »
Autrement dit, est- ce que toutes les grandeurs peuvent être mesurées avec tous les nombres décimaux ? Là, est venu l'idée d'inventer un autre ensemble plus grand que $\mathbb{Q}$: IR.
Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes tels que : Développement durable ; Energie ; … et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; avec usage des calculatrices ; …

DEROULEMENT DE LA LEÇON

I° RAPPELS REGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{Q}$:

1) **Distributivité :** Quels que soient les rationnels a, b,x, y, on a : ;

$\mathbf{a(x + y) = ax + ay}$ $\qquad$ $(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by$

2) **Identités remarquables**:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

3) **Factorisation – Développement**

a) développe, réduit puis ordonne :

$A(x) = 5x(2x - 3) – 4(x + 2) - 10x^2$

b) Factorise

$B(x) = -9x^2 + 4$ et

$C(x) = (7x- 1)(4x-2) - (1–7x)(3x-1)$

4) **Egalite de deux rationnels - Quotients :**

Quels que soient les rationnels a, b, c, d, x et y ; b et y non nuls, on a :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ad = bc $\qquad$ $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ et $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay+bx}{by}$ **(Réduction au même dénominateur)**

Quels que soient les rationnels non nuls **a** et y, et quel que soient le rationnel x on a :

$\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y}$ (Simplification)

5) **Simplification d'une expression :**

On pose : $f(x) = \frac{(3x-3)(3x-2)}{(x-1)(3x+7)}$

a) Dites pourquoi on ne peut pas calculer f (1).

b) Donner la condition d'existence de f(x) puis simplifier f(x).

c) Calculer f $(\frac{1}{3})$ puis donner sa valeur approchée à 10^{-1} près par défaut.

II° DEFINITION ET NOTATION :

II - 1) Activité

On donne les mesures suivantes correspondantes à l'aire d'un carré : 16 m². ; 36 m² et 2m²

A l'aide de ta calculatrice trouve pour chaque cas le côté du carré.

II - 2) Définition et notation :

Soit **a** un nombre rationnel positif ou nul.

On appelle racine carrée de a, le nombre positif ou nul dont le carré est égal à a.

On la note: $\sqrt{\boldsymbol{a}}$.

Le symbole **« √ »** est appelé **radical** ; le réel **a** est appelé **radicande**.

II - 3) Conséquence de la définition :

*Le radicande est **toujours** positif ou nul. * La racine carrée est **toujours** positif ou nul. * $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

III° NOMBRE IRRATIONNEL, ENSEMBLE IR:

III - 1) Activité :(Concours d'entrée en 2nd au Lycéé Scientifique de Diourbel)

Soient p et q avec q ≠ 0 deux entiers tels que : $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ et $\frac{p}{q}$ irréductible.

1. Montre que 2 divise p et q.
2. Conclure.

Solution :

1. **Montrons que 2 divise p et q.**

On a : $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ et $\frac{p}{q}$ irréductible

Elevons au carré : $(\frac{p}{q})^2 = (\sqrt{2})^2$ Soit $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $\mathbf{p^2 = 2q^2}$

Il s'en suit alors que **p²** est un nombre pair par conséquent **p est pair**.

On a : p paire alors il existe un réel k tel que p = 2k d'où $p^2 = 2q^2 = 4k^2$ Soit $q^2 = 2k^2$

On a alors **q² paire**. Par conséquent **q est pair**.

Or, tout nombre pair est divisible par 2. Donc 2 divise p et q.

2. **Conclure.**

p paire et **q** paire, absurde car p et q sont irréductible. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Il est irrationnel.

III – 2) Nombres irrationnels, ensemble ℝ:

$\sqrt{2}$; π ; ... sont des nombres irrationnels. L'ensemble des nombres irrationnels est noté ℝ

❖ **Remarque :** On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

IV° PROPRIETES :

IV – 1) Activité :

Soit a et b deux nombres positifs.

1° Montre que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; 2° Montre que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

IV – 2) Propriétés :

❖ **∀ (quel que soit) a ∈ ℝ +, b ∈ ℝ +, alors** $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times$

❖ $\sqrt{b}$ **∀ a ∈ ℝ*+, b ∈ ℝ*+, alors** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ **en particulier** $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

❖ **Remarque :**

✓ **Si a < 0 et b < 0 ; on a : ab > 0 alors $\sqrt{ab}$ existe mais on ne peut pas parler ni de $\sqrt{a}$ ni de $\sqrt{b}$ alors $\sqrt{a}$ x $\sqrt{b}$ n'existe pas.**

Exemple : (-5) x (-7) = 35 donc $\sqrt{35} = \sqrt{(-5)(-7)}$ existe mais comme $\sqrt{-5}$ et $\sqrt{-7}$ ne sont pas définit, donc $\sqrt{(-5)(-7)} \neq \sqrt{-5}$ X $\sqrt{-7}$

✓ **Les propriétés étudiées ci-dessus permettent de simplifier des calculs ou des expressions.**

IV – 3) Exercice d'application :

1) Sans calculatrice écris les nombres suivants sous la forme $\sqrt{a}$ avec a ∈ ℝ*+ :
A= $\sqrt{5}\ X\ \sqrt{45}$; B = $\sqrt{5}\ X\ \sqrt{2}\ X\ \sqrt{10}$
2) Développe et réduis E = $3\sqrt{2}\ (7\sqrt{2} - \sqrt{5})$
3) Ecris sous la forme a $\sqrt{b}$ ou a et b sont des entiers naturels non nuls avec b le plus petit possible : $\sqrt{72}$; $\sqrt{75}$ *et* $\sqrt{32}$
4) Simplifie $F = \sqrt{\frac{36}{25}}$; 5) Soit D = $\frac{5\sqrt{72}}{2\sqrt{2}}$. Montre que D est un nombre entier.

V° CALCUL SUR LES RADICAUX :

V – 1) Somme algébrique :

V – 1 – 1) Activité :

1) Compare $\sqrt{16+9}$ *et* $\sqrt{16} + \sqrt{9}$; 2) Soit a et b des réels positifs. Montre que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

V - 1 – 2) Propriété :

Pour tout réel a ∈ ℝ+ et b ∈ ℝ+ alors : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

V - 1 – 3) Application :

1) Réduit la somme A = $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

2) Calculons K = $\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}$

V - 2) Racine Carrée et Valeur absolue d'un réel :

V - 1) Activité :

1) Compare $\sqrt{3^2}$ et $|3|$; $\sqrt{(-7)^2}$ et $|-7|$
2) Quel est le signe de la valeur absolue d'un nombre réel.

V – 2 - 2) Propriété :

La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive. On admet alors : a étant un nombre réel, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$

V – 2 - 3) Exercice d'application :

1) Ecris plus simplement : $\sqrt{(-2{,}5)^2}$; $\sqrt{(7{,}1)^2}$
2) Ecris sans radical : $\sqrt{(2\sqrt{3} - 5)^2}$, $\sqrt{(x\sqrt{3} - 1)^2}$ et $\sqrt{(x)^2}$

V – 3) Racine et puissances :

V – 3 – 1) Activité :

Soit **a** un réel positif et **n** un nombre entier relatif.
1) Recopie et compète $(a^n)^2$ = ; $(a^n)^2$ x a =
2) Montre $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$

Solution

On a : $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n| = a^n$ donc $\sqrt{a^{2n}} = a^n$

$\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{(a^n)^2} \times \sqrt{a} = a^n\sqrt{a}$

V - 3 – 2) Propriétés :

a étant un réel positif et n un nombre entier relatif alors : $\boxed{\sqrt{a^{2n}} = a^n}$ **et** $\boxed{\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}}$

V - 3 – 3) Exercice d'application :

Ecris plus simplement ces réels $\sqrt{3^{122}}$ et $\sqrt{2^{17}}$

V - 4) Expression conjuguée ou rendre rationnel un dénominateur :

V - 4 – 1) Activité :

1) Montre que $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)$ et $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ sont des entiers relatifs

2) Ecris ces quotients sans radical au dénominateur : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

V - 4 – 2) Vocabulaire et méthode :

- **Vocabulaire :**

Les expressions $(\mathbf{a} + \sqrt{\mathbf{b}})$ **et** $(\mathbf{a} - \sqrt{\mathbf{b}})$ sont des **expressions conjuguées l'un de l'autre**. Leur produit est un réel qui s'écrit sans radical.

- **Méthode :**
- **Le dénominateur est un irrationnel**

Si le dénominateur est un irrationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par ce même irrationnel

Exemple : $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

- **Le dénominateur est une somme (ou une différence)**

Si le dénominateur est une somme ou une différence, on multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée.

NB : $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$

V - 4 – 3) Exercice d'application :

Rends rationnel les nombres suivants $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$ et $\frac{4}{-\sqrt{5}+1}$

V - 5) Comparaison de réels comportant des radicaux :

V - 5 – 1) Activité :

1) **a** et **b** sont deux **nombres négatifs**, montre que $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$

2) **a** et **b** sont deux **nombres positif**, montre que $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$

3) En utilisant les résultats précédents, justifie que **a** et **b** étant des réels positifs : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $\mathbf{a < b}$

Solution :

1) a et b sont deux **nombres négatifs**, montrons que **a < b équivaut à a² > b²** $a^2 > b^2$ $a^2 - b^2 > 0$ $(a - b)(a + b) > 0$ Si $(a - b) < 0$ alors $\mathbf{a < b}$ Donc **a< b équivaut à a² >b²**	**2)** a et b sont deux **nombres positif**, montrons que $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$ $a^2 < b^2$ $a^2 - b^2 < 0$ $(a - b)(a + b) < 0$ Si $a - b < 0$ alors $\mathbf{a < b}$ Donc **a < b équivaut à a²<b²**	**3)** En utilisant les résultats précédents, justifions que a et b étant des réels positifs : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$ **On a : a < b équivaut à a² <b².** D'où, $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} < \sqrt{\boldsymbol{b}^2}$ **équivaut à a < b**

V - 5 – 2) Propriétés :

- Deux **nombres négatifs** sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

a et **b** étant deux nombres négatifs : **a < b équivaut à a² > b² ; a ≤ b équivaut à a² ≥ b²**

- Deux **nombres positifs** sont rangés dans le même ordre de leurs carrés.

a et **b** étant deux nombres positifs : **a < b équivaut à a² < b² ; a ≤ b équivaut à a² ≤ b²**

❖ Deux **nombres positifs** sont rangés dans le même ordre de leurs racines carrées.
a et b étant deux nombres positifs : **a < b équivaut à** $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ **; a ≤ b équivaut à** $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

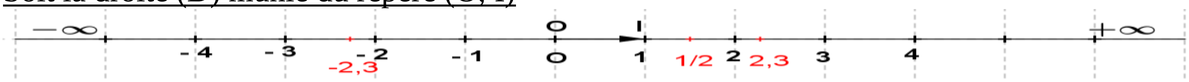
V - 5 – 3) Exercice d'application :

1) Compare $3\sqrt{2}$ *et* 4 ; $4\sqrt{3}$ et $5\sqrt{2}$; 2) Trouve le signe de ($5\sqrt{2}$ - $4\sqrt{3}$) ; de ($4\sqrt{5}$ – 9)

V - 6) Intervalle :

V – 6 – 1) Activité :

Soit la droite (D) munie du repère (O, I)



1) caractérise de deux manières différentes (par un encadrement puis par un intervalle)
a) l'ensemble A des nombres réels x strictement supérieurs à 4.
b) L'ensemble B des nombres réels x strictement supérieurs à - 2,3 et inférieurs ou égaux à 2
c) L'ensemble C des nombres réels x strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$
d) L'ensemble D des nombres réels x inférieurs ou égaux à - 2,3.
2) On donne les nombres suivants : 3 ; -17 ; $\frac{-4}{7}$ et – 2,3.
Parmi ces nombres lesquels appartiennent à A ? à B ? à C ? à D ?

V – 6 – 2) Intervalles :

Ecriture	Intervalles	Ensembles des réels x tels que
[a ; b]	Fermé en a et b	a $\leq x \leq$ b
[a ; b [	Fermé en a, ouvert en b	a $\leq x < b$
$]\, a; b]$	Ouvert en a, fermé en b	a $< x \leq b$
] a ; b [	Ouvert en a et b	a $< x <$ b
$]-\infty\,;\, b]$	Des nbres inf. ou égaux à b	$x \leq$ b
$]-\infty\,;\, b[$	Des nbres strictement inf. à b	$x <$ b
[a ; + ∞[	Des nbres supérieurs ou égaux à a	$a \geq x$
] a ; + ∞[	Des nbres strictement supérieurs à a	a $> x$
]-∞; +∞[	De tous les réels	

V – 6 - 3) Exercice d'application :

1) Représente sur une droite graduée les intervalles suivantes :]-3 ; 1[;] 5 ; + ∞[
2) Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nbres définis ci-dessous :
$x \leq -2$; $x > 3,5$ et - 4 $< x <$ 6

VI ° RACINE CARREE DU CARRE D'UN REEL :

VI – 1) Activité :

Résoudre dans ℝ les équations suivantes : $x^2 = 3$; $x^2 = 0$ et $x^2 = -5$

VI – 2) Propriétés :

❖ **Si a > 0, alors l'équation x^2 = a admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.**
Soit S = $\{-\sqrt{a}\,;\ \sqrt{a}\}$
❖ **Si a = 0, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution $x = 0$.** Soit S = {0}
❖ **Si a < 0, alors l'équation x^2 = a n'admet pas de solution.** S = ∅

VI – 3) Exercice d'application : Résous dans ℝ les équations : $x^2 = 16$; $x^2 = 2$ et $x^2 = 0$

VII° ENCADREMENT :

VII – 1) Exemple :

On donne A = 2 + $3\sqrt{2}$. Encadre A sachant que 1,414≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,415

On a : 1,414≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,415

3 X 1, 414≤ $3\sqrt{2}$ ≤ 3 X1, 415

2 + 3 X 1, 414≤ $2 + 3\sqrt{2}$ ≤ 2 +3 X1, 415

$6,242 \leq 2 + 3\sqrt{2} \leq 6,245$

A 10^{-2} près $6,24 \leq 2 + 3\sqrt{2} \leq 6,25$ **Donc A 10^{-1} près $6,2 \leq 2 + 3\sqrt{2} \leq 6,3$**

VII – 2) Exercice d'application :

1) On donne $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$ et $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$
   a) Donner un encadrement d'ordre 1 de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
   b) Donner un encadrement d'ordre 2 de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
2) Sachant que $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$, donne un encadrement par deux nombres d'ordre 2 de $\frac{4}{2-\sqrt{3}}$

VIII° VALEUR EXACTE ; VALEUR APPROCHEE :

VIII – 1) Racine carrée entière d'un réel positif :

VIII – 1 – 1) Exemples :

18 n'est pas le carré d'un entier naturel mais nous pouvons l'encadrer par les carrés de deux entiers successifs.

On a : $16 \leq 18 < 25$

$$\sqrt{16} \leq \sqrt{18} < \sqrt{25}$$

$$4 \leq \sqrt{18} < 5$$

Donc 4 est **Racine carrée entière 18**

Trouve la racine carrée entière de 13,21

On a : $9 \leq 13,21 < 16$

$$\sqrt{9} \leq \sqrt{13,21} < \sqrt{16}$$

$$3 \leq 13,21 < 4$$

Donc 3 est **Racine carrée entière 13,21**

VIII – 1- 2) Définition :

On appelle racine carrée entière d'un réel positif x, la partie entière de la racine carrée de x.

Soit **a,** cette racine carrée entière, nous avons : $a \leq \sqrt{x} < a + 1$

VIII - 1 - 3) Exercice d'application :

A l'aide de ta calculatrice trouve la racine carrée entière de 15 et 27, 5

VIII – 2) Recherche de la valeur approchée de la racine carrée d'un réel positif

VIII - 2 - 1) Exemple :

1) Détermine la valeur approchée par défaut de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près avec ta calculatrice.
2) Trouve de la valeur approchée par défaut de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} à partir de son encadrement.

1) Avec la calculatrice, on a : $2,6 \leq \sqrt{7} < 2,7$

2) La valeur approchée par défaut de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} à partir de son encadrement :

On sait que, **a x 1. 10^{-n}** $\leq \sqrt{b} < (a + 1) \times 1.10^{-n}$

Cherchons **a** : On a : **a. 10^{-1}** $\leq \sqrt{7} < (a+1).10^{-1}$

- ✓ **Multiplions par : 1. 10^{1} :**

a. $10^{-1} \times 1.\,10^{1} \leq \sqrt{7}\ X\ 1.10^{1} < (a+1) \times 1.\,1O^{1}$

$a \leq \sqrt{7}\ X\ 10 < (a+1)$ Or, $10 = \sqrt{100}$ alors $a \leq \sqrt{7}\ X\ \sqrt{100} < (a+1)$

$$a \leq \sqrt{700} < (a+1)$$

- ✓ **Elevons au carrée :** $a^2 \leq 700 < (a+1)^2$

a étant la partie entière de la racine carrée de 700, on a : $\sqrt{700} = \mathbf{26}, 4575\ldots$

D'où : $a^2 = 26^2$ et $(a+1)^2 = 27^2$

D'où : $26^2 \leq 700 < 27^2$ Ainsi, $\sqrt{26^2} \leq \sqrt{700} < \sqrt{27^2}$ Soit $26 \leq \sqrt{7}\,X\,10 < 27$

Donc à 10^{-1} près on a : $2,6 \leq \sqrt{7} < 2,7$ (On a divisé alors 26 et 27 par 10)

VIII – 2 – 2) Exercice d'application :

Trouve avec la calculatrice puis par encadrement la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $\sqrt{13}$

CHAPITRE II

EQUATIONS ET INEQUATIONS A UNE INCONNUE

DUREE : 10 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maitriser la résolution de situations problèmes faisant intervenir les équations ou les inéquations à une inconnue.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- résoudre des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, des équations faisant intervenir des quotients ainsi que les autres types déjà étudiés dans les classes précédentes.
- résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations des types : $|ax + b| = c$ et $|ax + b| = |cx + d|$.
- résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant au type : $ax^2 + b = 0$.
- résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.
- résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations se ramenant au type : $a x^2 + b \leq 0$.
- vérifier qu'un nombre est solution ou non d'une équation, d'une inéquation.
- résoudre des problèmes en utilisant les équations et inéquations ci- dessus.

Sources :

- **Loi d'orientation 91. 22 du 16 Février 1991 ; G. U. de Maths 3^e^**
- **Manuels :** C.I.A.M. 5^e^, 4^e^ et 3^e^ et Excellence 5^e^, 4^e^ et 3^e^
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 15 min
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 25 / 11 / 2018 à 16 h 21 min
  http://www.logamaths.fr, consulté le 25 / 06 / 2015 à 8 h 37 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Nullité d'un produit, identités remarquables, égalité de deux quotients, système d'équations,

PLAN DU COURS

Introduction :

Du point de vue historique, les premières traces tangibles de résolution d'équations remontent à l'apparition de l'écriture et donc à la Mésopotamie. Ainsi, des Babyloniens aux Grecques en passant par les Arabes, la résolution de problème s'est toujours faite sous forme d'équations simples même si la notation mathématique, et ce à partir de l'écriture, a toujours changé à travers notre histoire.

En Europe, le développement systématique des méthodes de résolution des équations se fait au XV et XVI° Siècle.

En effet, une équation n'est rien d'autre qu'une égalité entre deux membres. Souvent, il s'agit de déterminer une certaine quantité, connaissant simplement une égalité qui fait intervenir cette quantité inconnue. Comme le fait de nommer les choses permet souvent de mieux les étudier, l'on donne alors un certain nom à notre inconnue (le plus souvent on l'appelle $\boldsymbol{x}$). On obtient ainsi une égalité que doit vérifier $\boldsymbol{x}$, c'est ce qu'on appelle une équation. Bien sûr, il y a des équations de toutes sortes.

Du point de vue programme, en **5ème**, vous aviez étudié les équations numériques de la forme a + x = b où **a** et **b** sont des nombres décimaux relatifs. En **4ème**, vous aviez abordé les affines, c'est – à - dire celles de la forme a x + b = 0 ou se ramenant à cette forme ; les équations de la forme (a x + b) (c x +d) = O et se ramenant à cette forme, des équations de la forme **:**

$\boldsymbol{\frac{a}{x} = b}$; $\boldsymbol{\frac{a}{x} = \frac{b}{c}}$ **($x \neq 0$; c$\neq$ 0).**

Cette année (en 3ème), nous allons aborder d'autres formes d'équations. Il est donc important de bien suivre.

Toutefois, résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres x qui vérifient l'équation de départ. Aussi, faut-il souligner que les équations trouvent leurs applications en Sciences physique, en statistique…

Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et Climatologie ; Santé ; Sécurité ; la Physique… et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; avec usage des calculatrices ; …

DEROULEMENT DU COURS

I° EQUATIONS A UNE INCONNUE :

I – 1) Equation Produit nul :

I – 1 -1) Méthode de résolution:

Soit à résoudre une équation de la forme **(ax +b) (cx +d) = 0 avec a ≠ et c ≠ 0**

On sait qu'un produit est nul si l'un au moins de ses termes est nul. AB = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0

(ax +b) (cx +d) = 0 équivaut à ax + b = 0 ou cx + d = 0

D'où $x = -\frac{b}{a}$ ou $x = -\frac{d}{c}$; $S = \left\{-\frac{b}{a} ; -\frac{d}{c}\right\}$

I – 1 - 2) Exemple :

Soit à résoudre dans ℝ l'équation suivante : 2 $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$ – 4) (3$\boldsymbol{x}$ + 5) = 0

Equivaut à 2 $\boldsymbol{x}$ **= 0** **ou** $\boldsymbol{x}$ – 4 = 0 **ou** 3$\boldsymbol{x}$ + 5 = 0

Equivaut à $\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 4}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{-5}{3}}$**. Donc** $\boldsymbol{S = \left\{0; \frac{-5}{3}; 4\right\}}$

I – 1 - 3) Exercice d'application :

Résous dans ℝ les équations suivantes : $(3x – 1)(5x + 10) = 0$ **et** $7x(11x + 4) = 0$

I – 2) Equation faisant intervenir des quotients :

I – 2 - 1) Méthode de résolution:

Soit à résoudre dans ℝ une de la forme $\frac{ax+b}{c} = \frac{dx+e}{f}$ avec $c \neq 0$ et $f \neq 0$:

- ✓ **On réduit tous les termes au même dénominateur ;**
- ✓ **Puis on compare les nouveaux numérateurs ; Ou bien**
- ✓ **On fait l'égalité du produit des « extrêmes » et du produit des « moyens »**

I – 2 - 2) Exemples :

Soit à résoudre dans ℝ les équations suivantes : $\frac{x+3}{2} - \frac{2x-1}{3} = \frac{1}{2}$; $\frac{2x-1}{2} = \frac{x+2}{5}$

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{2x-1}{3} = \frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{3(x+3)}{6} - \frac{2(2x-1)}{6} = \frac{3}{6}$

Or, on sait que si deux quotients ayant le même dénominateur sont égaux, alors leurs numérateurs sont égaux.

D'où $3(x + 3) - 2(2x - 1) = 3$ équivaut à : $x = 8$ **;** $\boxed{S = \{8\}}$

b) $\frac{2x-1}{2} = \frac{x+2}{5}$ équivaut à $5(2x - 1) = 2(x + 2)$

Équivaut à $x = \frac{9}{8}$ **Donc** $\boxed{S = \left\{\frac{9}{8}\right\}}$

I – 2 - 3) Exercice d'application :

Résous dans ℝ les équations suivantes : $\frac{(x-3)}{4} - \frac{(2x+1)}{2} = \frac{5}{2}$ et $\frac{5x-1}{3} = \frac{x+2}{5}$

I – 3) Equation du type $|ax + b| = c$; $|ax + b| = |cx + d|$

I – 3 - 1) Propriété:

Soit (X) et (Y) deux réels. $|(X)| = |(Y)|$ **équivaut à (X) = (Y) ou (X) = - (Y)**

❖ **Remarque :** la valeur absolue est toujours positive ou nulle.

I - 3 - 2) Exemples :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $|2x + 5| = 3$

$|2x + 5| = 3$ équivaut à

$2x + 5 = 3$ ou $2x + 5 = -3$

$x = -1$ ou $x = -4$ d'où $\mathbf{S} = \{-4 ; -1\}$

b) $|3x - 2| = |2x + 5|$

$|3x - 2| = |2x + 5|$ équivaut à

$3x - 2 = 2x + 5$ ou $3x - 2 = -(2x + 5)$

$x = 7$ ou $x = \frac{-3}{5}$ d'où $\mathbf{S} = \left\{\frac{-3}{5} ; 7\right\}$

I – 3 - 3) Exercice d'application :

Résous dans ℝ les équations suivantes : $|2x - 3| = 3$ **et** $|(X)| = -7$

I – 4) Equations du type $ax^2 + b = 0$:

I – 4 - 1) Méthode de résolution :

Soit à résoudre une équation de la forme $ax^2 = b$

***On transpose le terme b pour avoir la forme** $ax^2 - b = 0$

***On factorise pour avoir une équation produit de la forme** $(x\sqrt{a} - \sqrt{b})(x\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$.

I – 4 - 2) Exemples :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $5x^2 = 7$ équivaut à $5x^2 - 7 = 0$
équivaut à $(x\sqrt{5} - \sqrt{7})(x\sqrt{5} + \sqrt{7}) = 0$
équivaut à $x\sqrt{5} - \sqrt{7} = 0$ ou $x\sqrt{5} + \sqrt{7} = 0$
équivaut à $x = \frac{\sqrt{35}}{5}$ ou $x = \frac{-\sqrt{35}}{5}$
S = $\left\{\frac{-\sqrt{35}}{5} ; \frac{\sqrt{35}}{5}\right\}$

b) $-5x^2 + 3 = 0$
équivaut à $(\sqrt{3} - x\sqrt{5})(\sqrt{3} + x\sqrt{5}) = 0$
équivaut à $x = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ou $x = \frac{-\sqrt{15}}{5}$
S = $\left\{\frac{-\sqrt{15}}{5} ; \frac{\sqrt{15}}{5}\right\}$

c) $5x^2 + 7 = 0$.
On a : 5 et 7 ont le même signe alors l'équation n'a pas de solution.

❖ **Remarque :**

✓ **Si a et b ont le même signe, alors l'équation n'a pas de solution.**

✓ **Si a et b ont des signes contraires, alors l'équation a deux solutions.**

I – 4 - 3) Exercice d'application :

Résous dans ℝ les équations suivantes : (les apprenants proposeront des équations)

I – 5) Equation du type $\sqrt{ax+b}$ = c ou $\sqrt{(ax+b)^2}$ = c, avec a ≠ 0 et c ≥ 0

I – 5 - 1) Méthode de résolution :

❖ **Pour l'équation $\sqrt{ax+b}$ = c**
*Détermine d'abord le domaine d'existence.
*Puis élève au carré chaque membre de l'égalité.

❖ **Pour la forme $\sqrt{(ax+b)^2}$ = c**
On obtient une équation avec valeur absolue puis et on applique la propriété $|(X)| = |(Y)|$ **équivaut à (X) = (Y) ou (X)= - (Y)**

I – 5 - 2) Exemples :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $\sqrt{3x-2} = 4$
***Cherchons le domaine d'existence de l'équation $\sqrt{3x-2} = 4$**
L'équation existe si $3x - 2 \geq 0$ équivaut à $x \geq \frac{2}{3}$ d'où $D_e = [\frac{2}{3} ; +\infty[$
***Elevons chaque membre au carré**
$\sqrt{3x-2} = 4$ équivaut à $(\sqrt{3x-2})^2 = (4)^2$
équivaut à $3x - 2 = 16$
équivaut à $x = 6$
Or, $6 \in [\frac{2}{3} ; +\infty[$. Donc $\boxed{S = \{6\}}$

b) $\sqrt{(3x-2)^2} = 4$
$\sqrt{(3x-2)^2} = 4$ équivaut à $|3x-2| = 4$
Equivaut à 3x – 2 = 4 ou 3x – 2 = - 4
Equivaut à $x = 2$ ou $x = -\frac{2}{3}$
Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3} ; 2\right\}}$

I – 5 - 3) Exercice d'application :

Résous dans ℝ les équations suivantes : ***a)*** $\sqrt{2x-3}$ **= 2 ; b)** $\sqrt{(4x-1)^2}$ **= 3**

II° INNEQUATION A UNE INCONNUE :

II – 1) Inéquation produit du type $(ax+b)(cx+d) \leq 0$

II – 1 - 1) Méthodes de résolution :

Soit à résous dans ℝ l'inéquation suivante : $(2x - 3)(5 - x) \leq 0$

Rappel sur le signe d'un produit: **Soit AB un produits.**

✓ **Un produit est négatif si ses facteurs sont de singes contraires.**

Autrement dit : AB ≤ 0 équivaut à $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$

✓ **Un produit est positif si tous ses facteurs sont de même signe.**

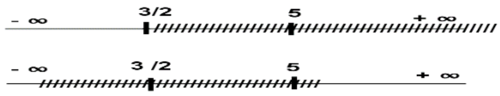
Autrement dit : AB ≥ 0 équivaut à $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$

On peut adopter deux méthodes différentes :

<u>1ère méthode : Les systèmes d'inéquations</u>

$(2x - 3)(5 - x) \leq 0$

équivaut à (I) $\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$ ou (II) $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 5 - x \leq 0 \end{cases}$



équivaut à (I) $\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq 5 \end{cases}$ $ou\ (II)$ $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq 5 \end{cases}$

$S_1 =]-\infty; \frac{3}{2}]$; $S_2 = [5 ; +\infty[$

$\boxed{S = S_1 \cup S_2 =]-\infty; \frac{3}{2}] \cup [5 ; +\infty[}$

<u>2ème Méthode : Le tableau de signe</u>

$(2x - 3)(5 - x) \leq 0$

$2x - 3 \leq 0$ si $x \leq \frac{3}{2}$ et $5 - x \geq 0$ si $x \leq 5$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		5	$+\infty$
2 x - 3	−	●	+		+
5 - x	+		+	●	−
Produit	−	●	////+//	●	−

$\boxed{S =]-\infty; \frac{3}{2}] \cup [5 ; +\infty[}$

❖ **<u>Remarque :</u>**

La méthode du tableau de signe des inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$ **ou** $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ peut se résumer comme suit :

x	$-\infty$	r_1	r_2 $+\infty$
Produit	**Signe de ac à l'extérieur des racines**	**Signe de −ac à l'intérieur des racines**	**Signe de ac à l'extérieur des racines**

La solution est l'intervalle correspondant au signe de l'inéquation.

<u>II – 1 - 2) Exercice d'application :</u>

Résous dans IR les inéquations suivantes : a) $(x - 6)(x + 7) > 0$ et b) $(x - 4)(x + 1) \leq 0$

<u>II – 2) Inéquation du type $ax^2 + b \leq 0$</u>

<u>II – 2 - 1) Méthode de résolution :</u>

Pour résoudre une inéquation se ramenant à la forme $ax^2 + b \leq 0$

***Factorise le 1er membre**

***Résous l'inéquation produit obtenue.**

<u>II – 2 - 2) Exemple :</u>

Résous dans ℝ les inéquations suivantes : a) $2x^2 + 3 \leq 0$; b) $-3x^2 - 7 \leq 0$ et c) $4x^2 - 3 < 0$

a) $2x^2 + 3 \leq 0$

on a ; 2 et 3 positifs, or pour tout réel x^2 est toujours positif donc $2x^2 + 3 \leq 0$ absurde.

S = ∅

b) $-3x^2 - 7 \leq 0$

équivaut à

$-(3x^2 + 7) \leq 0$

équivaut à $3x^2 + 7 \geq 0$

ce qui est toujours vrai

Donc S = ℝ

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$2x - \sqrt{3}$	-		-	●	+
$2x + \sqrt{3}$	-	●	+		+
Produit	//+//	●	-	●	//+//

c) $4x^2 - 3 \leq 0$ équivaut à $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) < 0$ équivaut à $\boxed{S =]-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}[}$

❖ **<u>Remarque :</u>**

✓ **Si a et b ont le même signe, alors l'inéquation n'a pas de solution.**

✓ **Si a et b ont des signes contraires, alors l'inéquation admet deux racines r_1 et r_2.**

✓ La méthode du tableau de signe des inéquations du type $ax^2 + b \leq 0$ **ou** $ax^2 + b \geq 0$ peut se résumer comme suit :

x	$-\infty$ r_1	r_2	$+\infty$
Produit	**Signe de a à l'extérieur des racines**	**Signe de −a à l'intérieur des racines**	**Signe de a à l'extérieur des racines**

La solution est l'intervalle correspondant au signe de l'inéquation.

II – 2 - 3) Exercice d'application :

a) Calcule B = $4x^2 - 9$ pour chacune des valeurs suivantes de x : $x = -3$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1{,}2$; $x = 2$ **b)** Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $B < 0$

III° RESOLUTION DE PROBLEMES :

III – 1) Initiation :

Traduis les phrases écrites en langage mathématiques.

a) le triple d'un nombre est 12 ; b) un nombre auquel on enlève 5 donne 22 ; c) Soit $\boldsymbol{x}$ l'âge actuel d'un frère et y celui de sa sœur. Quel était l'âge de la sœur lorsque son frère avait son âge **y** ?

Soit x un nombre

a) le triple d'un nombre est 12 signifie que $3x = 12$

b) un nombre auquel on enlève 5 donne 22 signifie que $x - 5 = 22$

Soit x l'âge actuel du frère et y celui de la sœur

c) L'âge de la sœur quand le frère avait **y** ans est égale à la différence entre l'âge actuel du frère $\boldsymbol{x}$ et le temps qui s'est écoulé $(\boldsymbol{x} - \mathbf{y})$. Soit $\mathbf{y} - (\boldsymbol{x} - \mathbf{y}) = 2\mathbf{y} - \boldsymbol{x}$

III – 2) Méthode :

Pour résoudre un problème faisant appel aux équations ou inéquation à une inconnue on adopte la méthode suivante :

- Choisissons l'inconnue :
- Mise en équation ou inéquation :
- Résolution :
- Validation :

III - 3) application :

Un garçon dit à sa sœur : **« J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais ton âge.»**

a) En notant x l'âge actuel du garçon et y celui de la sœur, justifie que l'expression $2y - x$ exprime l'âge de la sœur lorsque son frère avait y ans.

b) Justifie que $x = \frac{4}{3}y$

Sachant que l'âge actuel de la sœur est égale à 18 ans, calcule l'âge de son frère.

Résolution :

Soit $\boldsymbol{x}$ l'âge actuel du garçon et $\boldsymbol{y}$ celui de la sœur.

a) L'âge de la sœur quand le frère avait **y** ans est égale à la différence entre l'âge actuel du frère $\boldsymbol{x}$ et le temps qui s'est écoulé $(\boldsymbol{x} - \mathbf{y})$. Soit $\mathbf{y} - (\boldsymbol{x} - \mathbf{y}) = 2\mathbf{y} - \boldsymbol{x}$

b) Puisque la sœur avait $(2\mathbf{y} - \boldsymbol{x})$ **ans** lorsque son frère avait son âge **y**, alors l'âge $\boldsymbol{x}$ actuel du frère est égal à $2(2y - x)$. Donc $x = 2(2y - x) = 4y - 2x$ ce qui équivaut à $3x = 4y$ d'où $x = \frac{4}{3}y$

c) Si y = 18 ans alors $x = \frac{4}{3} \times 18 = 24$ ans.

CHAPITRE III

STATISQUE

DUREE : **8 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maîtriser l'analyser d'un ensemble de données réelles pour établir des prévisions.

Objectifs spécifiques Leçon 1 : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Regrouper en classes une série brute.
- Déterminer les tableaux des effectifs et des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes.
- Construire un histogramme. Interpréter un graphique représentant une série statistique.
- Construire un diagramme cumulatif.

Objectifs spécifiques Leçon 2: Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Déterminer la moyenne, la classe modale.
- Déterminer, graphiquement et par le calcul, la médiane.

Sources :

- **Nouveau programme de 2006** et **Guide d'usage** de Février 2010
- **Loi d'Orientation 91- 22** du 16 Février 1991 ;
- **Manuels :** C.I.A.M. et Excellence 3^{e} ;
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://manuel.sesamath.net/, consulté le 21/ 12/ 2011 à 23 h 24min
  http://www.maths-videos.com, consulté le 26/ 01/ 2015 à 14 h 03min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Vocabulaire vu en 4^{e} ; Pourcentage ; Moyennes ; diagramme en barre, en bâton, circulaire, semi –circulaire.

Introduction :

Les statistiques peuvent être définies comme un ensemble de ***techniques d'interprétation mathématique*** appliquées à des phénomènes pour lesquels une étude exhaustive de tous les facteurs est impossible, à cause de leur grand nombre ou de leur complexité.

Du point de vue historique, il faut noter que c'est à partir du **19^{e} Siècle** que les statistiques sont intégrées aux les mathématiciens. D'ailleurs, le mot **« médiane »** est introduit par **Antoine-Augustin Cournot en 1843**. La notion de **quartile** apparaît **en 1879**.

Du point de vue programme, **en classe de 4^{e}**, vous aviez acquis du vocabulaire en statistique, appris à organiser des données statistiques dans le cas de caractères discrets.

Pour la **classe de 3^{e}**, vous poursuivrez cette étude à travers, l'organisation el la représentation de données statistiques dans le cadre de caractères continus ainsi que la détermination des paramètres de position doivent et permettre d'interpréter des résultats issues d'étude statistique.

La méthode statistique a pour objet : l'étude rationnelle des données.

Dès lors, pour plus d'efficacité, nous diviserons ce chapitre en deux leçons : **Exploitation de données statistique** et **Paramètre de position.**

Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;… et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation)

PLAN DU COURS

Leçon 2 : Exploitation de données statistique	**Leçon 2 : Paramètre de position**
I° Rappel vocabulaire de base :	**I° Mode – Classe modale:**
II° Exemples et Vocabulaire :	I° - 1) Mode

DEROULEMENT DU COURS

CHAPITRE III

LEÇON 1 :
EXPLOITATION DE DONNEES STATISTIQUES

I° RAPPEL VOCABULAIRE DE BASE :

On a mesuré la taille des 12 minimes (garçons qui font du football dans un club). Voici les résultats (en cm) 137 138 137 142 138 142 138 145 145 138 137 139

- Ces données (les 12 mesures) forment **une série statistique**.
- L'ensemble des footballeurs constitue **la population** étudiée. Ex : les 12 minimes ; les élèves d'une classe ; les habitants d'un village, d'une ville, d'un pays,…
- **Echantillon :**

C'est un ensemble d'individus prélevés dans une population déterminée.

Ex : L'échantillon des élèves constituant une rangée de la classe.

- **Unité statistique, individu :**

Chaque minime est une **unité statistique** appelé **individu.**

- **Caractère ou Variable :**

C'est la propriété ou l'aspect singulier que l'on se propose d'observer dans la population ou l'échantillon. Un caractère qui fait le sujet d'une étude porte aussi le nom de ***variable statistique***

► **Le caractère** ou **la variable** étudié est ***la taille en cm*.**

- **Caractère quantitatif :** **Un caractère est dit quantitatif s'il est mesurable.**

Ex : la taille ; le poids des élèves, la puissance fiscale d'un véhicule automobile, le chiffre d'affaire d'une P.M.E, L'âge, le salaire des salariés d'une entreprise.

- **Caractère qualitatif :** **Un caractère est dit qualitatif s'il est repérable sans être mesurable.**

Ex : La nationalité, le sexe, l'ethnie, le teint, le courage, la couleur de la carrosserie d'un véhicule automobile, le lieu de travail des habitants d'un quartier, le sexe et la situation matrimoniale des salariés d'une entreprise

- **La modalité :** c'est la valeur prise par un caractère.

Ex: les modalités de la série précédente sont les tailles différentes obtenues **: 137, 138, 139, 142, 145**

- **Les modalités extrêmes :** ce sont la plus petite et la plus grande valeur prise par le caractère. **Exemple des tailles obtenues : 137 et 145**
- **L'étendue d'une série statistique :** l'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère. **C'est un indicateur de dispersion.**
- **L'effectif total :** C'est la somme des valeurs prisent par les différentes modalités.

Ex : Dans la série précédente, l'effectif total est le nombre total de tailles mesurées **: 12**

- **L'effectif partiel :** est la valeur prise par un caractère. Par exemple, l'effectif de la valeur 138 est 4
- **La fréquence :** d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. La fréquence de la taille 137 est $\frac{3}{12}$= 0,25. **D'où Fréquence =** $\frac{Effectif\ partiel}{Effecitf\ total}$

  Ou **Pourcentage = Fréquence X 100**

II° EXEMPLES ET VOCABULAIRES:

II - 1) Activité :

A l'occasion de la visite médicale d'aptitude aux épreuves physiques du BFEM, un médecin a relevé les tailles suivantes en mètre : 1,68 ; 1,64 ; 1,84 ; 1,65 ; 1,65 ; 1, 74 ; 1, 69 ; 1,83 ; 1,70 ; 1,70 ; 1,71 ; 1,78 ; 1,72 ; 1,73 ; **1,60** ; 1,73; 1,74 ; 1,71 ; 1,75 ; 1,76 ; 1,77 ; 1,75 ; 1,77 ; 1,77 ; 1,78 ; 1,70.

1) Regroupe les tailles en intervalles (ou classes) du type [a ; b [dans les cas suivants :

1 – 1) b – a = 5 cm

1 – 2) b – a = 10 cm

2) Trouve les centres des classes (intervalles) pour chacun de ces cas en posant $c_i = \frac{b+a}{2}$.

Solution :

1 – 1) Regroupons les tailles en classes du type [a ; b [tels que b – a = 5 cm = 0,05 m

Taille (en cm)	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Centre	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5

1 – 2) Regroupons les tailles en classes du type [a ; b [tels que b – a = 10 cm = 0,10 m puis calculons leurs centres.

Taille (en cm)	[160 ; 170 [	[170 ; 180 [	[180; 190 [
Centre	165	175	185

II° - 2) Amplitude et centre d'une classe :

- **Amplitude :** L'amplitude d'une classe **[a ; b [**est le réel positif **b – a**
- **Centre d'une classe :** Le centre d'un intervalle ou classe **[a ; b [**est le réel positif $\frac{b+a}{2}$

III° - CLASSEMENT ET REPRESENTATION DES DONNEES STATISTIQUES :

III° - 1) Activité :

Reconduisons l'activité précédente :

Remplis le tableau suivant en prenant des classes d'amplitude 5 cm.

Taille					
Effectifs					

2) Construis dans un repère orthogonal en portant en abscisse les tailles regroupées en classes et en ordonnée les effectifs correspondants, puis construis des rectangles de largeur l'amplitude des classes et de hauteurs les effectifs correspondants aux classes.

3) Joins les point d'abscisses les centres des classes et d'ordonnées les effectifs de ces classes.

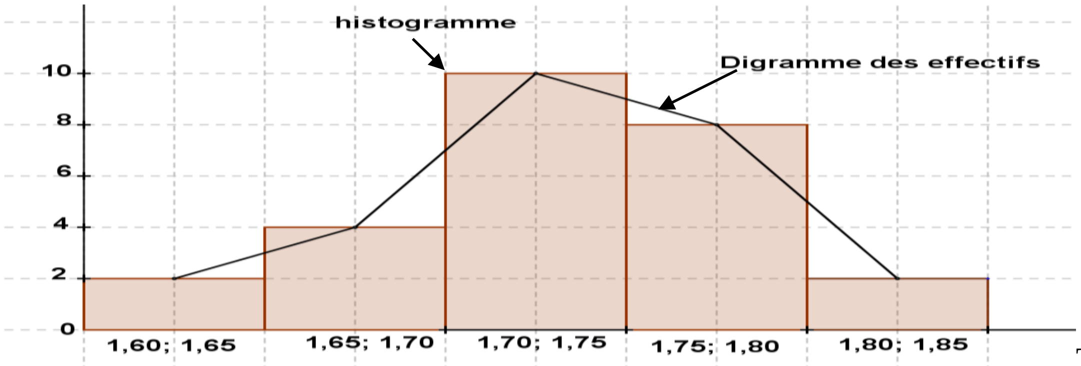
Solution :

Taille (en cm)	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectifs	2	4	10	8	2

III° - 2) Distribution groupée en classes d'égale amplitude :

Dans les questions 1- 1) et 1 – 2), de l'activité du II°, les tailles sont groupées en classes d'égales amplitudes.

III° - 3) Histogramme :



L'histogramme est l'ensemble des rectangles dont les aires sont respectivement proportionnelles aux effectifs et aux amplitudes des classes.

III° - 4) Diagramme des effectifs :

En joignant les points dont les coordonnées sont respectivement les centres des classes et les effectifs correspondants, on obtient **une ligne brisée** qui est **le Diagramme des effectifs**.

IV° EFFECTIFS CUMULES, FREQUENCES CUMULEES, DIAGRAMME CUMULATIF :

IV° - 1) Effectifs cumulés :

- **Dans le cas d'un caractère discret :**
  - ✓ **L'ECC** d'une modalité est le nombre d'individus qui présentent une valeur de caractère ***inférieure ou égale*** à ladite modalité.

On fait ***la somme des effectifs associés aux modalités inférieures ou égale à la modalité***.

  - ✓ **L'ECD** d'une modalité est le nombre d'individu qui présentent une valeur de caractère ***supérieure ou égale*** à ladite modalité.

On fait ***la somme des effectifs associés aux modalités supérieures ou égales à la modalité***.

Exemple : Si on considère le tableau suivant.

note	6	8	9	10	11	12	14	15	17	18
Eff.	- 1	+ 1	2	1	4	1	**4**	**1**	**3**	2
ECC	1	2	4	5	9	**10**	14	15	18	**20**
ECD	**20**	19	18	16	15	**11**	10	6	5	2

L'ECC de 12 est 10 = 1+1+2+1+4+1

L'ECD de 12 est 11 = 1+ 4+1+ 3+2

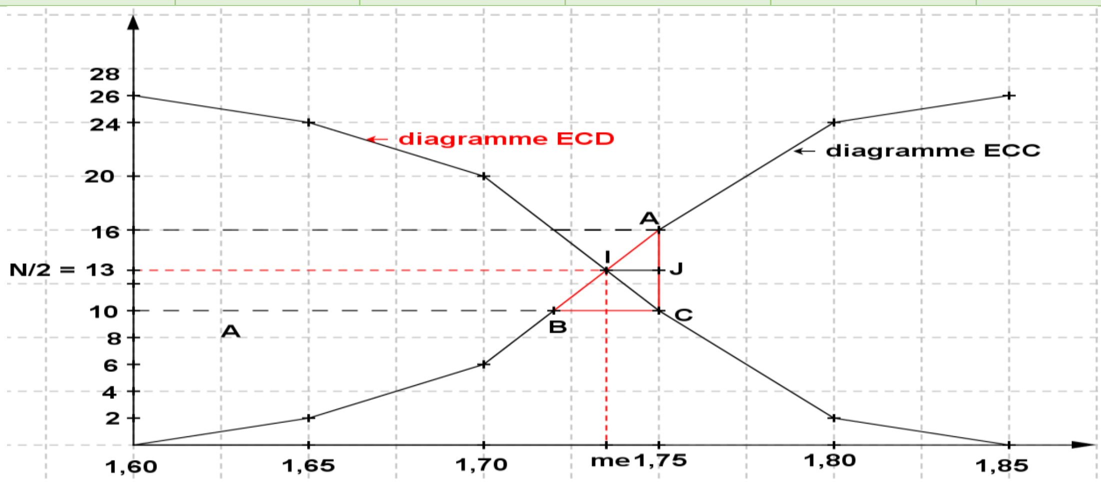
- ✓ L'ECC de **12** est **10** signifie que 10 élèves ont une note **inférieure ou égale à** 12 (**au plus**).
- ✓ L'ECD de **12** est **11** signifie que 11 élèves ont une note **supérieure ou égale** à 12 (**au moins**).

IV – 2) Diagramme des E.C.C et des E. C. D d'un caractère continu:

❖ **Dans le cas d'un caractère continu :**

Exemple : Si on considère le tableau suivant

Taille (en cm)	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectifs	2	4	10	8	2
ECC	2	6	16	24	26
ECD	26	24	20	10	2



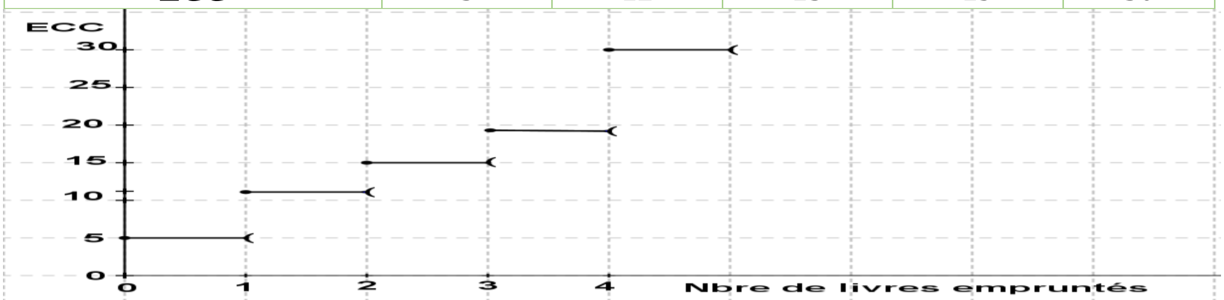
❖ **Dans le cas d'un caractère discret :**

Dans ce cas, le diagramme cumulatif se présente sous forme de représentation en escalier.
La variable passe d'une de ses valeurs à la suivante brutalement et non progressivement comme dans le cas d'une variable continue.

Exemple :

Le comptable matière du L.S.M.B.MB/Porokhane a noté le nombre de livres emprunté par les 30 élèves d'une classe de 3^{e}. Le tableau suivant illustre les résultats obtenus.

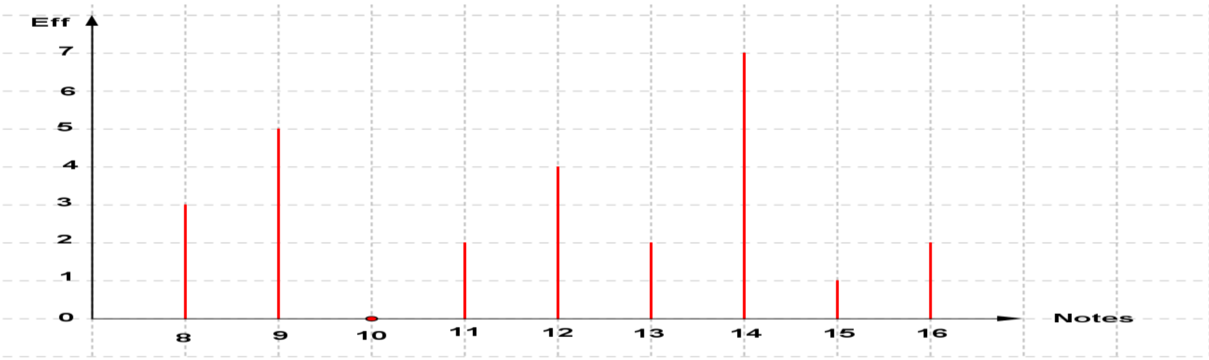
Nbre de livres empruntés	0	1	2	3	4
Effectif	5	7	3	4	11
ECC	5	12	15	19	30



❖ **Diagramme en bâtons des effectifs :**

Voici les notes obtenues à un contrôle de mathématiques par une classe de 3ème
Donne la représentation du diagramme en bâtons des effectifs

Note	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Eff	3	5	0	2	4	2	7	1	2



IV° - 2) Fréquences cumulées en %:

Le tableau suivant représente la série des âges des élèves d'une classe de 3e

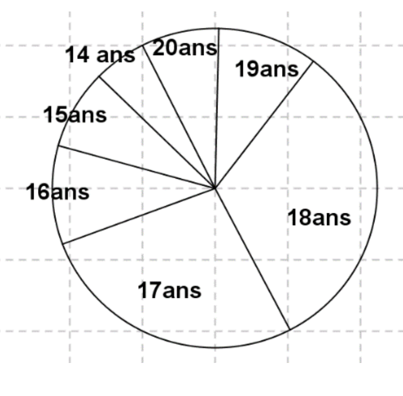
Age	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	3	5	6	16	19	6	5
F(%)	5	8	10	27	32	10	8
FCC en (%)	5	13	23	50	82	92	100

❖ **Diagramme circulaire des Fréquences en %**

Soit F_i la fréquence d'une modalité et x_i sa valeur correspondante en (°)
La somme des fréquences étant 100 alors
100 → 360°
Fi → x

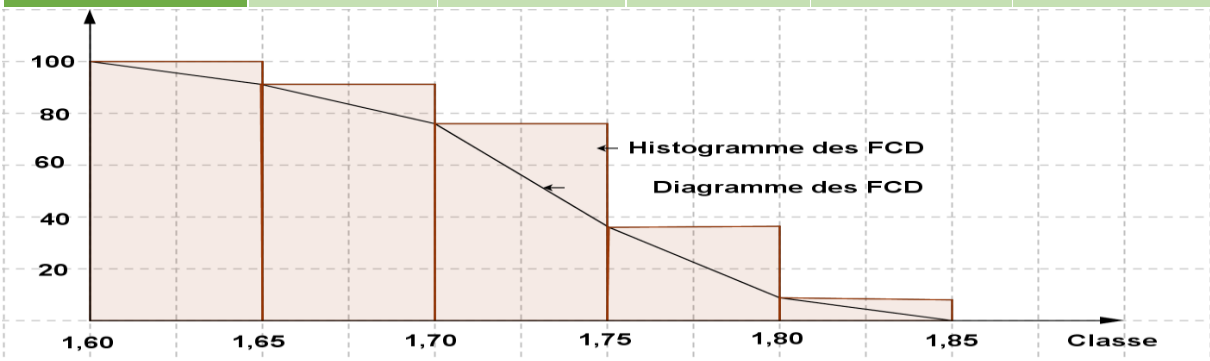
$xi = \frac{360\ Fi}{100}$ = 3,6 F_i

X_1 = 3,6 X 5= 18° ; X_2 = 3,6 x 8 = 29° ; X_3 = 3,6 x 10 = 36°
X_4 = 3,6 x 27 = 97° ; X_5 = 3,6 x32 =115°; X_6 =3,6 x 10 = 36°
X_7 = 3,6 x 8 = 29°



❖ **Diagramme des F.C.D.**

Taille (en cm)	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectifs	2	4	10	8	2
Fréquence (%)	8	15	38	31	8
FCD(%)	100	92	77	39	8



CHAPITRE III

Leçon 2 : PARAMETRE DE POSITION

I° MODE – CLASSE MODALE:

I° - 1) Mode :

Après un devoir de P.C, 44 élèves ont obtenu les notes suivantes :

Note	1	3	5	6	7	9	11	13
Eff	7	3	5	10	2	7	6	4

1) Quel est le caractère de cette série ?
2) Quelle est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus élevé ? Cette valeur est le mode.

Solution :

1) Le caractère de cette série discret est la note.
2) **6** est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus élevé.

I° - 2) Définition :

Le **mode** d'une série statistique est **la modalité** ou **la classe** ayant l'effectif le plus élevé.

- **Remarque :** Une série peut être multimodale (bimodale, trimodale, etc.)

I° - 3) Exemple :

Voici deux séries statistiques. Détermine le ou les mode(s) de chacune. Comment est la série 2 ?

Série N° 1 :

âge	18	19	20	21	22
Eff	1	5	3	2	2

Le mode de la série N°1 est 19. La série N°1 est **unimodale.**

Série N° 2 :

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Eff	9	2	5	9	3

Les modes de cette série sont les classes : [0 ; 4[et [12 ; 16[. La série 2 est **bimodale**.

I° - 2) Classe modale :

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Eff	8	2	5	9	3

Dans cette série, la classe **[12 ; 16[**correspond à l'effectif le plus élevé : on l'appelle **classe modale.**

- **Remarque :** Tout élément de cette classe est un mode.

II° LA MEDIANE :

II° - 1) Médiane d'un caractère discret :

La médiane est la modalité pour laquelle, il y a autant de données inférieures que données supérieurs. Elle partage la population en deux parties de même effectif.

La médiane d'une série statistique à caractère quantitatif discret, *ordonnée* et d'effectif total N est :

1e Cas : effectif total impair :

Après une enquête sur l'âge d'un groupe de 15 élèves, on a obtenu les résultats suivants :

Valeur .Caract.	15	16	17	18	19	20	21	22
Eff	2	3	1	4	2	1	1	1

Détermine la médiane de cette série

- **Ordonnons toutes les valeurs :**

$\underbrace{15 – 15- 16-16-16- 17- 18}_{7}$ - $\underbrace{\mathbf{18}}_{\textbf{Médian}}$ - $\underbrace{18-18- 19-19-20-21-22}_{7}$

- **Généralisation :**

Si l'effectif total (N) est impair, la médiane est la modalité de rang $\frac{N+1}{2}$

Dans l'exemple ci- dessus la médiane est la modalité de ***rang*** : on a : $\frac{15+1}{2} = 8$

Donc 18 est la médiane de la série.

2e Cas : effectif total pair :

Exemple : Voici l'ordre des valeurs obtenues par des élèves après une épreuve de dictée.

1 - 1 - 1 – 2 – 4- **[4 – 5]** - 5 – 7 – 8 – 8 – 6

5 Intervalle médian 5

Ici 4 et 5 sont des médianes et l'intervalle [4 ; 5] est un intervalle médian.

❖ **Généralisation :**

Si l'effectif total (N) est pair, la médiane est la demi-somme des modalités de rang respectifs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.

Si l'effectif total (N) est pair, on peut trouver un entier K /: N = 2K soit K = $\frac{N}{2}$. Les valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}$+1 partagent la série ordonnée en deux parties de même effectif. L'intervalle qu'elles forment est ***appelé intervalle médian***. Toute valeur de l'intervalle médian est valeur médiane. Mais dans la pratique, on choisira le centre de l'intervalle.

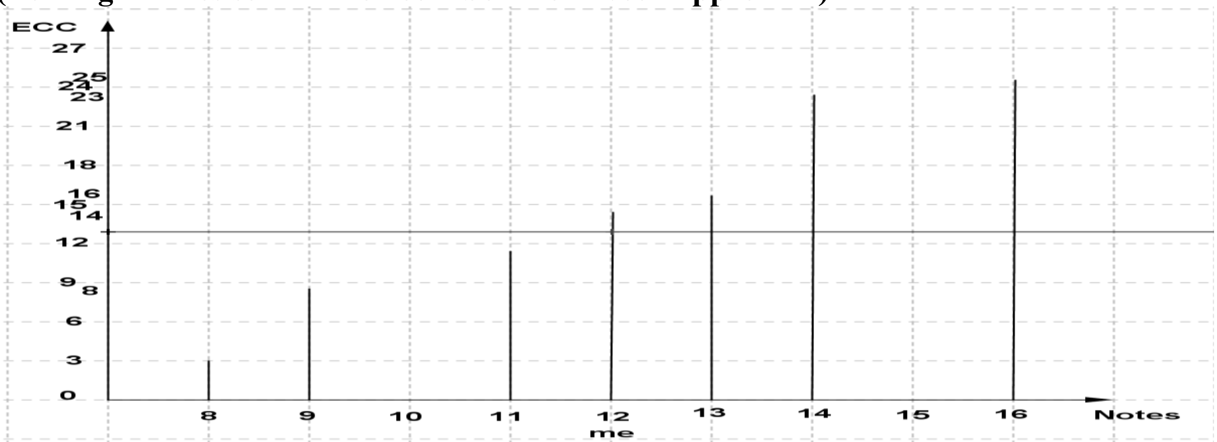
Dans l'exemple ci-dessus, on a : $\frac{4+5}{2}$ = **4,5**

NB :

- ❖ On peut aussi construire le diagramme en bâtons des E.C.C, puis tracer la droite parallèle à l'axe des modalités (abscisse) et passant par l'ordonnée N/ 2. Le premier bâton coupé correspond à la médiane.
- ❖ A partir des E.C.D, la médiane correspond au dernier bâton coupé.

Note	8	9	11	12	13	14	16
Effectif	3	5	2	4	2	7	2
E .C. C.	3	8	10	14	16	23	25
E. C. D.	25	22	17	15	11	9	2

(Le Diagrammes sera fait en collaboration avec l'apprenant).



II° - 2) Médiane d'un caractère continu :

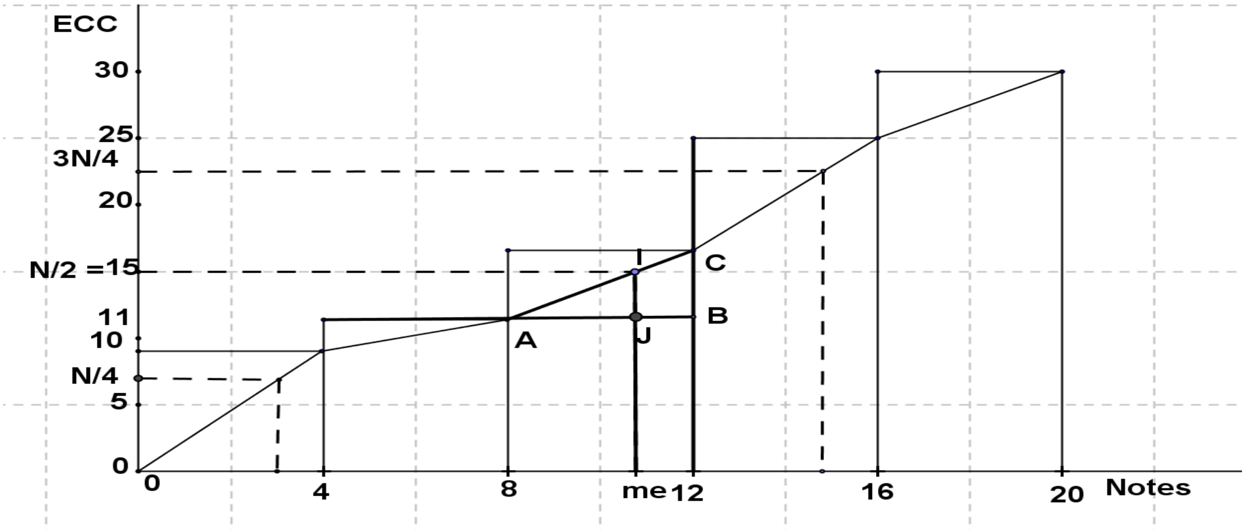
II° - 2 – 1) Méthode graphique :

Dans le cas d'une série groupé par classe, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- ❖ Construire **les diagrammes ou polygones** des ECC et ECD dans **un même repère**. Ces deux polygones **se coupent** en point **I. L'abscisse de ce point est la médiane de la série**.

- On peut construire le **diagramme des ECC** (ou ECD), puis tracer la droite passant par l'ordonnée **N/2** et parallèle à l'axe des abscisses ; elle coupe la courbe en un point A. **L'abscisse de ce point est la médiane de la série**.

Note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs	9	2	5	9	5
E.C.C.	9	11	16	25	30
E.C.D.	30	21	19	14	5



- **Remarque :** les valeurs trouvées par la méthode graphique sont des valeurs approchées de la médiane et peuvent être différentes selon la méthode utilisée.

II° - 2 - 2) Détermination de la médiane par calcul :

On peut utiliser le **théorème de Thalès** :
On a : I ϵ [AC] ; J ϵ [AB] et (IJ) // (BC) donc les triangles AIJ et ABC sont en position de **Thalès**. Donc d'après le **théorème de Thalès** on a : $\frac{AJ}{AB} = \frac{IJ}{BC}$
Or, AB = 12 – 8= 4 ; BC = 16 – 11 = 5 et IJ = 15 – 11 = 4
D'où AJ = $\frac{AB \text{ X } IJ}{BC} = \frac{4 \; X \; 4}{5}$ = 3,2 On a ainsi $\mathbf{m_e}$ = 8 + 3,2 = **11,2**

II° - 3) Calcul des antécédents :

N étant l'effectif total, cherche graphiquement l'antécédent $\frac{N}{2}$. Trouve l'image de $\frac{N}{2}$; de $\frac{N}{4}$ et de $3\frac{N}{4}$. Interprète le résultat.

Solution :

Les modalités correspondantes aux rangs $\frac{N}{4}$; $\frac{N}{2} = \frac{2N}{4}$ et $\frac{3N}{4}$ sont appelées respectivement **premier quartile ; deuxième quartile et troisième quartile.**
Le **premier quartile** sépare l'effectif total en deux parties $\frac{1}{4}$N et $\frac{3}{4}$N.
Le **troisième quartile** sépare l'effectif total en deux parties $\frac{3}{4}$N et $\frac{1}{4}$N.
La **médiane est le deuxième quartile.**

- **Remarque :**

La médiane d'une série **n'est pas toujours** une valeur de la série. **Cependant** les ***premiers*** et ***troisièmes quartiles*** pour **une série à caractère discret** peuvent se calculer :
Exemple 1 : Soit la série statistique 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 28, 34 contenant 12 Caractères (N = 12).

- ***Le premier quartile:*** Comme $\frac{1}{4}$ N = 0.25 × 12 = 3 est un nombre entier, on a: $Q_{1/4}=\frac{x_{(3)}+x_{(4)}}{2}$

Soit $\boldsymbol{Q_{1/4}}=\frac{\mathbf{15+16}}{\mathbf{2}}$ = **15, 5**

- ***La médiane:*** Comme $\frac{1}{2}$ N = 0.5 × 12 = 6 est un nombre entier, on a **M** = $\mathbf{Q_{1/2}}=\frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2}$ = **20,5**

- ***Le troisième quartile:*** Comme $\frac{3}{4}$ N = 0.75 × 12 = 9 est un nombre entier, on a: $Q_{1/4}=\frac{x_{(9)}+x_{(10)}}{2}$

Soit $\boldsymbol{Q_{1/4}}=\frac{\mathbf{25+27}}{\mathbf{2}}$ = **26**

Exemple 2 : Soit la série statistique 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 27 contenant 10 caractères (*n* = 10).

- ***Le premier quartile:*** Comme $\frac{1}{4}$ N = 0.25 × 10 = 2.5 n'est pas un nombre entier, on a: $Q_{1/4}$= *x* ([2,5]) = *x*(3) = 15.

- ***La médiane:*** Comme $\frac{1}{2}$N = 0.5 ×10 = 5 est un nombre entier, on a: M = $Q_{1/2}=\frac{x_{(5)}+x_{(6)}}{2}$ = 18,5

- ***Le troisième quartile:*** Comme *np* = 0.75 × 10 = 7.5 n' est pas un nombre entier, on a: $Q_{3/4}$= *x* ([7,5])= *x*(8) = 24.

Pour **un caractère continu** on peut utiliser ***la méthode de l'extrapolation linéaire.***

Exemple : Déterminons les premier et troisième quartiles

Calcul de $Q_{1/4}$= :

On a : N = 50 alors N / 4 = 12,5 d'où en utilisant les ECC, on a :

8 < 12,5 < 22 (1) et en utilisant les centres, on a : 2 < $Q1$ < 6 (2)

x_i	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
n_i	8	14	20	6	2
ECC	8	22	42	48	50
c_i	2	6	10	14	18

Par extrapolation linéaire, on a alors :

$\frac{6-Q_{1/4}}{Q_{1/4}-2}=\frac{22-12{,}5}{12{,}5-8}$ Soit $\frac{6-Q_{1/4}}{Q_{1/4}-2}=\frac{19}{9}$

d'où 9 (6 - $Q_{1/4}$) = 19 ($Q_{1/4}$ - 2)

$19Q_{1/4}$ + $9Q_{1/4}$ = 54 + 38

d'où $28Q_{1/4}$ = 92 Donc $\boldsymbol{Q_{1/4}=\frac{92}{28}=3,29}$

Calcul de $Q_{3/4}$:

On a : N = 50 alors 3N / 4 = 37,5 d'où en utilisant les ECC, on a : 22 < 37,5 < 42 (1) et en utilisant les centres, on a : 6 < $Q3$ < 10 (2)

Par extrapolation linéaire, on a alors :

$\frac{10-Q_{3/4}}{Q_{3/4}-6}=\frac{42-37{,}5}{37{,}5-22}$ Soit $\frac{10-Q_{3/4}}{Q_{3/4}-6}=\frac{9}{31}$ d'où 31(10 - $Q_{3/4}$) = 9 $Q_{3/4}$ - 6)

$31Q_{3/4}$ + $9Q_{3/4}$ = 310 + 54 d'où $40Q_{3/4}$ = 364 **Donc** $\boldsymbol{Q_{3/4}=\frac{364}{40}=9,10}$

II° - 4) La classe médiane :

- **La classe médiane** d'une série statistique est la **1ère classe dont l'E.C.C** est **supérieur ou égal** à la **moitié de l'effectif total (N).** **Exemple :** pour la série précédente N = 30 et $\frac{N}{2}$ = 15

Comme 16 > 15, donc la 1ère classe dont l'E.C.C est sup à la moitié de l'effectif total est [8; 12[

- **La classe médiane** d'une série statistique est **la dernière classe dont l'E.C.D** est **supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total**.

III° MOYENNE D'UNE SERIE STATISTIQUE:

III – 1) Cas d'un caractère discret :

C'est la somme des données n_ix_i, divisée par l'effectif total N.

$\overline{X}=\frac{\sum n_ix_i}{N}$ où ***xi*** représente **les modalités** ; **nᵢ** les **effectifs partiels** et **N l'effectif total**.

$\bar{X} = \sum x_i f_i$ où **xi** représente **les modalités** ; **fi** les **fréquences partiels** ou $\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{100}$ si f_i est en %.

Exemple : Voici les âges d'un groupe de 13 élèves :

âge	18	19	20	21	22
Effectif	1	5	3	2	2

Calcule la moyenne de cette série. Soit $\bar{X}$ cette moyenne.

$\bar{X} = \frac{(1X18)+(5X19)+(3X20)+(2X21)+(2X22)}{13}$ = 19,92 ; $\bar{X}$= 19,92, l'âge moyenne est alors **20ans.**

III – 2) Cas d'un caractère continu :

C'est la somme des données $c_i n_i$, divisée par l'effectif total N.

$\bar{X} = \frac{\sum c_i n_i}{N}$ où n_i représente **les modalités** ; **Ci** les **centres partiels** et **N l'effectif total**.

Voici ci-dessous, les notes obtenues lors d'un devoir : **a)** Calcule les centres des classes. **b)** Calcule la moyenne de la série. **c)** Calcule la somme des produits « centre de classe par la fréquence de la classe » puis compare la valeur trouvée à celle de b)

Note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs	9	2	5	9	3
Centre	2	6	10	14	18
fréquence	0,32	0,07	0,18	0,32	0,11

b) La moyenne de la série est alors : L'effectif total est : N = 9 + 2 + 5 + 9 + 3 = 28

$\bar{X} = \frac{(2X9)+(6X2)+10X5)+(14X9)+(18X3)}{28}$ = 9,28 ; $\bar{X}$**= 9,28**

c) Calcule la somme des produits « centre de classe par la fréquence de la classe » puis compare la valeur trouvée à celle de b)

$\bar{X}$ = 2 x 0,32 + 6 x 0,07 + 10 x 0,18 + 14 x 0,32 + 18 x 0,11 = 9,32 ; $\bar{X}$ **= 9,32**

Nous constatons que ces valeurs sont relativement égales.

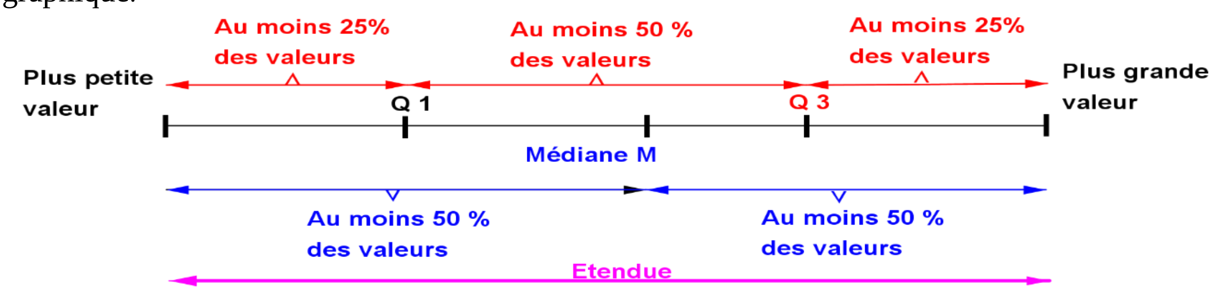
III – 3) Définition :

La moyenne d'une série statistique à caractère continu est égale à la somme des **produits « centre classe par effectif de la classe »** sur l'effectif total.

NB : La moyenne d'une série statistique à caractère continu est égale à la somme des produits « **centre classe par la fréquence de la classe.»** $\bar{X} = \sum C_i F_i$ **Attention si** F_i **est en % on divise par 100 soit** $\bar{X} = \frac{\sum c_i f_i}{100}$.

- **Remarque :**
  - ✓ **La moyenne et la médiane sont des indicateurs de tendance centrale.**
  - ✓ Contrairement à la moyenne ; la médiane d'une série de valeurs n'est pas sensible aux valeurs extrêmes de la série.
- **Résumé d'une série statistique**

Après avoir déterminé les différents indicateurs, il est possible de proposer un résumé statistique d'une série. Dans de nombreuses disciplines, il est d'usage de présenter ce résumé sous forme graphique.



CHAPITRE IV

EQUATIONS ET SYSTEME D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES

DUREE : **8 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être de maîtriser la résolution des équation, des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues dans des situations problèmes relatives à la vie.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une équation à deux inconnues du type indiqué
- résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues.
- résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué par substitution, par addition, par comparaison.
- reconnaitre la position relative des droites dont les équations interviennent dans le système.
- résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué.

Sources :

- ✓ Nouveau programme 2006 et Guide d'usage de Février 2010
- ✓ Loi d'orientation 91 – 22 du 22 Février 1991 ;
- ✓ **Manuels :** C.I.A.M. 3ème ; Excellence 3ème
- ✓ **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://manuel.sesamath.net/, consulté le 21/ 12/ 2011 à 23 h 24min
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis :

Nullité d'un produit, identités remarquables, égalité de deux quotients, système d'équations,...

PLAN DU COURS

I° Equation à deux inconnues :	II° Système d'équations à deux inconnues :
I° - 1) Activité :	II° - 1) Définition :
I° - 2) Définition et Vocabulaire:	II° - 2) Méthodes de résolution :
I° - 3) Recherche de solution :	II° - 2 – 1) Par substitution :
I° - 4) Equations équivalentes :	II° - 2 – 2) Par addition :
I° - 5) Représentation graphique de l'ensemble des solutions :	II° - 2 – 3) Par comparaison :
I° - 6) Exercice d'application :	II° - 2 – 4) Exercice d'application :

Introduction :

L'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues n'est que le prolongement logique de celle des équations à une inconnue. Ainsi, cette étude nous permet de résoudre des problèmes concrets auxquels nous sommes souvent confrontés en économie, en astronomie, en physique …

De ce point de vue, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;… et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation), avec usage de la calculatrice ; …

C'est dire qu'elle revêt une importance capitale qui mérite aussi l'attention de tout un chacun.

DEROULEMENT DU COURS

I° EQUATION A DEUX INCONNUES :

I° - 1) Activité :

Pour 24 équerres et 12 compas, un commerçant paie 4200 F
Soit x le prix d'équerres et y le prix de compas.
1°) Trouve l'écriture mathématique correspondante à cette situation.
2°) Ajoute l'opposé de 4200 à chaque membre de l'égalité. Comment appelle- t-on la nouvelle égalité ainsi obtenue ?

I° - 2) Définition :

On appelle équation du premier degré à deux inconnues, toute équation de la forme ax + by + c = 0, où a et b des constantes qui ne sont pas à la fois nuls et x et y les inconnues.

I° - 3) Recherche de solution :

Un couple (x ; y) est une solution d'une équation à deux inconnues si ses termes vérifient cette équation.

Exemple: Considérons l'équation suivante : $2x - 3y + 1 = 0$

- Le couple $(0 ;\frac{1}{3})$ est une solution de l'équation car $2(0) - 3(\frac{1}{3}) + 1 = 1 - 1 = 0$
- Le couple (4 ; 3) est solution car $2(4) - 3(3) + 1 = 8 - 9 + 1 = 0$

❖ **Remarque :**

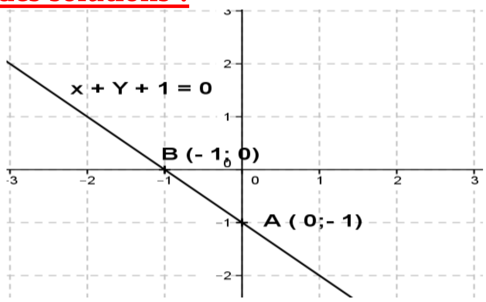
✓ Une équation du premier degré à deux inconnues admet ***une infinité de solutions.***
✓ Une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues est ***un couple (x ; y) de réels.***
✓ Pour trouver une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme **ax + by + c = 0**, il suffit de donner à x une valeur et calculer la valeur de y correspondante (ou vice-versa).

I° - 4) Equations équivalentes :

Soit $2x - 3y + 1 = 0$ et $12x - 18y + 6 = 0$ deux équation. Les couples (4 ; 3) et $(0 ;\frac{1}{3})$ sont solutions pour ces deux équations : **elles sont équivalentes**.
On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

I° - 5) Représentation graphique de l'ensemble des solutions :

Représente dans un repère orthonormal (O ; I ; J) l'ensemble des solutions de l'équation $x + y + 1 = 0$
Pour construire cette droite, il suffit de choisir deux points dont les coordonnées sont des couples solutions de l'équation.
L'ensemble des solutions est la droite (AB) d'équation (AB) : $x + y + 1 = 0$.



I° - 6) Exercice d'application :

1) Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :
$-3x + 2y - 1 = 0$; $3y + 5 = 0$; $x - 2 = 0$;
2) Vérifie graphiquement si les couples de réels suivants sont solutions de chacune des équations ci- dessus : (2 ; 0) ; (1 ; 2) ; $(0 ;\frac{1}{2})$

II° SYSTEME D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES :

II° - 1) Activité :

Dans une boutique du coin, Aly a payé 4 stylos et un crayon à 450 F et Aida a payé un crayon noir et un stylo à 150 F
Soit x le prix d'un crayon noir et y celui d'un stylo. Ecris le système d'équations correspondant.

II° - 2) Définition :

On appelle système de deux équations à deux inconnues, tout système de la forme : $\begin{cases} \boldsymbol{ax+by+c=0} \\ \boldsymbol{a'x+b'y+c'=0} \end{cases}$

II° - 3) Méthodes de résolution :

II° - 3 – 1) Par substitution :

La substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une des équations, puis à la remplacer par sa valeur dans l'autre équation :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 3x-y-5=0 \\ -2x+y-2=0 \end{cases}$

- Exprimons, y en fonction de x puis remplaçons son expression dans l'équation (2)

On obtient $\begin{cases} y=3x-5 \\ -2x+(3x-5)-2=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=3x-5 \\ x=7 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} y=16 \\ x=7 \end{cases}$; $\boxed{S=\{(\mathbf{7};\mathbf{16})\}}$

II - 3 – 2) Par addition ou combinaison:

Elle consiste à donner des équations équivalentes à celles du système de façon qu'en faisant la somme, les termes contenant une des inconnues s'annulent :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x+3y-2=0 \ (1) \\ 3x-2y+10=0 \ (2) \end{cases}$

- Multiplions l'équation (1) par -3 et l'équation (2) par 2, on obtient le système équivalent $\begin{cases} -6x-9y+6=0 \\ 6x-4y+20=0 \end{cases}$
- Faisons la somme des équations, les termes contenant ***x*** s'annulent et on obtient l'équation $-13y+26=0$ soit **y = 2**
- Le même système équivaut à $\begin{cases} 4x+6y-4=0 \\ 9x-6y+30=0 \end{cases}$ en faisant la somme des équations, les ***y*** s'annulent et On obtient ***x* = -2**

Le couple solution du système est (-2 ; 2) ; on note $\boxed{S=\{(\mathbf{-2}\,;\,\mathbf{2})\}}$

- **Remarque :** **On peut utiliser la méthode de substitution pour trouver l'autre inconnue.**

II - 3 – 3) Par comparaison :

Elle consiste à exprimer la même inconnue en fonction de l'autre, ceci dans les deux équations, puis à faire l'égalité des deux expressions :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$

- Exprimons x en fonction de y dans chacune des équations. On obtient résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équation suivant : $\begin{cases} x=y-2 \\ x=2y+1 \end{cases}$

Faisons l'égalité des deux expressions $\begin{cases} x=y+2 \\ y-2=2y+1 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} y=-3 \\ x=-5 \end{cases}$; $\boxed{S=\{(\mathbf{-3};\mathbf{-5})\}}$

II - 3 – 4) Exercice d'application :

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants en utilisant au moins une fois chacune des méthodes étudiées

a) $\begin{cases} 4x-y-5=0 \\ y-2x+3=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y-7x+1=0 \\ 2-y+7x=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-y-8=0 \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x+4=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x+y-9=0 \\ 5x-y-7=0 \end{cases}$

II° - 3 – 5) Interprétation graphique :

On considère les systèmes suivants :

$(S_1)\ \begin{cases} 2x - y + 3 = 0\ (1) \\ x - y + 4 = 0\ \ (1') \end{cases}$; $(S_2)\ \begin{cases} y = \frac{3}{5}x - 1\ (3) \\ 2y = \frac{6}{5}x - 2\ (3') \end{cases}$; $(S_3)\ \begin{cases} -3x + y + 1 = 0\ (2) \\ -2 + y - 3x = 0\ (2') \end{cases}$

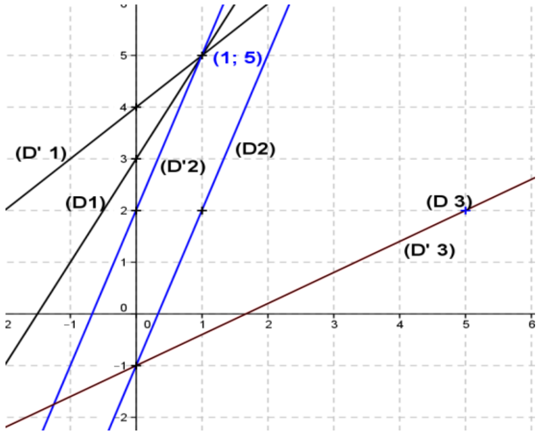
1) Trace dans un même repère orthonormal les droites (D_1) et (D'_1)

2) Combien de points ont –elles en commun ? Chaque couple de coordonnées d'un point commun est solution du système (S_1)

3) Trace dans le même repère les droites (D_2) et (D'_2) ; (D_3) et (D'_3) correspondantes respectivement aux systèmes (S_2) et (S_3).

4) Reprends la question 2) pour chaque système.

Solution :



2) (D1) ∩ (D'1) = $\{A\ (1; 5)\}$.
Les droites (D1) et (D'1) sont sécantes. Elles ont un seul point en commun. Donc le couple $(1; 5)$ est solution du système (S_1) : $\boldsymbol{S_1 = \{(1; 5)\}}$

3) Les droites (D2) et (D'2) sont parallèles. Elles n'ont aucun point en commun.
(D2) ∩ (D'2) = ∅. Donc le système (S_2) n'admet pas de solution : $S_2 = \emptyset$
(D3) ∩ (D'3) = (D3) = (D'3). **Les droites (D3) et (D'3) sont alors confondues.** Donc le système (S_3) admet une infinité de couple solution.

CHAPITRE V

INEQUATIONS ET SYSTEMES D'INEQUATIONS A DEUX INCONNUES

DUREE : **4 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maîtriser l'utilisation des inéquations et des systèmes d'inéquations pour résoudre des problèmes afférents à des situations de leur vie quotidienne.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une inéquation à 2 inconnues.
- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation à deux inconnues du type indiqué.
- Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'un système d'inéquations à 2 inconnues.
- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux inéquations à deux inconnues.

Sources :

- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Nouveau programme de **2006**
- Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Addition et inégalité ; multiplication et inégalité ; inverse d'un rationnel ; opposé d'un rationnel ; addition ; multiplication et propriétés (commutativité ; associativité ; élément neutre) ;

PLAN DU COURS

I° Inéquation à deux inconnues du type : $ax + by + c \leq 0$	II° Résolution d'un système d'inéquation du premier degré à deux inconnues
I° - 1) Activité	II° - 1) Activité
I° - 2) Méthode	II° - 2) Méthode
Remarque	II° - 3) Exemple
I° - 3) Exemple	II° - 4) Exercice d'application
I° - 4) Exercice d'application	

Introduction :

Du point de vue historique, le premier témoignage connu de résolution de problèmes d'inéquations et de système d'inéquations se trouve sur une tablette babylonienne datant il y a environ 2000 ans avant J. C

Du point de vue programme, cette notion n'est pas tout à fait nouvelle, car nous avons amorcé depuis au moins la classe de 4e.

Du point de vue intérêt, s'inscrivant toujours dans la continuité, ce chapitre trouve son intérêt dans la résolution des problèmes liés à des dépenses et d'économie (maximisation des dépenses) de la vie courante. Il peut-être d'ailleurs lié à plusieurs thèmes de convergence tels que : Développement durable ; Energie ; Santé ; … et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation), avec usage des calculatrices ; …

DEROULEMENT DU COURS

I° INEQUATION A DEUX INCONNUES DU TYPE : $ax + by + c \leq 0$:

I° - 1) Activité :

Soit x et y deux entiers naturels tels que le triple du premier et le double du deuxième soit inférieur à 4.

a) Donne l'écriture mathématique de cette phrase.
b) Trace dans un repère orthonormal la droite d'équation (D) : $3x + 2y = 4$
c) Montre que le point O (0 ; 0) vérifie l'inéquation trouvée.
d) Hachure le demi-plan de frontière (D) ne contenant pas le point O (0 ; 0).

I° - 2) Méthode :

Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax + by + c \leq 0$, utilise la méthode suivante :

- Trace dans un repère orthonormal, la droite d'équation $ax + by + c = 0$:
- Considère un point M (x_M ; y_M) de l'un des demi-plans de frontière (D)
- Remplace les coordonnées du point M dans l'inéquation :

Si les coordonnées x_M et y_M vérifient l'inéquation, alors M appartient au demi – plan contenant l'ensemble des solutions de l'inéquation. On y écrit **S** et on hachure l'autre demi- plan.

Si les coordonnées x_M et y_M ne vérifient pas l'inéquation, alors M n'appartient pas au demi – plan contenant l'ensemble des solutions de l'inéquation. On hachure ce demi – plan puis on écrit **S** sur l'autre ne contenant pas M.

❖ **Remarque :**

Généralement, il faut choisir le point O (0 ; 0) si la droite ne passe pas par l'origine du repère.

I - 3) Exemple :

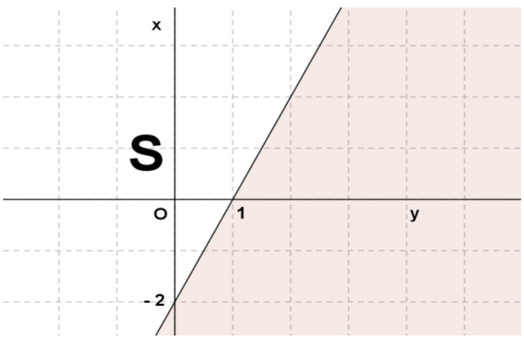
Soit à résoudre dans IR² l'inéquation $2x - y < 2$

Traçons la droite (D) d'équation (D) : $2x - y = 2$

	A	B
x	0	1
y	-2	0

Le point M (0 ; 0) : 2 x 0 - 0 < 2 **VRAI**

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est le demi – plan de frontière (D) (exclue) contenant le point O (0 ; 0)



I° - 4) Exercice d'application :

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

II° RESOLUTION D'UN SYSTEME D'INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES :

II° - 1) Activité :

Deux nombres x et y sont tels que la somme du double du premier et du triple du deuxième donne un nombre inférieur à 3.
Ces mêmes nombres sont tels que les sommes de l'opposé du premier, du triple du deuxième et de 1 soient inférieures ou égale à 2.

a) Traduis ces deux phrases en écriture mathématique.
b) Trace dans un même repère les droites (D) et (D') d'équation respectives $2x + 3y = 3$ et $-x + 3y + 1 = 2$
c) Prouve que le point O (0 ; 0) vérifie les inéquations obtenues.
d) Hachure les demi-plans de frontière (D) et (D') ne contenant pas le point O (0 ; 0).

II° - 2) Méthode :

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues de la forme $\begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$ il suffit de reprendre la méthode précédente pour chaque inéquation.

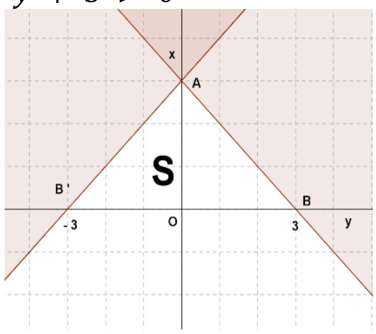
L'ensemble des solutions **S** sera l'intersection des demi-plans représentant les solutions respectives des inéquations du système.

II° - 3) Exemple

Soit à résoudre dans IR² le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - y + 3 > 0 \end{cases}$

Traçons la droite (D) d'équation (D) : $x + y - 3 = 0$

	A	B
x	0	3
y	3	0



Traçons la droite (D') d'équation
(D) : $x - y + 3 = 0$

	A	B'
x	0	-3
y	3	0

Le point M (0 ; 0) vérifie :
$0 + 0 - 3 < 0$ **VRAI** et $0 - 0 + 3 > 0$ **VRAI**

Donc l'ensemble des solutions **S** du système d'inéquations est la partie non hachurée contenant la demi- droite $[AB)$, (A exclu) et ne contenant pas la demi-droite $[AB')$ et contenant le point O (0 ; 0)

II° - 4) Exercice d'application

1) Parmi les couples (2 ; 4) ; (-3 ; 2) et (- 4 ; -1) quels sont ceux qui sont solutions du système : $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$?
2) Représenter graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes :

   a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x > 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y \leq -2 \\ 2x + y - 1 > 1 \end{cases}$.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS AFFINES ET APPLICATIONS AFFINES PAR INTERVALLES

DUREE : **10 HEURES**

Objectif général: Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable d'utiliser les applications affines pour résoudre des problèmes de la vie courante.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- déterminer l'expression littérale d'une application affine connaissant : les images de deux réels ; le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel par cette application.
- utiliser l'expression littérale d'une application affine pour : calculer des images ; calculer des antécédents ; établir des tableaux de valeurs.
- représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.
- utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent.
- tracer la représentation graphique d'une application affine par intervalles du type : $x \longmapsto |ax + b|$

Sources

- **Nouveau programme 2006 ;**
- **Manuels : Excellence 4ème et 3ème, CIAM 4ème et 3ème**
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 16 min
  : http://www.sesamaths.fr, consulté le 23 / 12 / 2011 à 23 h 24 min
  : http://www.mathonautes.fr, consulté le 25 / 06 / 2015 à 08 h 45 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Applications linéaires ; calcul de valeur numérique d'une expression littérale ; équation du type ax + b ; valeur absolue ;

PLAN DU COURS

I° Applications affines :	**IV° Représentation graphique :**
I – 1° Activité :	IV – 1° Activité :
I – 2° Définition :	IV – 2° Définition :
I – 3° Exercice d'application :	IV – 3° Propriété :
II° Détermination d'une application affine :	IV – 4 Exercice d'application :
II – 1° Méthodes :	**V° Application affines par intervalle :**
II – 2° Exercice d'application :	V – 1° Activité :
III° Sens de variation d'une application affine	V – 2° Méthode :
III – 1°Activté :	V – 3) Exemple d'application constante par intervalle ;
III – 2° Propriétés :	
III – 3° Exercice d'application :	V – 3) Exercice d'application :

Introduction

Du point de vue programme, la notion d'application affine n'est pas tout à fait nouvelle au programme car vous aviez étudié un de ses cas particulier en classe de quatrième, **l'application linéaire**.

Du point de vue intérêt, les applications affines revêtent d'une grande importance en démographie pour le calcul du taux de natalité, en économie pour le calcul du taux de production et en physique pour le calcul de la distance.

A cet effet, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : Météorologie et Climatologie ; Santé ; Sécurité ;… et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation)

C'est dire qu'il serait intéressant pour chacun, de donner le meilleur de lui-même pour bien comprendre son étude.

DEROULEMENT DU COURS

I° APPLICATIONS AFFINES :

I – 1) Activité :

Un artisan a pour salaire 4000 F plus 500 F CFA par jouet réalisé. On note x le nombre de jouets réalisés et y le salaire correspondant.

1) Recopie et complète le tableau ci-contre.

x	0	2	8	15
y				

2) Exprime y en fonction de x.

I – 2) Définition :

On appelle application affine **f**, de coefficient **a**, et terme constant **b** tout procédé qui, à tout réel ***x*** fait correspondre le réel **a*x*** + **b**

On note f (x) = ax + b ou bien f : $x \longmapsto$ ax + b

Vocabulaire :

* f (x) ou y ou ax + b est appelée **l'image de *x*** par l'application f.

* x est **l'antécédent de *y***.

I – 3) Exercice d'application :

1) Laquelle des écritures suivantes représente une application affine: f (x) $=x^2 -1$; g $(x)= (x+2)^2$ et h $(x) = x\sqrt{2} - 3$?

2) Soit f $(x)= - 3x + \frac{1}{2}$

a) Calcule l'image du réel 2 par f ; b) Calcule le réel qui a pour image 3.

❖ **Remarques :** **Soit f (x) = ax + b**

- ✓ **Si b = 0, alors f (x) = ax ; f est une application linéaire. Exemple : f (x) = 3x**
- ✓ **Si a = 0, alors f (x) = b ; f est application constante. Exemple : f (x) = - 3**
- ✓ $\mathbf{a} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ **Donc** $\boxed{\textbf{coefficient} = \frac{\textit{différence des images}}{\textit{différence des antécédents}}}$

II° DETERMINATION D'UNE APPLICATION AFFINE :

Déterminer une application affine, c'est trouver son coefficient et son terme constant.

II – 1) Méthodes :

1ère méthode Système d'équations :

Soit f (x) = a x + b ; f (3) = -5 et f (-2) = 5

f (3) = -5 signifie 3a + b = -5 et f (-2) = 5 signifie -2a + b = 5

le système suivant $\begin{cases} 3a + b = -5 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$ équivaut à

a = - 2 et b =1

Donc f (x) = - 2 x + 1

2ème méthode Coefficient directeur :

Calcule le coefficient : a = $\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{-10}{5}$

a = -2 d'où f (x) = -2 x + b

calcule ensuite b, en utilisant une des données.

Par exemple f (-2) = -2 (-2) + b = 5 d'où

b = 1

Donc f (x) = -2 x + 1

3ème méthode liée au repérage sur le plan

Soit f une application affine de coefficient 2 et dont la représentation passe par le point de coordonnées (5 ; 3)

Soit f (x) = 2x + b

On a : 2 x 5 + b = 3 d'où b = 3 – 10 = - 7 Donc **f (x) = 2x – 7**

III° SENS DE VARIATION D'UNE APPLICATION AFFINE :

III – 1) Activité :

Soit f et g deux applications tels que : f (x) = 2 x + 3 et g (x) = - 3 x + 1.
1) Quel est le signe du coefficient de f et de g. 2) Calcule les images de -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 par f et g. 3) Comment sont rangés les valeurs de x et f (x) ? De x et g (x) ?

III – 2) Propriétés :

Soit f (x) = **a** x + b

- Si **a** **est strictement positif** (**a > 0**), alors f est **croissante.**
- Si **a** **est strictement négatif** (**a < 0**), alors f est **décroissante.**
- Si **a** est nul (**a = 0**), alors f est **constante.**

III – 3) Exercice d'application :

Pour chacune des applications suivantes précise le sens de variation en justifiant :
f (x) = $(3 - 2\sqrt{3})\,x - 7$; g(x) = $3 - (2\sqrt{2} - 3)\,x$ et h (x) = $\frac{3}{2}x - 5$

IV° REPRESENTATION GRAPHIQUE :

IV – 1) Activité :

Soit f(x) = 2 x + 1
1) Représente dans un repère orthonormal (O, I, J) la droite (D) d'équation y = 2 x + 1
2) Recopie et complète le tableau de valeurs suivant :

x	-2	0	1	2
f (x)				

3) Vérifie graphiquement que le point de coordonnée (0, f(0)) figurant dans le tableau appartient à la droite (D).

IV – 2) Définition :

La représentation graphique d'une application affine définie par f(x) = **a**x + **b** est une droite d'équation **y = ax + b**, **a** étant le coefficient directeur et b, l'ordonnée à l'origine.

IV – 3) Méthode:

Pour représenter une application affine, on peut utiliser la méthode suivante :

- ✓ Déterminer les coordonnées de deux points A et B de (D) tels A (**0 ; b**) et B (**1 ; a+b**)
- ✓ Et trace la droite (AB) qui correspond à la droite (D).

- **Remarque :**

*Toutes les **fonctions linéaires** sont des **fonctions affines** (cas particuliers où b = 0 :
f (x) = a x = a x + 0).
*Toutes les **fonctions constantes** sont des **fonctions affines** (cas particuliers où a = 0 ;
f (x) = b = 0 x + b).
* Toute **application affine** admet une **application linéaire associée**. ***Leurs représentations graphiques sont parallèles.***
*Dans un tableau de valeurs, il faut toujours prendre soin de ranger les valeurs de x soit dans un ordre croissant, soit dans un ordre décroissant.

IV – 4) Application :

1) Dans un même repère orthonormal donne la représentation graphique des fonctions
f (x) = - 2 x + 1 ; g (x) = - 2 ; h (x) = 3x
2) Donne l'expression de l'application k associée à l'application affine f puis donne sa représentation graphique.

V° APPLICATION AFFINES PAR INTERVALLE DU TYPE F: $x \mapsto |a\,x + b|$:

V – 1) Activité :

Soit l'application affine définie par f (x) = $|2x+1|$
1) Ecris f (x) sans le symbole valeur absolue.
2) Représente f dans un repère orthonormal (O, I, J)

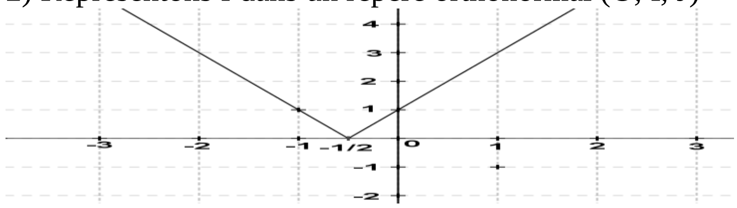
Solution :

1) Ecrivons f (x) sans le symbole valeur absolue :

a) f (x) = - 2 x - 1 si $x \in]-\infty\,;\, \frac{-1}{2}]$

b) f (x) = 2 x + 1 si $x \in]\frac{-1}{2}\,;\,+\infty[$

2) Représentons f dans un repère orthonormal (O, I, J)



V – 2) Méthode :

Pour représenter graphiquement une application affine **f** du type f (x) = $|\boldsymbol{a\,x+b}|$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

1° Ecris f (x) sans valeur absolue dans l'intervalle] -∞; $-\frac{b}{a}$] puis représente f en te limitant à cet intervalle.

2° Ecris f (x) sans valeur absolue dans l'intervalle $[-\frac{b}{a}$; + ∞[puis dans le même repère, représente f en te limitant à l'intervalle $[-\frac{b}{a}$; + ∞[.

V – 3) Exemple d'application constante par intervalle

Représente graphiquement l'application affine définie par :

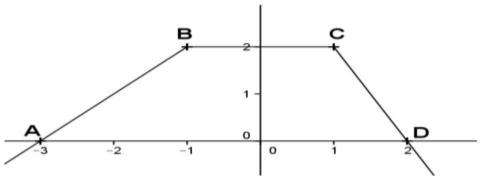
Si $x < -1, f(x) = x + 3$
Si $-1 < x \leq 1, f(x) = 2$
Si $1 < x, f(x) = -2x + 4$

Solution

* Sur l'intervalle]-∞; -1[, la représentation graphique de f est la demi-droite d'origine B contenant A

* Sur l'intervalle]-1 ; 1], **on a ici une application constante** comme $\boldsymbol{-1 < x \leq 1}$.
La représentation graphique de f est le segment] BC] ouvert en B et fermé en C. c'est une partie de droite horizontale à l'axe des abscisses.

* Sur l'intervalle] 1 ; + ∞[, la représentation graphique de f est la demi-droite d'origine D ouverte en C et contenant D.



V – 4) Exercice d'application :

1) Représente dans un repère orthonormal l'application affine définie par f (x) = $|-2x-4|$
2) Soit h l'application de IR vers IR définie par $|\,2x+1|\ + |-x+3|$
   a) Ecris h (x) sans le symbole valeur absolue.
   b) Représente h sur chaque intervalle.

Solution

Pour la question 2) utiliser un tableau pour écrire sans valeur absolue

La géométrie qui se constitue à l'époque des débuts de l'écriture est assez peu différente des connaissances intuitives de l'homme ordinaire.

Ainsi, pas moins ! Personne n'ignore que PLATON avait fait inscrire au fronton de l'entrée de son Académie « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre », et aujourd'hui, il est peu de professions qui n'exigent certaines connaissances mathématiques, au moins rudimentaires.

Alors, faisons sien ce cri de cœur de PLATON afin d'amener nos apprenant à comprendre à quel point la géométrie participe à la formation de l'esprit cartésien.

FASCICULE DE MATHEMATIQUES 3e

ACTIVITES GEOMETRIQUES

CHAPITRE I

THEOREME DE THALES

DUREE : **9 HUEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre l'apprenant devra être capable de maîtriser l'usage du théorème de Thalès pour résoudre des problèmes de longueurs et de parallélisme de droites.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Reconnaître une configuration de Thalès dans le cas du triangle ; du trapèze.
- Calculer des longueurs en utilisant le Théorème de Thalès ;
- Justifier que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.
- Partager un segment dans un rapport donné en utilisant le théorème de Thalès ;
- Placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée en utilisant le Théorème de Thalès.

Sources :

- ✓ Nouveau Programme 2006 de Maths 3ème **et** Guide d'usage de Février 2010
- ✓ Loi d'orientation 91. 22 du 16 Février 1991
- ✓ **Manuels :** CIAM 3ème, Excellence 3ème, CLE des Maths 3ème,
- ✓ **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 17 min
  : http://www.maths-vidéo.com, consulté le 01/ 01 / 2018 à 21 h 26 min
- ✓ **Encyclopédie des connaissances mathématiques**

Prérequis : Distance, droites des milieux, droites parallèles (définition), aire du triangle, symétrie,…

PLAN DU COURS

I Théorème de Thalès appliqué au triangle :	**III Théorème de Thalès appliqué au trapèze :**
I – 1° Théorème direct :	**III – 1) Théorème :**
I – 1° a) Activité	III – 1- a) Activité :
I – 1° b) Théorème direct	III – 2 - b) Théorème
I – 1° c) Exercice d'application	III – 3 - c) Exercice d'application :
I – 2° Conséquence :	**III – 2) Conséquence :**
I – 2° a) Activité :	**IV – Partage d'un segment dans un rapport donné :**
I – 2° b) Théorème:	IV – 1) Construire les $\frac{2}{3}$, les $\frac{5}{3}$ d'un segment :
❖ **Remarque :**	IV – 2) Placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée
I – 2° c) Exercice d'application :	IV – 3) Construire une quatrième proportionnelle :
II Réciproque du théorème de Thalès :	IV - 4) Exercice d'application:
II – 1° Activité	
II – 2° Réciproque du théorème de Thalès:	
II – 3) Exercice d'application :	
❖ **Remarque :**	

Introduction

Lors de son voyage en Egypte, **Thalès** qui vécut entre -627 et -547 pénétra dans le lac Mariotis et s'embarqua sur une felouque afin de remonter le Nil. Après quelques jours de voyage, il aperçut, dressé au milieu d'un large plateau, la pyramide de **Khéops**. **Thalès** regardant son ombre eut alors l'idée : **« le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que la pyramide entretient avec la sienne.»** Il en déduisit ceci : **« à l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur» :** Voici l'idée lumineuse de **Thalès**. Curieusement, le **Théorème** qui porte son nom n'a jamais été démontré, ni même découvert par **Thalès** (la démonstration sera faite trois siècles plus tard par **Euclide**). Ce sont en fait des français qui le baptisèrent ainsi à la fin du XIX^{ème} siècle.

Du **point de vue programme**, le **théorème de Thalès** apparaît comme une extension des **THEOROMES DE LA DROITE DES MILIEUX** et aboutira aux **HOMOTHETIES.**

DEROULEMENT DU COURS

I° THEOREME DE THALES APPLIQUE AU TRIANGLE :

I – 1° Théorème direct

I – 1 - 1) Activité :

Soit ABC un triangle, M et M' deux points tels que M ϵ [AB] ; M' ϵ [AC] et (MM') // (BC).

On veut démontre que $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Pour cela considère les deux figures ci-contre représentant le même triangle ABC.

a) Dans la figure 1 : Calcule les aires des triangles AMM' ; ABM' puis le rapport $\frac{A\,(AMM')}{A\,(ABM')}$

b) Dans la figure 2 : Calcule les aires des triangles AMM' ; AMC puis le rapport $\frac{A\,(AMM')}{A\,(AMC)}$

c) En Justifiant que les triangles BM'C et BMC ont la même aire alors on a : $\mathcal{A}\,(ABM') = \mathcal{A}\,(AMC) = \mathcal{A}\,(ABC) - \mathcal{A}\,(BM'C) = \mathcal{A}\,(ABC) - \mathcal{A}\,(BMC)$

d) En déduire à partir de l'égalité des rapports $\frac{A\,(AMM')}{A\,(ABM')} = \frac{A\,(AMM')}{A\,(AMC)}$ que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$

Solution : Considérons les figures : 1 et 2, représentant le même triangle ABC.

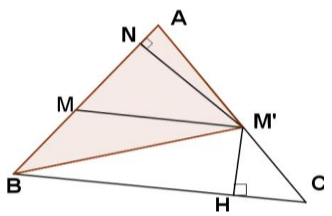


Figure 1

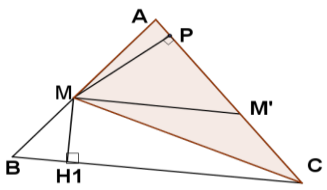


Figure 2

Soit $\mathcal{A}$ l'aire d'un triangle, on a : M ϵ [AB] et M' ϵ [AC]

Dans la figure 1, on a :

$\mathcal{A}\,(AMM') = AM \times \frac{M'N}{2}$ et

$\mathcal{A}\,(ABM') = AB \times \frac{M'N}{2}$ D'où $\frac{A\,(AMM')}{A\,(ABM')} = \frac{AM}{AB}$

Dans la figure 2, on a :

$\mathcal{A}\,(AMM') = AM' \times \frac{MP}{2}$ et

$\mathcal{A}\,(AMC) = AC \times \frac{MP}{2}$ D'où $\frac{A\,(AMM')}{A\,(AMC)} = \frac{AM'}{AC}$

Par ailleurs, les triangles BM'C et BMC ont **même aire** car ils ont **même base** [BC] et **hauteurs égales** $MH_1 = M'H$

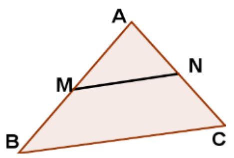
D'où $\mathcal{A}\,(ABM') = \mathcal{A}\,(AMC) = \mathcal{A}\,(ABC) - \mathcal{A}\,(BM'C) = \mathcal{A}\,(ABC) - \mathcal{A}\,(BMC)$

On a alors, $\frac{A\,(AMM')}{A\,(ABM')} = \frac{A\,(AMM')}{A\,(AMC)}$ d'où $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AM'}}{\mathbf{AC}}$

I – 1 – 2) Théorème direct :

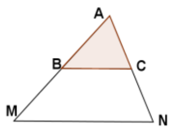
Soit ABC et AMN sont deux triangles tels que M ϵ (AB), N ϵ (AC) et (MN)//(BC), alors $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}$

Configuration



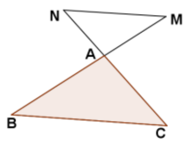
M ϵ [AB], N ϵ [AC] et (MN)// (BC)

Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



M ϵ (AB), N ϵ [AC) et (MN)// (BC)

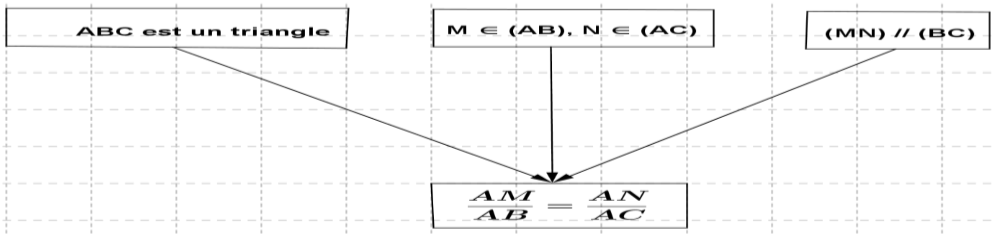
Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



A ϵ [BM], A ϵ [NC] et (MN)// (BC)

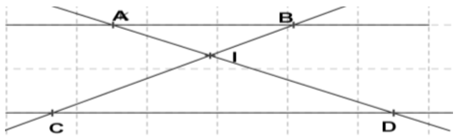
Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Déductogramme



I – 1- 3) Exercice d'application :

Sur la figure ci-contre (AB) // (CD) et (AD) et (BC) sont sécantes en I tels que AI= 4 cm ; BI = 5 cm et I D = 6 cm. Calculez la longueur IC.



I – 2) Conséquence :

I – 2 - 1) Activité :

1) Construis trois points non alignés A, E et F / : AE = 9 cm ; AF = 6 cm et $\widehat{EAF}$ = 75°.
2) Construis le point B sur (AE) / : AB = 3 cm. Trace la parallèle à (FE) passant par B. Elle coupe (AF) en C.
3) Mesure la longueur du segment [AC] puis compare les rapports $\frac{AB}{AE}$ et $\frac{AC}{AF}$
4) Mesure les longueurs des segments [EF] et [BC] puis compare les rapports $\frac{BC}{EF}$ et $\frac{AB}{AE}$

I – 2 – 2) Théorème:

Si deux triangles ABC et AMN sont en configuration de Thalès tels que M ϵ (AB), N ϵ(AC),

alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

❖ **Remarque : agrandissement – réduction**

On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ = **k (une constante)**

✓ Si **0 < k < 1**, alors le triangle ABC est un **agrandissement** du triangle AMN.
✓ Si **k > 1**, alors le triangle ABC est une **réduction** du triangle AMN.
✓ Si deux figures sont en agrandissement l'une par rapport à l'autre dans un rapport **k**, alors

***Leurs périmètres sont dans un rapport k et *Leurs aires sont dans un rapport k^2**

❖ **NB :**

Pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès, il faut avoir deux triangles ayant :

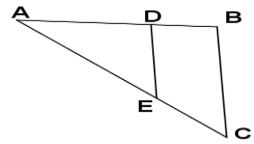
- un sommet commun

- un côté parallèle

- les deux autres côtés dans le prolongement l'un de l'autre

Si toutes ces conditions sont réunies, les deux triangles sont forcément des triangles semblables (*Deux triangles sont semblables si ils ont les mêmes angles*.), et donc on a proportionnalité entre les côtés des triangles.

I – 2 - 3) Application :



1) Dans la figure ci-contre, (DE) // (BC). On donne AC= 8 cm ; AD = 3 cm et AB = 4 cm. Calcule AE et EC.
2) Prouve que le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE.
3) Montre que : $\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{DE}}{\mathbf{BC}}$.

II° RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES:

II – 1) Activité :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en B, F et G deux points de (Δ), R et D deux points de (Δ') tels que BG = 4,9 cm ; BF = 3,5 cm ; BD = 5,6 cm et BR = 4 cm.

1) Trace les droites (FR) et (GD) puis construis la droite (Δ'') perpendiculaire à (FR) en R. Elle coupe (GD) en J.

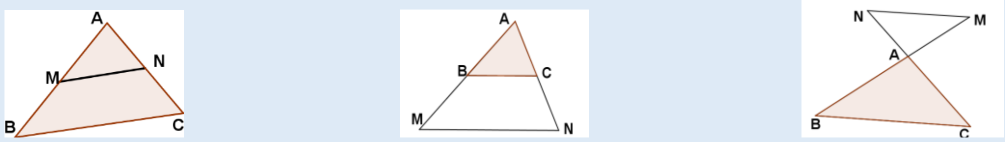
2) Donne la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{RJD}}$. En déduire la position relative de (Δ'') et (GD).

3) Donne la position relative des droites (FR) et (GD). Justifie. 4) Compare $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BR}}$ et $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BF}}$

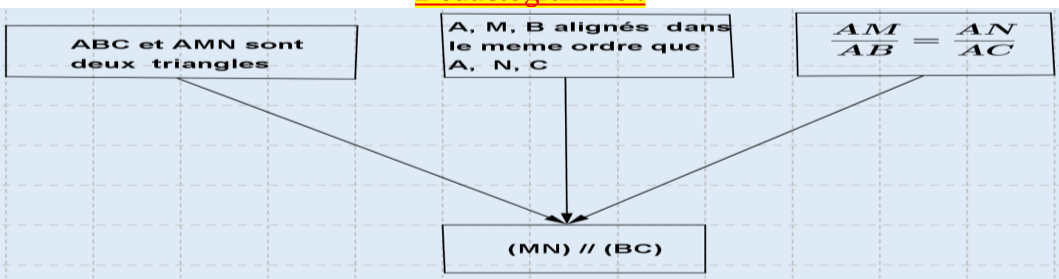
II - 2) Théorème réciproque :

Si les points A, M et B d'une part et les points A, N et C d'autre part *sont alignés* dans le *même ordre* et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) *sont parallèles*.

Configuration :



Déductogramme :



II– 3) Exercice d'application :

1) Trace un segment [AB] de longueur 5,6 cm. Sans utiliser une règle graduée, place le point M sur ce segment tel que AM = 3,2 cm. Pour cela :
   a) Calcule le rapport $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$
   b) Sur une sécante à (AB) en A, on place les points E et F tel que AE = 4 cm et AF = 7 cm.
2) Démontre que les droites (ME) et (BF) sont parallèles.

❖ **Remarque :**

Quand les rapports ne sont pas égaux, on conclut que les droites ne sont pas parallèles.

III° THEOREME DE THALES APPLIQUE AU TRAPEZE :

III – 1) Théorème :

III – 1 – 1) Activité :

Soit ABCD un trapèze de bases (AB) et (DC), E le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. La parallèle aux bases passant par E coupe [AD] et [BC] respectivement en I et J.

a) Démontre par le théorème de Thalès que $\frac{AI}{AD} = \frac{AE}{AC}$ (1)

b) Démontre par le théorème de Thalès que $\frac{BJ}{BC} = \frac{BE}{BD}$ (2)

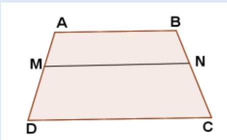
c) Démontre par le théorème de Thalès que $\frac{BE}{BD} = \frac{AE}{AC}$ (3)

d) De ces trois relations en déduire que $\frac{AI}{AD} = \frac{BJ}{BC}$

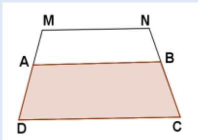
III – 1 – 2) Théorème :

Soit ABCD un trapèze de base (AB) et (CD), M un point de (AD) et N un point de (BC). Si (MN) // (AB), alors $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$.

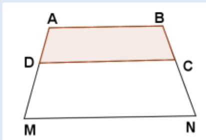
Configuration



$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$$

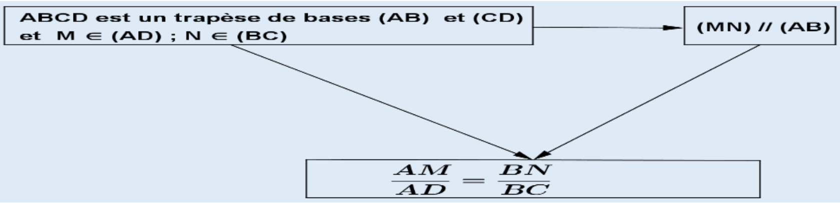


$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$



$$\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$$

Déductogramme



III – 1 – 3) Application :

Soit ABCD un trapèze de bases (AB) et (CD).
Les droites (AD) et (BC) se coupent en O. Les droites (AC) et (BD) se coupent en O'.

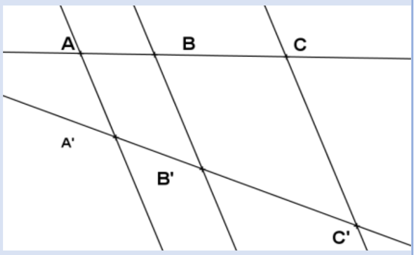
a) Compare $\frac{O'A}{O'C}$ et $\frac{OB}{OC}$

b) En déduire la longueur de BC. On donne OB = 8 cm ; O'C = 6 cm et O'A = 4 cm.

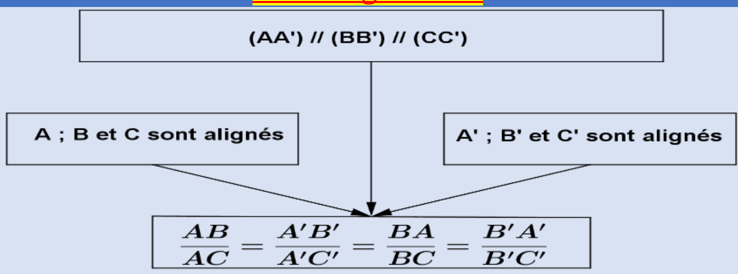
III – 2° Conséquence :

Si deux droites sécantes sont coupées par des parallèles, alors les longueurs correspondantes sont proportionnelles.

Configuration :



Déductogramme :



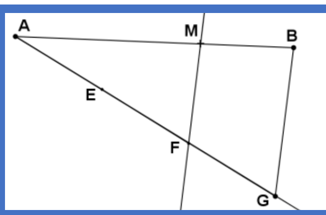
IV° PARTAGE D'UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNE :

IV – 1) Construire les $\frac{2}{3}$, les $\frac{5}{3}$ d'un segment [AB]:

Soit [AB] un segment donné. Construis, sans règle graduée, le point M de ce segment / : AM= $\frac{2}{3}$ AB

Méthode :

1) **Trace le segment [AB]**
2) **Trace une demie droite [Ax), tel que $\widehat{BAx}$ soit aigu.**
3) **Avec le compas prendre une ouverture quelconque, gradue la demi-droite et place les points E, F et G tels que : AE = EF = FG**
4) **Trace la droite (BG)**
5) **Construis la parallèle à (BG) passant par F. Elle coupe (AB) en en un point M. Ainsi, AM vaut les $\frac{2}{3}$ du segment [AB]**



IV – 2) Placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée :

Sur une droite graduée (D) munie d'un repère (A ; B), construis sur (D) les points M et N d'abscisses respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{-2}{3}$

Solution :

Pour construire le point M d'abscisse $\frac{2}{3}$, construis les $\frac{2}{3}$ du segment [AB]. Le point N d'abscisse $\frac{-2}{3}$ est le symétrique du point M par rapport à A.

IV – 3) Construire une quatrième proportionnelle :

Soit a, b et c trois longueurs données, construis la longueur x / : $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{x}{\mathrm{c}}$

Méthode :

1) Trace deux demi- droites [Ax) et [Ay) de même origine
2) Marque sur [Ax) deux points B et C tels que : AB = b et AC = a
3) Marque sur [Ay) un point F/ : AF = c
4) Trace la parallèle à (FC) passant par B. Elle coupe [Ay) en E/ : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}$ *ce qui équivaut à* $\frac{\mathrm{b}}{c} = \frac{x}{c}$

IV - 4) Exercice d'application :

On donne trois segments de longueur a = 4 cm ; b = 6 cm et c = 2,4 cm.
Construis un segment de longueur t / : at = bc

Solution

3) **Traçons le segment [AC] tel que :**

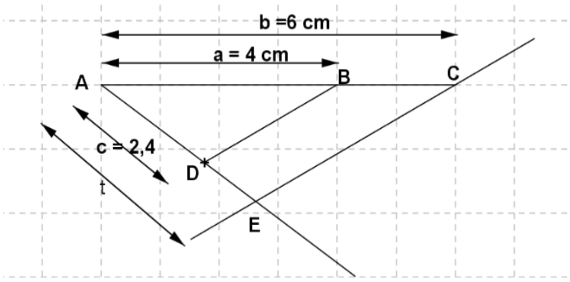
AC = b =6

2. Puis plaçons le point B ∈ [AB] tel que : AB = a = 4

3. Traçons la demi- droite [AD) tel que : $\widehat{CAD}$ soit aigu et AD = c = 2,4

4. La parallèle à (BD) passant par C coupe la demi- droite [AD) en E.

Ainsi, AE = t : longueur t du segment recherché.



CHAPITRE II

RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

DUREE : **7 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation de la trigonométrie pour calculer des longueurs et des mesures d'angles.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Restituer : la définition et la notation du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle
- Calculer : le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle : connaissant un cosinus et une autre longueur ; connaissant un sinus et une autre longueur ; connaissant une tangente et une autre longueur.
- Restituer la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires.
- Utiliser la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires pour calculer le cosinus ou le sinus d'angle donné.
- Restituer les cosinus, sinus et tangente d'un angle de mesure 30°, 45° ou 60°.

Prérequis : Complémentarité des angles aigus dans un triangle rectangle, Pythagore, racine carrée, Triangle rectangle- angles et vocabulaire ;

Sources :

- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Nouveau programme de **2006 et Guide d'usage de Févier 2010**
- Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème ; Clef des Maths 3ème
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 26/ 01/ 2015 à 13 h 20 min.
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

PLAN DU COURS

I° Cosinus d'un angle aigu : I°- 1°) Activité : I° - 2°) Définition et notation : I° - 3°) Exercice d'application : **II° Sinus d'un angle aigu :** II°- 1°) Activité : II° - 2°) Définition et notation : II° - 3°) Exercice d'application : **III° Tangente d'un angle aigu :** III°- 1°) Activité : III° - 2°) Définition et notation : III° - 3°) Exercice d'application : **IV° Relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu :**	IV° - 1°) Activité : IV° - 2°) Théorème : IV° - 3°) Exercice d'application : **V° Cosinus et Sinus d'angles complémentaires :** V° - 1°) Activité : V° - 2°) Propriété : V° - 3°) Exercice d'application : **VI° Angles remarquables :** VI° - 1°) Activité : VI° - 2°) Valeurs remarquables : **VII° Encadrement d'angle et Construction d'un triangle rectangle :**

Introduction

Du point de vue historique, le mot **« trigonométrie »** vient du grec **« trigonôs »** qui signifie **triangle rectangle** et **« métron »** qui signifie **mesure**. Hipparque de Nicée (- 190 ; - 120) est le Fondateur de la trigonométrie. Ainsi, la trigonométrie est « la partie des mathématiques, étudiant les rapports entre les distances et les angles dans le triangle. »

Pendant l'antiquité et le Moyen âge, les arpenteurs se servaient déjà des relations trigonométriques pour établir leurs calculs sur le terrain.

Du point de vue intérêt, de nos jours, ces relations sont encore utilisées en astronomie, en navigation aérienne et maritime, en cartographie, en architecture pour déterminer des angles ou des distances, en Physique,… . D'ailleurs, ce chapitre peut-être lié au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; utilisation des touches de cos ; sin ; tan ; …

Du point de vue programme, la notion est tout à fait nouvelle. Elle est la partie des mathématiques étudiant les rapports entre les **distances** et les **angles** dans le **triangle**.

Comme toute les autres chapitres ; celui-ci mériterait aussi à plus d'un titre votre attention.

DEROULEMENT DU COURS

I° COSINUS D'UN ANGLE AIGU :

I - 1) Activité :

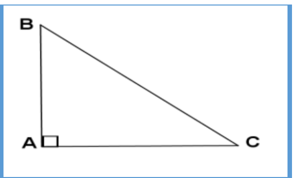
Soit ABC un triangle rectangle en A tels que : AC = 8 cm, AB= 6 cm

1°) Calcule BC, puis le rapport $\frac{AC}{BC}$ appelé cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

2°) Monte que $0 < \cos \widehat{ACB} < 1$

I - 2) Définition et notation :

Dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport $\frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$



Notation : Soit ABC un triangle rectangle en A et $\propto$ l'angle en C :

$\cos \propto = \frac{AC}{BC}$

I - 3) Exercice d'application :

EFG est un triangle rectangle en E tel que : EF = 3 et FG = 5. Calcule $\cos \widehat{G}$

II° SINUS D'UN ANGLE AIGU :

II - 1) Activité :

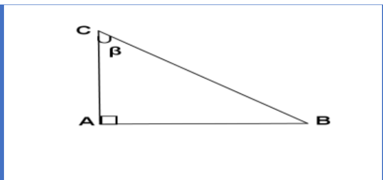
Soit OAB un triangle rectangle en A tels que OA = 8 cm, AB= 6 cm

1°) Calcule OB, puis le rapport $\frac{AB}{OB}$ appelé Sinus de l'angle $\widehat{AOB}$

2°) Montre que $0 < \sin \widehat{AOB} < 1$

II - 2) Définition et notation :

Dans un triangle rectangle le sinus d'un angle aigu est égal au rapport $\frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$



Notation : Soit ABC un triangle rectangle en A et β l'angle en C : $\sin \beta = \frac{AB}{BC}$

II - 3) Exercice d'application :

RST est un triangle rectangle en T tel que $\hat{R} = 30°$. On pose RS = 4a

1°) Calcule les valeurs exactes de TS en fonction de a.

2°) Calcule sa valeur pour a = $\sqrt{3}$; a = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

III° TANGENTE D'UN ANGLE AIGU :

III - 1) Activité :

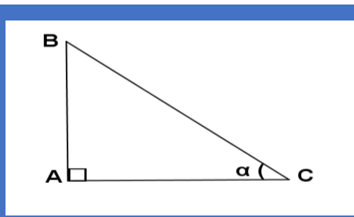
Soit OAB un triangle rectangle en A tels que OA = 8 cm, AB= 6 cm

1°) Calcule le rapport $\frac{AB}{OA}$

2°) Divise le numérateur et le dénominateur par OB et exprime le rapport obtenu à l'aide de cosinus et de sinus. Ce rapport est appelé tangente

III - 2) Définition et notation :

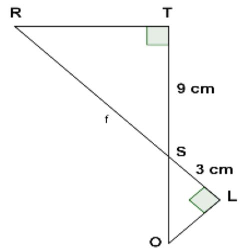
Dans un triangle rectangle la tangente d'un angle aigu est égale au rapport $\frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{côté adjacent à l'angle}}$



Notation : **Soit ABC un triangle rectangle en A et $\propto$ l'angle en C : $\tan \propto = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\propto}{\cos\propto}$**

III - 3) Exercice d'application :

On donne la figure ci-contre.



a) Les triangles RTS et SOL sont-ils en position de Thalès ? Justifie ta réponse.

b) Prouve que $\widehat{SRT}$ et $\widehat{SOL}$ ont même mesure.

c) Démontre que $\frac{TS}{RT} = \frac{SL}{OL}$

IV° RELATION ENTRE LE COSINUS ET LE SINUS D'UN ANGLE AIGU :

IV - 1°) Activité :

ABC est un triangle rectangle en A.

1°) Ecris l'égalité de Pythagore.

2°) Déduis –en la valeur $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$ en divisant les deux membres par BC^2.

3°) Traduis l'égalité obtenue en utilisant le sinus et le cosinus.

IV - 2) Théorème : **Pour tout angle $\propto$, on a : $\cos^2\propto + \sin^2\propto = 1$**

IV - 3) Exercice d'application :

1°) Sans utiliser la calculatrice montre qu'il est impossible de trouver un angle aigu a tel que cos (a) =$\frac{1}{\sqrt{3}}$ et sin (a) = $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2°) Calcule le sinus d'un angle aigu sachant que son cosinus est $\frac{1}{3}$.

V° COSINUS, SINUS ET TANGENTE D'ANGLES COMPLEMENTAIRES :

V - 1) Activité :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1°) Exprime sin $\widehat{ABC}$ puis cos $\widehat{BCA}$ à l'aide des côtés du triangle ABC. Quelle relation existe-t-il entre les mesures de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$?

2°) Exprimer tan$\widehat{ABC}$ puis tan$\widehat{ACB}$ à l'aide des côtés du triangle ABC.

3°) Montre que tan$\widehat{BCA}$ et tan$\widehat{ABC}$ sont inversent l'un de l'autre.

V – 2) Propriété :

- **Si** deux angles **sont complémentaires alors** le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.

Autrement dit, si $\propto + \beta = 90°$, alors **cos β = sin $\propto$** et **cos $\propto$ = sin β.**

❖ **Si** deux angles **sont complémentaires** **alors** leurs tangentes sont inverses l'un de l'autre.
En d'autres termes, si $\propto +\beta = 90°$ alors **$\tan \propto X \tan \beta = 1$**

V – 3) Exercice d'application :

1°) cos $\widehat{R}$ = 0,6, cos $\widehat{S}$ = 0,8. Les angles $\widehat{R}$ et $\widehat{S}$ sont-ils complémentaires ?
Même question avec sin $\widehat{S}$ = 0,5 et sin $\widehat{R}$ = $0{,}5\sqrt{3}$.
2°) On donne cos 75° = 0,26. Trouve le sinus de 15°
3°) On donne tan $\propto = \sqrt{5} + 2$, trouve tanβ sachant que $\propto +\beta = 90°$

VI° ANGLES REMARQUABLES :

VI – 1) Activité :

1°) Calcule de cos 45° ; sin 45° et tan 45°
Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A de côté AB = AC = a. Exprime BC en fonction de **a.**
Calcule la valeur exacte de cos 45° ; sin 45° et tan 45°
2°) Calcul de cos 60° ; sin 60° et tan 60°
Construis un triangle ABC équilatéral de côté **a**.
Exprime BH et CH en fonction de **a** (H étant le pied de la hauteur passant par A). Déduis-en cos 60° ; sin 60° et tan 60°. Peux-tu en déduire cos 30° ; sin 30° et tan 30° ?

VI° - 2°) Valeurs remarquables :

β(°)	0°	30°	45°	60°	90°
β(rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini

Méthode pour retenir le tableau

- ✓ **Ecris dans l'ordre croissant 30° ; 45° ; 60°**
- ✓ **Ecris en dessous les valeurs $\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$**
- ✓ **Divise chaque terme obtenu précédemment par 2**
- ✓ **Tu obtiens ainsi la ligne des sinus**
- ✓ **Pour obtenir la ligne des cosinus, il suffit d'utilisé la propriété de la complémentarité des angles. Donc d'inverser l'ordre de la ligne des sinus.**

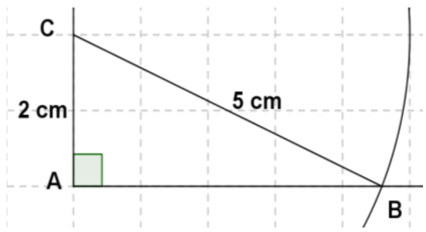
VII° ENCADREMENT D'ANGLE ET CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE RECTANGLE :

1) Construis un triangle ABC rectangle en A tel que sin $\widehat{B} = 0,4$
2) Déduis- en un encadrement de la mesure de $\widehat{B}$ en degré.

Solution :

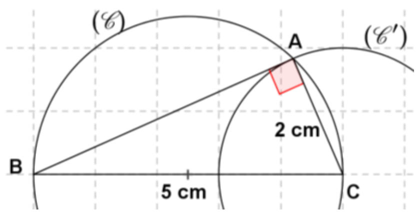
4) On sait que sin $\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{5} = 0,4$. Donc il suffit de construire un triangle rectangle en A tel que AC = 2 cm et BC = 5 cm.

1ère méthode : A partir de l'angle droit



*Trace deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ perpendiculaire en A
*Place le point C sur $[Ay)$ tel que AC = 2 cm
*Trace le cercle © de centre C et de rayon 5 cm, il coupe $[Ax)$ en B.
On obtient alors le triangle ABC rectangle en A.

2ème méthode : A partir de L'hypoténuse



On sait que si un point A appartient à un cercle de diamètre [BC] alors le triangle ABC est rectangle en A.

*Trace le cercle (C) de diamètre le segment [BC] de longueur 5 cm

*Trace le cercle (C') de centre C et de rayon 2 cm. Elle coupe (C) en deux points. Choisis l'un d'entre eux comme point A et tu as le triangle ABC rectangle en A.

Déduisons – en un encadrement de la mesure $\widehat{B}$ en degré.

En cherchant dans la colonne des sinus de la table trigonométrique, on ne trouve pas la valeur 0,4

Ainsi, la calculatrice indique que 0,3907... < 0,4 < 0,4067... Or, sin 23° = 0,3907... et sin 24° = 0,4067... Donc sin 23° < sin $\widehat{B}$ < sin 24°

Exercice :

ABC est un triangle isocèle en A de base BC = 8 cm tel que $\widehat{B} = \widehat{C}$ = 53°.

5) Construis ABC. 2) Calcule AB puis donne sa valeur approchée à 10^{-1} près.

Par Manitou «Par manitou, pour retenir ces formules, poussez ce cri indien !»	
« **S**OH **C**AH **T**OA !» **S** = Sinus ; O = côté Opposé ; C = Cosinus ; **A** = côté Adjacent ; **T** = Tangente et H = Hypoténuse « le **S**inus est le rapport du côté **O**pposé sur l'**H**ypoténuse ! le **C**osinus est le rapport du côté **A**djacent sur l'**H**ypoténuse la **T**angente est le rapport du côté **O**pposé sur le côté **A**djacent »	

CHAPITRE III

ANGLES INSCRITS

DUREE : 6 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des théorèmes relatifs aux angles inscrits pour résoudre des problèmes.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Restituer le vocabulaire, angle inscrit, angle au centre.
- Reconnaitre les configurations de l'angle au centre et de l'angle inscrit interceptant le même arc
- Restituer la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc.
- Utiliser la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc.
- Restituer la propriété des angles inscrits interceptant le même arc.
- Utiliser la propriété des angles inscrits interceptant le même arc pour : justifier une égalité d'angles ; déterminer la mesure d'un angle.

Prérequis : Vocabulaire relatif au cercle déjà vu en 6^e, somme des angles dans un triangle 5^e, triangle rectangle 4^e, angle.

Sources :

- Nouveau programme de 2006 et Guide d'usage de Février 2010
- **Loi d'Orientation 91 – 22** du 16 Février 1991 **;**
- **Manuels :** C.I. A. M et Excellence 3^e
- **Webographie :** http : //www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http : //www.mathsvidéos.com, consulté le 26/ 01/ 2015 à 14 h 06 min
  http : //manuel.sesamath.net/, consulté le 21/ 12/ 2011 à 23 h 24min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

PLAN DU COURS

Introduction :

Les notions d'angle au centre et d'angle inscrit sont très utilisées chez les sportifs en général et plus particulièrement chez les footballeurs. Ces derniers s'en servent pour déterminer l'angle de tir optimal par rapport au milieu du terrain où la ligne des touches.

Du point de vue des programmes, ce chapitre consacré aux **« angles inscrits »** est un prolongement du chapitre intitulé **« angle au centre »** étudié **en classe de 4^e**. Son étude sera poursuivie en classe de seconde.

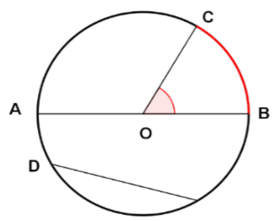
D'ailleurs, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;… et au TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'Éducation) : construire avec Geogebra ; …

DEROULEMENT DU COURS

I° RAPPELS :

Sur un (C) un cercle de centre O, sont placés les points A, B, C, D et E comme suit :

- **Rayon :** c'est le segment qui joint un point du cercle à son centre. Ex : [OC] est un rayon.
- **Diamètre :** c'est un segment passant par le centre du cercle et qui joint deux points de ce cercle. **Ex :** [AB] est un diamètre.
- **Corde :** c'est le segment qui joint deux points du cercle : Ex : [DE] est une corde. Le diamètre est donc une corde particulière du cercle.
- **Arc de cercle :** c'est l'intersection d'un cercle et d'un secteur angulaire au centre. Ex : l'arc $\widehat{BC}$



- **Angle saillant $\widehat{BOC}$** est un secteur angulaire tel que $0° \leq \widehat{BOC} \leq 180°$. Il intercepte l'arc $\widehat{BC}$
- **Angle rentrant $\widehat{BOC}$** est le secteur angulaire tel que $180° < \widehat{BOC} \leq 360°$. Il intercepte l'arc $\widehat{BC}$

NB : Les angles se mesurent en degré, en grade ou en radian. $90° = 100$ gr $= \frac{\pi}{2}$ rad.

II° PRESENTATION ET DEFINITION :

II° - 1) Activité :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r.

1) Marque sur (C), trois points distincts A ; B et C. **2)** Trace les demi- droites [AB) ; [AC) ; [OB) ; [OC).

3) Où se trouve le sommet de l'angle $\widehat{BAC}$ **?** Et qu'elle est la position relative de ses côtés par rapport au cercle ? Un tel angle est dit inscrit dans un cercle.

4) Que représente le sommet de l'angle $\widehat{BOC}$ pour le cercle (C) ? Un tel angle est dit angle au centre.

II° - 2) Angle au centre :

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon r.

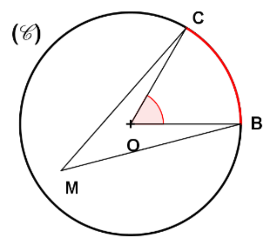
On appelle **angle au centre,** tout angle dont le sommet est le centre du cercle.

Exemples :

L'angle $\widehat{BOC}$ est un angle au centre qui intercepte **l'arc $\widehat{BC}$**

Contre- exemple :

L'angle $\widehat{BMC}$ n'est pas un angle au centre car son sommet n'est pas le centre du cercle.



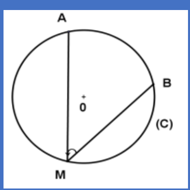
II° - 3) Angle inscrit :

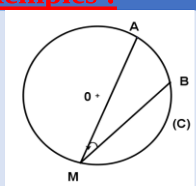
Soit un cercle (C) de centre O et de rayon r.
On appelle angle inscrit, tout angle dont :

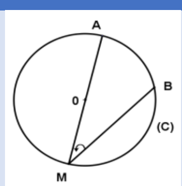
- **Le sommet est un point du cercle,**
- **et les côtés sont sécants au cercle.**

Donc un angle inscrit **est un angle formé par deux cordes issues d'un point du cercle.**

Exemples :

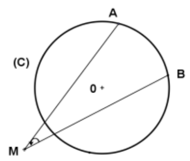






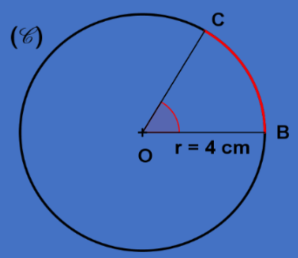
Dans les trois configurations ci-contre, $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit **interceptant** l'arc $\widehat{AB}$.

Contre- exemple :
Dans cette configuration, l'angle $\widehat{AMB}$ n'est pas inscrit dans le cercle car son sommet n'est pas un point du cercle.



II° - 4) Longueur d'un arc de cercle :

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.
Soit A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r.
La longueur ℓ de arc $\widehat{AB}$ est $\ell = r\,\alpha$ où $\alpha = mes\widehat{AOB}$ en radians.



Exemple : Si $\propto = 45°$ et r = 4 cm
On sait que 180° ⟶ r. π
45° ⟶ ℓ
D'où $\ell = 4\,\frac{45°\,X\,\pi}{180°} = 4\,\frac{\pi}{4} = \pi \approx 3{,}14$

II° - 5) Exercice d'application :

Soit (C_1) ; (C_2) et (C_3) trois cercles de centre respectifs O, O' et O'' et de rayon r = 2 cm
1) Marque sur (C_1) trois points A, B et C tel que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ soit aigu puis trace l'angle au centre associé.
2) Marque sur (C_2) trois points A, B et C tel que A et B soient diamétralement opposés et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ soit droit puis trace l'angle inscrit associé $\widehat{BAC}$.
3) Marque sur (C_3) trois points A, B et C tel que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ soit obtus puis trace l'angle au centre associé.

III° COMPARAISON D'ANGLE INSCRIT ET D'ANGLE AU CENTRE ASSOCIE :

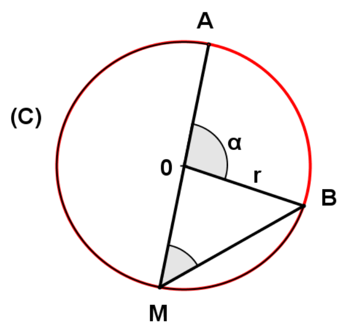
III° - 1) Activité :

(C) un cercle de centre O et de rayon r, A, B et M trois ponts de (C).
Montre que mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{AOB}$, dans chacun des cas suivants : **1e Cas** [AM] est un diamètre ; **2e Cas** Le point O est à l'intérieur de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$; **3e Cas** le point O est à l'extérieur de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

Solution :

1e Cas : [AM] est un diamètre :

O ϵ [AM] diamètre de (C) d'où $\widehat{AOM} = 180°$
$\widehat{AOM} = \widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 180°$
$\widehat{AOB} = 180° - \widehat{BOM}$ **(1)**
Considérons le triangle BOM, on a : OB = OM alors, $\widehat{OMB} = \widehat{MBO} = \widehat{AMB}$
Or, on sait que dans un triangle la somme des angles fait 180°
Donc $\widehat{BOM} + \widehat{OMB} + \widehat{MBO} = 180°$
$\widehat{BOM} = 180° - 2\,\widehat{OMB}$ **(2)**



De (1) et (2), on a : $\begin{cases} \widehat{AOB} = 180° - \widehat{BOM} \\ \widehat{BOM} = 180° - 2\,\widehat{OMB} \end{cases}$
D'où $\widehat{AOB} = 180° - (180° - 2\widehat{OMB})$
$\widehat{AOB} = 180° - 180° + 2\widehat{OMB}$
Donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{OMB} = 2\,\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$

2e Cas Le point O est à l'intérieur de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$:

On trace le point M' diamétralement opposé à M.

On a : $\widehat{AMB} = \widehat{AMM'} + \widehat{M'MB}$

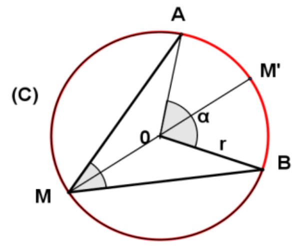
$\widehat{\mathbf{AOB}} = \widehat{AOM'} + \widehat{M'OB}$

Or on sait que $2\,\widehat{AMM'} = \widehat{AOM'}$ et $2\,\widehat{M'MB} = \widehat{M'OB}$

D'où $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMM'} + 2\,\widehat{M'MB}$

$= 2\,(\widehat{AMM'} + \widehat{M'MB})$

Donc $\widehat{\mathbf{AOB}} = \mathbf{2}\widehat{\mathbf{AMB}}$**, alors** $\widehat{\mathbf{AMB}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathbf{AOB}}$



3e Cas : le point O est à l'extérieur de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

M', est un point diamétralement opposé à M

On a : $\widehat{M'OB} = \widehat{AOB} + \widehat{M'OA}$

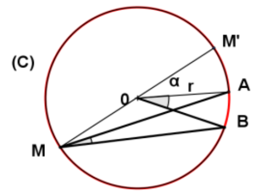
$\widehat{AOB} = \widehat{M'OB} - \widehat{M'OA}$

Or, $\widehat{M'OB} = 2\,\widehat{M'MB}$ et $\widehat{M'OA} = 2\,\widehat{M'MA}$

D'où $\widehat{AOB} = 2(\widehat{M'MB} - \widehat{M'MA})$

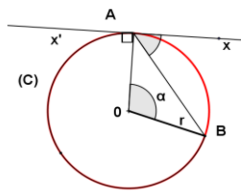
Comme $\widehat{M'MB} - \widehat{M'MA} = \widehat{AMB}$ alors, $\widehat{\mathbf{AOB}} = \mathbf{2}\widehat{\mathbf{AMB}}$

d'où $\widehat{\mathbf{AMB}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathbf{AOB}}$



Cas Limite :

$\widehat{AOB} = 2\widehat{xAB}$



III - 2) Théorème de l'angle inscrit :

- **Tout angle inscrit dans un cercle est la moitié de l'angle au centre associé.**
- **Tout angle au centre est le double de l'angle inscrit associé.**

III - 3) Exercice d'application : Cas particulier où l'angle inscrit est droit.

On considère la figure suivante.

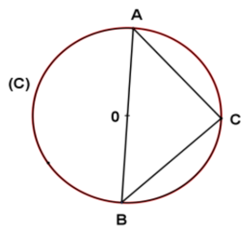
a) Que représente [AB] pour le cercle (C) ? b) Déduis-en la mesure de $\widehat{AOB}$

c) Quel est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.

d) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

e) Cite un angle inscrit et un angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C.

f) Compare les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$? Conclus.



IV° ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MEME ARC :

IV - 1) Activité :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r.

1) Marque sur (C) les points A ; N ; B ; M et C en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

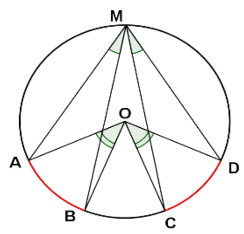
2) Nomme les angles inscrits au cercle (C), les points N ; B et M n'étant que des sommets.

3) Quel est leur angle au centre associé à l'angle ? **4)** Compare la mesure de ces angles inscrits.

IV - 2) Théorème des angles inscrits :

Dans un cercle, deux angles inscrits interceptant le même arc ont même mesure.

❖ **Remarque :**

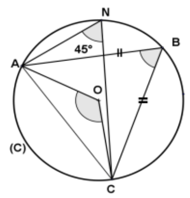


Dans un cercle, deux angles inscrits qui sous-tendent (qui interceptent) deux arcs égaux ont la même mesure.
Autrement dit, si deux angles inscrits sont égaux alors les arcs qu'ils sous-tendent ont la même longueur.

IV - 3) Exercice d'application :

Sur la figure ci-contre :

- $\widehat{ANC} = 45°$
- Le triangle ABC est isocèle en B. Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?



V° RAPPEL SUR LES POLYGONES REGULIERS : (6e - 4e)

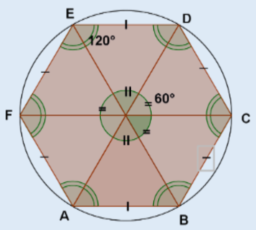
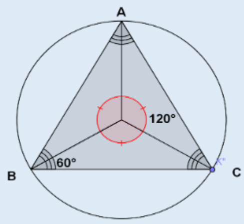
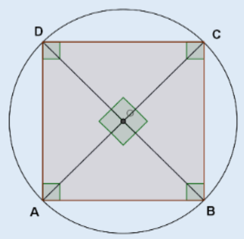
V – 1) Définition :

Un **polygone régulier** a **tous ses côtés de même longueur** et **tous ses angles de même mesure.**

V – 2) Propriétés

✓ Un polygone régulier est **inscrit** dans un cercle passant par tous les sommets du polygone. Le centre O du cercle est aussi appelé le **centre du polygone régulier**.

✓ Soit [AB] un côté d'un **polygone régulier de centre O** à **n côtés** ; $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{n}$

Hexagone régulier (polygone à 6 côtés égaux)	Triangle équilatéral (polygone régulier à 3 côté égaux)	Carré (polygone régulier à 4 côtés égaux)
 $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{6} = 60°$	 $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{3} = 120°$	 $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{4} = 90°$

CHAPITRE IV

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

DUREE : **12 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser la résolution de problèmes en utilisant les propriétés des solides étudiés.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Reconnaitre une pyramide ; un cône de révolution.
- Faire une représentation plane d'une pyramide ; d'un cône de révolution
- Reconnaitre un cône de révolution.
- Réaliser le patron d'une pyramide régulière ; d'un cône de révolution.
- Calculer l'aire d'une pyramide et d'un cône de révolution.
- Calculerl'aired'unepyramideoud'uncônederévolutionobtenuparagrandissement ou par réduction.
- Calculer une aire latérale et une aire totale d'une pyramide régulier ; d'un cône de révolution.
- Restituer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base.
- Utiliser le théorème de Thalès dans le plan et la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base pour calculer des longueurs dans l'espace.
- UtiliserlethéorèmedePythagoredansleplanpourcalculerdeslongueursdans l'espace.
- Utiliser la trigonométrie dans le plan pour calculer des angles dans l'espace.

Sources :

- **Nouveau programme de 2006 et Guide d'usage 3e de Février 2010**
- **Manuels :** CIAM 4èmeet3ème, Excellence 4ème et 3ème ; Clef des Maths 3ème
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr/, consultéle17/01/2015 à 21 h 30min
  : http://www.mathsvidéos.com, consultéle17/01/2015 à 21 h 30min
  http://mathemitec.free.fr/index.php, consulté le 07/06/2014 à 09h 22 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : notion de plan et ses composantes ; théorème de Pythagore ; théorème de Thalès

PLAN DU COURS

I° Rappel sur le disque	1 – 1) Activité
I° - 1 Définition :	1 – 2) Définition
I° - 2) L'axe d'un disque :	1 – 3) Exercice d'application
II° Présentation de la pyramide :	**2) Aire d'un cône de révolution :**
II° - 1) Activité :	2 – 1) Définition
II° - 2) Vocabulaire et représentation :	2 – 2) Exercice d'application
II° - 3) Définition:	**V°) Volume d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution:**
II° - 4) La pyramide régulière :	V – 1) Définition
II° - 5) Propriétés :	V – 2) Exercice d'application :
II° - 6) Patron d'une pyramide régulière :	**VI°) Section d'une pyramide et d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base:**
II° - 7) Exercice d'application	
III° Présentation du cône de révolution :	
III° - 1) Activité :	**VI° - 1) Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base :**
III°– 2) Vocabulaire :	
III° – 3) Représentation plane d'un cône de révolution :	VI° - 1 – 1) Activité
III° - 4) Définition :	VI° - 1 – 2) Propriétés

Introduction :

Ce chapitre que nous allons aborder ; vise à consolider la représentation plane des solides étudiés.
Ainsi, dans les différentes activités on utilisera les notions de géométrie dans l'espace étudiées dans les classes précédentes.
Pour la pyramide et le cône de révolution, vous serez entraînés à faire des maquettes et des exercices sur le calcul d'aire.
D'une part, nous mettrons en évidence le fait que si on multiplie les longueurs par k, alors l'aire est multipliée par k^2.
D'autre part, nous mettrons en évidence le fait que si on multiplie les longueurs par k, alors le volume est multiplié par k^3.
Du point de vue intérêt, comme tous les cours, la géométrie dans l'espace, revêt d'une importance capitale dans diverses secteurs de nos vie tels que : la physique, l'architecture ; la chimie ; l'art ; … ce chapitre peut-être aussi lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;… et au TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'Éducation)

DEROULEMENT DU COURS

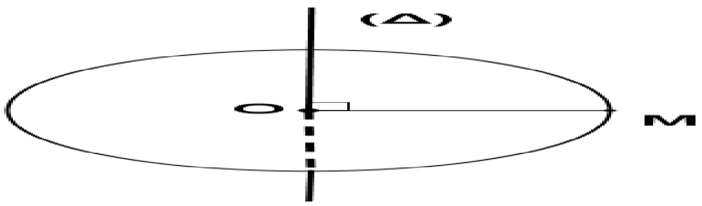
I° RAPPEL SUR LE DISQUE :

I - 1) Définition

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r.
On appelle disque (D) de centre O et de rayon r, l'ensemble des points M du plan, intérieur au cercle (C) ou appartenant à (C) ; c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que **OM** $\leq$ **r**

I - 2) L'axe d'un disque :

On appelle axe d'un disque (D), la droite (Δ) perpendiculaire au plan et passant par le centre du disque.



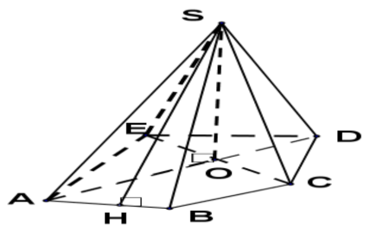
II° PRESENTATION DE LA PYRAMIDE :

II - 1) Activité :

1) Présenter une pyramide en fil de fer. 2) Faire montrer les arêtes.
3) Faire représenter le dessin observé. 4) Faire représenter la figure sur une feuille.

II - 2) Vocabulaire et représentation:

- Le polygone ABCDE est **la base** de la pyramide SABCDE
- Le triangle SAB est **une face latérale**
- S est **le sommet** de la pyramide
- [AS] est **une arête latérale**
- [SO] est **la hauteur** de la pyramide
- [SH] est **un apothème** de la pyramide.



II - 3) Définition:

On appelle pyramide de sommet S, tout solide obtenu en joignant les sommets d'un polygone à un point S n'appartenant pas au plan de ce polygone. Ce polygone est la base de la pyramide.

II – 4) Pyramide régulière:

- Si la base d'une pyramide est un triangle alors cette pyramide est appelé **un tétraèdre**.

On dit qu'une pyramide est régulière :

- Si **sa base** est un **polygone régulier** et **sa hauteur passe par le centre de la base** alors cette **pyramide** est dite **régulière**.
- Si **sa base** est **un triangle équilatéral** et **sa hauteur passe par le centre de ce triangle** alors cette **pyramide** est un **tétraèdre régulier**.

II - 5) Propriétés :

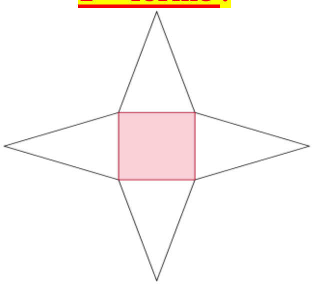
- ✓ **Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.**
- ✓ **Les arêtes latérales d'une pyramide régulière ont la même longueur.**
- ✓ **Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des *triangles isocèles*.**
- ✓ **La hauteur issue du sommet S de l'un de ces triangles est appelée *apothème de la pyramide*.**

- **Remarque :** **Tout triangle équilatéral est un triangle isocèle.**

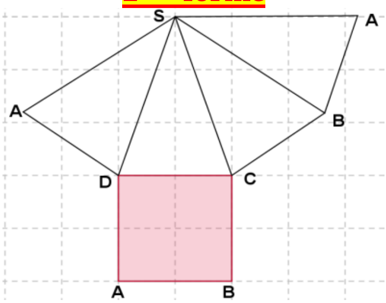
II - 6) Patron d'une pyramide régulière :

Il y a deux formes de patron pour chaque pyramide.

1ère forme :



2ème forme



Exemple de la pyramide à base carrée

II - 7) Exercice d'application

Répond par vrai ou faux et justifie ta réponse.

a) Une pyramide dont les arêtes latérales ont la même longueur est une pyramide régulière.
b) Si une pyramide régulière a quatre faces latérales, alors la base est un carré.
c) Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles.

III° PRESENTATION DU CONE DE REVOLUTION :

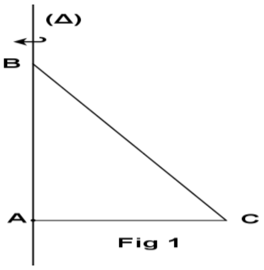
III - 1) Activité

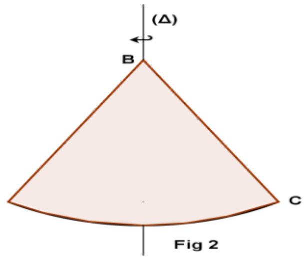
On considère la figure ci-contre :

1) En faisant tourner le triangle rectangle ABC en A, autour de la droite (Δ), que décrit le point C ?

2) Quel solide as-tu l'impression de voir ?

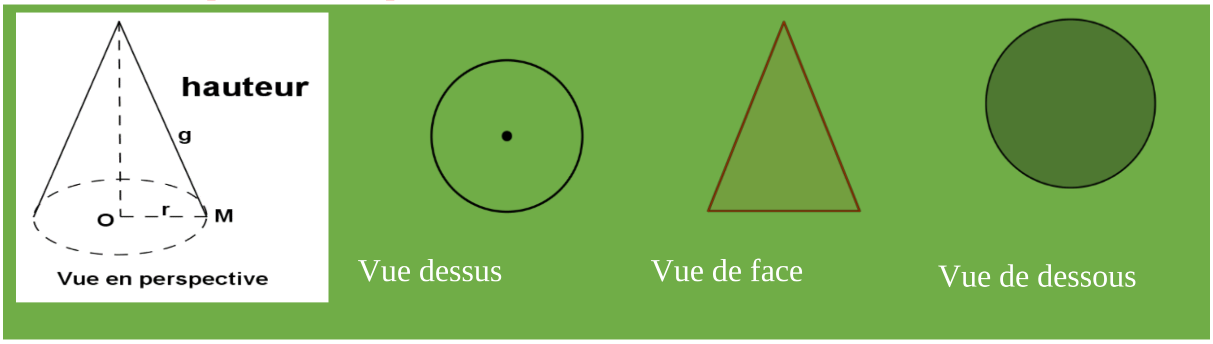
Solution :





III – 2) Vocabulaire :

III – 3) Représentation plane d'un cône de révolution :



III - 4) Définition :

Soit (D) un disque de centre O et de rayon [OM] et d'axe (Δ), S un point de (Δ) distinct de O. **On appelle cône de révolution de hauteur [OS], de génératrice [SM], de rayon de base [OM], le solide engendré par [SM] lorsque le point M décrit la circonférence du disque.**

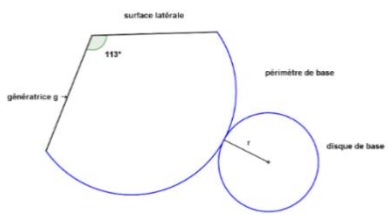
III – 5) Propriété :

La base d'un cône de révolution est un disque et son axe la hauteur du cône.

III - 6) Patron d'un cône de révolution :

Le patron d'un cône est formé de deux parties :

- ✓ **d'un secteur circulaire d'angle ∝ et de rayon la génératrice du cône**
- ✓ **d'un disque de rayon r, base du cône.**



Angle au centre	360°	$\propto$
longueur de l'arc	$2\pi g$	$L = 2\pi r$

Le rayon du disque de base et la génératrice étant proportionnels alors $\frac{r}{g} = \frac{\alpha}{360}$

D'où $\propto = \frac{360}{g} r$ **(en degré)** **et** $r = \frac{g.\alpha}{360}$

III° - 7) Exercice d'application :

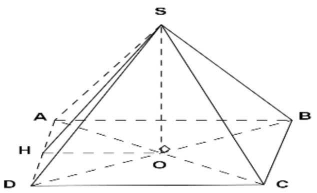
Un cône de révolution a pour rayon de base r = 3 cm et pour hauteur h = 4 cm.
a) Calculer la longueur de sa génératrice g.
b) Donner la représentation plane de ce cône de révolution.

IV°) AIRE D'UNE PYRAMIDE REGULIERE ; D'UN CONE DE REVOLUTION :

IV - 1) Aire d'une pyramide de régulière :

IV - 1 – 1) Activité :

SABCD est une pyramide régulière de base ABCD, un carré de 4 cm de côté et de hauteur$[SO]$, 6cm. Soit H un point de [AB] tel que [SH] soit son apothème.

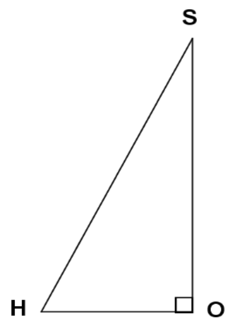


a) Montre que la longueur de l'apothème est $2\sqrt{10}$ cm.
b) Montre que l'aire latérale totale $A_l = 16\sqrt{10}$ cm².
c) Montre que l'aire totale A_t de la pyramide est $16(1+\sqrt{10})$ cm²

Solution :

a) Montrons que la longueur de l'apothème est $2\sqrt{10}$ cm.

Considérons le triangle rectangle SOH en O.



D'après le théorème de Pythagore, on a : SH = $\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + SO^2}$

SH = $\sqrt{2^2 + 6^2}$ = SH = $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm

b) Montrons que l'aire latérale totale A_l $16\sqrt{10}$ cm

Puisque la pyramide est régulière, alors ses faces latérales sont des triangles isocèles en **S** et superposables de base [AB] et de hauteur [SH]

$A_l = \frac{4}{2}$x SH x AB = $\boxed{16\sqrt{10}\ cm^2}$

c) Montrons que l'aire totale de la pyramide est $16(1+\sqrt{10})$ cm² :

$A_t = AB^2 + A_l = \boxed{16(1+\sqrt{10})\ cm^2}$

IV - 1 – 2) Définition

- ✓ **L'aire latérale d'une pyramide est égale à la somme des aires des faces latérales.**

  A_l = Nbre de face x Aire d'une face

- ✓ **L'aire totale d'une pyramide est égale à la somme de l'aire de base et de l'aire latérale.**

IV - 1 – 3) Exercice d'application

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 4 cm et de hauteur $[SO]$, 10 cm

a) Montre que son aire latérale totale est $16\sqrt{26}$ cm²
b) En déduire sont aire totale.

IV 2) Aire d'un cône de révolution :

IV - 2 – 1) Définition :

Soit P le périmètre de base ; g la génératrice ; r le rayon du disque de base et A_l l'aire latérale du cône ; et $\mathscr{B}$ son aire de base on a : $\mathscr{B} = \pi r^2$ et $P = 2\pi r$

L'aire totale d'un cône est la somme de l'aire latéral et de son aire de base.

$A_l = \frac{P \times g}{2}$ en remplaçant P par sa valeur on obtient $\mathscr{A}_l = \pi r g$ (ou $\mathscr{A}_l = \propto \frac{g^2}{2}$; $\propto$ étant en radian)

D'où $\mathcal{A}_t = \pi r^2 + \pi r g = \pi r (r + g)$

IV - 2 – 2) Exercice d'application :

Un cône de révolution a pour hauteur 3 cm et pour génératrice 5 cm. Calculer son rayon du disque de base ; son aire latérale et son aire totale.

V°) VOLUME D'UNE PYRAMIDE REGULIERE ET D'UN CONE DE REVOLUTION:

V – 1) Définition

Nous admettant que le volume **V** du cône ou d'une pyramide de révolution, d'aire de base $\mathcal{B}$ et de hauteur **h** est : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$

V – 2) Exercice d'application :

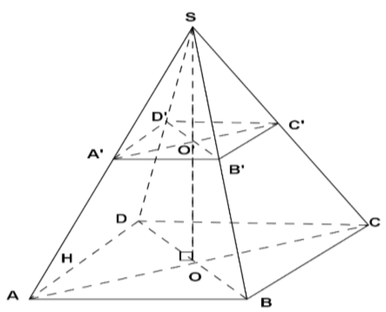
1) SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 4 cm et hauteur $[SO]$, 10 cm. Calculer son volume.
2) Un cône de révolution a pour rayon de base r = 3 cm et pour hauteur h = 5 cm. Calculer son volume.

VI°) SECTION D'UNE PYRAMIDE ET D'UN CONE DE REVOLUTION PAR UN PLAN PARALLELE A SA BASE:

VI° - 1) Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base :

VI° - 1 – 1) Activité :

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD. La section de cette pyramide par un plan parallèle à sa bases est A'B'C'D'. Le point O est le centre de la base ABCD et $[SO]$ est sa hauteur. On donne SA' = $\frac{1}{3}$ SA



a) Reproduis la figure

b) En utilisant Thalès démontre que SO' = $\frac{1}{3}$ SO ; A'B' = $\frac{1}{3}$ AB. En déduire que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré

c) Exprime l'aire A' de SA'B'C'D' en fonction de l'aire A de SABCD

d) Exprime le volume V' de SA'B'C'D' en fonction du volume V de SABCD

VI° - 1 – 2) Propriétés :

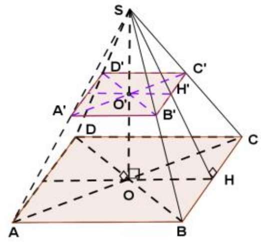
- ✓ La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que celle de sa base.
- ✓ Le centre de la section d'une pyramide régulière appartient à sa hauteur.
- ✓ La section d'une pyramide par un plan parallèle au plan contenant sa base, donne deux solides :
  - ❖ Une **pyramide réduite** ;
  - ❖ Un **tronc de pyramide**.
- ✓ Si on multiplie par un réel **k strictement positif** les dimensions d'une pyramide P ; d'aire $\mathcal{A}$ et de volume **V** ; on obtient une pyramide P' d'aire $\mathcal{A}'$ et de volume **V'** tel que :

  $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A}$ et $V' = k^3 V$
- ✓ Si **k > 1**, alors **P'** est **un agrandissement** de **P**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient d'agrandissement** ou **échelle d'agrandissement**.
- ✓ Si **0 < k < 1** alors **P'** est **une réduction** de **P**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient de réduction** ou **échelle de réduction.**

VI - 1 – 3) Exercice d'application :

La figure ci-contre A' B' C'D' A B C D représente un emballage d'un jus d'orange. On donne : OC = 6 cm, O'C' = 4,5 cm et OO' = 12 cm.

1. Calcule le coefficient de réduction k.
2. Calcule la hauteur SO.
3. Calcule le volume de jus d'orange que peut contenir cet emballage.
4. Sachant qu'on dispose de 1m3 de jus d'orange dans un réservoir, combien d'emballages de jus peut-on remplir ? Quel est le volume de jus restant ?



VI° - 2) Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base :

VI° - 2 – 1) Activité :

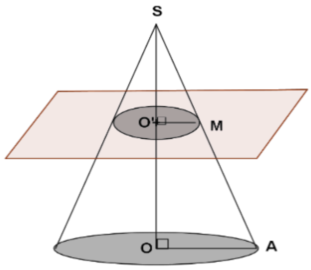
On coupe le cône de révolution ci-contre en M par un plan parallèle à son disque de base. Le rayon est $[OA]$ et la hauteur $[SO]$. On donne $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$

a) En utilisant le théorème de Thalès démontre que $\frac{O'M}{OA} = \frac{2}{3}$ et $\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3}$

b) Exprime l'aire totale A' du cône réduit en fonction de l'aire totale A du grand cône.

c) Exprime le volume total V' du cône réduit en fonction du volume total V du grand cône.

c) En déduire une expression du volume du tronc de cône.



VI° - 2 – 2) Propriétés :

- ✓ La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle dont le centre appartient à la hauteur du cône initial.
- ✓ La section d'un cône par un plan parallèle au plan contenant sa base, donne deux solides :
  - ❖ Un **cône réduit** ;
  - ❖ Un **tronc de cône**.
- ✓ Si on multiplie par un réel k strictement positif les dimensions du cône **C** ; d'aire $\mathcal{A}$ et de volume **V** ; on obtient un cône **C'** d'aire $\mathcal{A}'$ et de volume **V'** tel que : $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A}$ et $V' = k^3V$
- ✓ Si $k > 1$, alors **C'**, est un agrandissement de **C**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient d'agrandissement** ou **échelle d'agrandissement**.
- ✓ Si $0 < k < 1$ alors **C'**, est une réduction de **C**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient de réduction** ou **échelle de réduction**.

VI° - 2 – 3) Exercice d'application :

On se propose de calculer le volume d'un seau qui a la forme d'un tronc de cône de révolution. On donne

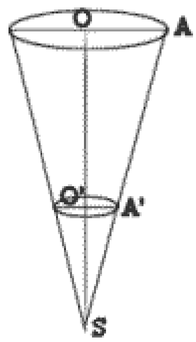
OS= $2\sqrt{13}$ et AO= $2a$ a étant un nombre réel positif, et O' milieu de [OS].

1. Calcule O'A' en fonction de a.

2. On prend **a =** $\sqrt{3}$ pour la suite et pour unité le dm. a) Calcule le volume du cône initial.

b) Calcule le volume du cône réduit et en déduire celui du seau.

3. On donne $\pi \cong 3{,}14$; $\sqrt{13} \cong 3{,}6$ et $\sqrt{3} \cong 1{,}7$. Préciser à 10^{-2}, la valeur du volume du seau.



CHAPITRE V

LES VECTEURS

DUREE : 8 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation du calcul vectoriel pour résoudre des problèmes.

Objectif spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.
- Restituer la relation de Chasles. Utiliser la relation de Chasles.
- Construire le vecteur produit d'un vecteur par un réel donné.
- Restituer les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.
- Utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.
- Utiliser une égalité vectorielle pour démontrer : la colinéarité de vecteurs ; le parallélisme de droites ; l'alignement de points.

Prérequis : Notion de vecteur ; translation ; droites des milieux ; segment et milieu ; parallèle des milieux ; **Axiome d'Euclide** : par un point du plan, il passe une et seule droite parallèle à une droite donnée.

Sources :

- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Nouveau programme de **2006 et** Guide d'usage de Février 2010
- Manuels : CIAM $4^{ème}$ et $3^{ème}$, Excellence $4^{ème}$ et $3^{ème}$
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

PLAN DU COURS

Introduction :

Le mot **« vecteur »** vient du latin **« vehere »** (conduire, transporter). La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans.

Du point de vue programme, l'étude des vecteurs n'est pas nouvelle, commencée en classe de **4^e**, elle est poursuivie en **3^e**, avec l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un réel. Ainsi, la maîtrise de ces deux opérations est nécessaire pour la résolution de certains problèmes.

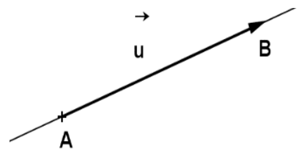
DEROULEMENT DU COURS

I° RAPPEL :

I° - 1) Définition :

Un vecteur est défini par : **une longueur, une direction et un sens.**

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

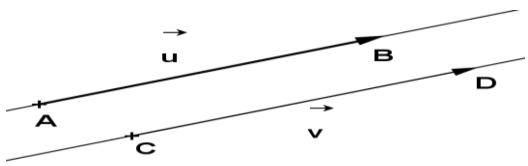


- **Longueur : AB**
- **Sens : de A vers B**
- **Direction : celle de la droite (AB)**

I° - 2) Egalité de vecteurs :

(AB) // (CD) ; $\vec{u} = \vec{v}$ signifie que **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$**

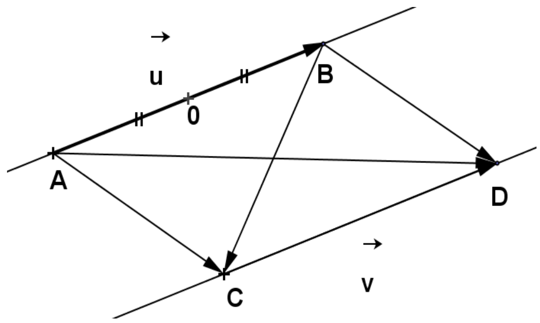
Des vecteurs sont égaux s'ils ont :



- **La même longueur**
- **Le même sens**
- **La même direction.**

I° - 3) Vecteurs et configurations :

On a ABDC un quadrilatère tel que **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et O milieu de [AB]** d' où **:**

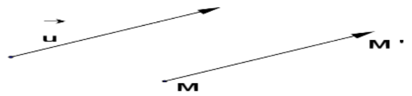


- Si **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABDC est un parallélogramme.**
- **Si IJKL est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$**
- Si **$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$,** alors **O est le milieu de [AB].**
- **Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$**

I° - 4) Vecteurs et transformations :

- **M' = $t_{\vec{u}}$(M) équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$**

signifie M', est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$.



- **M' = S_O(M) équivaut à $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$**

Signifie que **M'** est le symétrique de M par rapport à O.

I° - 5) Exercice d'application : choisis la bonne réponse

1°/ Si **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$** alors : **(AB) // (CD)** ; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **;** ABCD est un parallélogramme.

2°/ Si M$\in$ [AB], alors : **$\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont la même direction** ; $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ont le même sens.

3°/ E est le milieu de [FA] : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FA}$; **$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EA}$**

4°/ La phrase **« F est le symétrique de E par rapport à A »** signifie :

E est le milieu de [FA] ; $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FA}$; **$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA}$**

5°/ E = **$t_{\overrightarrow{BC}}$ (A) signifie : A= E ; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$;** $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$.

II° ADDITION VECTORIELLE :

II° - 1) Activité :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts et A un point du plan.

1) Construis les points B et C tel que **B = $t_{\vec{u}}$ (A) et C = $t_{\vec{v}}$ (B)**

2) Sur la même figure, place un point E différents de A. Construis les points F et G tel que $\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{u}}$ **(E) = F et** $\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{v}}$ **(F) = G**

3) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$

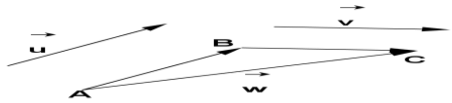
II° - 2) Théorème et définition :

❖ **Définition :**

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Pour tout point A du plan, si **C,** est l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ est le vecteur somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. **On note** $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$

❖ **Théorème :**

Le vecteur somme des $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ ne dépend pas du choix du point A.



II° - 3) Relation de Chasles :

Quels que soient les points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ ou $\overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{CB}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

II° - 4) Propriétés :

- ❖ L'addition des vecteurs est une ***opération commutative*** **:** $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- ❖ L'addition des vecteurs est une ***opération associative*** : $(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + (\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}})$
- ❖ $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- ❖ Tout vecteur dont la longueur est nulle est un vecteur nul. **On la note** $\overrightarrow{\mathbf{0}}$

  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$
- ❖ Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la **même longueur, la même direction, mais des sens contraire :** $\overrightarrow{\mathbf{u}} + (-\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$
- ❖ Si la somme de deux vecteurs distincts est nulle, alors ces vecteurs sont opposés.

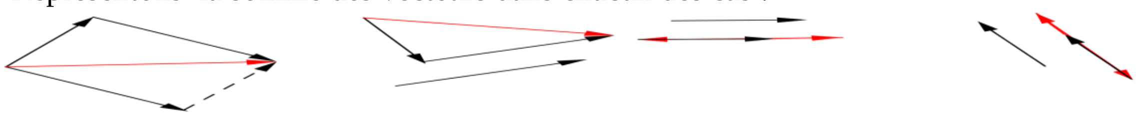
II° - 5) Exercice d'application :

1°/ A, B, C, D, E, F et P sont des points du plan. Simplifie l'écriture de la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$

2°/ Représente la somme des vecteurs dans chacun des cas :

Solution :

2°/ Représentons la somme des vecteurs dans chacun des cas :



III° MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL :

III° - 1) Activité :

Soit A, B, M et N des points du plan tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

1) Simplifie l'écriture $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

2) Construis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis le vecteur $\overrightarrow{MN}$

3) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$

4) Compare le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celui du vecteur $\overrightarrow{MN}$ si $\overrightarrow{MN} = -2\,\overrightarrow{AB}$

III° - 2) Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et **k** un réel. Le vecteur $\mathbf{k}\vec{u}$ est appelé vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel **k**.

❖ **Remarque :**

- ✓ Si k = 0, alors $k\vec{u} = \vec{0}$
- ✓ **Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$**
- ✓ **Si k > 0, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.**
- ✓ **Si k < 0, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens contraires.**

III° - 3) Propriétés : Soit $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **deux vecteurs et k et k', deux réels :**

- ❖ $\vec{u} = 1\vec{v}$;
- ❖ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- ❖ $k(k'.\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$;
- ❖ $(k + k')\vec{u} = k.\vec{u} + k'.\vec{u}$

III° - 4) Exercice d'application :

On pose $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{v} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\vec{w} = \frac{7}{3}\vec{\imath}$; $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{K} = 3\vec{u} - \vec{v}$; $\vec{P} = 5\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u}$. Exprime les vecteurs $\vec{S}$; $\vec{P}$ et $\vec{K}$

IV° VECTEURS COLINEAIRES :

IV° - 1) Activité :

1) Compare $3\vec{u}$ et $5\vec{u} - 2\vec{u}$. 2) Soit OAB un triangle.

2° – a) construis les points C et D définis par : $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$

2° - b) Démontre que les points O, B et D sont alignés.

IV° - 2) Définition :

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un d'eux est nul.

IV° - 3) Propriétés : Soit k un réel et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- ❖ **Si $\vec{u} = k.\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**
- ❖ **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$**

✓ **Remarque :**

Le vecteur nul a toutes les directions. Le vecteur nul est donc colinéaire à tout vecteur. **On dit qu'il n'a ni direction ni sens.**

La *translation de vecteur nul* ne déplace aucun point du plan. $t_{\vec{0}}(M) = M$

IV° - 4) Exercice d'application :

1) M est un point de la droite (AB). L'abscisse de M dans le repère (A ; B) est m. Justifie que $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$.

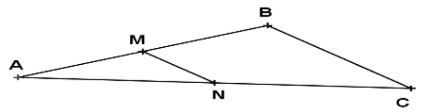
3) A, B, C et D sont quatre points non alignés, tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Les droites (AC) et (BD) se coupent au point E justifie que C est le milieu de [AE]

V° FORMULATION VECTORIELLE DES THEOREMES DE THALES ET APPLICATION :

V° - 1°) Formulation vectorielle des théorèmes de Thalès :

ABC est un triangle, k un réel non nul, M un point de (AB), N un point de (AC).

(MN) // (BC) équivaut à $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$



V° - 2) Exercice d'application :

IEF est un triangle, G est un point de [IE] et H un point de [IF] tel que $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{GH}$

Démontre que $\overrightarrow{IE} = 4\overrightarrow{IG}$

« Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » GASTON BACHELARD (1864 - 1962)

CHAPITRE VI

REPERAGE DANS LE PLAN

DUREE : **12 HEURES**

Objectif général: au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de **maîtriser** la résolution des problèmes faisant intervenir les propriétés du repérage dans le plan.

Objectifs spécifiques : au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.
- Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs.
- Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal, le vecteur nul, deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés.
- Calculer les coordonnées du vecteur produit d'un vecteur par un réel.
- Montrer à l'aide de leurs coordonnées que deux vecteurs sont : - colinéaires ; - orthogonaux.
- Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ces points.
- Reconnaître l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées.
- Déterminer l'équation réduite d'une droite
- Passer de l'équation réduite à l'équation générale et inversement.
- Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées d'un point et son coefficient directeur.
- Représenter une droite dans un repère orthonormal à partir : - de deux de ses points, - d'un point et de son coefficient directeur, - d'un point et d'un vecteur directeur ou d'une équation.
- Donner une équation générale d'une droite connaissant : - les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur ; - les coordonnées d'un point et le coefficient directeur de la droite.
- Déterminer la position de deux droites parallèles, perpendiculaires à partir de : - leurs équations réduites, - leurs coefficients directeurs, - leurs vecteurs directeurs.

Sources :

- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Nouveau programme de **2006**
- Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  http://www.mathsvidéos.com**,** consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min

Prérequis : Repérage sur une droite graduée ; sur un repère ; Notion de vecteur ; translation ; droites des milieux ; segment et milieu ; parallèle des milieux ; **Axiome d'Euclide** : par un point du plan, il passe une et seul droite parallèle à une droite donnée ; calcule de distance.

PLAN DU COURS

LEÇON 1 : REPERAGE DANS LE PLAN : COORDONNEES D'UN VECTEUR	VII – 1) Activité :
I ° I° Distance de deux points	VII – 2) Propriétés:
I – 1) Activité	VII – 3) Application :
I – 2) Théorème	**VIII° Vecteurs orthogonaux**
	VIII– 1) Activité :
	VIII– 2) Propriétés:

Introduction :

Dans ce chapitre, il s'agit d'introduire l'aspect numérique de la géométrie appelé **géométrie analytique**. De ce fait, nous tâcherons de traduire les propriétés géométriques par des relations numériques.

Du point de vue historique, cette **géométrie analytique** (ou **géométrie avec coordonnées**) fut introduite par **RENE DESCARTES** **(1596 – 1650).** D'ailleurs, **DESCARTES** disait à ce propos que ***« la géométrie analytique n'est autre que l'art de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul numérique ».*** C'est dire donc, qu'il existe une interconnexion entre le calcul numérique et la géométrie pure.

Ainsi, l'utilité du repérage dans le plan n'est pas à démontrer car le phénomène de repérage est consubstantiel à l'apparition de l'homme sur terre. A cet effet, le repérage est utilisé en physique (Ex : les déplacements du plan permettent de modéliser les mouvements), en géographie.

Dès lors, j'invite chacun à mettre du sien car comme le souligné avec brio **GASPARD MONGE**, la géométrie requiert de la rigueur et de la précision dans un esprit cartésien, qui présente des qualités intellectuelles, claires, logique et méthodiques.

A cet effet, pour plus d'efficacité, nous diviserons ce chapitre en deux leçons :

- ❖ **LEÇON 1 : REPERAGE DANS LE PLAN : COORDONNEES D'UN VECTEUR**
- ❖ **LEÇON 2 : REPERAGE DANS LE PLAN : EQUATION DE DROITE ET REPRESENTION**

DEROULEMENT DU COURS

CHAPITRE VI

REPERAGE DANS LE PLAN :
LEÇON 1 : COORDONNEES D'UN VECTEUR

I° DISTANCE DE DEUX POINTS :

I – 1) Activité :

Dans le repère orthonormal (O ; I ; J), on considère deux points A (x_A ; y_A) ; B (x_B ; y_B) et on note C le point tel que $x_C = x_B$; $y_C = y_A$. On supposera que $x_B > x_A$ et que $y_B > y_A$

1) En tenant compte de la nature du repère, et de la position relative de côtés du triangle par rapport aux axes, justifie que ABC est un triangle rectangle en un point que tu préciseras.
2) Calcule la distance AB.

I – 2) Propriété:

Dans un repère orthonormé, on considère deux points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B). La distance entre les points A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- **Remarque : Attention! Ce théorème est uniquement valable dans un repère orthonormé!**

I – 3) Exercice d'application :

Dans un repère (O ; I ; J) place les points A (4 ; 3) et B (-2 ; 5). Calcule les distances OA ; OB et AB.

II° COORDONNEES D'UN VECTEUR :

II – 1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (repère qui a ses axes perpendiculaires, la même unité de longueur étant choisie sur ces axes), A et B sont deux points.

1) Exprime $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$
2) Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ puis en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

II – 2) Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on appelle coordonnées ou composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de réels ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$) ou $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

$x_B - x_A$ est la première composante (ou 1e coordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.

$y_B - y_A$ est la deuxième composante (ou 2e coordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.

On note $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$) ou $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

II – 3) Exercice d'application :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points R (3 ; 4) ; S (5 ; -1), Q (-2 ; -3) et T (1 ; 6). Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$; $\overrightarrow{RT}$; $\overrightarrow{RO}$; $\overrightarrow{SQ}$; $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TI}$.

III° COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT :

III -1) Activité :

Le plan est muni du repère orthonormal (O, I, J). On donne les points A (x_A ; y_A), B (x_B ; y_B).
Trouve les coordonnées du point K milieu de [AB]

III – 2) Propriété:

Le plan est muni du repère orthonormal (O, I, J) si K est le milieu du segment [AB] tel que :

A (x_A ; y_A) et B (y_B + y_A) alors $\mathbf{K}\begin{pmatrix} \frac{xA+xB}{2} \\ \frac{yA+yB}{2} \end{pmatrix}$

III – 3) Exercice d'application :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal. On donne deux points A (2 ; - 3) et B ($\frac{3}{2}$; - 5). Quel est le couple de coordonnées du milieu du segment [AB] ?

IV° VECTEURS EGAUX - VECTEURS OPPOSES :

IV - 1) Activité :

Dans le repère orthonormal (O, I, J), les points A (3 ; 4), B (6 ; 0), C (0 ; -5) et D (-3 ; -1)

1) Calcule les coordonnées du point M milieu du segment [AC].
2) Justifie que M est le milieu du segment [BD] et déduis- en la nature du quadrilatère ABCD.
3) Recopie et complète $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D..}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{....}$
4) Nomme deux couples de vecteurs opposés.
5) Calcule puis compare les coordonnées de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MD}$.

IV – 2) Théorème :

Dans un repère orthonormal :

- **Deux vecteurs égaux ont leurs coordonnées respectivement égales.**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \vec{v}$ signifie que $x = x'$ et $y = y'$.

- **Deux vecteurs opposés ont leurs coordonnées respectivement opposés.**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u} = -\vec{v}$ signifie que $x = -x'$ et $y = -y'$

IV– 3) Exercice d'application :

Dans un repère orthonormal du plan, on trouve les points A (2 ; 3) ; B (-1 ; 2) et C (-2 ; -1)

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$
2) Déduis-en les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Calcule les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CE}}$

V° SOMME DE DEUX VECTEURS :

V – 1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Détermine le couple de coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$

V – 2) Propriété:

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. **Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, alors $\vec{w}$ a pour coordonnée $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$**

V – 3) Exercice d'application :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On donne $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathbf{CD}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{EF}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CD}} + \overrightarrow{\mathbf{EF}}$ **?**

VI° PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL – VECTEUR NUL:

VI – 1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On donne $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et **k un réel.**

Détermine le couple de coordonnées de $k.\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

VI – 2) Propriété: Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$

- **Si $\overrightarrow{w} = k\,\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnée $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$**
- **Le vecteur nul, a pour coordonnées (0 ; 0) : on note $\overrightarrow{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$**

VI – 3) Exercice d'application :

On trouve dans un repère orthonormal les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-\frac{1}{2}\,;3)$; $\overrightarrow{v}\,(2\,;4)$

Trouve les coordonnées des vecteurs $2\,\overrightarrow{u}$; $0\,\overrightarrow{u}$ et $-3\,\overrightarrow{v}$

Solution : $2\,\overrightarrow{u}$ **(- 1 ; 6) ;** $0\,\overrightarrow{u}$ **= (0 ; 0) et** $-3\overrightarrow{v}$ **= (-6 ; -12)**

VII° VECTEURS COLINEAIRES :

VII – 1) Activité :

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires. On sait que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$

1) Recopie puis complète x = … ; y = … ; $k = \frac{x}{\dots} = \frac{\dots}{y'}$ 2) Déduis-en la relation **xy' – x'y = 0**

VII – 2) Propriété :

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormal :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ **sont colinéaires si et seulement si $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ alors** ***xy' –x'y = 0***

VII – 3) Exercice d'application :

On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\4{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{r}\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{s}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

1) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont –ils colinéaires ? 2) En est- il de même pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{r}$; $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{s}$ **?**

VIII° VECTEURS ORTHOGONAUX :

VIII -1) Activité :

A, B, C sont trois points du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que ABC soit un triangle rectangle en C.

On pose $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

1) Recopie puis complète $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \dots$
2) Déduis –en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Calcule AC², AB² puis CB².
4) Déduis – en que xx' + yy' = 0.
5) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ **si ABC est rectangle en C?**

VIII – 2) Théorème :

Dans un repère orthonormal, deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **orthogonaux si et seulement si** $xx' + yy' = 0$

VIII – 3) Exercice d'application :

Dans les expressions suivantes, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont –ils orthogonaux ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$; **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

CHAPITRE VI

REPERAGE DANS LE PLAN :

LEÇON 2 : EQUATION DE DROITE ET REPRESENTION

I° ÉQUATION GENERALE D'UNE DROITE :

I° – 1) Activité :

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On donne les point A (-1 ; 4) et B (3 ; - 2)
1) Trace la droite (AB)
2) Soit M (x ; y) un point du plan tel que M ∈ (AB).
Trouve **une** équation de la droite (AB)
3) L'équation demandée est – elle l'unique équation de la droite (AB) ?

I° – 2) Propriétés :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J)

- Toute droite a une équation générale de la forme $ax + by + c = 0$ (**a** et **b** n'étant pas tous nuls)
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ (**a** et **b** n'étant pas tous nuls) représente une droite.
- Le vecteur $\vec{u}$ **(−b ; a)** est appelé **vecteur directeur** de la droite.
- Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

I° – 3) Exercice d'application :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J)
On donne A (4 ; 2) et B (-6 ; -3)
1) Trouve l'équation générale de la droite (AB). **2)** Démontre que les points A, O et B sont alignés. **3)** Montre que le point C (2 ; 1) appartient à la droite obtenue.
4) Donne les coordonnées du vecteur directeur de la droite obtenue.

II° EQUATION REDUITE: $y = mx + p$:

II° – 1) Activité :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation générale $-x + 2y + 5 = 0$
1) Exprime y en fonction de x. L'équation ainsi obtenue est appelée ***équation réduite*** de la droite (D).
2) Donne l'équation réduite de chacune des droites suivantes :
(D1) : $4x + 2y - 14 = 0$; (D2) : $7x - 3y = 0$; (D3) : $5y + 2 = 0$
3) Donne la représentation graphique de (D2), (D3) et de (D4) d'équation $x = 2$

II° – 2) Propriétés :

- Une ***équation réduite*** d'une droite est de la forme **$y = mx + p$**, **m** et **p** étant deux réels fixés.
- Le vecteur $\vec{v}$ **(1 ; m)** est appelé ***vecteur directeur*** de la droite.
- **m** est appelé ***coefficient directeur*** de la droite. Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points quelconques de la droite, alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

➢ **Cas particuliers :**

✓ Toute droite d'équation **$y = a$** (constante) est **parallèle à l'axe des abscisses.**
✓ Toute droite d'équation **$x = a$** (constante) est **parallèle à l'axe des ordonnées.**
✓ Toute droite d'équation **$y = ax$** passe par **l'origine du repère.** (Application linéaire**).**

II° – 3) Exercice d'application :

1. Dans un repère, on donne les points E (-3 ; 2) et F (4 ; -3).

a) Détermine les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ **de la droite (EF).**

b) Détermine une équation générale de la droite (EF).

c) Déduis – en l'équation réduite de (EF)

d) Le vecteur directeur de l'équation réduite a pour coordonnées **(1 ; m)**. Trouve par calcule, le coefficient directeur m de (EF).

III° REPRESENTATION D'UNE DROITE :

III° -1) Equation d'une droite dont on connaît un vecteur directeur et un point.

Soit (D) une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\binom{2}{3}$ et A (5 ; 3), un point de (D).

1) Trace la droite (D)

2) Trouve l'équation générale de (D).

III° -2) Equation d'une droite dont on connaît le coefficient directeur et un point.

1) Soit (D) une droite de coefficient directeur 2 et A (- 3 ; 2), un point de (D). Détermine l'équation réduite de (D).

2) Dans un repère orthonormal (O ; I ; J), on donne :

a) (D) : $y = \mathbf{2}x + 1$ et (D') : $y = \mathbf{2}x + 2$; b) (D) : $y = 2x + 3$ et (D') : $y = -\frac{1}{2}x + 5$

2 – 1) Représente pour chaque cas (D) et (D').

2 – 2) Donne pour chaque cas, la position relative de (D) et (D').

III° – 3) Propriétés :

- **Cas des droites parallèles :**

Soit (D) et (D') deux droites d'équations respectives $y = m\,x + p$ et $y = m'x + p'$
Soit (D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$

- **(D) est parallèle à (D') si et seulement si m = m'.**
- **(D) // (D') si et seulement si m = m'.**

- **Cas des droites perpendiculaires :**

Soit (D) et (D') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$
Soit (D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$

- **(D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si mm' = – 1.**
- (D) ⊥ (D') si et seulement si **mm'= – 1**.

III° – 4) Exercice d'application :

Dans le plan mini d'un repère orthonormal (O ; I ; J), place les points A (-1 ; 2) et B (3 ; -2) puis trace les droites (Δ): $y = \frac{1}{2}x - 1$; (D): $y = -3x + 2$; (D'): $y = 3$; (Δ') : $y = 2x$ et (Δ''): $x = 4$

1) Calcule les coordonnées du point K intersection de (Δ) et (D).
2) Trouve l'équation de la droite (L) perpendiculaire à (D) et passant par A.
3) Trouve l'équation de la droite (D') parallèle à (D) et passant par le point B.

CHAITRE VII

LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

DUREE : 8 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maîtriser la construction de l'image d'une figure simple par une transformation.

Objectifs spécifiques: Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Définir une isométrie
- Reconnaitre la transformation résultant de deux symétries orthogonales successives.
- Reconnaitre la transformation résultant de deux translations successives.

Prérequis : Symétrie axiale et centrale, droites parallèles, droites perpendiculaires…

Sources :

- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Nouveau programme de **2006**
- Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème
- **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
  : http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

PLAN DU COURS

I° Les Isométries :	**II° Action successive de deux isométries :**
I – 1) Définition :	II – 1) Action successive de deux translations :
I – 2) Exemples d'isométries :	II – 2) Action successive de deux symétries centrales :
I – 2 – a) La symétrie axiale :	II – 3) Action successive de deux symétries axiales
I – 2 – b) La symétrie centrale :	II - 3 – a) Les deux axes sont parallèles :
I – 2 – c) La translation :	II - 3 – b) Les deux axes sont perpendiculaires :
I – 2 - d) La rotation	II - 3 – a) Les deux axes sont sécants :
I – 3) Application :	

Introduction :

Du point de vu programme, le concept de **TRANSFORMATION DU PLAN** n'est pas nouveau. Il a été abordé au cours des années précédentes sous d'autres vocables : symétrie axiale en 6^{e} ; symétrie centrale en 5^{e} ; translation et rotation en 4^{e}.

Ainsi, les symétriques de figures donnent avec leurs antécédents de belles formes utilisées souvent en architecture, en tapisserie et dans les arts décoratifs.

Ce qui devrait susciter en vous **une faim de l'esprit**, une **saine curiosité** devant aboutir à de réelles satisfactions.

DEROULEMENT DU COURS

I° LES ISOMETRIES :

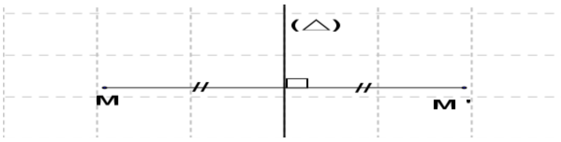
I – 1) Définition :

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve la distance.

I – 2) Exemples d'isométries :

I – 2 – a) La symétrie axiale :

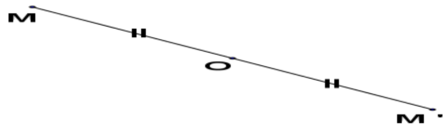
Soit (Δ) un droite et M un point du plan.
On appelle image du point M par la symétrie axiale d'axe (Δ), notée $S_{(\Delta)}$, le point M' tel que (Δ) est la médiatrice de du segment [MM']



I – 2 – b) La symétrie centrale :

Soit O et M deux points du plan.
On appelle image du point M par la symétrie centrale de centre O, notée S_O, le point M' tel que $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$

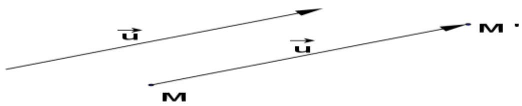
S_O(M) = M' **équivaut à** $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$



I – 2 – c) La translation :

Soient $\vec{u}$ un vecteur et M un point du plan.
On appelle image du point M par la translation du vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, le point M' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

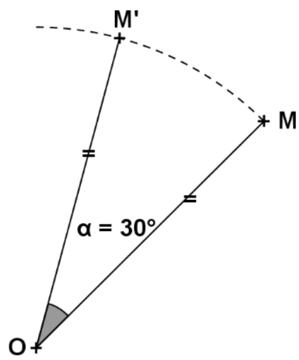
$t_{\vec{u}}$ (M) = M' **équivaut à** $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$



I – 2 - d) La rotation :

Soit O et M deux points du plan et ∝ un angle.
On appelle image du point M par la rotation de centre O et d'angle ∝, notée $r_{(O;\propto)}$, dans le **sens direct,** le point M' tel que OM = OM' et $\widehat{MOM'} = \propto$

$r_{(O;\propto)}$(M) = M' **équivaut à** $\begin{cases} \boldsymbol{OM = OM'} \\ \widehat{MOM'} = \propto \end{cases}$



I – 3) Exercice d'application :

La translation, la rotation, la symétrie axiale et la symétrie centrale sont des isométries. Explique pourquoi.

II° ACTION SUCCESSIVE DE DEUX ISOMETRIES :

II – 1) Action successive de deux translations :

II – 1 – 1) Activité :

On donne deux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VW'}$, trois points A, B et C. M est un point du plan.

1) Construis A_1 et B_1, images respectives de A et B par $t_{\overrightarrow{UV}}$, translation du vecteur $\overrightarrow{UV}$.
2) Construis A' et B', images respectives de A_1 et B_1 par $t_{\overrightarrow{VW}}$, translation du vecteur $\overrightarrow{VW}$.
3) Représente en rouge $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. Que constates – tu ?
4) Démontre que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{UW}$

II – 1 – 2) Propriété :

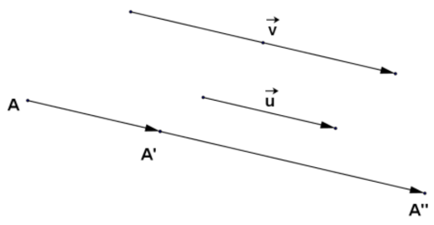
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Faire la translation du vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation du vecteur $\vec{v}$ revient à faire la translation du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

II – 1 – 3) Exercice d'application :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de même direction tels que $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$. A est un point du plan.
1) Construis l'image A'' de A par la translation du vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{v}$. 2) Montre que $\overrightarrow{AA''}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Solution :

1) Construisons A''



2) Montrons que $\overrightarrow{AA''}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
On $\vec{v} = 2\vec{u}$.
Or A'' est l'image de A par la translation du vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation du vecteur $\vec{v}$.

Donc $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
$= \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{AA''} = 3\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{AA''}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

II – 2) Action successive de deux symétries centrales :

II – 2 -1) Activité :

1) Place trois points A, O et O'. Soit A' le symétrique de A par rapport à O et A'' le symétrique de A' par rapport à O'.

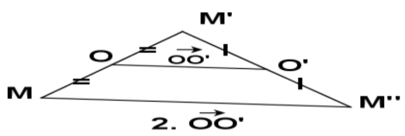
2) trace les segments [OO'] et [AA'']

3) Montre que (OO') et (AA'') sont parallèles.

4) Il y a une transformation plus rapide pour passer de A à A'' (sans passer par A'). Laquelle ?

II – 2 – 2) Propriété :

Effectuer la symétrie de centre O suivie de la symétrie de centre O', revient à effectuer la **translation** de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$



II – 3) Action successive de deux symétries axiales

On considère deux droites distinctes (D) et (D').

M étant un point quelconque du plan. Soit M1 le symétrique de M par rapport à (D), M' le symétrique de M_1 par rapport à (D').

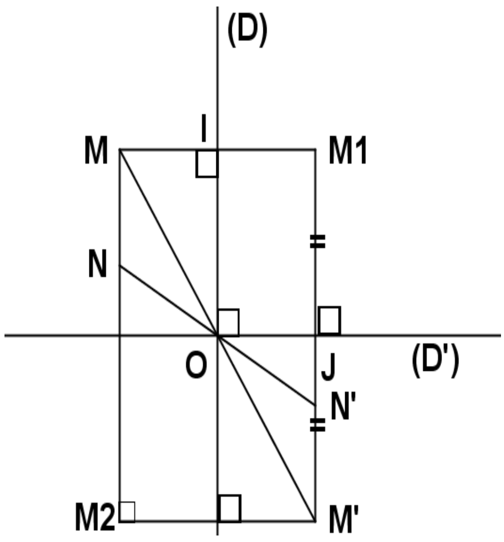
$$\mathbf{M} \overset{S_D}{\longmapsto} \mathbf{M_1} \overset{S_{D'}}{\longmapsto} \mathbf{M'}$$

Par quelle transformation passe- t- on de M à M' ?

Quelle translation est équivalente à l'action successive des symétries d'axes (D) et (D') ?

1er Cas : (D) ⊥ (D')

*Le point O d'intersection De (D) et (D')
est fixe (indépendant de M)
*Pour M quelconque, (D) est la médiatrice de $[MM_1]$, I est le milieu de $[MM_1]$, (D') est la médiatrice de $[M_1M']$, J milieu de $[M_1M']$.
OIM_1J est un rectangle car il a 3 angles droits. Donc



$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{M_1J} = \overrightarrow{JM'}$

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}$$

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM'}$$

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM'}$$

$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM'})$

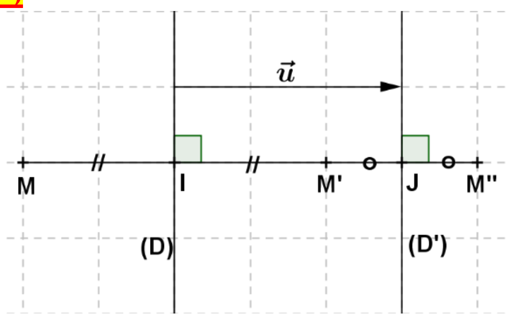
$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{OM'}$ (**Relation de Chasles**)

D'où O milieu de [MM']

Donc si **(D) ⊥ (D'),** l'action de la symétrie d'axe (D) suivie de celle de la symétrie d'axe (D') est la **symétrie centrale S_O de centre O, point d'intersection de (D) et (D').**

2e Cas : (D)// (D')

I milieu de [MM'] et J milieu de [M'M'']



$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J} + \overrightarrow{JM''}$

$\quad = \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J} + \overrightarrow{M'J}$

$\quad = 2(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J})$

$\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

Or, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IJ}$ est un vecteur constant :

*Sa direction est fixe car c'est la direction orthogonale à celle de (D) et (D').

*Sa norme IJ est constante : c'est la distance des droites (D) et (D').

Donc si (D) // (D'), l'action de la symétrie d'axe (D) suivie de celle de la symétrie d'axe (D') est la translation du vecteur 2 $\vec{u}$.

Autrement dit, construire l'image M' de M par la symétrie d'axe (D) puis l'image de M' par la symétrie d'axe (D') revient à construire directement l'image de M'' de M' par la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$.

3e Cas : Les deux axes sont sécants :

On obtient **une rotation** de centre O et d'angle 2α

Construire l'image M' de M par la symétrie d'axe (Δ), puis l'image M'' de M' par la symétrie d'axe (Δ'), revient à construire directement l'image M'' de M par la rotation de centre O et d'angle 2α.