MATHÉMATIQUES

1er S

v 10/10

PRIMAIRE
COLLÈGE
LYCÉE
SUPÉRIEUR

complétude
soutien scolaire

donner envie d'apprendre

SOMMAIRE

Sommaire……………………………………………………………………1

Partie A : COURS…………………………………….............................3

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré……………………………...4
Chapitre II : Fonctions numériques……………………….…………………….8
Chapitre III : Limites et comportements asymptotiques...…………………………15
Chapitre IV : Dérivation et applications…………………………...…………19
Chapitre V : Suites numériques…………………………………………...….22
Chapitre VI : Statistiques et probabilités……………………………………..…26
Chapitre VII : Vecteurs et barycentres……………………….….….….……32
Chapitre VIII : Angles orientés - Trigonométrie………………………………..36
Chapitre IX : Produit scalaire dans le plan………………………………………...40
Chapitre X : Géométrie dans l'espace………………………………………….…44
Chapitre XI : Transformations du plan et de l'espace……………………….……48

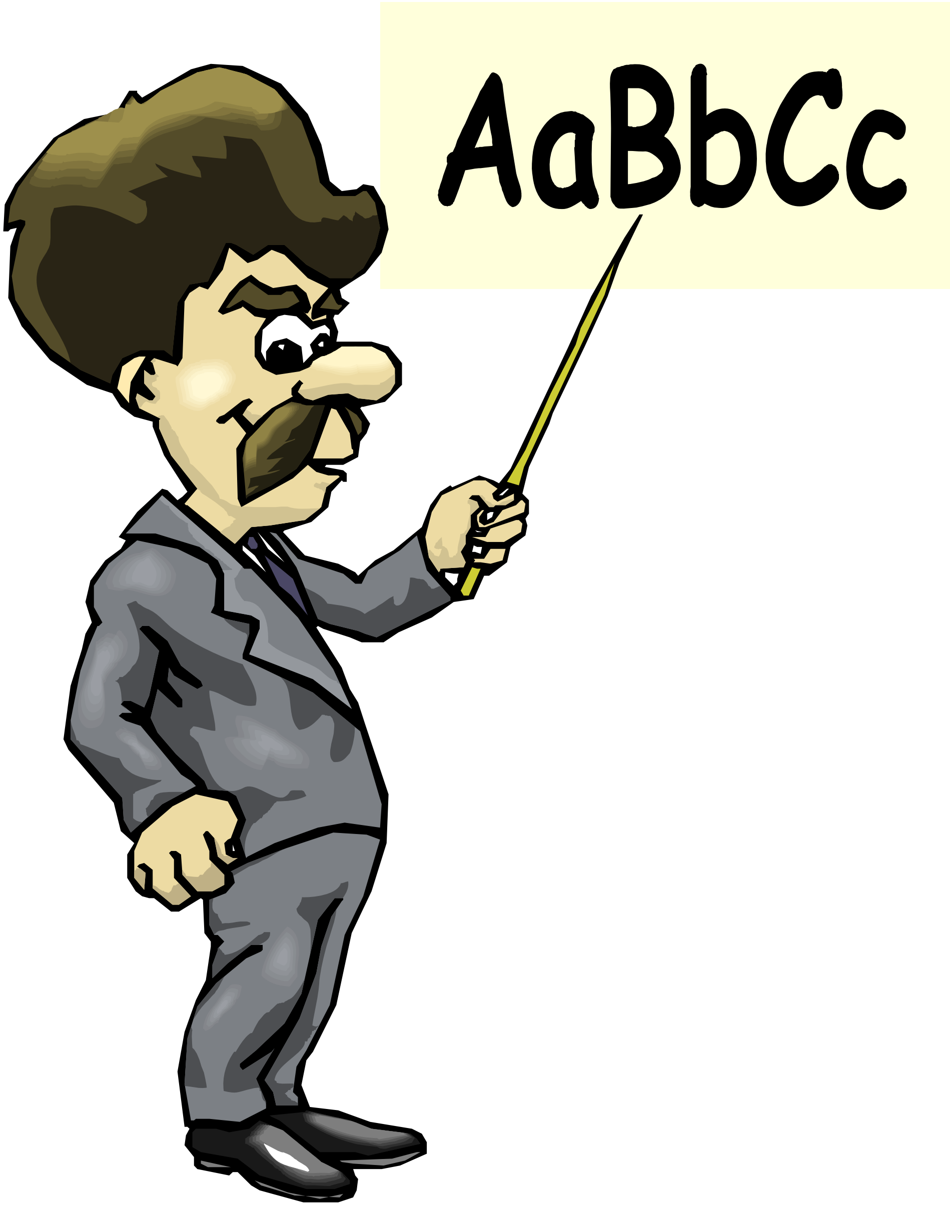
Partie B : EXERCICES……………………………………….….…51

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré……………….……….…52
Chapitre II : Fonctions numériques……………………….………………….53
Chapitre III : Limites et comportements asymptotiques…………….…….……..54
Chapitre IV : Dérivation et applications…………………………….…….55
Chapitre V : Suites numériques……………………………………………56
Chapitre VI : Statistiques et probabilités……………………………………..58
Chapitre VII : Vecteurs et barycentres…………………………….……….60
Chapitre VIII : Angles orientés - Trigonométrie…………………………….62
Chapitre IX : Produit scalaire dans le plan…………………………...….63
Chapitre X : Géométrie dans l'espace…………………………………….64
Chapitre XI : Transformations du plan et de l'espace…………………………..66

Partie C : CORRIGES……………………………………………….…69

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré…………………………....70
Chapitre II : Fonctions numériques……………………………………….70
Chapitre III : Limites et comportements asymptotiques…………………….…..71
Chapitre IV : Dérivation et applications…………….………….………………71
Chapitre V : Suites numériques…………………..………………………..72
Chapitre VI : Statistiques et probabilités…………..….………………...…72
Chapitre VII : Vecteurs et barycentres………………………...….……….…73
Chapitre VIII : Angles orientés - Trigonométrie……………………….………73
Chapitre IX : Produit scalaire dans le plan……………….….……….…..74
Chapitre X : Géométrie dans l'espace………………………..……...………75
Chapitre XI : Transformations du plan et de l'espace…………….….…….…..75

Partie A : COURS



Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

I. FONCTIONS POLYNOMES

1° Définitions

Une fonction polynôme est une fonction P de ℝ dans ℝ définie par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Les nombres a_0, a_1, ... , a_n sont des nombres réels appelés les **coefficients** de P.
Un polynôme est nul pour tout x si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le **degré** de P. On le note **deg (P).**
On dit alors que P est de degré n.

2° Egalité de deux fonctions polynômes

P = Q signifie que : 1) **deg P = deg Q**
2) **les coefficients des termes de même degré de P et de Q sont égaux**

3° Racines d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n, $n \geq 1$.

a - Définition

Une **racine** (ou **zéro**) de P est un nombre **a tel que P(a) = 0.**
Déterminer les racines de P revient alors à résoudre l'équation P(x) = 0.

b - Théorème

Si le nombre réel a est une racine de P , on peut factoriser P (polynôme de degré n) par (x-a), c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré (n-1) telle que pour tout réel x, **P(x) = (x-a) Q(x).**

II. TRINOME

1° Définitions

Un **trinôme** est un polynôme du second degré, c'est-à-dire de la forme :

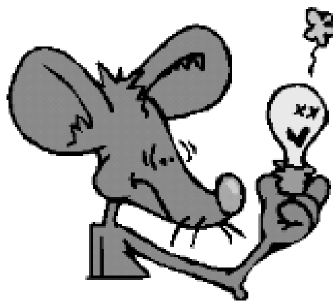
$$\mathbf{P(x) = ax^2 + bx + c} \text{ avec } \mathbf{a \neq 0}.$$

Résoudre **l'équation du second degré P(x) = 0**, c'est chercher l'ensemble S des racines de P.

Un trinôme peut toujours être mis sous **forme canonique** :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cela permet de factoriser le trinôme quand c'est possible.



2° Calcul des racines

Soit a un réel non nul, b et c des réels quelconques.
On appelle **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ **le réel** noté **Δ (lire « delta »),** défini par **: $\Delta = b^2 - 4ac$.**

On trouve les solutions de l'équation (ou racines du trinôme) grâce aux formules suivantes :

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de racines réelles

Si $\Delta = 0$, P admet une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, P admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>**Les équations bicarrées**</u>

Cette méthode permet aussi de résoudre les équations **"bicarrées"**, c'est-à-dire les équations de la forme $Q(x) = 0$ avec $Q(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
On pose $\mathbf{Y} = x^2$ .On a alors $Q(x) = P(\mathbf{Y})$, où P est un polynôme du second degré dont on peut facilement trouver les éventuelles racines.
Si P admet des racines Y_1 et Y_2, il suffit alors de résoudre les équations :

$x^2 = Y_1$ et $x^2 = Y_2$

3° Somme et produit des racines

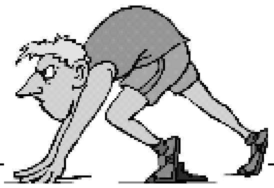
Si le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors :

La somme des racines est : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Le produit des racines est : $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

x_1 et x_2 sont donc solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

4° Factorisation



Considérons le trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

Si P a deux racines x_1 et x_2 ($\Delta>0$), alors pour tout réel x, $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
Si P a une seule racine x_0 ($\Delta=0$), alors pour tout réel x, $P(x)=a(x-x_0)^2$.
Si P n'a aucune racine ($\Delta<0$), alors P(x) n'est pas factorisable.

5° Signe

La discussion du signe, comme celle de l'existence des racines, se fait sur le signe du discriminant Δ.

Si $\Delta < 0$, P(x) a le signe de a pour tout x.

Si $\Delta = 0$, P(x) a le signe de a sauf en $x = -\dfrac{b}{2a}$ où P s'annule.

Si $\Delta > 0$, alors :
P(x) est du signe de a à l'extérieur des racines
P(x) est du signe opposé à celui de a entre les racines

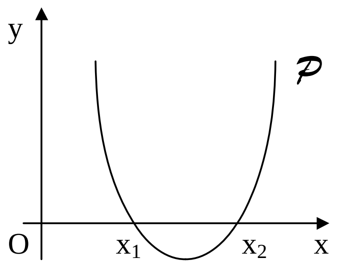
III. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Soit $\mathcal{P}$ la représentation graphique du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminons toutes les situations possibles de la **parabole $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses** selon les signes de Δ et de a.

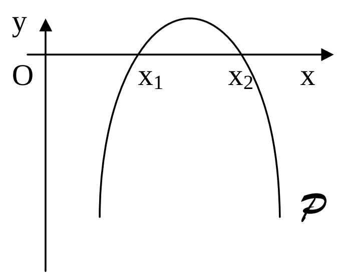
1° $\Delta > 0$

Le trinôme P admet deux racines x_1 et x_2, la parabole $\mathcal{P}$ **coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

a > 0



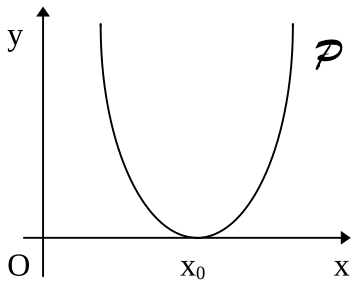
a < 0



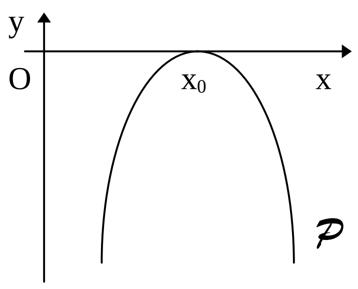
2° $\Delta = 0$

Le trinôme P admet une racine double x_0, la parabole $\mathcal{P}$ **coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

a > 0



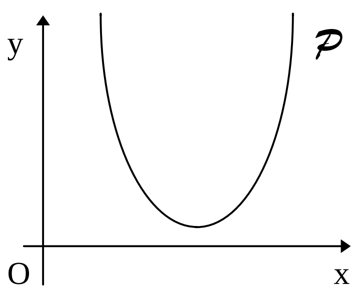
a < 0



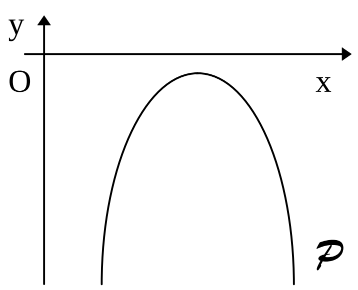
3° $\Delta < 0$

Le trinôme P n'admet aucune racine, la parabole $\mathcal{P}$ **ne coupe pas l'axe des abscisses.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

a > 0



a < 0



IV. Fractions Rationnelles

Une fraction rationnelle est une fraction $\dfrac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$ où P et Q sont deux polynômes.

Une telle fraction est définie pour tous les x tels que $Q(x) \neq 0$.
Les calculs algébriques sur les fractions rationnelles obéissent aux mêmes règles de calcul que les fractions numériques.

Pour une fraction rationnelle, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur et simplifier par un facteur commun éventuel. Mais il ne faut pas oublier que la fraction obtenue n'est pas définie pour les mêmes valeurs que la fraction initiale.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \text{ est définie si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \text{ n'est pas définie si } x = -1 \text{ mais est définie pour } x = 1.$$

Chapitre II : FONCTIONS NUMERIQUES

I. DEFINITION

On appelle **fonction de ℝ dans ℝ** (ou **fonction numérique à variable réelle**) une relation f de ℝ dans ℝ qui à tout nombre réel fait correspondre un nombre réel et un seul, noté f(x).

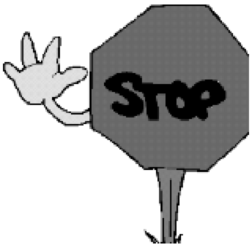
On note : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

II. ETUDE DE FONCTIONS

1° Domaine de définition

Soit I un intervalle de ℝ. Une fonction de I dans ℝ associe à tout réel x de I un réel unique, noté $f(x)$, **image** de x par f.. x est appelé **antécédent** de $f(x)$.

Souvent I n'est pas donné explicitement, et seule l'expression de f(x) est disponible. On cherche alors pour quelles valeurs de x cette expression a un sens (dénominateurs non nuls, quantités sous les racines positives...).
L'ensemble de ces valeurs est appelé **domaine de définition de f**, et est noté $\mathbf{D_f}$.



$\mathbf{D_f}$ **= { x de ℝ** tel que **f(x) existe }**

La fonction f telle que $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$ est définie si et seulement si $\mathbf{x \geq 0}$

$$\mathbf{D_f = [0;+\infty[= \mathbb{R}^+}$$

La fonction g telle que $\mathbf{g(x) = \dfrac{1}{x - a}}$ est définie si et seulement si $\mathbf{x\text{-}a \neq 0}$, c'est-à-dire $x \neq a$:

$$\mathbf{D_g} = \mathbb{R}\text{-}\{\mathbf{a}\}$$

2° Représentation graphique

On appelle **représentation graphique de f** dans un repère donné, l'ensemble C des points

$$\mathbf{M\ (x,y)} \text{ tels que : } \begin{cases} \mathbf{x \text{ appartient à } D_f} \\ \mathbf{y\ =\ f(x)} \end{cases}$$

Cette courbe permet d'avoir instantanément sous les yeux le comportement général de f (positive, négative, croissante, décroissante, nombre et valeur approximative des solutions des équations f(x) = m...).

3° Parité – Périodicité

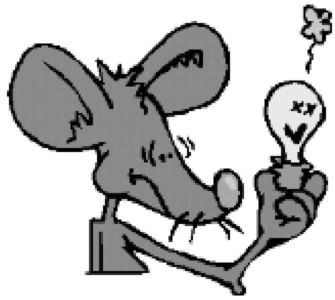
Les courbes représentatives présentent parfois des symétries, qui sont caractérisées par certaines propriétés au niveau des fonctions.

f est **paire** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f,\ -\ x \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(-x) = f(x)} \end{cases}$

f est **impaire** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f,\ -\ x \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(-x) = -\ f(x)} \end{cases}$

f est **périodique de période T** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f,\ x + T \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(x + T) = f(x)} \end{cases}$

Sur la représentation graphique, la parité correspond à certaines caractéristiques.

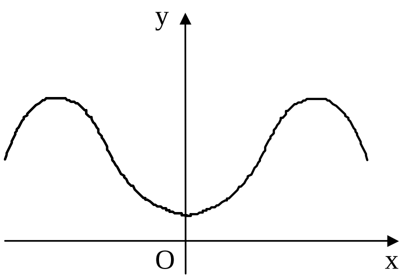


Si f est **paire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

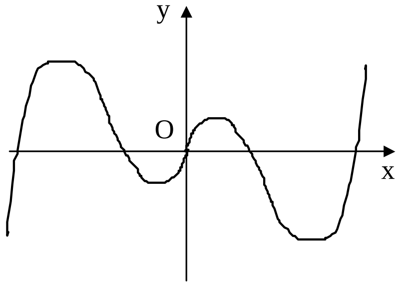
Si f est **impaire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

Si f est **périodique** de période T, sa **courbe est invariante par toute translation** de vecteur (kT,0) où k est un entier relatif.

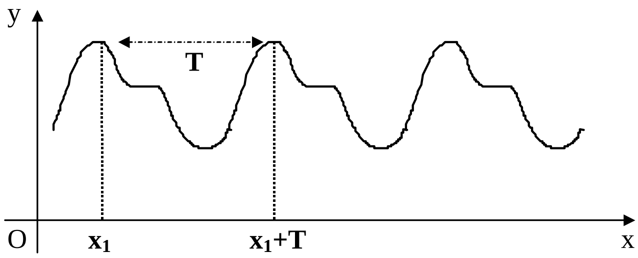
Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique de période T



De plus, si une fonction est paire ou impaire, on peut ramener l'étude à $\mathbb{R}^+$, le reste se déduisant par symétrie. Et si elle est périodique, on peut se ramener à un intervalle quelconque de largeur T.

4° Sens de variation

On dit que f est **croissante** sur un intervalle I si et seulement si deux valeurs quelconques de x sont rangées dans le même ordre que leurs images par f, c'est-à-dire si pour tous x_1, x_2 de I : $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$**.**

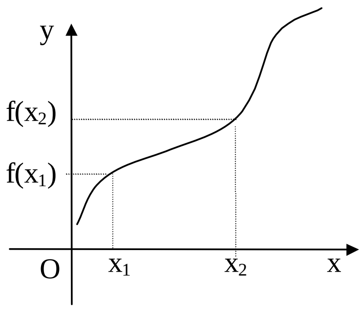
On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si deux valeurs quelconques de x sont rangées dans l'ordre inverse de leurs images par f, c'est-à-dire si pour tous x_1, x_2 de I :
$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$**.**

On dit que f est **monotone** sur un intervalle I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

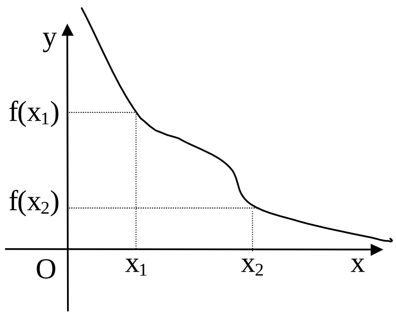
On dit que f est **constante** sur un intervalle I si pour tous x_1, x_2 de I : $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$**.**

Cela correspond par exemple aux représentations graphiques suivantes :

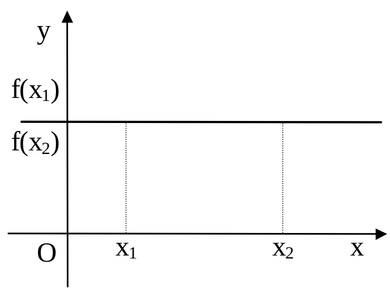
Fonction croissante sur $[x_1;x_2]$



Fonction décroissante sur $[x_1;x_2]$



Fonction constante sur $[x_1;x_2]$



Remarque : On dit que f est **strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone** sur I quand les inégalités ci-dessus sont vérifiées au sens strict (< ou >).

Pour résumer ces informations, on dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	Domaine de définition
Variations de f	↗ ↘

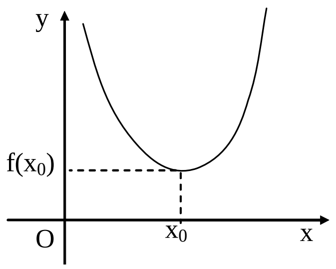
5° Extrema

f admet un **minimum** en x_0 si et seulement si, pour tout élément x de D_f, $f(x) \geq f(x_0)$.
La valeur de ce minimum est alors $f(x_0)$. On dit que f est **minorée** sur D_f.
f admet un **maximum** en x_0 si et seulement si, pour tout élément x de D_f, $f(x) \leq f(x_0)$.
La valeur de ce maximum est alors $f(x_0)$. On dit que f est **majorée** sur D_f.

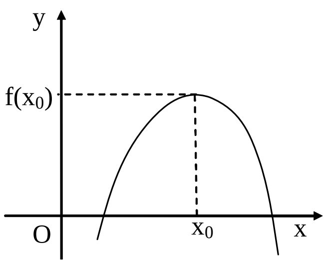
Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
Une fonction **bornée** est une fonction à la fois majorée et minorée.

Exemples :

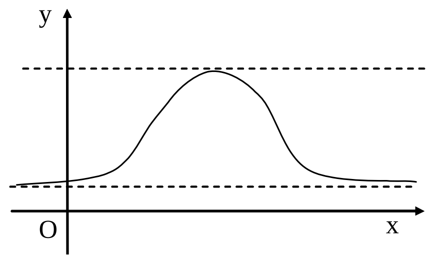
Fonction minorée, $f(x_0)$ est un minimum



Fonction majorée, $f(x_0)$ est un maximum



Fonction bornée

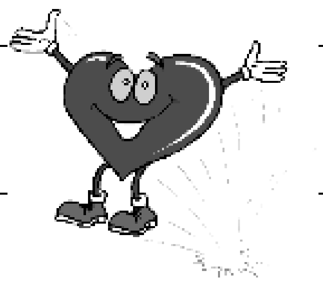


III. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

1° Egalité

Deux fonctions **f et g sont égales** si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{D_f = D_g} \\ \textbf{pour tout x de } \mathbf{D_f,\ f(x) = g(x)} \end{cases}$$



2° Restriction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et J un intervalle inclus dans I ($J \subset I$).

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On appelle **restriction de f à J** la fonction g définie par: $g : J \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = f(x)$
Dans ce cas, on dit aussi que **f est un prolongement de g**.

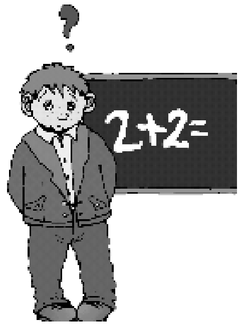
3° Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D et k un réel donné.
On peut définir les fonctions f+c, f+g, f-g, f.g, f/g et kf sur D par :

(f+c) (x) = f(x) + c (c une constante réelle) **(f+g) (x) = f(x) + g(x)** **(f-g) (x) = f(x) - g(x)**
(f.g) (x) = f(x).g(x) **(k f) (x) = k f(x)**

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{avec } g(x) \neq 0$$

Sens de variation

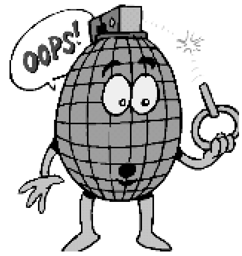


f et g croissantes sur I $\Rightarrow$ f+g croissante sur I. f et g décroissantes sur I $\Rightarrow$ f+g décroissante sur I. f croissante sur I $\Rightarrow$ k.f croissante sur I si $k > 0$. ou k.f décroissante sur I si $k < 0$. f décroissante sur I $\Rightarrow$ k.f décroissante sur I si $k > 0$. ou k.f croissante sur I si $k < 0$.

4° Composition de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.
Si, pour tout x de D_g, g(x) appartient à D_f, on peut définir la **fonction composée fog** par :

$$\mathbf{fog} : D_g \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (fog)(x) = f[g(x)]$$



Attention : en général, **fog ≠ gof.** <u>Exemple</u> : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$ alors $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$ et $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$.

5° Composition et sens de variation

Soit f définie sur un intervalle I et g définie sur un intervalle J tels que f(I) est inclus dans J.
Alors **gof** est définie sur I.

Si f et g sont **toutes les deux croissantes** ou **toutes les deux décroissantes**, alors **gof est croissante**
Si f et g sont ont des **sens de variation contraires**, c'est-à-dire l'une croissante et l'autre décroissante, alors **gof est décroissante**.

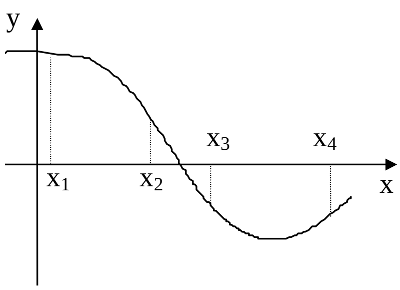
	f $\nearrow$	f $\searrow$
g $\nearrow$	gof $\nearrow$	gof $\searrow$
g $\searrow$	gof $\searrow$	gof $\nearrow$

6° Fonctions positives/négatives sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que : f est **positive sur I** si pour tout x de I, **$f(x) \geq 0$**. On note $f \geq 0$ sur I. f est **négative sur I**, si pour tout x de I, **$f(x) \leq 0$**. On note $f \leq 0$ sur I.

<u>Remarque</u> : une fonction peut être positive sur un certain intervalle et négative sur un autre.

<u>Exemple</u> : f est positive sur $[x_1;x_2]$ et négative sur $[x_3;x_4]$

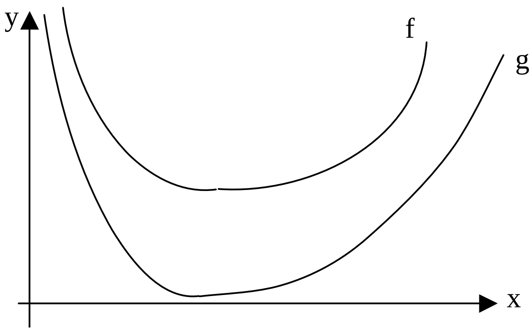


7° Comparaison de deux fonctions f et g

Soient deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I.

On dit que **f majore g** sur I (ou que **g minore f** sur I) si et seulement si quel que soit x dans I, on a **: $f(x) \geq g(x)$.**

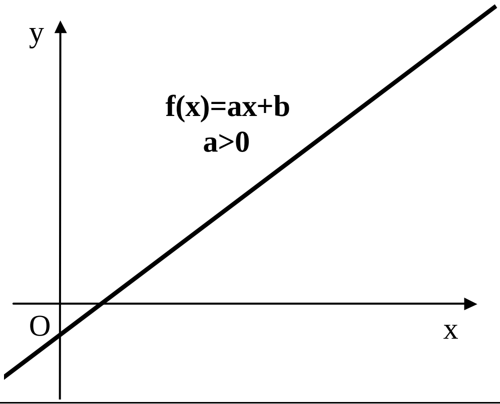
<u>Exemple</u> :

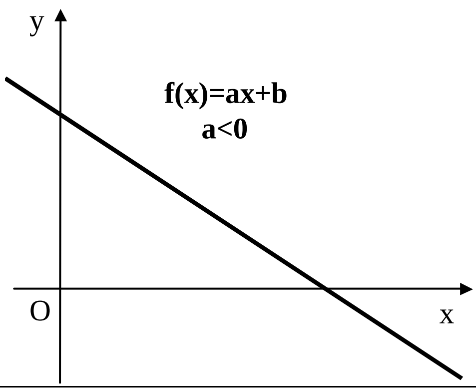


IV. FONCTIONS DE REFERENCE

1° La fonction affine

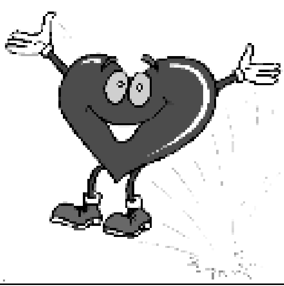
La **fonction affine** d'équation **$f(x) = ax + b$** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$. Sa représentation graphique est une droite.

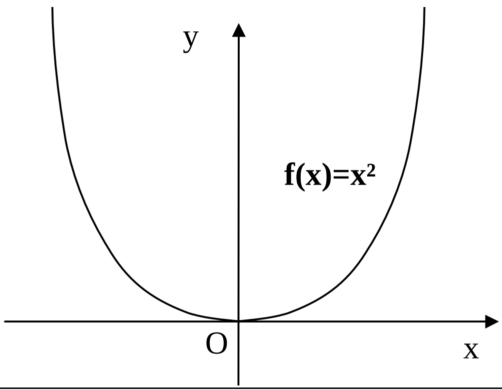




2° La fonction « carrée »

La **fonction carrée** d'équation **$f(x) = x^2$** est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$. Sa représentation graphique est une parabole de sommet O.
Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$ et si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$.



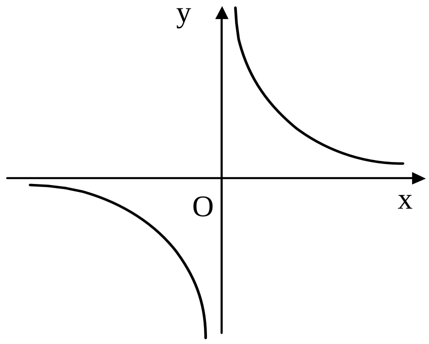


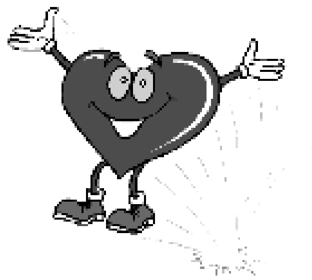
3° La fonction inverse

La **fonction inverse** d'équation **f(x)** = $\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

Sa représentation graphique est une hyperbole.

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ et si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

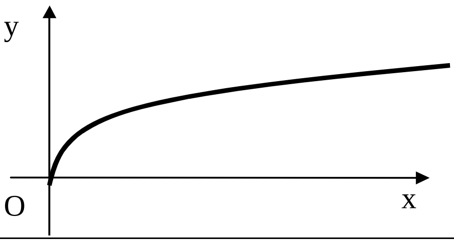


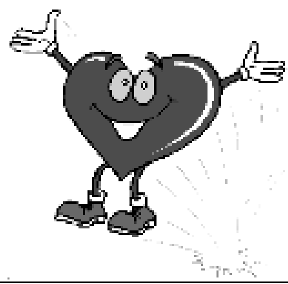


4° La fonction racine

La **fonction racine** d'équation **f(x)** = $\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

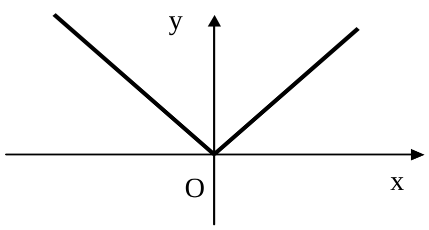
Si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

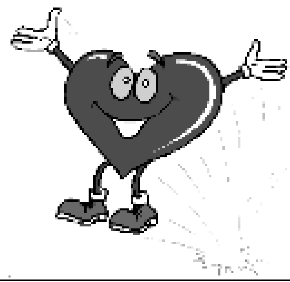




5° La fonction valeur absolue

La **fonction valeur absolue** d'équation **f(x)** = $|x|$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ et strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.



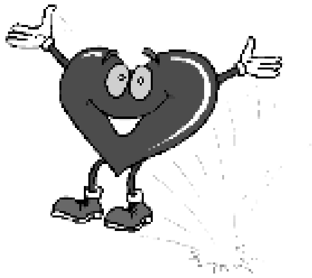


6° Les fonctions sinus et cosinus

a - Fonction sinus

La fonction sinus est **impaire** : sin (-x) = -sin x pour tout x.

Elle a pour période 2π : $\sin(x+2\pi) = \sin x$.



b - Fonction cosinus

La fonction cosinus est **paire** : cos (-x) = cos x pour tout x.

Elle a pour période 2π : cos (x+2π) = cos x.

c - Variations - représentations graphiques

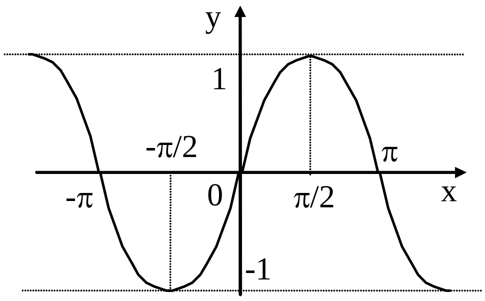
En étudiant ces fonctions, on obtient leurs **tableaux de variations** :

x	0		π/2		π
sin (x)	0	↗	1	↘	0

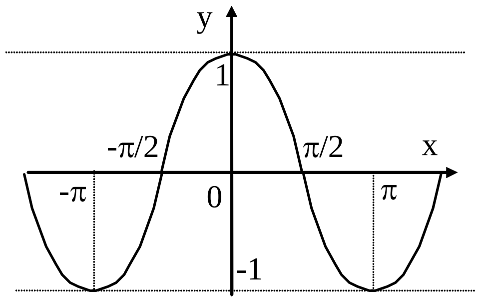
x	0		π
cos (x)	1	↘	-1

Les **courbes représentatives** sont alors les suivantes :

Fonction sinus



Fonction cosinus



d - Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Pour tout x réel : $\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$\mathbf{-1 \leq \sin x \leq 1}$ **et** $\mathbf{-1 \leq \cos x \leq 1}$

Chapitre III : LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

I. NOTION DE LIMITE

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]a,+ ∞[. Il est intéressant de connaître le **comportement de f** lorsque **x devient très grand** ou lorsque **x se rapproche de a**.
La notion de **limite de f** permet de connaître ce comportement. Pour indiquer qu'on s'intéresse au cas où x devient très grand, on notera **x→ + ∞**, qui se lit **x tend vers plus l'infini**. Si on s'intéresse au cas où x se rapproche de a, on notera de la même façon **x→ a .**
On écrira donc des formules du type : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

qui signifient : “limite de f(x) lorsque x tend vers + ∞” et “limite de f(x) lorsque x tend vers a”, c'est-à-dire valeur limite de f(x) lorsque x est aussi proche que l'on veut de + ∞ ou de a.

II. LIMITE EN L'INFINI

1° Limite infinie

C’est le cas où, **quand x tend vers +∞ (ou vers -∞), f(x) tend vers l’infini.**
On dit que la limite de f(x) quand x tend vers plus (ou moins) l'infini, est plus (ou moins) l'infini. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2° Limite finie

C’est le cas où, **quand x tend vers +∞ (ou vers -∞), f(x) devient de plus en plus proche d'un réel L.**

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

On dit que la limite de f(x) quand x tend vers plus (ou moins) l'infini, est L. On écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

III. LIMITE EN UN POINT

Pour que la limite de f(x) puisse exister lorsque x tend vers a, il faut pouvoir calculer f(x) pour des valeurs aussi proches que l'on veut de a. Donc il faut que a appartienne à D_f ou que a soit une borne de D_f, c'est-à-dire que **D_f soit de la forme]a,b] ou]a,b[.**

Remarque : Dans le cas d’un intervalle du type]a,b[(par exemple), on parle de **limite à droite en a** (f n’est définie qu’à partir de a). De même, on parlera de **limite à gauche en b.**

1° Limite infinie en a

C’est le cas où, **quand x tend vers a, f(x) devient toujours plus grand en valeur absolue.**

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en a = 0, $f(x) = \frac{1}{x}$ en a = 0.

On dit que la limite de f(x) quand x tend vers a, est plus (ou moins) l'infini. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

2° Limite finie en a

C’est le cas où, **quand x tend vers a, f(x) devient de plus en plus proche d'un réel L.**

Exemple : f(x) = 2x+1 en a = 1

On dit que la limite de f(x) quand x tend vers a, est L. On écrit :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

IV. LIMITES DES FONCTIONS USUELLES

1° Limite en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Pour tout entier n>0, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+$

Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^-$

2° Limite en 0

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \left|\dfrac{1}{x}\right| = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \left|\dfrac{1}{x^n}\right| = +\infty$

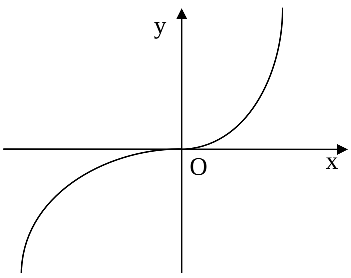
Pour la limite en 0 de $\dfrac{1}{x^n}$, le signe + ou – devant le symbole ∞ dépend du signe de x et de la parité de n.

V. ASYMPTOTES A UNE COURBE

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.

1° Limite lorsque x tend vers plus ou moins l'infini

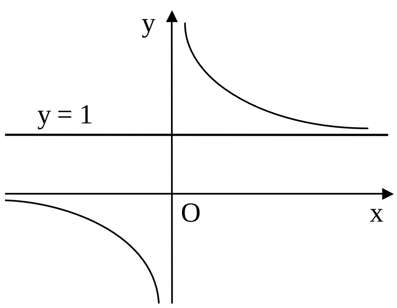
Dans ce cas, on s'intéresse à la limite de f(x) quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$ de la représentation graphique.



Par exemple, la fonction ci-dessous admet les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

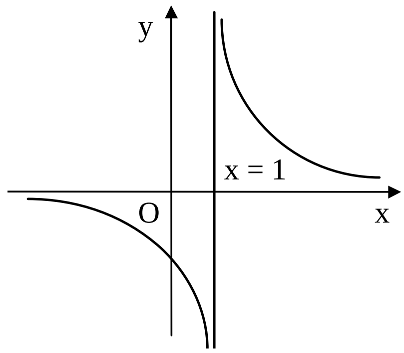
Dans le cas où **la fonction admet une limite finie L quand x tend vers l'infini**, on observe que la courbe représentative de la fonction se rapproche toujours davantage d'une droite horizontale sans jamais la toucher. **On dit que la fonction admet une asymptote horizontale d'équation y = L.**



La courbe de la fonction représentée ci-contre admet pour **asymptote horizontale**, la droite d'équation y = 1 lorsque x tend vers $+\infty$ et la droite d'équation y = 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

2° Limite lorsque x tend vers un réel a

Deux cas sont possibles : soit a appartient à D_f
soit a n'appartient pas à D_f



- Si a appartient à D_f, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(Ceci est vrai pour toute les fonctions usuelles).

- Si a n'appartient pas à D_f, la limite est en général infinie. La courbe de la fonction présente dans ce cas une **asymptote verticale d'équation x = a.**

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ en a = 1

La courbe de la fonction ci-contre admet pour asymptote verticale la droite d'équation x = 1 lorsque x tend vers 1.

3° Courbes asymptotes

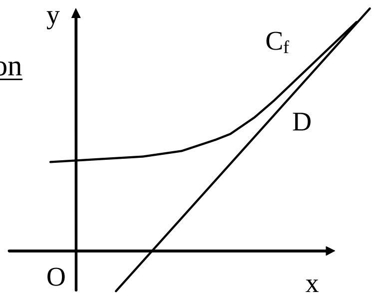
Soit a et b deux réels.

On dit que la droite D d'équation y = ax + b est asymptote à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de + ∞ si : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0}$

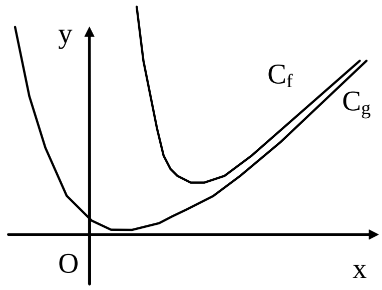
D'une manière analogue, on peut définir l'asymptote à une courbe au voisinage de - ∞
Soient f et g deux fonctions. On dit que leurs courbes sont asymptotes lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$$

Interprétation graphique



Interprétation graphique



VI. Operations sur les limites

Les limites peuvent être additionnées, multipliées ou divisées entres elles la plupart du temps sans problèmes.
Dans les paragraphes suivants, L est un nombre réel quelconque.

1° Addition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini.
Le tableau ci-dessous donne la limite de **f+g** en ce même point ou à l'infini.

lim f / **lim g**	**L**	+ ∞	- ∞
L'	L+L'	+ ∞	- ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞	indéterminée
- ∞	- ∞	indéterminée	- ∞

2° Multiplication

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de **f×g** en ce même point ou à l'infini.

lim f / **lim g**	**L**	**0**	$+\infty$	$-\infty$
L'	L L'	0	$+\infty$ si L'> 0 $-\infty$ si L'< 0	$-\infty$ si L'> 0 $+\infty$ si L'< 0
0	0	0	indéterminée	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$ si L> 0 $-\infty$ si L< 0	indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ si L> 0 $+\infty$ si L< 0	indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

3° Quotient

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini.

Le tableau ci-dessous donne la limite de $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ en ce même point ou à l'infini.

lim f / **lim g**	$\mathbf{L} \neq 0$	**0**	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbf{L'} \neq 0$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$ si L'>0 $-\infty$ si L'<0	$-\infty$ si L'>0 $+\infty$ si L'<0
0	$\pm\infty$	indéterminée	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	0	0	indéterminée	indéterminée
$-\infty$	0	0	indéterminée	indéterminée

4° Formes indéterminées

Elles sont de quatre formes : $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$.

On ne peut pas conclure directement, il faut faire une étude plus particulière.

VII. LIMITES DES FONCTIONS POLYNOMES ET DES FONCTIONS RATIONNELLES

1° Fonctions polynômes

En $+\infty$, la fonction polynôme a même limite que son terme de plus haut degré.

<u>Exemple</u> : $\lim\limits_{+\infty} (x^3 - x^2 + 3) = \lim\limits_{+\infty} x^3 = +\infty$

2° Fonctions rationnelles

En $+\infty$, la fonction rationnelle a même limite que la fonction égale au rapport du terme de plus haut degré du numérateur et du terme du plus haut degré du dénominateur de la fonction rationnelle.

<u>Exemple</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

Chapitre IV : DERIVATION ET APPLICATIONS

I. DEFINITIONS

1° Dérivabilité - Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

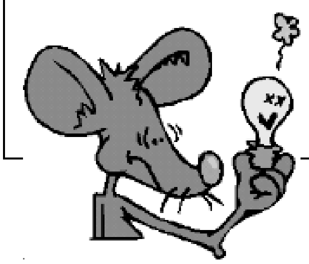
On dit que **f est dérivable en x_0** si et seulement si le taux de variation $\dfrac{\mathbf{f(x_0+h)\ -\ f(x_0)}}{\mathbf{h}}$ admet une **limite finie** lorsque h tend vers 0.

Cette limite est alors appelée **le nombre dérivé de f en x_0, noté f '(x_0)** :

$$\boxed{\mathbf{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\ -\ f(x_0)}{h}}}$$

Lorsque les expressions de f sont différentes suivant que $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$, on cherche les **limites de** $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 en restant positif et lorsque h tend vers 0 en restant négatif.
Ces limites, lorsqu'elles existent et sont finies, sont appelées respectivement **nombres dérivés à droite et à gauche** au point x_0.

Si, en un point x_0, le nombre dérivé à droite est différent du nombre dérivé à gauche, la fonction n'est pas dérivable en ce point.



<u>Remarque</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.
Il est équivalent de dire que f est dérivable en x_0 et qu'il existe une fonction ϕ vérifiant :
$f(x_0+h) = f(x_0) + a\,h + h\,\phi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\phi(h) = 0$.

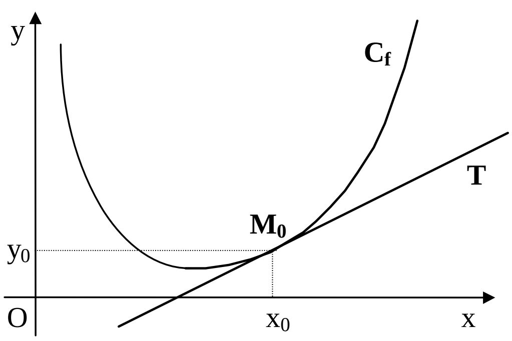
On dit que la fonction affine g telle que $g(h)= f(x_0) + h\,f'(x_0)$ est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de x_0.
Lorsque h est petit, on a $f(x_0+h) \approx g(h)$.

II. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Le **nombre dérivé f '(x_0)** est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point M_0 (x_0;f(x_0)).

L'**équation de la tangente** à la courbe de f en x_0 est alors :

$$\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$



Si la fonction f est dérivable à droite (ou à gauche) au point x_0, de nombre dérivé égal à a, alors la courbe **Cf** admet une **demi-tangente à droite (ou à gauche) au point M_0 de pente a.**

<u>Cas particulier important</u>
Si f '(x_0) = 0, **Cf** admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation y = f (x_0).

III. FONCTION DERIVEE

1° Définition

Si f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I, on dit que **f est dérivable sur I.**
Soit la **fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x**. Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de f**. On la note **f ’**.
Si la fonction f ’ est elle-même dérivable sur I alors la dérivée de f ’ est notée **f ’’**, c’est la **dérivée seconde de f.**

2° Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau ci-dessous donne les dérivées des fonctions les plus courantes :

Fonction	Dérivable sur I	Dérivée
f(x) = k *k constante*	$I =]-\infty;+\infty[$	$f'(x) = 0$
f(x) = a x+ b *a et b constants*	$I =]-\infty;+\infty[$	$f'(x) = a$
$\mathbf{f(x) = x^n}$ *n entier*, $n \neq 0$	$I =]-\infty;+\infty[$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x}}$	$I =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$	$I =]0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
f(x) = sin (x)	$I =]-\infty;+\infty[$	$f'(x) = \cos(x)$
f(x) = cos (x)	$I =]-\infty;+\infty[$	$f'(x) = -\sin(x)$

3° Dérivées et opérations

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur I.

Dérivée de :	Fonction	Dérivée
Somme de fonctions	$u + v$	$u' + v'$
Produit d’une fonction par une constante	$a \times u$ (a constante réelle)	$a \times u'$
Carré d’une fonction	u^2	$2u'u$
Fonction à la puissance n	u^n	$nu'u^{n-1}$
Produit de fonctions	uv	$u'v + uv'$
Inverse d’une fonction	$\mathbf{\dfrac{1}{v}}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
Quotient de fonctions	$\mathbf{\dfrac{u}{v}}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4° Composition

Soit f une fonction dérivable sur I. Soient a et b tel que ax+b appartient à I. Alors la fonction g définie sur I par
g(x) = f (ax + b) est dérivable sur I et sa dérivée est :
g’(x) = a.f ’(ax + b)

IV. PROPRIETES DE LA DERIVEE

La dérivation sert essentiellement à l'étude des fonctions car elle permet de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle I.

1° Sens de variation de f

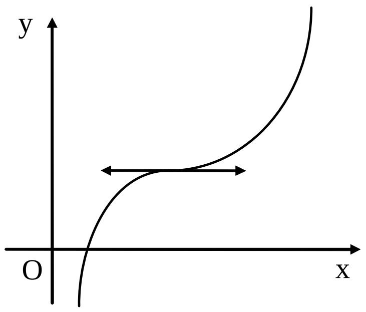
Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I.

$f'(x) = 0$ pour tout x de I	$\Leftrightarrow$	**f constante sur I**
$f'(x) \geq 0$ pour tout x de I	$\Leftrightarrow$	**f croissante sur I**
$f'(x) \leq 0$ pour tout x de I	$\Leftrightarrow$	**f décroissante sur I**
$f'(x) > 0$ pour tout x de I	$\Leftrightarrow$	**f strictement croissante sur I**
$f'(x) < 0$ pour tout x de I	$\Leftrightarrow$	**f strictement décroissante sur I**

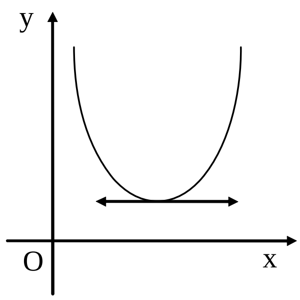
2° Extremum

Si **la dérivée f' de f s'annule et change de signe en x_0** élément de I, alors **f admet un extremum en x_0.**
Dans tous les cas, **si $f'(x_0) = 0$, la courbe représentative de la fonction admet une tangente horizontale en x_0.**

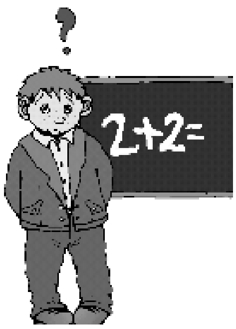
f'(x) = 0 mais pas d'extremum



f'(x) = 0 et minimum



V. PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION



Pour étudier une fonction, il est important de respecter le plan suivant :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. Etudier la parité et/ou la périodicité de la fonction afin de réduire le domaine d'étude.
3. Etudier les limites de f aux bornes (finies et infinies) de D_f.
4. Calculer la dérivée de la fonction et étudier son signe.
5. Récapituler les résultats précédents dans le tableau de variation où figurent :
   - les valeurs de x
   - le signe de la dérivée
   - les variations de f
   - les limites de f
6. Tracer la représentation graphique de f. Faire apparaître les tangentes remarquables, les asymptotes et les extremums.

Chapitre V : SUITES NUMERIQUES

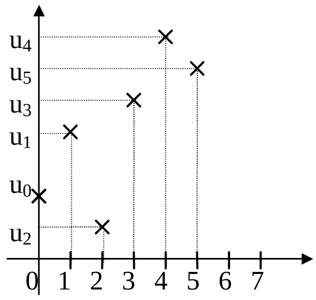
I. DEFINITION

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Cela signifie que, parmi ces nombres, il y a un premier terme, puis un deuxième, un troisième...

> Généralement, on note u_0 le premier terme de la suite, puis u_1 le deuxième, u_2 le troisième...
> **Le $n^{ième}$ terme est donc u_{n-1}.**
>
> **Si le premier terme est u_1, le $n^{ième}$ terme sera donc u_n.**

Une suite est notée conventionnellement **(u_n)**. Fabriquer une suite **(u_n)**, c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté u_n. Ce nombre est appelé **terme d'indice n de la suite (u_n) ou se lit « u indice n »**.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE



Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
On appelle représentation graphique de la suite (u_n) l'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

III. GENERATION D'UNE SUITE

1° Mode explicite

Une suite peut être **définie explicitement en fonction de n** : $u_n = f(n)$, où f est une fonction usuelle définie sur l'ensemble des réels positifs (ou sur un intervalle $[a;+\infty[$, avec a>0).

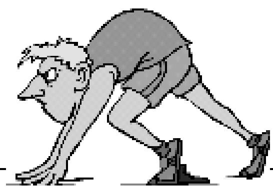
Exemples :
$u_n = (-1)^{n-1}$ avec $f(x) = (-1)^{x-1}$
$u_n = 2(n+2)$ avec $f(x) = 2(x+2)$

2° Mode itératif ou récurrent

Une suite est dite définie par récurrence lorsque chaque terme est calculé en fonction du précédent. Il faut alors définir le premier terme u_0 et une formule permettant de calculer un terme en fonction du précédent :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$



IV. VARIATION

> Une suite (u_n) est **croissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} \geq u_n}$.
> Une suite (u_n) est **strictement croissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} > u_n}$.
>
> Une suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} \leq u_n}$.
> Une suite (u_n) est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} < u_n}$.
>
> Une suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} = u_n}$.
> Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit **croissante,** soit **décroissante,** soit **constante.**

V. PERIODICITE D'UNE SUITE

Une suite (u_n) est **périodique** si et seulement si il existe un **entier** naturel T non nul tel que, pour tout n, on ait : $u_{n+T} = u_n$.

VI. LIMITE D'UNE SUITE

1° Définition

On dit qu'une suite **(u_n) tend vers une limite L lorsque n tend vers + ∞,** si le terme u_n se rapproche de plus en plus de L quand n devient très grand (c'est une définition intuitive de la notion de limite).
On note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

Lorsqu'une suite admet une **limite finie**, on dit qu'elle est **convergente**. Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.
Lorsqu'une suite (u_n) n'a **pas de limite** ou qu'elle **tend vers + ∞ ou - ∞**, on dit qu'elle est **divergente**.

Voici un certain nombre de suites dont les **limites doivent être connues :**

- suites tendant vers + ∞ : $u_n = n$; n^2 ; $\sqrt{n}$; 2^n ; 10^n.

- suites convergeant vers 0 : $u_n = \frac{1}{n}$; $u_n = \frac{1}{n^2}$; $u_n = \frac{1}{n^p}$ (p>0) ; $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

2° Propriétés des limites

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes de limite L et L' respectivement.
On a alors les propriétés suivantes :

$\lim\limits_{n\to\infty}(k \times u_n) = k \times L$ (avec k une constante)

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = L + L'$

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n) = L \times L'$

Si $L' \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{L'}$

Si $v_n < u_n < w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ (théorème d'encadrement ou « théorème des gendarmes »)

Si $0 < u_n < w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

VII. SUITES ARITHMETIQUES

1° Exemple

Considérons la suite des entiers naturels impairs :

1 3 5 7 9 11 ...

+2 +2 +2 +2 +2

On constate que l'on passe d'un terme au suivant **en ajoutant toujours le même nombre 2**.
On dit alors que la suite des entiers naturels impairs est une suite **arithmétique de raison 2.**

2° Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si deux termes consécutifs sont liés par la relation :

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$$

où r est un réel indépendant de n appelé **raison de la suite**.

On en déduit les relations suivantes, quels que soient les entiers n, m et p, lorsque le premier terme est u_0 :

Expression de u_n en fonction de n : $\mathbf{u_n = u_0 + nr}$

Relation entre u_m et u_p : $\mathbf{u_m = u_p + (m-p)r}$

3° Somme des n+1 premiers termes

Si la suite arithmétique (u_n) a pour premier terme u_0, la somme des n+1 premiers termes est :

$$\mathbf{S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)}$$

La formule générale est la suivante :

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{(1^{er}\ terme + dernier\ terme)}{2}$$

On a en particulier $S_n = 0+1+2+3+4+...+n = (n+1) \times \frac{(0+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

4° Limite

Une suite arithmétique est toujours **divergente** sauf quand r = 0 où elle est stationnaire et vaut constamment u_0.
Si r est strictement positif, elle tend vers + ∞, s'il est strictement négatif, vers - ∞.

VIII. SUITES GEOMETRIQUES

1° Exemple

Considérons la suite des puissances de 2 :

$\mathbf{2^0 = 1}$ $\mathbf{2^1 = 2}$ $\mathbf{2^2 = 4}$ $\mathbf{2^3 = 8}$ $\mathbf{2^4 = 16}$ **…**

* 2 * 2 * 2 * 2

On passe d'un terme à l'autre **en multipliant toujours par le même nombre 2.**
On dit alors que cette suite est **géométrique de raison 2.**

2° Définition

Une suite v_n est dite **géométrique** de raison strictement positive quand deux termes consécutifs sont liés par la relation :

$$\mathbf{v_{n+1} = q \cdot v_n}$$

où **q** est une constante réelle indépendante de n appelée **raison de la suite**.

On en déduit les expressions suivantes :

Expression de v_n en fonction de n : $v_n = v_0 \cdot q^n$

Relation entre v_m et V_p : $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

3° Somme des n+1 premiers termes

Si la suite géométrique (v_n) a pour premier terme v_0, la somme de ses n+1 premiers termes est :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right), \text{ pour } q \neq 1$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n+1)\, v_0, \text{ pour } q = 1$$

La formule générale est la suivante :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{(1 - q)}$$

4° Limites

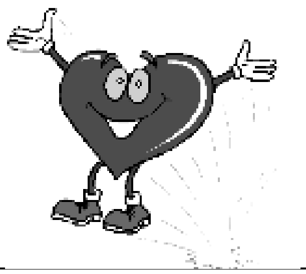
Pour étudier la limite d'une suite géométrique, il suffit de regarder la raison de la suite.

Si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Si $q = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v_0$.

Si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ si v_0 est positif et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ si v_0 est négatif.

Si $q < -1$: la suite v_n n'admet pas de limite.



Chapitre VI : STATISTIQUES ET PROBABILITES

I. STATISTIQUES

1° Rappels

La statistique étudie des ensembles appelés **populations**, dont les éléments sont appelés des **individus**.

Un critère retenu pour analyser une population s'appelle un **caractère**. Le caractère est **quantitatif** s'il prend des valeurs numériques (Exemple : nombre de voitures possédé par une personne) sinon le caractère est **qualitatif** (Exemple : profession d'une personne).

Un caractère quantitatif est dit **continu** s'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. Il est **discontinu** ou **discret**, s'il ne peut prendre que des valeurs isolées.

La population étudiée peut être est répartie en un nombre fini de **classes**, pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.

On peut alors définir la **fréquence** d'une classe par $f = \frac{n}{N}$ avec n l'effectif de la classe et N l'effectif total de la population étudiée.

Lorsque le caractère est quantitatif (continu ou non), on range les valeurs (ou les classes) par ordre croissant. L'**effectif cumulé** jusqu'à la valeur k du caractère est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à k. La **fréquence cumulée** est le quotient de cet effectif cumulé par le nombre total d'individus.

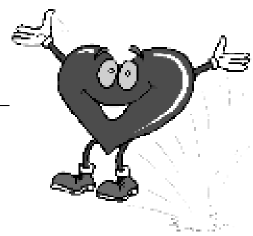
Lorsque le caractère quantitatif est discret, on ordonne les valeurs de la série par ordre croissant. La **médiane** est le nombre tel qu'il y ait dans la série exactement autant de valeurs inférieures que supérieures. *Lorsque le caractère quantitatif est continu*, la **médiane** est le nombre m tel que l'effectif cumulé jusqu'à m soit la moitié de l'effectif total. Il revient au même de dire que c'est le nombre m tel que la fréquence cumulée jusqu'à m soit 0,5.

2° Moyenne d'une série statistique

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les valeurs du caractère d'une série statistique et soient $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les effectifs correspondants. L'effectif total de la population est : $n = n_1 + n_2 + \ldots n_p$.

La **moyenne** de la série statistique, notée $\overline{x}$, est définie par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{n}$$



3° Variance et écart-type

a - Définitions

La **variance** d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
La variance est le réel V défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$$

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i - \overline{x})^2 \, avec \; n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$$

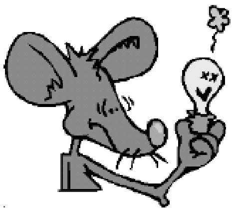
L'**écart-type** est la racine carrée de la variance. On le note :

$$\sigma : \sigma = \sqrt{V}$$

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. S'il est grand, les valeurs sont très dispersées.

Pour le calcul pratique de la variance, on utilise le théorème suivant :

$$V = \frac{n_1 x_1^{\,2} + n_2 x_2^{\,2} + \ldots + n_p x_p^{\,2}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} - \overline{x}^2$$



b - Changement affine

Soit la série statistique X (x_i ; n_i) de variance V(X) et d'écart type $\sigma(X)$ et la série statistique Y (y_i ; n_i) de variance V(Y) et d'écart type $\sigma(Y)$ telle que : $\mathbf{y_i = a\, x_i + b}$.

On a alors les propriétés suivantes : $V(Y) = a^2\, V(X)$ et $\sigma(Y) = |a|\ \sigma(X)$

4° Les quartiles

a - Définitions

Soit une série statistique de N valeurs (identiques ou non) rangées par ordre croissant.

La Médiane M_e

Si N est impair, la médiane est la valeur centrale. Si N est pair, la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales.

Le premier Quartile Q_1

La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à cette valeur correspond au premier Quartile Q_1.

Si on note N l'effectif total, Q_1 est le terme de rang supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$.

Pour des valeurs regroupées par classes, Q_1 est la valeur telle que la fréquence cumulée croissante soit égale à 0,25.

Le troisième Quartile Q_3

La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à cette valeur correspond au troisième Quartile Q_3.

Si on note N l'effectif total, Q_3 est le terme de rang supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.

Pour des valeurs regroupées par classes, Q_3 est la valeur telle que la fréquence cumulée croissante soit égale à 0,75.

L'écart interquartile

L'écart interquartile correspond à la différence $Q_3 - Q_1$.

L'intervalle interquartile

L'intervalle interquartile est l'intervalle $I = [Q_1 ; Q_3]$.

Exemple :

Soit la série : 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 (dans l'ordre croissant).
On a N = 12

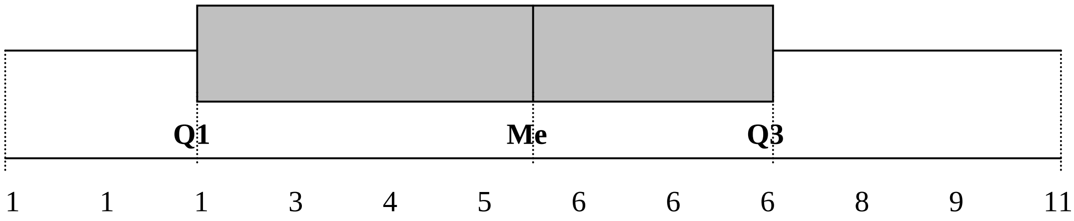
$\frac{N}{4} = 3$ d'où $Q_1 = 1$ (3^e^ terme)

$\frac{3N}{4} = 9$ d'où $Q_3 = 6$ (9^e^ terme)

On remarque que $M_e = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$

b - Diagramme en boîtes

Le diagramme en boîte regroupe le **premier quartile**, la **médiane** et le **troisième quartile**.
Si on reprend l'exemple ci-dessus, le diagramme en boîte sera ainsi :



La longueur du rectangle est égale à l'intervalle interquartile. On peut ainsi comparer rapidement des suites grâce à leur représentation graphique (diagramme en boîtes).

c - Changement affine

Soit la série statistique X (x_i ; n_i) ayant les quartiles $Q_1(X)$, $Q_3(X)$ et la médiane $M_e(X)$.
Soit la série statistique Y (y_i ; n_i) ayant les quartiles $Q_1(Y)$, $Q_3(Y)$ et la médiane $M_e(Y)$ telle que : $\mathbf{y_i = a\, x_i + b}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$M_e(Y) = a \times M_e(X) + b$

Si **a** > **0 :** $Q_1(Y) = a\, Q_1(X) + b$ et $Q_3(Y) = a\, Q_3(X) + b$

Si **a** < **0 :** $Q_1(Y) = a\, Q_3(X) + b$ et $Q_3(Y) = a\, Q_1(X) + b$

II. EXPERIENCE ALEATOIRE

Certains phénomènes de la vie courante ne peuvent être prévus avec certitude. Ainsi, par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas savoir à l'avance quelle sera l'issue de cette expérience : pile ? face ?
Pour cette raison on dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire**, c'est-à-dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.
L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**.
En général, on le note Ω.

III. PROBABILITES

1° Evènement

Pour une expérience donnée, nous désignerons par Ω l'ensemble de toutes les issues possibles.
On appelle **évènement** A toute partie de l'univers. On appelle **cardinal de A**, noté card(A) le nombre d'éventualités qui composent A.
On dit que Ω est un évènement certain et Ø est un évènement impossible.
On dit que A est un **évènement élémentaire** si A est réduit à une seule éventualité.

Exemple : On jette un dé non truqué à six faces. L'ensemble des possibles est :
E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
Soit A l'évènement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ».
A = {5 ;6} et card(A) = 2.
Soit B l'évènement « obtenir le nombre 6 ».
B={6} et B est un évènement élémentaire.

2° Union et intersection d'évènements

Soit deux évènements A et B :

- **L'évènement** $A \cap B$ (A inter B) est réalisé si A et B sont réalisés tous les deux.
- **L'évènement** $A \cup B$ (A union B) est réalisé si l'un au moins des évènements est réalisé.

<u>Exemple</u> : On reprend l'exemple précédent.
Soit C l'évènement : « obtenir un nombre impair ».
$C = \{1 ; 3 ; 5\}$
L'évènement $A \cup C$ est « obtenir un nombre au moins égal à 5 ou un nombre impair ».
$A \cup C = \{1 ; 3 ; 5 ; 6\}$.
L'évènement $A \cap C$ est « obtenir un nombre au moins égal à 5 et un nombre impair » c'est-à-dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 5 ».
$A \cap C = \{5\}$.

On dit que deux évènements A et B sont **disjoints** ou incompatibles si A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Dans ce cas, $A \cap B = \varnothing$.
On dit que A et B sont contraires ou complémentaires si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$. Dans ce cas, on note $\overline{\mathbf{A}}$ **l'évènement contraire de l'évènement A.**

3° Loi de probabilité

On note $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité d'un évènement A, notée P (A), est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Pour toute éventualité w_i, on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

<u>**Remarque**</u> : Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

<u>**Propriétés**</u> **:**

Soit A et B deux évènements de Ω, alors :

- La probabilité de l'évènement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$.

- La probabilité de l'évènement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$.

- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
et si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

4° Equiprobabilité

Pour une situation donnée, il y a **équiprobabilité** si tous les évènements élémentaires d'un univers ont la même probabilité.

Dans ce cas, pour un évènement A quelconque, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

$$\text{soit : } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple : Dans le lancé, le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de l'évènement C : « obtenir un nombre impair » est : $P(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

5° Loi des grands nombres

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle **fréquence d'apparition** d'une éventualité donnée, noté w $_i$ le nombre :

$$f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce résultat est appelé **loi des grands nombres**.

IV. VARIABLE ALEATOIRE

1° Définitions

Pour une expérience donnée, on appelle Ω l'ensemble de toutes les issues possibles (ensemble supposé fini).

On appelle **variable aléatoire réelle X** une fonction définie sur l'univers des possibles Ω à valeurs réelles. Par exemple, X peut représenter le nombre de 5 apparaissant à chaque tirage de 6 dés.

L'**univers image** de Ω par la variable X est l'ensemble : $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Les x_i sont les valeurs que peut prendre la fonction X.

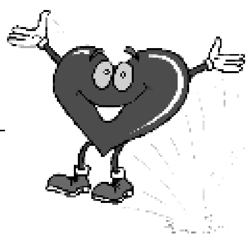
Chaque x_i possède une probabilité p_i. La **loi de probabilité** de la variable X est la fonction qui à chaque x_i de X associe sa probabilité $P(X=x_i)$ ou p_i.

2° Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel E(X) donnée par la formule suivante :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

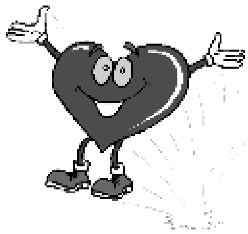
L'espérance mathématique correspond à « l'espoir de gain ».



3° Variance et écart-type

La **variance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel V(X) donnée par la formule suivante :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 ... + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2$$



L'**écart-type** est la racine carrée de la variance. On le note σ :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On peut calculer plus rapidement la variance grâce à la formule suivante :

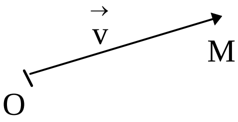
$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 p_i - (E(x))^2$$

Chapitre VII : VECTEURS ET BARYCENTRES

I. RAPPELS SUR LES VECTEURS

1° Définition - Représentation

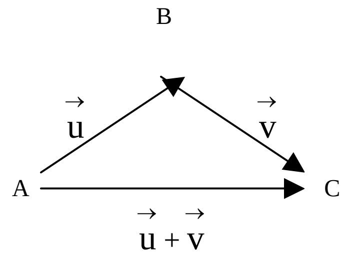
Un vecteur $\vec{v}$ est défini par : $\begin{cases} \text{une direction} \\ \text{un sens} \\ \text{une longueur, appelée norme du vecteur} \end{cases}$



Si on se donne un vecteur $\vec{v}$ et un point O, il existe un unique point M tel que : $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$.

2° Opérations sur les vecteurs

a - Somme de deux vecteurs



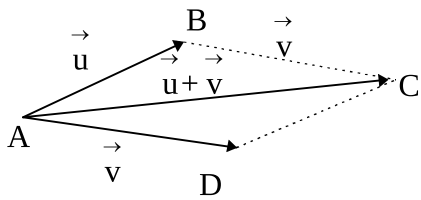
La somme de deux vecteurs peut se construire de deux manières.

Soit par la **relation de Chasles** :

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Soit en construisant le **parallélogramme** ABCD :

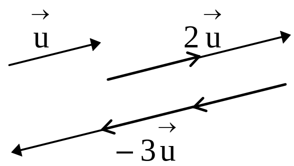
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$



b - Produit d'un vecteur par un réel

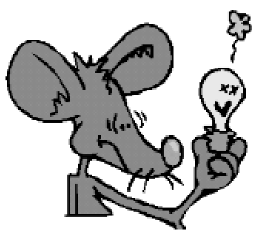
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel λ non nul est $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction
- ils sont de même sens si $\lambda > 0$ et de sens contraire si $\lambda < 0$
- $\|\vec{v}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$



3° Colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.



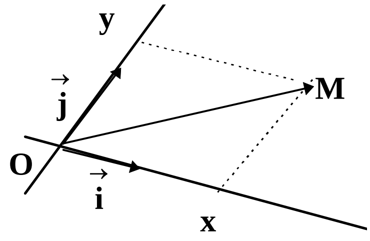
On en déduit que les points A, B et C sont alignés s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

4° Repères - Coordonnées dans le plan

On appelle **repère** du plan un triplet $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne soient pas colinéaires. $(\vec{i}, \vec{j})$ forme alors une base du plan. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **orthogonaux** et de **même norme égale à 1**, le repère est **orthonormé**.

Dans un repère, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

x et y sont appelés les **coordonnées de** $\vec{u}$ et on note $\vec{u}$ (x,y).

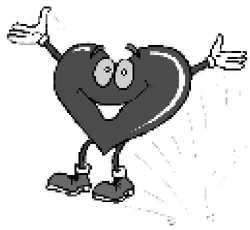


De même, on définit les **coordonnées (x,y) d'un point M** comme l'unique couple de réels vérifiant: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Etant donnés deux points A et B du plan, de coordonnées respectives (x_A,y_A) et (x_B,y_B),

les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A \end{cases}$

Si $\vec{u} = (x,y)$, alors $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



5° Détermination d'une droite dans le plan

Soit D une droite du plan. Elle peut être définie de différentes façons :

- Par **un point** A et un **vecteur directeur** $\vec{u}$. Un point M appartient à D si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = \mathbf{k}\,\vec{u}$.
- Par **deux points** A et B. On utilise alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

6° Positions relatives de deux droites D et D'

Deux droites sont **parallèles** si elles ont des **vecteurs directeurs colinéaires**.
Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont **orthogonaux.**

II. BARYCENTRE

1° Définitions

a - Barycentre de deux points

Soit A et B deux points distincts du plan, et a et b deux réels tels que a + b ≠ 0. Il existe un unique point G tel que : $\mathbf{a}\,\overrightarrow{\mathbf{GA}} + \mathbf{b}\,\overrightarrow{\mathbf{GB}} = \vec{\mathbf{0}}$. On l'appelle le **barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).**
On note G=Bar{(A,a) ,(B,b)}.

En utilisant la relation de Chasles dans l'expression $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, on arrive à la relation : $\mathbf{(a+b)\,\overrightarrow{MG} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}}$ pour tout point M du plan.

De plus, on obtient la relation : $\overrightarrow{\mathbf{AG}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a+b}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ Cette relation prouve que **G appartient à la droite (AB).**

b - Barycentre de trois points

Si a + b + c ≠ 0, le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) est l'unique point G qui vérifie :

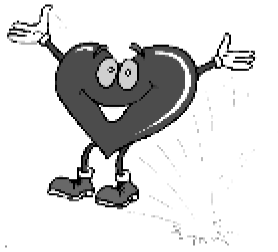
$$\mathbf{a}\,\overrightarrow{\mathbf{GA}} + \mathbf{b}\,\overrightarrow{\mathbf{GB}} + \mathbf{c}\,\overrightarrow{\mathbf{GC}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Pour tout point M, on a : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{MG}$.

<u>Cas particulier</u> : si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors G est le barycentre de (A,1), (B,1), (C,1).

c - <u>Barycentre de n points</u>

Si $\sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{a_i} \neq \mathbf{0}$, le barycentre des points pondérés (A_i ,a_i)$_{i = 1 \text{ à } n}$ est l'unique point G qui vérifie :



$$\mathbf{a_1\,\overrightarrow{GA_1} + a_2\,\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\,\overrightarrow{GA_n}} = \overrightarrow{0}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{a_i\,\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}}$$

Pour tout point M, on a : $$\sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{a_i\,\overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^{i=n} a_i)\overrightarrow{MG}}$$

Lorsque tous les **coefficients sont égaux**, on dit que G est l'**isobarycentre** du système.

<u>Remarque</u> : L'isobarycentre des deux points A et B est aussi le milieu du segment [AB].

d - <u>Homogénéité du barycentre</u>

Le barycentre **ne change pas** si on **multiplie tous les coefficients par un même nombre** non nul.

e - <u>Règle d'associativité - Barycentre partiel</u>

Soit G le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c). Notons I le barycentre partiel de (A,a), (B,b) avec $a+b \neq 0$.

G est alors le barycentre de (I, a+b) et (C,c).

f - <u>Position du barycentre</u>

Soit G le barycentre de (A,a), (B,b) :
- Si le coefficient de A est nul, alors G et B sont confondus (de même pour B).
- Si a et b sont de même signe alors $G \in [AB]$.
- Si a et b sont de signe contraire alors G appartient à la droite (AB) privé du segment [AB].
- Si $|a| > |b|$, alors G est « plus près » de A que de B.

2° Construction

Pour construire le barycentre d'un système de n points pondérés, on peut construire des **barycentres partiels.**
Soit G' le barycentre d'une partie des points du système. Soit p' la somme des coefficients des points dont il est le barycentre.
On peut alors remplacer les points dont G' est le barycentre par (G',p'), c'est-à-dire G' affecté de la somme des coefficients.

<u>Exemple</u> : Soit G le barycentre du système : (A,2) (B,-1) (C,4)
Soit G' le barycentre du système : (A,2) (B,-1).
Alors G est le barycentre de (G',1) (C,4).

3° Coordonnées

Si A et B ont pour coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B), alors les **coordonnées de G** barycentre de (A,a) et (B,b) sont :

$$\mathbf{x_G = \frac{a\,x_A + b\,x_B}{a+b}} \quad \text{et} \quad \mathbf{y_G = \frac{a\,y_A + b\,y_B}{a+b}}$$

Si A, B et C ont pour coordonnées (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C) alors les **coordonnées de G** barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) sont :

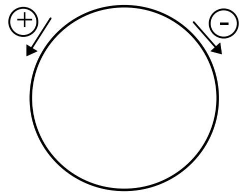
$$x_G = \frac{a\,x_A + b\,x_B + c\,x_C}{a+b+c} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{a\,y_A + b\,y_B + c\,y_C}{a+b+c}.$$

Chapitre VIII : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

I. ANGLES ORIENTES

1° Orientation du plan

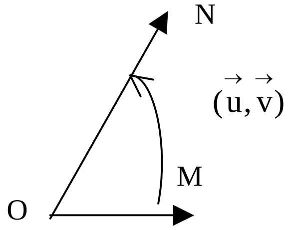
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **<u>sens direct</u>** (ou positif).
L'autre sens est appelé **<u>sens indirect</u>** (ou négatif).
Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.



Par **convention**, le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé le **sens trigonométrique**, **sens positif ou direct.**

2° Définitions

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On choisit un point origine O et on construit les points M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.



La notation $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ désigne l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre.

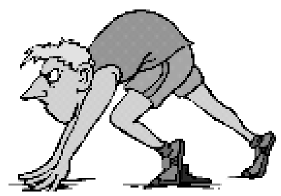
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure α. Alors chacun des nombres $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une mesure de cet angle. Cet angle orienté se mesure en **radians**.
La **mesure principale** est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

3° Propriétés

<u>Relation de Chasles</u>

Pour trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$ (vecteurs de même sens)

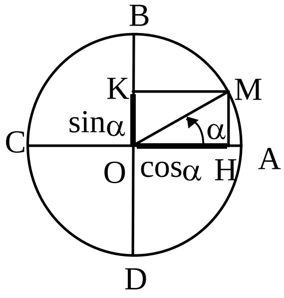
ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ (vecteurs de sens contraire)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

II. CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Le **cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté positivement**.
On lit sur le cercle le cosinus et le sinus de l'angle α.



α est une mesure en **radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
On a alors OH = **cos** α et OK = **sin** α (OH et OK pouvant être positif ou négatif, les deux axes étant gradués de –1 à 1 avec OA=1, OC=-1, OB=1 et OD=-1)

En posant $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}}$$

Le cercle étant de rayon 1, il apparaît par Pythagore que : $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$.

Par ailleurs, on notera que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct car $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

III. FORMULES TRIGONOMETRIQUES

1° Formules d'addition

cos (x+y) = cos (x)cos (y) - sin(x) sin (y)
cos (x-y) = cos (x)cos (y) + sin(x) sin (y)

sin (x+y) = sin (x) cos (y) + sin (y) cos (x)
sin (x-y) = sin (x) cos (y) - sin (y) cos (x)

2° Formules de duplication

cos (2x) = $\cos^2$ (x)-$\sin^2$ (x) = 2 $\cos^2$ (x) -1 = 1 - 2 $\sin^2$ (x)
sin 2x = 2sin (x) cos (x)

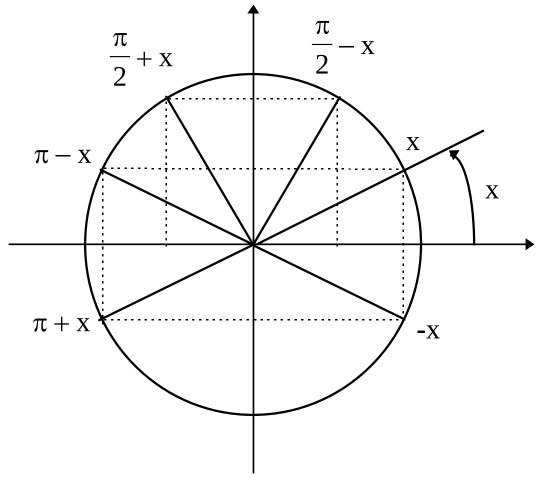
3° Valeurs à connaître

Un certain nombre de valeurs de ces fonctions pour des **angles particuliers** sont à retenir :

x	sin (x)	cos (x)
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

4° Formules usuelles

Le cercle trigonométrique permet de calculer des valeurs de ces fonctions aux points $x+\pi$, $-x$, $\pi/2+x$, $\pi/2-x$, $\pi-x$ en connaissant la valeur en x.
On a alors les formules suivantes :



$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

L'équation : **$\cos(x) = \cos(\alpha)$** <u>équivaut dans ℝ à</u> **$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ (k entier relatif)**

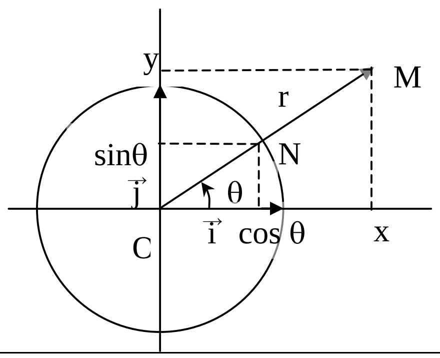
L'équation : **$\sin(x) = \sin(\alpha)$** <u>équivaut dans ℝ à</u> **$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ (k entier relatif)**

V. COORDONNEES POLAIRES

1° Définition

Les **coordonnées polaires** d'un point M (distinct de l'origine) du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont définies par le couple (r, θ) tel que :

$r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



<u>Exemple</u> :

Les cordonnées polaires du point A tel que : $OA = \sqrt{5}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{5}$ sont $\left(\sqrt{5}, \frac{2\pi}{5}\right)$.

2° Relations entre cordonnées polaires et cartésiennes

Soit un point M (distinct de l'origine) de coordonnées cartésiennes (x,y) et de coordonnées polaires (r, θ).
Les coordonnés polaires et cartésiennes du point M sont liées par les relations suivantes :

$$x = r \times \cos\theta \quad ; \quad y = r \times \sin\theta \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Chapitre IX : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

I. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

1° Définition

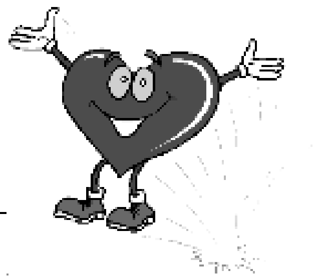
On se place dans un repère orthonormé.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées (x,y) et (x',y').

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **réel** xx'+yy'.

On note $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$. ($\vec{u}\,.\,\vec{v}$ se lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».)

$\vec{u}\,.\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ est appelé le **carré scalaire** de $\vec{u}$.



2° Propriétés

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

$\vec{u}\,.\,\vec{0} = 0$

$\vec{u}\,.\,k\vec{v} = k \times (\vec{u}\,.\,\vec{v})$

$\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

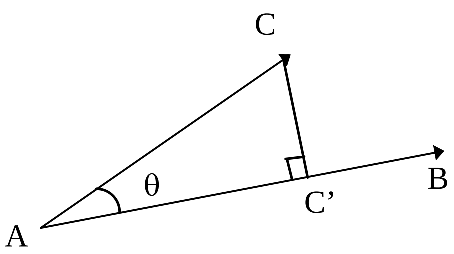
$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

ATTENTION !

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,\vec{w}$ ne prouve pas du tout que $\vec{v} = \vec{w}$

3° Autres expressions du produit scalaire

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$$

avec C' projection orthogonale de C sur (AB)

Si $\overrightarrow{AC'}$ est le projeté de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) alors on a la propriété suivante :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC'}$$

II. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1° Liens avec la norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x,y). On définit la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ par :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On peut alors écrire : $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}$

2° Orthogonalité

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires, ce qui se traduit avec le produit scalaire par :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan de coordonnées (x , y) et (x', y') alors :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x\,x' + y\,y' = 0}$$

ATTENTION !

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ signifie que $\vec{u} = 0$

ou que $\vec{v} = 0$

ou que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

3° Colinéarité

Pour des vecteurs colinéaires de même sens : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC$

Pour des vecteurs colinéaires de sens opposé : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\ AB \times AC$

4° Vecteur normal et équation de droite

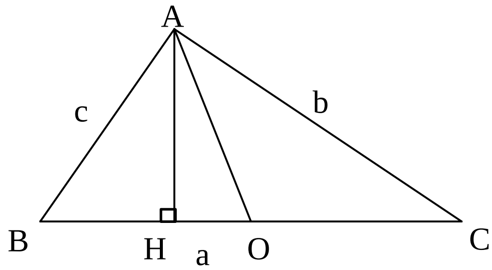
Un **vecteur normal** d'une droite D est un vecteur $\vec{\mathbf{n}}$ non nul orthogonal à la direction de D.

Si la droite D a pour équation ax + by + c = 0, le vecteur $\vec{n}$ (a,b) est normal à D.

Pour trouver une équation de la droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'écrire que M∈D si et seulement si : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

5° Conséquences géométriques dans le triangle

a - Théorème de la médiane



Soit le triangle ABC et O le milieu de BC.

$$AB^2 + AC^2 = 2\,OA^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\,\overline{OH} \times \overline{BC}$$

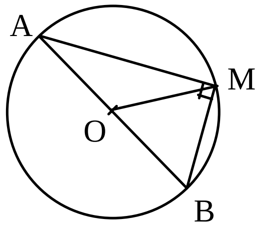
b - Relations entre les cotés et les angles d'un triangle

$$\text{Formules d'Al-Kashi : } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{A} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \times \cos\widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{C} \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Si S est l'aire du triangle ABC : $S = \frac{1}{2}ca \times \sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab \times \sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc \times \sin\widehat{A}$

6° Equation de cercle



Une équation de cercle de centre O et de rayon r s'obtient en traduisant avec les coordonnées l'égalité $\overrightarrow{OM}^2 = r^2$
Une équation de cercle de diamètre [AB] s'obtient en traduisant avec les coordonnées l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

L'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est celle d'un cercle de centre O(a,b) à condition que $a^2 + b^2 - c > 0$.

Cette équation peut alors s'écrire sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ où r est le rayon du cercle.

Si $a^2 + b^2 - c = 0$, le cercle est réduit au point O(a,b)

III. LIEUX GEOMETRIQUES

1° Définition

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points. Pour déterminer un lieu géométrique, il faut bien repérer les **éléments fixes** et les **éléments variables** ainsi que ce qui les relie.

Par exemple, chercher les points M équidistants à deux points A et B fixés est la recherche d'un lieu géométrique. Les points M se trouvent sur une droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu de [AB]. Les points M décrivent la médiatrice. Le lieu géométrique des points M équidistants de deux points A et B s'appelle la médiatrice.

2° Lignes de niveau

Les lignes de niveaux (chaque k correspond à une ligne de niveau) sont des lieux géométriques qui correspondent par exemple aux cas suivants :

Soient A et B deux points et k un nombre donné (fixé).

- L'ensemble des points M (variables) tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = k$ est une droite perpendiculaire à (AB).

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est :

  $\Rightarrow$ soit un cercle de centre le milieu de [AB] si $k > -\frac{1}{4}AB^2$

  $\Rightarrow$ soit le milieu de [AB] si $k = -\frac{1}{4}AB^2$

  $\Rightarrow$ soit l'ensemble vide si $k < -\frac{1}{4}AB^2$

Chapitre X : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

1° Droites de l'espace

a - Définitions

Une **droite de l'espace** est définie par la donnée de deux points de l'espace. On appelle **vecteur directeur** d'une droite de l'espace, un vecteur formé par deux points distincts de la droite.

b - Propriétés

Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires sans point en commun ou si elles sont confondues.

Droites orthogonales

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Ceci équivaut à dire que deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si les parallèles à ces droites passant par un même point sont perpendiculaires.

Droites n'ayant aucun point commun

Si deux droites n'ont **aucun point en commun**, elles sont alors :
- soit **coplanaires** (situées sur un même plan) et s**trictement parallèles**
- soit non coplanaires

2° Plans de l'espace

a - Rappels

Un plan est déterminé par :
- **trois points non alignés**
- **une droite et un point extérieur à la droite**
- **deux droites sécantes**

Etant donné un plan de l'espace, on appelle **couple de vecteurs directeurs de ce plan**, tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs **non colinéaires** du plan.

b - Propriétés

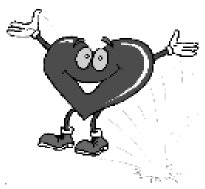
Plans parallèles

Deux plans de l'espace sont **parallèles** si et seulement si tout couple de vecteurs directeurs de l'un est un couple de vecteurs directeurs de l'autre.

Si deux plans ont au moins **trois points distincts communs et non alignés**, ils sont **confondus**.

Plans orthogonaux

Deux plans de l'espace sont orthogonaux si un des plans a une droite qui est perpendiculaire à l'autre plan.



c - Propriétés

Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan P, alors la **droite (AB) est incluse** (ou entièrement contenue) **dans le plan P.**

Une **droite D est parallèle à un plan P** si et seulement si tout vecteur directeur de D est contenu dans P.

Une **droite D et un plan P sont dits orthogonaux** si et seulement si D est orthogonale à toutes les droites du plan.

Il est équivalent de dire que la droite D et le plan P sont orthogonaux si et seulement si la droite D est orthogonale à deux droites sécantes du plan P.

d - Théorème

Une droite D de vecteur directeur $\vec{w}$ et un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{w}$ et $\vec{u}$, ainsi que $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

II. Vecteurs de l'espace

1° Définition

On définit un vecteur de l'espace comme dans le plan, par une **direction**, un **sens** et une **norme.**
Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que les opérations sur les vecteurs du plan. Les conditions de colinéarité de deux vecteurs et la relation de Chasles dans l'espace sont les mêmes que dans le plan :

Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Colinéarité de deux vecteurs

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$
Les droites (AB) et (CD) sont alors parallèles.
Les points A, B, C et D sont alignés si les droites sont confondues.

2° Vecteurs coplanaires

Soit trois vecteurs de l'espace : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ces trois vecteurs sont **coplanaires**, c'est à dire qu'ils sont contenus dans un même plan, si et seulement s'il existe quatre points A, B, C, D **coplanaires** tels que **:**
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ **et** $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Cette définition est équivalente à la propriété suivante :

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe 3 réels x, y et z (non nuls) tels que : $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Ceci signifie qu'il existe deux réels λ et μ tels que :
$\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$

3° Orthogonalité de deux vecteurs

a - Définition

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** s'ils sont non nuls et si leurs directions sont orthogonales.
Remarque : le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

b - Propriétés

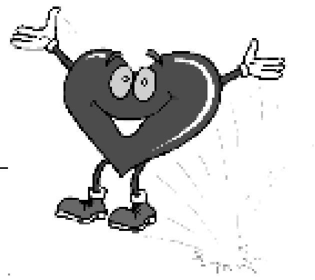
Deux vecteurs orthogonaux **non nuls** ne sont pas colinéaires. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors quels que soient les réels a et b : $a\vec{u}$ et $b\vec{v}$ sont orthogonaux.

c - Produit scalaire

Dans une base orthonormée, on étend la notion de **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ de l'espace en définissant : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \mathbf{xx'+yy'+zz'}$

Alors, deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \mathbf{0}$$



III. Barycentre de points de l'espace

1° Définition

On appelle **barycentre du système pondéré (A,a), (B,b), (C,c), (D,d)** vérifiant a+b+c+d≠0, l'unique point de l'espace G tel que : $\mathbf{a}\,\overrightarrow{\mathbf{GA}} + \mathbf{b}\,\overrightarrow{\mathbf{GB}} + \mathbf{c}\,\overrightarrow{\mathbf{GC}} + \mathbf{d}\,\overrightarrow{\mathbf{GD}} = \vec{\mathbf{0}}$ **.**
Le barycentre a les mêmes propriétés que dans le plan.

2° Théorème

Pour tout point M de l'espace, soit G le barycentre du système pondéré (A,a), (B,b), (C,c), (D,d) vérifiant a+b+c+d≠0 alors : $\mathbf{a}\,\overrightarrow{MA} + \mathbf{b}\,\overrightarrow{MB} + \mathbf{c}\,\overrightarrow{MC} + \mathbf{d}\,\overrightarrow{MD} = \mathbf{(a+b+c+d)}\,\overrightarrow{MG}$ **.**

3° Règle d'associativité - Barycentre partiel

Soit G le barycentre du système pondéré (A,a) (B,b) (C,c) (D,d) vérifiant a+b+c+d≠0. Soit H le barycentre du système pondéré (A,a) (B,b) (C,c) vérifiant a+b+c≠0. Alors G est le barycentre du système pondéré (H,a+b+c) (D,d).

IV. BASES ET REPERES DE L'ESPACE

1° Base de l'espace

On appelle **base de l'espace** tout triplet **($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)** formé de trois vecteurs non coplanaires.

Etant donnée une base de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace admet une décomposition unique dans cette base : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Dans cette base, les calculs effectués sur les vecteurs s'effectuent sur les coordonnées de même façon que dans le plan.
Si les vecteurs ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux, la **base est dite orthonormée.**

2° Repère de l'espace

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère de l'espace** si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace**,** O étant est un point de l'espace.

Un point M a donc trois **coordonnées x, y et z** (abscisse, ordonnée et cote) telles que :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ **.** Cette décomposition est unique.

On calcule les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ de la même façon que dans le plan par :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A\ ,\ z_B - z_A)$$

Dans un repère orthonormal, la norme du vecteur $\vec{u}$ **(a,b,c)** est définie par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Si la base est orthonormée, le **repère est orthonormal.**

Dans un repère orthonormal, la **distance de deux points A et B** est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Chapitre XI : TRANSFORMATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE

I. DEFINITIONS

On appelle **transformation du plan** toute application qui à un point M du plan associe un autre point M'.
L'**identité** I est la transformation qui à tout point M associe M.

On dit qu'un point **M est invariant par T** si et seulement si on a : T(M)=M.

Pour les figures ***f*** du plan, on peut définir deux notions d'invariance :
- ***f*** est **globalement invariante** si T(***f***) = ***f***, c'est-à-dire que l'image globale se confond avec la figure de départ.
- ***f*** est **invariante point par point** si quel que soit le point M de ***f*** on a T(M)=M, donc si tout point M de ***f*** est invariant.

II. TRANSFORMATIONS USUELLES

1° Translation

a - Définition

Soit $\vec{u}$, vecteur donné. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui à un point M associe un point M' défini par : $\overrightarrow{\mathbf{MM'}} = \vec{\mathbf{u}}$ On écrit : $t_{\vec{u}}(M) = M'$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, donc la translation se confond avec l'identité du plan.

b - Propriétés

Une translation de vecteur non nul n'admet **pas de points invariants**.

La translation est une **bijection :** tout point du plan a une image unique et un seul antécédent.

La **composée de deux translations** est une **translation** dont le vecteur est la somme des deux vecteurs des translations composantes : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

2° Symétries

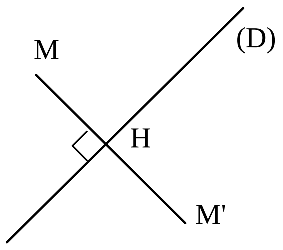
a - Symétrie centrale

Soit O un point du plan : on appelle **symétrie centrale de centre O** l'application qui à un point M associe le point M' défini par :

O est le milieu de [MM'] ou $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$

b - Réflexion (ou symétrie orthogonale)

Soit D une droite. On appelle **réflexion (ou symétrie orthogonale) d'axe D** l'application qui à un point M associe le point M' défini par :



(MM') est perpendiculaire à D

H, projeté orthogonal de M sur D, est le milieu de MM'

c - Propriétés

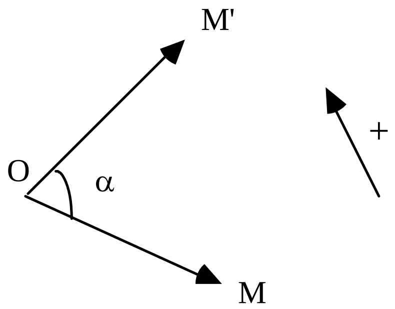
Une **symétrie centrale** admet **un point invariant : le centre**.
Une r**éflexion** a pour **points invariants tous les points de l'axe de symétrie.**

La composée de deux réflexions est :
- une translation si les axes sont parallèles
- une rotation si les axes sont sécants (de centre l'intersection des axes et d'angle le double de l'angle formé par les axes)

3° Rotation

a - Définition

Soit O un point du plan et α un réel. On appelle **rotation de centre O et d'angle orienté** α, l'application qui à un point M associe un point M' défini par :



OM = OM'

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$

b - Propriétés

Une rotation d'angle non nul admet **un point invariant : le centre**.
La rotation d'angle nul est l'identité, donc tous les points sont invariants.

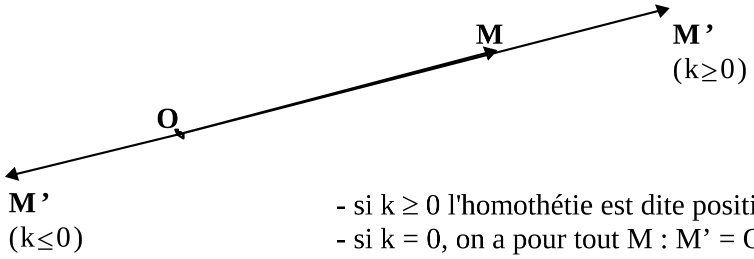
La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des angles des deux rotations

4° Homothétie

a - Définition

Soit O un point du plan, et k un réel quelconque. On appelle **homothétie de centre O et de rapport k $\neq$ 0**, l'application qui a un point M du plan associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = k\times\overrightarrow{OM}$$



- si $k \geq 0$ l'homothétie est dite positive, négative dans le cas contraire
- si k = 0, on a pour tout M : M' = O
- si k = 1, on a pour tout M : M' = M, l'homothétie est l'identité du plan
- si k = - 1, l'homothétie se confond avec la symétrie centrale par rapport à O

Par définition : $\overrightarrow{OM'} = k\,.\,\overrightarrow{OM}$ donc $\left|\left|\overrightarrow{OM'}\right|\right| = |k|.\left|\left|\overrightarrow{OM}\right|\right|$

Si **h(A)=A' et h(B)=B'**, alors le théorème de Thalès implique que **(AB) et (A'B') sont parallèles**.

b - Propriétés

Une homothétie de rapport différent de 1 admet **un point invariant : le centre**.
L'homothétie de rapport 1est l'identité, donc tous les points sont invariants.

La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports des deux homothéties.

Remarque : La définition et les propriétés dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.

III. CONSERVATION DE CERTAINES PROPRIETES

1° Les longueurs

Les transformations qui conservent les longueurs sont : les translations, les rotations et les symétries.
Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$.

2° Les angles orientés

Les transformations qui conservent les angles orientés (et donc les angles géométriques) sont : les translations, les rotations, les symétries centrales et les homothéties.
Les symétries axiales transforment un angle orienté en son opposé.

3° L'alignement, les barycentres

Les transformations qui conservent l'alignement et les barycentres sont : les translations, les rotations, les symétries et les homothéties.

4° Les aires et les volumes

Les transformations qui conservent les aires et les volumes sont : les translations, les rotations et les symétries.
Les homothéties de rapport k multiplient les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Partie B : EXERCICES

- : exercices d'application directe du cours.
- : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
- : exercices plus difficiles ou plus longs.

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Résolution d'équations du second degré

1.1 - - Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations du second degré suivantes :

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 = 0$
b) $x^2 - 2x - 35 = 0$ e) $-x^2 + x = 2$
c) $4x^2 + 2x + 15 = 0$ f) $1 - t - 2t^2 = 0$

1.2 - - Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans calculer le discriminant et à l'aide d'une racine évidente, les équations du second degré suivantes (formule de la somme et du produit des racines) :

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ b) $2x^2 + x - 1 = 0$
c) $4x^2 + 18x + 20 = 0$ d) $-3x^2 + 2x + 5 = 0$
e) $x^2 + \left(\sqrt{2} - 3\right)x - 3\sqrt{2} = 0$ f) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

1.3 - **- Corrigé** - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{(x+1)}{(x+2)} + \dfrac{3x}{(x-1)} = 0$ d) $x^3 + 2x^2 + 4x = 0$
b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 2 = 0$ f) $(2 - x - x^2)^2 = 4$

Résolution d'inéquations du second degré

1.4 - - Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations du second degré suivantes :

a) $x^2 + 3x - 1 \geq 0$ d) $-3x^2 + 1 \geq 0$
b) $x^2 + x + 1 < 0$ e) $x^2 - x \geq 0$
c) $x^2 + 10x + 25 \leq 0$ f) $29x \geq x^2 - 96$

1.5 - - **Corrigé** - Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{5x^2 + 18x + 13}{x^2 + 4x + 3} \geq 0$

1.6 - -Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ (x+3)(x-4) \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 9x + 8 \leq 0 \\ \dfrac{(x+3)}{(x-4)} \leq 0 \end{cases}$

Factorisations, signe du trinôme

1.7 - **-Corrigé-** Soit l'équation :

$E(x) = x^3 + ax + b$
Trouver a et b pour que 1 soit racine double.
Factoriser alors E(x) puis résoudre $E(x) > 0$

1.8 - -Ecrire les polynômes suivants sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré :

a) $f(x) = x^2 + 5x - 24$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
b) $f(x) = -3x^2 + 3x + 4$ d) $f(x) = x^2 + 6x - 10$

1.9 - - Donner en fonction de x, le signe des trinômes suivants :

a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 24$ c) $f(x) = 0{,}3x^2 - 6x + 19$
b) $f(x) = -4x^2 + 2x + 5$ d) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

Mise en équation

1.10 - - **Corrigé** -Mettre en équation et résoudre les problèmes suivants :

a) La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans cinq ans, le produit de leurs âges sera 990. Quels sont leurs âges?
b) Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est 509.
c) Trouvez tous les triplets d'entiers consécutifs dont le produit est égal à la somme.

1.11 - - Mettre en équation et résoudre les problèmes suivants :

a) Un père et son fils travaillent chez le même entrepreneur. Le père reçoit 880 Euros après un certain nombre de jours de travail. Le fils qui a travaillé 5 jours de moins ne reçoit que 400 Euros. Trouver le nombre de jours de travail et le salaire quotidien de chacun sachant que le salaire quotidien du fils est inférieur de 8 Euros à celui du père.
b) Une personne veut partager 380 Euros entre un certain nombre d'individus. Six ne se présentent pas, de ce fait la part des autres est augmentée de 4.80 Euros. Combien d'individus devaient se présenter ?

Parité-Périodicité, domaines de définition, représentations graphiques

2.1 - - Corrigé- Etudier la parité ou la périodicité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$ d) $f(x) = \sqrt{5x-7}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2}}$ e) $f(x) = \dfrac{5x}{3|x|+2}$

c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x} - 3$ f) $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x + 3}$

2.2 - - Quels sont les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{7-2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2x^2-4x+7}{6x^2-2x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-4x+12}}{5x-9}$

f) $f(x)= \sqrt{|2x^2-5x|+3} - \dfrac{5x^2-9x+3}{5x+1}$

2.3 - Faire la représentation graphique des fonctions suivantes (on n'oubliera pas d'utiliser les propriétés de parité) :

a) $f(x) = 5x + 4$ d) $5|x-4| - 3|-5x+4| + x$

b) $f(x) = |x+2|$ e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|+1}}{x}$

c) $f(x) = 2x + |5x-9|$ f) $f(x) = \dfrac{5|x|}{x^2+4}$

Sens de variation

2.4 - - Justifier et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = x^2 -5$

b) $f(x) = -(x+2)^2$ e) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ f) $f(x) = 2\cos(x)$

2.5 - - Corrigé- On considère la fonction f :

$f(x) = |2-x| - |x+1| - |-2x+1|$

a) En distinguant les valeurs de x, faire disparaître les valeurs absolues (on demande 4 intervalles et les expressions de f associées).

b) Etablir le tableau de variation de f.

c) Tracer la représentation de f.

d) Quels sont les minimums de f ? ses maximums ?

2.6 - - Mêmes questions que l'exercice précédent avec : $f(x) = |x| - |3-x| - 2|x+1|$

Résoudre graphiquement, puis par le calcul : $f(x) \geq 3$, et $f(x) = 1 - x$.

Opérations sur les fonctions

2.7 - - Donner l'ensemble de définition des fonctions u, v, u+v, $u\times v$ et uov :

a) $u(x)= 4x - 8$ et $v(x) = x^2$

b) $u(x)= 2x^2$ et $v(x) = 3x - 2$

c) $u(x)= \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 2x^2 +5$

d) $u(x)= 2x$ et $v(x) = \cos x$

e) $u(x)= x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

f) $u(x)= \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \left(\dfrac{1}{2x}\right)^2$

2.8 - - Corrigé partiel - Réduire, ordonner et donner le degré des polynômes suivants :

a) $A(x)= (3x+1)^2 - 2x + 3x(x+2)^2 + 2(x-1)$

b) $B(x)= (x+1)(x^2 + 3x -5)$

c) $C(x)= (x^2 +2)(x^2 -2) +3$

d) $D(x)= (x+3)(x+1)(x^2-3) + 2x - 3$

2.9 - - Ecrire uov(x), vou(x), uou(x), vov(x), uouov(x) des fonctions u et v de l'exercice **2.7**.

2 .10 - -Corrigé - Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2+2\sqrt{x}$

Donner l'expression, en fonction de x de fog, de gof. Quels sont les ensembles de définition de ces deux fonctions ?

2.11 - -Soient u et v deux fonctions affines définies sur R d'équations : $u(x)= ax+b$ et $v(x)= a'x+b'$.

a) La somme u + v est-elle une fonction affine ?

b) La composée uov (x) ou vou (x) est-elle une fonction affine ?

c) Le produit $u\times v$ (x) est-il une fonction affine ?

2.12 - - Corrigé - On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-x+1}$.

Trouver deux réels a et b tels que

$f(x) = a + \dfrac{b}{x^2-x+1}$ et étudier la fonction f.

2.13 - - Soient les fonctions définies par :

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,$g(x) = -\frac{x}{2} + 1$, $h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$.

Montrez que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$: $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

Chapitre III : LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

Limites de fonctions en ∞

3.1 - - Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$:

a) $f(x) = x\sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

Pourquoi la recherche de la limite en $-\infty$ n'a t'elle pas de sens pour ces fonctions ?

3.2 - - **Corrigé** - Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-2}}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{5x+2}$

b) $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-3}}$

3.3 - - Soient les fonctions définies par :

$f(x) = \sqrt{2x-4}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ et

$h(x)=\sqrt{6-2x}$.

Trouver l'ensemble de définition de chaque fonction et dire si la recherche de la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ a un sens. Si oui, déterminer cette limite.

Limites de fonctions en un point

3.4 - - Etudiez la limite de la fonction f au point a.

a) f telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a = 0.

b) f telle que $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ a = 2.

c) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2}$ a = 0

d) $f(x) = \frac{x^3+27}{x+3}$ a = -3.

3.5 - - **Corrigé** - Etudier la limite de la fonction f au point a :

a) $f(x) = \frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ a = 0

b) $f(x) = -7x^2+3x-5+\frac{1}{x}$ en a = 0

c) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x}$ en a = 0

d) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ en a = 2

3.6 - - Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{1-x}}{x^2+2}$

Précisez le domaine de définition de f et déterminez la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 ainsi que la limite de f(1+h) lorsque h tend vers 0 (vous préciserez les valeurs de h pour lesquelles f(1+h) est défini).

Limite de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

3.7 - - Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$:

a) $f(x) = x^2+3x+5$

b) $f(x) = 2x^3+5x^2+4x+1$

c) $f(x) = -x^3+5x^2-2x+3$

d) $f(x) = -3x^2+7x-11$

e) $f(x) = 5x^8-5x+3$

f) $f(x) = -2x^6+5x^3-3x^2+8$

3.8 - - Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$ (on pourra mettre x ou x² en facteur au numérateur et au dénominateur puis simplifier) :

a) $f(x) = \frac{4x-7}{2x+5}$ d) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2-8x+1}$

b) $f(x) = \frac{5-3x}{4x+7}$ e) $f(x) = \frac{3x^4+3x^2+1}{2x^3+x-1}$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2}$ f) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{3x^4+x-1}$

3.9 - - **Corrigé –** Quelles sont les fonctions qui tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$?

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ d) $f(x) = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+x+1}$

Asymptotes

3.10 - - Pour chacune des fonctions f définies par les expressions suivantes, déterminer une équation de l'asymptote horizontale à la courbe représentative de f :

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^2+4x-8}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^7 - 8x^5 + 4x^2 - 1}{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1}$

3.11 - - Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l'ensemble de définition puis l'équation d'asymptotes éventuelles :

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{3+2x}{x-4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

3.12 - - **Corrigé** - Quelles sont les éventuelles asymptotes verticales pour chaque fonction ?

a) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+4x-5}$

d) $f(x) = x^2 + 8x$

Chapitre IV : DERIVATION ET APPLICATIONS

Nombre dérivé

4.1 - - **Corrigé partiel** - Déterminer le nombre dérivé (à l'aide d'une limite) de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2+1$ et $x_0 = 3$
b) $f(x) = 3x+1$ et $x_0 = 0$
c) $f(x) = x^2$ et $x_0 = 0$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $x_0 = 2$
e) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $x_0 = 2$
f) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $x_0 = 0$

Calcul de la dérivée

4.2 - - Calculer les fonctions dérivées en précisant sur quels intervalles les fonctions sont dérivables.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = 2x+-3$

c) $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$

d) $f(x) = 3x^2 - x + 7$

e) $f(x) = \sqrt{x+3}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

4.3 - -Calculer f '(x) et donner les valeurs de x pour lesquelles f est dérivable :

$f(x) = \dfrac{3}{x+5} - 7\sqrt{x+3}$

4.4 - - **Corrigé** - Soit la fonction f d'équation : $f(x) = x^2$

a) Donner l'approximation affine locale de $(3 + h)^2$.
b) En déduire l'approximation du nombre suivant (sans donner l'erreur) : 3,002.

Tangente à la courbe

4.5 - - **Corrigé partiel** - Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $x_0 = 4$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$ et $x_0 = 2$

c) $f(x) = x^3-2$ et $x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-2}$ et $x_0 = 3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ et $x_0 = -2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $x_0 = 4$

4.6 - - $\mathcal{P}$ est la courbe d'équation $y = x^2$, $\mathcal{Q}$ est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^2}$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont un point en commun A(1 ;1). Donner l'équation de la tangente en A de la courbe $\mathcal{P}$ et de la courbe $\mathcal{Q}$. Faire un dessin.

Sens de variation et extremums

4.7 - - Déterminer les dérivées des fonctions suivantes puis dresser leurs tableaux de variations:

a) $f(x) = 6(x^2-1)$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

d) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

4.8 - - **Corrigé** - Déterminer les extremums des fonctions suivantes sur l'intervalle I en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum :

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ et sur $I = \mathbb{R}^{-*}$

c) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{2x-4}$ sur I =]2; +∞[

Equation f(x)=0

4.9 - - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + \frac{x^2}{2} - 5x$.

Etudier f et en déduire le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0.

Fonctions trigonométriques

4.10 - -Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \tan(x)$ b) $f(x) = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2$

c) $f(x) = \cos^2(x)$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

4.11 - **- Corrigé -** Montrer que les fonctions f, g et h ont même dérivée.

$f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$; $g(x) = (\sin x)^2$ et

$h(x) = -(\cos x)^2$

Montrer que f, g et h ne sont pas égales.

4.12 - - Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -3\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

a) Montrer que f est périodique et préciser la période.

b) Calculer f '(x) et résoudre dans l'intervalle $[0 ; \pi]$ l'équation f '(x) = 0

c) Etudier les variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

d) Représenter f dans un repère orthonormal.

Etude de fonctions

4.13 - **- Corrigé partiel -** Etudier la fonction f suivante :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$ d) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ e) $f(x) = \sqrt{2x+4}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{x+4}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

4.14 - -Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}.$$

On note (C) sa courbe représentative.

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

b) Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que pour tout x de D : $f(x) = a + \frac{b}{-x+1}$.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de D et préciser les asymptotes.

d) Etudier les variations de f.

e) Représenter (C) et ses asymptotes.

4.15 - - Soit f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

a) Calculer f '(x). Quel est son signe ?

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Rassembler les résultats précédents dans un tableau.

c) Que représente la droite d'équation y=1 pour la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal ?

d) Montrer que C est symétrique par rapport à Oy, puis tracer C.

4.16 - - Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

1. Tracez sa représentation graphique C dans un repère orthonormé.
2. Soit D la droite d'équation y = m.

a) Ecrivez l'équation qui permet de trouver les abscisses des points d'intersection de D avec C.

b) Discutez suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de D avec C.

Chapitre V : SUITES NUMERIQUES

Définition et calcul de termes d'une suite

5.1 - - Trouver la fonction f telle que pour tout n, $u_n = f(n)$ et calculer les termes de u_0 à u_{10}.

a) $u_n = 3n+6$ d) $u_n = \frac{n^2}{\sqrt{2n+3}}$

b) $u_n = \frac{2n^2+1}{n+3}$ e) $u_n = 2n^2 + 3\sqrt{n} + 1$

c) $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ f) $u_n = \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$

5.2 - - Trouver f telle que pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_0 à u_6.

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n+1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = (2u_n+1)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + 1 \end{cases}$

5.3 - - Donner la valeur exacte puis une valeur approchée des six premiers termes des suites suivantes. Donner ensuite le 70ème terme.

a) $u_n = 2^n + 1$ c) $u_n = \sqrt{n} - 3$

b) $u_n = 3n^3 + n$ d) $u_n = \dfrac{5+n}{n}$

5.4 - **- Corrigé partiel -** Exprimer en fonction de n les termes u_{n-1}, u_{n+1}, u_{2n-2}, u_{2n+3} de la suite (u_n).

a) $u_n = 2n^2 + 1$ c) $u_n = 3 - 1^{\ n+2}$

b) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n + 1}{2n + 1}$ d) $u_{n+2} = \dfrac{2n+3}{n+1}$

Sens de variation

5.5 - - Etudier le sens de variation de la suite (u_n) :

a) $u_n = (n-3)^2$ c) $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$

b) $u_n = 2n + 3$ d) $u_n = \dfrac{2}{n} + 1$

5.6 - **-Corrigé -** Etudier le sens de variation de la suite (u_n) :

a) $u_n = n + (-1)^n$ c) $u_n = 2n^3 + 20n^2 + 10n - 3$

b) $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ d) $u_n = \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

Suites arithmétiques

5.7- - Soit une suite arithmétique u, de premier terme u_0 et de raison r. Calculer u_1, u_2 et u_n en fonction de n, puis calculer u_9 :

a) $u_0 = 1$; $r = 2$. c) $u_0 = 3$; $r = -2$.

b) $u_0 = 2$; $r = \dfrac{1}{3}$. a) $u_0 = -1$; $r = -\dfrac{1}{2}$.

5.8 - **- Corrigé -** (u_n) est la suite définie par

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$:

Calculer les cinq premiers termes.

a) Si $u_n \neq 0$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer les six premiers termes de la suite (v_n).

b) La suite (v_n) est-elle arithmétique ? En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

5.9 - - Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

a) Conjecturez graphiquement le comportement de la suite (u_n).

b) Prouvez que la suite (v_n) est arithmétique et donner son premier terme et sa raison.

c) Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n.

d) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Suites géométriques

5.10 - - Soit une suite géométrique u, de premier terme u_0 et de raison q. Calculer u_1, u_2 et u_n en fonction de n, puis calculer u_9 :

a) $u_0 = 2$; $q = 3$. c) $u_0 = -3$; $q = -1$.

b) $u_0 = -1$; $q = 2$. a) $u_0 = +3$; $q = 2$.

5.11 - - (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout naturel n, $w_{n+1} = 2\,w_n + 5$

a) Calculez les cinq premiers termes.

b) On pose $v_n = w_n + 5$. Calculez les cinq premiers termes de (v_n).

c) Prouvez que la suite (v_n) est géométrique et donnez (w_n) en fonction de n.

5.12 - - On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 6$ et $u_n = \dfrac{u_{n-1} + 6n + 5}{2}$.

a) Calculez u_1 , u_2 et u_3 .

b) Pour tout n, on pose $v_n = u_n - 6n + 1$. Montrer que cette suite est géométrique et on déterminera le premier terme et la raison. Exprimer v_n en fonction de n.

c) On pose pour tout n : $w_n = u_n - v_n$. Montrer que w_n est une suite arithmétique.

Limites de suites

5.13 - -Trouvez la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{3}{n^2}$, $n > 0$.

b) $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{2}{n^2}$, $n > 0$.

c) $u_n = 2n^2 + 3n - 2$, $n > 0$.

d) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$, $n > 0$.

5.14 - **- Corrigé partiel -** Trouvez la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{1}{5^n} + (0{,}3)^n$, $n > 0$.

b) $u_n = \dfrac{1}{2^n(n+1)}$, $n > 0$.

5.15 - - La suite (v_n) est définie pour tout n par : $v_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} ..+ \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
b) v_n est une somme de n termes. Donner le plus grand et le plus petit.
c) En déduire que : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \dfrac{n}{n+1}$
d) Donner la limite de (v_n).

Somme de termes consécutifs

5.16 - - (v_n) est une suite arithmétique. On a : $v_1 + v_2 + v_3 = 9$ et $v_{10} + v_{11} = 40$.

a) Calculer v_0 et la raison r.
b) Calculer la somme $S= v_0 + v_1 +…..+ v_{30}$

5.17 - - (w_n) est une suite géométrique de raison $q =2$ et $w_4 = 12$.

a) Calculer w_0.
b) Calculer la somme $S= w_0 + w_1 +…..+ w_{30}$

5.18 - - **Corrigé partiel** - Calculer les sommes suivantes :

a) $S= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+........+\dfrac{1}{1048576}$
b) $S= \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-........-\dfrac{1}{6561}$
c) $S= 1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+........+\dfrac{1}{10^7}$

5.19 - - Un adolescent lance une balle rebondissante au sol. Après le premier rebond, la balle atteint 10 m de hauteur.

a) Sachant qu'après chaque rebond la balle perd 30 % de hauteur, au bout de combien de rebonds le mouvement de celle-ci ne sera plus perceptible (- d'1 millimètre) ?
b) Sachant que l'adolescent a lancé sa balle à partir de 1,50 m, quelle distance la balle aura t'elle parcourue au total ?

Chapitre VI : STATISTIQUES ET PROBABILITES

Statistiques : Moyenne, variance et écart-type

6.1 - - Etudier les séries statistiques suivantes :

a) *Série 1 :*

x_i	1	2	4	5	6	8	10
n_i	5	7	10	13	18	12	6

Tracer le diagramme en bâtons de la série.
Calculer les effectifs cumulés croissants.
Tracer le diagramme des effectifs cumulés croissants.

b) *Série 2 :*

Classes	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[
Effectifs	10	5	13	3	10	15

Tracer l'histogramme de la série.
Calculer les fréquences cumulées croissantes.
Tracer le diagramme des fréquences cumulées croissantes.

6.2 - - **Corrigé** - Deux élèves obtiennent les notes suivantes à leurs contrôles de mathématiques au cours d'une année scolaire. Calculer dans chaque cas : la moyenne, la variance et l'écart-type. Quel est l'élève qui est le plus régulier ?

a) *Notes de l'élève 1 : 5 8 12 9 10 15 7 12 10*
b) *Notes de l'élève 2 : 6 9 10 11 14 12 8 13 9*

6.3 - - Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Les mesures des diamètres correspondants ont donné les résultats suivants :

Classe	]24 ; 24,2]	]24,2 ; 24,4]	]24,4 ; 24,6]
Effectif	0	5	13

]24,6 ; 24,8]	]24,8 ; 25]	]25 ; 25,2]	]25,2 ; 25,4]
24	19	14	10

]25,4 ; 25,6]	]25,6 ; 25,8]	]25,8 ; 26]
8	5	2

a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
b) La production de la machine est jugée bonne si la série de mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

- la moyenne est dans l'intervalle [24,9 ; 25,1].

- l'écart-type est strictement inférieur à 0,4.
- 90 % de l'effectif figure dans l'intervalle $\left[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma\right]$

La production est-elle bonne ?

Statistiques : Quartiles, diagramme en boîte et changements affines

6.4 - - **Corrigé** - Pour la série statistique suivante, déterminer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile : 10 – 18 – 8 – 4 – 2 – 23 – 18 – 9 – 1 – 33 – 27 – 30 .

6.5 - - Donner une série de 20 valeurs telle que le premier quartile soit 5, la médiane 15 et le troisième quartile 35.

6.6 - - Construire les diagrammes en boîte suivants :

a) *Série 1 :* Min = 4,3 ; Q1 = 5,6 ; Me = 8,3 ; Q3 = 11,2 ; Max = 16.

b) *Série 1 :* Min = 5,7 ; Q1 = 8,5 ; Me = 12,2 ; Q3 = 15,8 ; Max = 19,7.

6.7 - - Une association possède une ligne d'écoute téléphonique destinée à des personnes en difficulté. Deux écoutants décident de voir le temps passé au téléphone (en minutes) sur une sélection de 100 appels consécutifs. Les appels ne dépassent jamais 10 minutes.

Durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Ecoutant 1	5	18	10	8	15
Ecoutant 2	2	10	8	15	12

a) Tracer le polygone des fréquences croissantes et estimer graphiquement les valeurs du premier quartile, de la médiane et du troisième quartile.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer les diagrammes en boîte.

6.8 - - Dans une boulangerie, on mesure le temps d'attente avant d'être servi par la boulangère ou par une de ses apprenties. Les mesures suivantes ont été effectuées un dimanche entre 9h et 12h (jour de référence).

Temps d'attente	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ;8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Nombre de clients	150	213	108	56	30	8

a) Déterminer la moyenne $\overline{x}$, la variance V et l'écart-type σ de la série.

b) Un jour de grève des transports, la moitié du personnel n'est pas là et le temps d'attente est augmenté de 2 minutes par rapport au jour de référence. Que deviennent $\overline{x}$, la variance V et l'écart-type σ de la série ?

c) Calculer le premier quartile Q_1, la médiane M_e et le troisième quartile Q_3.

d) Une autre journée, le temps d'attente est multiplié par deux par rapport au jour de référence. Que deviennent le premier quartile Q_1, la médiane M_e et le troisième quartile Q_3.

Probabilités, fréquences, ensembles

6.9 - -Sur 1000 lancers, on a dénombré 119 fois l'évènement P_3, 390 fois P_2, 370 fois P_1 et 121 fois P_0 .

a) Calculer les fréquences de chaque évènement P_i.

b) Faire la somme de toutes ces fréquences.

6.10 - - **Corrigé** - On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) un carreau

b) un valet

c) un valet de carreau

6.11 - - On lance une pièce trois fois de suite. On note P_i l'évènement « avoir i fois le côté pile ». Obtenir le côté Pile est noté « P » et obtenir le côté face est noté « F ».

a) Quel est Ω l'ensemble des possibles de cette expérience. Dessiner l'arbre correspondant.

b) Donner les issues de l'évènement P_3 et donner son complémentaire.

c) Donner toutes les issues possibles pour les évènements : P_0, P_1, P_2.

d) Ecrire l'évènement A « obtenir au moins deux fois face » à l'aide des P_i.

e) Ecrire l'évènement B « obtenir au plus une fois face » à l'aide des P_i.

f) Trouver $A \cup B$ et $A \cap B$.

6.12 - - Une loterie édite 1 000 000 de billets numérotées de 0 à 999 999.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un billet pris au hasard porte un numéro composé de six chiffres identiques ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un billet pris au hasard porte un numéro composé de six chiffres tous différents entre eux ?

6.13 - - E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard un de ces nombres.

a) Quel est la probabilité d'obtenir les évènements suivants :

- A : « il est multiple de 2 »
- B : « il est multiple de 4 »
- C : « il est multiple de 5 »
- D : « il est multiple de 2 mais pas de 4 »
- F : « il est multiple de 4 mais pas de 2 »

b) Calculer la probabilité de :

$A \cap B, A \cup B, A \cap C$ et $A \bigcup C$.

Probabilités : Variable aléatoire, espérance, variance et écart-type

6.14 - - La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie de la façon suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
P(X=x_i)	0.1	0.13	0.26	0.34	0.06	0.11

a) Calculer $\sum_{i=1}^{i=6} P(X = x_i)$.

b) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$.

6.15 - - **Corrigé -** Une urne contient 9 boules rouges, 6 boules vertes, 3 boules jaunes et 1 boule bleue. On tire au hasard une boule dans l'urne. Tirer une boule rouge fait perdre 1 Euro, tirer une boule verte rapporte 1 Euro, une boule jaune 2 Euros et une boule bleue 4 Euros.

Soit X la variable aléatoire associée au gain obtenu lors du tirage d'une boule dans l'urne.

a) Donner les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer E(X). Qu'en concluez-vous ?

6.16 - - Un joueur lance deux dés équilibrés. Il mise 1 euro sur l'apparition d'un 4. Si le numéro 4 apparaît sur un dé il gagne 5 euros, s'il apparaît sur les deux dés il gagne 10 euros. Si le 4 n'apparaît pas, il perd sa mise.

Soit la variable aléatoire X associée au gain diminué de sa mise.

a) Donner les valeurs de X.

b) Exprimer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

c) Calculer E(X). Qu'en concluez-vous ?

c) Calculer la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$.

6.17 - - On lance simultanément deux dés sur une table. L'un est cubique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'autre est tétraédrique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. On suppose que chacune des faces de chaque dé a la même probabilité d'apparition. On désigne par Y la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue de la différence des nombres sur les deux faces en contact avec la table.

a) Compléter le tableau suivant correspondant aux valeurs prises par Y en fonction des valeurs prises par les deux faces en contact avec la table.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0					
2				2		
3		1				
4					1	

b) Donner la loi de probabilité de Y.

c) Calculer E(Y), V(Y) et $\sigma(Y)$.

Chapitre VII : Vecteurs et barycentres

Calcul vectoriel

7.1 - - **Corrigé -** Soient A, B, C et D quatre points du plan. E et F les milieux respectifs de [AC] et [BD].

a) Exprimer $\vec{AB} + \vec{CD}$ en fonction de $\vec{EF}$.

b) Exprimer $\vec{BC} + \vec{DA}$ en fonction de $\vec{FE}$.

c) Soit $\vec{u} = x(\vec{AB} + \vec{CD}) + y(\vec{BC} + \vec{DA})$ où x et y sont deux nombres réels. A quelle condition a-t-on $\vec{u} = \vec{0}$?

7.2 - - Soit un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en I. On projette I sur (AB) parallèlement à (AD) en A', puis parallèlement à (BC) en B'.

a) Montrer que :

Si $\vec{CI} = k.\ \vec{CA}$ = alors $\vec{DI} = k.\ \vec{DB}$

b) Démontrer que :

$\vec{AA'} = k.\ \vec{AB}$ et $\vec{BB'} = k.\ \vec{BA}$

En déduire que [AB] et [A'B'] ont même milieu.

7.3 - - Soit ABCD un trapèze convexe où (AB) est parallèle à (CD). Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Soit I le milieu de [AB], et J le milieu de [CD]. Montrez que les points F, I, E, J sont alignés.

Barycentre de deux points

7.4 - - Comparer G1 et G2.

a) Soit A et B deux points. On appelle G_1 le barycentre des points pondérés (A,3) et (B,-5) et G_2 le barycentre de (A,6) et (B,-10).

b) Soit A et B deux points. On appelle G_1 le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) et G_2 le barycentre de (A,ka) et (B,kb) avec $a+b\neq 0$ et $k\neq 0$.

7.5 - - Soient deux points A et B. Construire le barycentre de ces deux points avec la méthode de votre choix que vous expliquerez :

a) (A , 3) et (B , 6)
b) (A , 3000) et (B ,12000)
c) (A , $\frac{1}{22}$) et (B , $\frac{3}{11}$)
d) (A , $-\sqrt{6}$) et (B , $2\sqrt{6}$)

7.6 - - **Corrigé** - Soient trois points A, B et C tels que : $2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

a) Déterminer les coefficients de B et C pour que A soit leur barycentre.
b) Déterminer les coefficients de A et C pour que B soit leur barycentre.
c) Déterminer les coefficients de B et A pour que C soit leur barycentre.

Barycentre de trois points

7.7 - - **Corrigé** - A, B et C étant trois points quelconques du plan, construire le point M tel que :

a) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

7.8 - - Soient trois points A, B, C quelconques.
Soit G le barycentre du système
{(A, a) (B, b) ((C, c)} avec $a+b+c \neq 0$
Peut-on déterminer a, b, c pour que :
- G soit en A?
- G soit sur la droite (BC) ?

7.9 - - **Corrigé** - ABC est un triangle de centre de gravité G. H est le symétrique de G par rapport au milieu I de [BC].

a) Dessiner la figure.
b) Montrer que G est le milieu de [HA]
c) Justifier que : $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.
d) Donner $\overrightarrow{HA}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$. En déduire que H est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients à préciser.

Barycentre de n points

7.10 - - **Corrigé -** Construisez selon la méthode de votre choix, le barycentre G de (A,2), (B,-1), (C,2) et (D,5).

7.11 - - Construisez le barycentre G des points pondérés (A,-1), (B,4), (C,2), (D,1) en procédant de la façon suivante :
a) Construisez le barycentre I de (A,-1), (B,4).
b) Construisez le barycentre J de (C,2), (D,1).
c) Montrez que G est le barycentre de (I,3), (J,3), puis construisez G.

7.12 - - On suppose que :

- G est le barycentre de ((A,a),(B,b),(C,c),(D,d)) avec $a+b+c+d \neq 0$.
- H est le barycentre de ((A,a),(B,b)) avec $a+b \neq 0$. - K est le barycentre de ((C,c),(D,d)) avec $c+d \neq 0$.

Démontrer que G est le barycentre de ((H,a+b),(K,c+d)).

Coordonnées du barycentre

7.13- - On considère le plan rapporté à un repère orthonormal. Soit A(-3,1) et B(4,1).
Soit G le barycentre de (A,-1) et (B,3).
a) Construire G.
b) Calculer les coordonnées de G.

7.14 - - **Corrigé –** Dans le plan muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on construit les points A(1,2), B(-2,-3) et C(5 ;-4). Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

7.15 - - Dans le plan muni du repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on construit les points A(2,3), B(-2,-4) et C(8 ;-6) :
a) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.
b) Calculer les coordonnées du barycentre G de ((A,3),(B,5)).
c) Calculer les coordonnées du barycentre H de ((C,500),(B,300)).

Problèmes de géométrie et barycentres

7.16 - - Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. A tout point M du plan distinct de G, on associe le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, et le point S tel que : $\overrightarrow{MS} = \vec{v}$.

a) Montrez que $\vec{v} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Montrez que la droite (MS) passe par un point fixe.
c) Trouvez l'ensemble E des points M du plan tels que $\vec{v}$ ait la même direction que (BC).
d) Trouvez l'ensemble F des points M du plan tels que MS = BC.

7.17 - - ABCD est un trapèze avec (AB)//(DC) et AB<DC (longueurs des segments). Les droites (AD) et (BC) se coupent en E. Soit x le réel positif tel que EA = x ED.

a) Montrer que E est le barycentre des points (A,1) et (D,-x).
b) Montrer que E est le barycentre des points (B,1) et (C,-x).
c) Démontrer que E est le barycentre des points (A,1), (B,1), (C,-x)et (D,-x). Il suffit de démontrer que : $\vec{EA} + \vec{EB} - x\,\vec{ED} - x\,\vec{EC} = \vec{0}$
d) En regroupant les points deux par deux, démontrer que la droite (IJ) joignant le milieu I de [AB] et le milieu J de [DC] passe par E.
e) (AC) coupe (DB) en F. Utiliser une démarche analogue pour démontrer que (IJ) passe par F.

Chapitre VIII : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

Calculs avec sin et cos

8.1 - - **Corrigé** - Montrer que quel que soit le réel x :

a) $(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2 = 2$
b) $\sin^4(x) + \cos^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$
c) $\sin^4(x) - \cos^4(x) + 2\cos^2(x) = 1$

8.2 - - Exprimer en fonction de sin(a) et cos(a) les expressions suivantes :

a) $\cos(\frac{\pi}{2} + a) + \cos(2\pi - a) + \sin(\pi - a) + \cos(\pi + a)$
b) $\cos(-a) + \sin(-a) + \cos(\pi - a) + \sin(\pi - a)$
c) $\sin(\frac{\pi}{2} + a) + \cos(\pi - a) + \sin(a + \frac{3\pi}{2}) + \cos(a + \pi) - \sin(\frac{5\pi}{2} - a)$

8.3 - - Exprimer en fonction de cos(x) et sin(x) les expressions suivantes :

a) $\cos(x + \frac{3\pi}{2}) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$
b) $\cos x \,.\, \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) \,.\, \sin x$
c) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \pi) + \cos(x + \frac{3\pi}{2}) + \cos x$
d) $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) + \sin(x - \frac{3\pi}{2})$

8.4 - - On définit un réel x par :

$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer cos(2x) et sin(2x).
b) Vérifier que cos(4x) = sin(x). En déduire x.

Cercle trigonométrique

8.5 - - Dessiner sur un cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F tels que :

a) $(\vec{i}, \vec{OD}) = \frac{5\pi}{6}$
b) $(\vec{i}, \vec{OE}) = -\frac{\pi}{8}$
c) $(\vec{i}, \vec{OF}) = \frac{2\pi}{3}$
d) $(\vec{i}, \vec{OA}) = -\frac{\pi}{6}$
e) $(\vec{i}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$
f) $(\vec{i}, \vec{OC}) = -\frac{3\pi}{12}$

8.6 - - **Corrigé** - Soit un point M placé sur un cercle trigonométrique tel que :
$(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta$. Simplifiez les expressions suivantes avec des considérations géométriques que vous expliquerez sur un dessin.

a) $A = \cos(\theta - \pi) - \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta - \pi)$

b) $B = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \sin(\pi + \theta) - \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) - \sin(\theta + 3\frac{\pi}{2})$

Angles orientés

8.7 - -(ABCD) est un losange tel que :

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{5}$

Trouver les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\vec{AB}, \vec{AD})$
b) $(\vec{AB}, \vec{CD})$
c) $(\vec{AD}, \vec{DC})$
d) $(\vec{CA}, \vec{CB})$

8.8 - - (ABCDEFGH) est un octogone de centre O.
Trouver les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ d) $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$

b) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG})$ e) $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{DE})$

c) $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC})$ f) $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OH})$

8.9 - - Soit trois points A, B et C tels que :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{3}$.

a) Tracer le triangle ABC.
b) Donner la nature du triangle ABC.

8.10 - - **Corrigé** - Soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{3}$.
Calculer les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\vec{u}, -\vec{v})$ d) $(2\vec{w}, -\vec{v})$

b) $(\vec{w}, \vec{v})$ e) $(5\vec{v}, -\vec{v})$

c) $(-3\vec{u}, \vec{v})$ f) $(\vec{u}, -\vec{w})$

Coordonnées polaires

8.11 - - Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soient les points M de coordonnées polaires (r, θ) tels que : $r = 5$ et $\theta \in [0; \pi]$. Quelle figure géométrique représente l'ensemble des points M ?

8.12 - - Donner les coordonnées cartésiennes des points de coordonnés polaires suivants :

a) $r = 3$ et $\theta = -\pi$ c) $r = 2$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

b) $r = 6$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ d) $r = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Représenter ensuite ces points dans un plan.

8.13 - - **Corrigé** - Donner les coordonnées polaires des points de coordonnés cartésiennes suivants :

a) x = 0 et y = 3 c) x = 2 et y = 2
b) x = 6 et y = 0 d) x = -5 et y = -5

Représenter ensuite ces points dans un plan.

Chapitre IX : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Calcul de produits scalaires

9.1 - - $(\vec{i}, \vec{j})$ étant une base orthonormée
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque :

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$

c) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$

d) $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

9.2 - - **Corrigé** - Deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Démontrer que :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

9.3 - - Soit ABCD un parallélogramme tel que AB = 6, AD = 4 et l'angle de sommet D mesure 60°.

a) calculer . $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

9.4 - - Dans un repère orthonormal, on place les points : A(4 ;1), B(0 ;5) et C(-2 ;-1).

a) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

c) Calculer les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

d) H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer AH et CH.

Calculs dans un triangle

9.5 - - Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6. On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle. Calculez $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

9.6 - - Soit ABCD un rectangle tel que AB = 5 et AD = 3. On appelle A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD). En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$, calculer la distance A'C'.

9.7 - -Corrigé - [AB] est un segment de 2 cm, C est un point de sa médiatrice et AC= 4cm.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

b) Calculer les angles $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$ du triangle ABC.

Equations de droites et de cercles

9.8 - - Corrigé - Déterminer une équation du cercle Γ répondant aux conditions suivantes :
a) (Γ) a pour centre A(1;-1) et passe par B(2,3).
b) (Γ) a pour centre A(-2,1) et pour rayon 4.
c) (Γ) est un cercle de diamètre A(1,2) B(4,-2).

9.9 - - Soit (Γ) un cercle de centre O de coordonnées (3;1) et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4;3).
a) Vérifier que A appartient au cercle.
b) Déterminer l'équation de la tangente au cercle en A.

9.10 - - Dans un repère orthonormal, on place les points : A(-2;-1), B(6 ;1) et C(2 ;5).
a) Déterminer les équations des hauteurs issues de A et de B du triangle ABC, puis les coordonnées de l'orthocentre H.
b) Trouver les coordonnées du point Ω, centre du cercle circonscrit à ABC.
c) Trouver les coordonnées du centre de gravité G.
d) Vérifier que H, Ω et G sont alignés.

Lieux géométriques

9.11 - - Soit ABC un triangle équilatéral, on pose AB = a. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient : $\frac{3}{4}a^2 \le (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2 \le 3\,a^2$

9.12 - - Soit [AB] un segment de longueur 6. Déterminer et dessiner les lignes géométriques décrites par les points M qui vérifient :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ = k avec k = {0 ; 2 ; - 5 ; 7}

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ = k avec k = {0 ; -10 ; -9 ; 5}

9.13 - - Corrigé – Dans un repère orthonormal, on place les points : A(4;-1), B(3 ;2) et C(-2 ;1). Soit le point M de coordonnées (x, y).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}$.

b) Donner l'équation de l'ensemble défini par: $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\|$.

c) Donner la nature de cet ensemble.

Chapitre X : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

10.1 - - On considère un tétraèdre ABCD dans lequel AC = AD = BC = BD.

a) Montrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
b) Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Montrez que la droite (IJ) est perpendiculaire à la fois aux segments [AB] et [CD].

10.2 - -
a) Montrez que si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et que les droites d'intersection sont parallèles.
b) Soit un plan P, un parallélogramme ABCD situé dans un plan P', une droite X non parallèle à P ou P'. On mène par A, B, C, D les parallèles à X qui coupent P en A', B', C', D'. Montrez que A'B'C'D' est un parallélogramme.

10.3 - - Corrigé - Soit un triangle ABC. Soient les points I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Soit un point M non situé dans le plan (ABC).
a) Déterminer l'intersection des plans (MAC) et (MAB).
b) Déterminer l'intersection des plans (MIJ) et (MBC).

Sections planes

10.4 - - Soit un tétraèdre ABCD, (AA') (BB') (CC') les hauteurs du triangle ABC. Montrer que les plans DAA', DBB', DCC' ont une droite commune.

10.5 - - Corrigé - Soit un cube ABCDA'B'C'D'. Démontrer que le triangle AB'C est un triangle équilatéral.

10.6 - - Soit un tétraèdre ABCD ayant ses six arêtes de même longueur (un tel tétraèdre s'appelle un tétraèdre régulier). Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

10.7 - - Soit un tétraèdre ABCD. M un point de l'arête AB, N un point du plan (ADC), P un point du plan (ABC). Déterminer l'intersection du plan MNP avec les quatre côtés du tétraèdre. (On envisagera les cas ou N et P sont sur les arêtes et les cas ou ils n'y sont pas).

10.8 - - Soit un tétraèdre ABCD tel que les arêtes (AD) et (CB) soient des droites orthogonales.
Soit M un point du segment $[AC]$, P le plan passant par M et parallèle à (AD) et (CB).
Le plan P coupe le tétraèdre suivant le quadrilatère (MNPQ).
Quelle est la nature de ce quadrilatère ?

Vecteurs de l'espace

10.9 - - **Corrigé** - Déterminer a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient coplanaires :
A (1,2,3), B (4,5,6), C (-1,-2,-3), D (a,b,0).

10.10 - - On considère les points A, B, C, E et F avec A, B et E non alignés et :

$\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.

a) Démontrer que ces cinq points sont dans un même plan.
b) Démontrer que les milieux de [CE] et de [BF] sont alignés avec le point A.

10.11 - -

Voici trois vecteurs : $\vec{u}\,(\frac{1}{2}; -1 ; -3)$,

$\vec{v}\,(2; -1 ; \frac{1}{3})$ et $\vec{w}\,(-2; -4 ; 0)$.

Y a-t-il des vecteurs orthogonaux ?

10.12 - - **Corrigé –** On donne trois points A, B et C par leurs coordonnées. Dans chaque cas, dire si ces points sont alignés :

a) A(1,-3 ,2)	B(3 ,-2 ,-1)	C(9 ,1 ,-10)
b) A(1,0 ,0)	B(3 ,-2 ,-1)	C(9 ,1 ,-10)
c) A(1,-3 ,2)	B(2 ,-2.5 ,0.5)	C(5 ,1 ,-4)
d) A(1 ,2 ,3)	B(5 ,9 ,-8)	C(9 ,16 ,-19)
e) A(1,3 ,5)	B(1 ,3 ,-12)	C(1, 3 ,0)

10.13 - - ABCD est un tétraèdre ; I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD].

a) Démontrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BI}$ sont égaux à $\overrightarrow{IJ}$.
b) CAIM et DBIN étant deux parallélogrammes, démontrer que la droite (MN) passe par le point J.

Distances et barycentres de l'espace

10.14 - - a) Montrez que si une droite D est strictement parallèle à un plan P, elle est strictement parallèle à l'intersection D' de P et de tout plan Q passant par D et coupant P.
b) On considère un parallélogramme ABCD, et un point S extérieur au plan de ce parallélogramme.
Soit G le centre de gravité du triangle SCD.
Montrez que le plan ABG coupe [SC] et [SD] en des points qu'on appellera C' et D'. Connaissant CD = a, calculez C'D'.

10.15 - - ABC est un triangle d'un plan P et le point K est extérieur à P. Soient les points:
A' barycentre de ((A,-2)(K,3)) ; B' barycentre de ((B,-2)(K,3)) ; C' barycentre de ((C,-2)(K,3)).
Démontrer que le plan (A'B'C') est parallèle au plan P.

10.16 - - **Corrigé** - On donne les points :
A(-1,5,4), B(2,3,-1) et C(1,7,2).
a) Calculer les longueurs des cotés du triangle (ABC).
b) Donner la nature du triangle (ABC).

10.17 - - Dans un repère orthonormal, on donne les points : A(6,0,0), B(0,6,0) et C(0,0,6).
G est le centre de gravité de ABC.
a) Démontrer que (OG) est orthogonale aux trois droites (AB), (BC) et (AC).
b) Vérifier que : $\frac{1}{OG^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
c) Montrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois triangles OAB, OBC et OCA.

Géométrie analytique

10.18 - - Soient les points :

A (1,2,-3), B (4,-5,6), C (-1,2,-3).
a) Calculer les coordonnées du milieu I de [AB], du milieu J de [AC] et du milieu K de [BC].
b) Calculer les coordonnées du symétrique D de B par rapport à C.
c) Calculer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{MI}.$$

10.19 - - Dans un repère orthonormal, on considère les points : A(2 ;0 ;0), B(0 ;3 ;0) et C(0 ;0 ;4). Soit M un point quelconque de coordonnées (x,y,z).
a) Calculer les coordonnées des points M tels que $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
b) Calculer les coordonnées des points N tels que $\overrightarrow{ON}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Démontrer alors que $\overrightarrow{ON}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

10.20 - - On donne dans l'espace un segment [AB] de longueur a et une demi-droite [Ax) perpendiculaire à [AB]. Soit [By) une demi-droite perpendiculaire au plan (BAx). On prend sur [Ax) une longueur AM = x et sur [By) une longueur BN = y.
a) On désigne par P le projeté orthogonal de M sur la parallèle à [Ax) menée par B. Calculez les côtés du triangle MNP en fonction de x, y, a et établissez la relation qui doit relier x et y pour que l'on ait MN = x + y. On suppose dans tout ce qui suit que cette relation est vérifiée.
b) Démontrez que le volume du tétraèdre ABMN est constant.
c) Soit O le milieu de [AB], H le projeté orthogonal de O sur (MN). En évaluant la différence OM^2-ON^2, montrez que l'on a HM = x et HN = y. Calculez la longueur OH.

Chapitre XI : TRANSFORMATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE

Translations du plan

11.1- - Quelles sont les droites globalement invariantes par une translation de vecteur $\vec{u}$?

11.2 - - **Corrigé** - Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation 3x+y-14=0. Trouvez une équation de l'image D'' de D dans la translation de vecteur $\vec{v}$ (-5,1).

11.3 - - Quelle est la nature de la transformation définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{4} + x \\ y' = y + \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Quelle est l'image O' de O par cette transformation ?
b) Quelle est l'image A' de A(1,2) par cette transformation ?
c) Quelle est l'image B' de B(0,4) par cette transformation ?
d) Quelle est l'image G' de G centre de gravité du triangle (OAB) par cette transformation ?
e) Faire un schéma.

Symétries

11.4 - - **Corrigé** - Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation 3x+y-14=0.Trouvez une équation de l'image D' de D dans la symétrie par rapport au point K(3;1).

11.5 - - On donne les points : A (3 ; 7), B (1 ; 5), C (9 ; 1).
a) Calculez AB, CA, BC.
b) Démontrez que ABC est un triangle rectangle.
c) Soit A' le symétrique de A par rapport au milieu I de [BC]. Calculez les coordonnées de A'.
d) Prouvez que A' et C sont symétriques par rapport à la droite parallèle à AC passant par I.
e) Précisez la nature de ABA'C.

Rotations

11.6 - - Soit A et B deux points avec AB = 6cm. Un point O est tel que la rotation de centre O, d'angle 120° transforme A en B. Construire O et calculer sa distance à la droite (AB).

11.7 - - **Corrigé** - Soit un triangle isocèle ABC tel que AB = AC. Déterminer la rotation r qui transforme A en C et B en A.

11.8 - - Soit A et B deux points du plan et les points A' et B' tels que : AB = A'B' et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$
Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en A' et B en B'.

Homothéties planes

11.9- - Quelles sont les droites globalement invariantes par une homothétie de centre O et de rapport k.

11.10 - - **Corrigé** - Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation 3x+y-14=0. Trouvez une équation de l'image D''' de D dans l'homothétie de centre H (6 ; 0) et de rapport 2.

11.11 - - On considère dans un plan muni d'un repère orthonormé l'homothétie h de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ avec Ω (- 1 ; 3).

a) Déterminer analytiquement h.
b) Trouver l'image du point A (0 ; 2) et l'antécédent du point B (- 1 ; 1).
c) Trouver l'image de la droite d'équation : $-2x + 3y + 5 = 0$.

11.12 - - **Corrigé** - Dans le plan muni d'un repère orthonormé soit :

f : M (x ; y) —> M' (x' ; y') où : $\begin{cases} x' = -3x + 5 \\ y' = -3y + 4 \end{cases}$

Trouver le centre et le rapport de l'homothétie définie par f.

11.13 - - Traduire par une égalité vectorielle :
a) N est l'image de M dans l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
b) Le point Q a pour image R dans l'homothétie de centre O et de rapport - 3.
c) L'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{5}{2}$ transforme B en C.

Homothéties planes

11.14 - - Soit ABCD un parallélogramme non aplati.
a) Existe-t-il une homothétie transformant A en C et B en D ?
b) Existe-t-il une homothétie transformant A en B et C en D ? Justifier la réponse.

11.15 - - Soit un triangle ABC, A'B'C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].
a) Déterminer le rapport et le centre de l'homothétie qui transforme B en C' et C en B'.
b) Déterminer le rapport et le centre de l'homothétie qui transforme C' en B et B' en C.
c) Déterminer le rapport et le centre de l'homothétie qui transforme A' en A, B' en B, C' en C.

Propriétés des transformations

11.16 - - **Corrigé** - Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Soit G le barycentre des points pondérés (I ;2), (J ;1). Les droites (AG) et (BC) se coupent en H. Démontrer que H est le barycentre des points pondérés (B ;2),(C ;1).

11.17 - - Soit un triangle ABC. Soient A', B', C' les milieux de [BC], [CA] et [AB]. J, K, L sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C, et D, D', D'' les médiatrices respectives de [BC], [CA], [AB].
G est le centre de gravité, H l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit (Γ) à ABC.
a) Soit l'homothétie h, de centre G et de rapport (-1/2). Quelle est l'image des hauteurs (AJ), (BK), (CL) ? Quelle est l'image de H ? En déduire que O, G, H sont alignés. Quelle relation lie $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{GH}$?
b) Quelle est l'image de (Γ) par h. On appellera (Γ') ce cercle dont on déterminera le centre et le rayon. Montrer que A', B', C' appartiennent à (Γ').

11.18 - - Soit S la symétrie de centre A (-2 ; 3), H l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{2}{3}$, et T la translation de vecteur (1 ; 4).
a) Définir analytiquement SoT et ToS. Dans chaque cas déterminer la transformation obtenue.
b) Définir analytiquement HoT et ToH. Dans chaque cas déterminer la transformation obtenue.
c) Pouvez vous retrouver géométriquement les résultats des questions précédentes ?

Partie C : CORRIGES

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

1.3
a) Tout mettre au même dénominateur et résoudre le trinôme du second degré correspondant au numérateur.
b)c) Poser $X=x^2$ et se ramener à une équation du second degré.
d) Mettre x en facteur.
e) $X=-1$ est une racine évidente, mettre $(x+1)$ en facteur.
f) $2-x-x^2=-2$ ou $2-x+x^2=2$

1.5
Faire un tableau de signe pour étudier le signe du numérateur et du dénominateur. L'ensemble des solutions de l'inéquation est :
S= $\left]-\infty;-3\right[\cup\left[\frac{-13}{5};-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

1.7
$E(x)=(x-1)^2(x+2)$ du signe de $(x+2)$.
On a aussi : a = - 3 et b =2.
D'où $E(x)>0$ équivaut à $x>-2$ et $x\neq -1$.

1.10
a) Soient x et y l'âge des deux amis. On a : $x+y=53$ et $(x+5)(y+5)=990$. Il faut ensuite résoudre l'équation du second degré en y et $x=53-y$.
b) On peut mettre le problème en équation :
$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=509$ d'où : S={12 ;13 ;14}
c) On peut mettre le problème en équation et la résoudre:
$x(x+1)(x+2)= x+(x+1)+(x+2)$
$x=1$ est racine évidente, $x=-1$ et $x=-3$ sont les deux autres racines d'où :
S1={-3 ;-2 ;-1},S2={-1 ;0,1} et S3={1,2,3}

Chapitre II : FONCTIONS NUMERIQUES

2.1
a) f paire
b) e) c) f impaire
d) ni paire, ni impaire, ni périodique
f) période 2π

2.5
a) f(x) = (2-x)-(-x-1)-(-2x+1) sur $\left]-\infty;-1\right[$
f(x) = (2-x)-(x+1)-(-2x+1) sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right[$
f(x) = (2-x)-(x+1)-(2x-1) sur $\left[\frac{1}{2};2\right[$
f(x) = (-2+x)-(x+1)-(2x-1) sur $[2;+\infty[$
b)c) Variations de fonctions affines.
d) Voir représentation graphique.

2.8
$A(x)=9x^2+6x+1-2x+3x(x^2+4x+4)+2x-2$
$A(x)=9x^2+6x+1-2x+3x^3+12x^2+12x+2x-2$
$A(x)=3x^3+9x^2+12x^2+6x-2x+12x+2x-2+1$
A est un polynôme de degré 3.
$A(x) = 3x^3 + 21x^2 + 18x - 1$.

2.10
a) $(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2+2\sqrt{x})$
$= (x^2+2\sqrt{x})+1 = h(x)$
donc $Dh = R^+$
b) $(gof)(x) = g[f(x)] = g(x+1)$
$= (x+1)^2+2\sqrt{(x+1)}$
$= x^2+2x+1+2\sqrt{x+1}$
$= i(x)$ donc $Di = [-1;+\infty[$

2.12 $f(x)=\frac{a(x^2-x+1)+b}{(x^2-x+1)} = \frac{a\,x^2-ax+(a+b)}{(x^2-x+1)}$
En identifiant à f(x), on obtient :
a = 1 et b = - 2.

Chapitre III : LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

3.2

a) Mettre $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = \infty$.

b) Mettre $\frac{x^2}{x^2}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = 3$.

c) Mettre $\frac{x}{x}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

d) Mettre $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.5

a) Mettre $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ en facteur d'où $\lim_{0} f = 0$.

b) $\lim_{0^\pm} f = \pm\infty$ car $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

c) Mettre $\frac{x}{x}$ en facteur d'où $\lim_{0} f = 0$.

d) $\lim_{2^\pm} f = +\infty$ car $\lim_{2^\pm} \frac{1}{x-2} = \pm\infty$

3.9

a) $\lim_{+\infty} f = 0$.

b) Mettre $\frac{x}{x}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = 0$.

c) Mettre $\frac{x^2}{x^2}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = 1$.

d) Mettre $\frac{x^2}{x^2}$ en facteur d'où $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

3.12

a) x = 1 asymptote verticale car

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

b) x = -1 asymptote verticale car

$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

c) x = 1 et x = -5 asymptotes verticales car

$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to -5^\pm} f(x) = \pm\infty$.

d) Pas d'asymptote verticale, f est une fonction polynôme**.**

Chapitre IV : DERIVATION ET APPLICATIONS

4.1 a) f '(3) = $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6$

4.4

f(3+h) = (3+h)²=f(3)+f'(3)h pour h proche de 0.
f(3,002)=f(3+0,002)=9+0,012=9,012

4.5 a) f(x)= $\sqrt{x+1}$ et $x_0 = 4$

L'équation de la tangente est :

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x- x_0)$

$= \sqrt{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}(x-4)$

Car f '(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

4.8 Il faut trouver les valeurs de x telles que f '(x) = 0

a) $f'(x) = -2x + 4$.

Si $f'(x) = 0$ alors $x = 2$ et c'est un maximum

b) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$.

Si $f'(x) = 0$ alors $\begin{cases} x = -1 : \text{c'est un minimum} \\ x = 1 : \text{c'est un minimum} \end{cases}$

c) $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-4)^2}$.

Si $f'(x) = 0$ alors $x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Or $x \in I$, donc $x = \frac{5}{2}$ et c'est un minimum.

4.11 f '(x) =sin (2x)

g '(x) = 2 sin (x) cos(x) = sin(2x) d'après les formules de trigonométrie

h' (x) = 2 sin (x) cos(x) = sin(2x)

f(0)=-1/2, g(0)=0 et h(0)= -1

Les fonctions f, g et h ne sont pas égales et pourtant ont même dérivée.

4.13

c) On a : $f(x) = \frac{2x+5}{x+4}$

1) Df=R-$\{-4\}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$

3) $f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 2x + 5; u'(x) = 2$

$v(x) = x + 4 ; v'(x) = 1$

donc $f'(x) = \frac{3}{(x+4)^2}$

4)

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
f '(x)	+	||	+
f(x)	2 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 2

Chapitre V : SUITES NUMERIQUES

5.4 a) $u_n = 2n^2 + 1$
$u_{n-1} = 2n^2 - 4n + 3$
$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 3$
$u_{2n-2} = 8n^2 - 16n + 9$
$u_{2n+3} = 8n^2 + 24n + 19$

5.6 a) $u_{n+1} - u_n = 1 + 2(-1)^{n+1}$
On a donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ si n impair
$u_{n+1} - u_n < 0$ si n pair
La suite (u_n) est donc ni croissante, ni décroissante, ni constante.

b) Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

c) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

d) Utiliser le fait que $u_{n+1} - u_n = n^2$

5.8 a) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, …., $u_5 = \frac{1}{6}$.

b) $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$,….., $v_5 = 6$.

c) v_n est arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison r = 1.

$v_n = v_0 + nr = 1 + n$ d'où $u_n = \frac{1}{1+n}$.

5.14

a) $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + (0,3)^n$. (u_n) est donc la somme de deux suites géométriques de raison strictement inférieures à 1.Ces deux suites géométriques convergent donc vers 0. (u_n) converge vers la somme de ces deux limites donc vers 0.

5.18 c) Si on pose $u_n = \frac{1}{(10)^n}$, $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_7$ avec (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_o = 1$ et de raison $q = \frac{1}{10}$.

D'où : $S = \frac{(1-q^8)}{(1-q)}$

Chapitre VI : STATISTIQUES ET PROBABILITES

6.2 Elève 1 : moy. = 9,78 ; var = 7,95 ; $\sigma = 2,82$

Elève 2 : moy. = 10,22; var = 5,73; $\sigma = 2,39$

L'élève 2 est le plus régulier car son écart-type est le plus petit (indice qui mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne).

6.4 On place les valeurs en ordre croissant.
Effectif total N =12.
N/4=3 donc $Q_1 = 4$.
3N/4=9 donc $Q_3 = 23$

$Me = \frac{10+18}{2} = 14$.

6.10 a) Il y a 8 carreaux dans le jeu de 32 cartes, donc $P1 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

b) Il y a 4 valets dans le jeu de 32 cartes, donc $P2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

c) Il y a un seul valet de carreau dans le jeu de 32 cartes. Donc $P = \frac{1}{32}$ = P1 x P2.

6.15

a) X= -1, X=1, X=2 et X= 4.

b) $P(X=-1)=\frac{9}{19}$, $P(X=1)=\frac{6}{19}$,

$P(X=2)=\frac{3}{19}$, $P(X=4)=\frac{1}{19}$.

c) $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(X=x_i)=\frac{7}{19}$

E(X) correspond à l'espérance de gain : ici, le jeu est donc favorable au joueur.

Chapitre VII : VECTEURS ET BARYCENTRES

7.1

a) $\vec{AB}+\vec{CD}=2\,\vec{EF}$.

b) $\vec{BC}+\vec{DA}=2\,\vec{FE}$.

c) $\vec{u}=\vec{0}$ si x = y.

7.6 La relation de Chasles nous donne :

a) $-3\,\vec{AB}+4\,\vec{AC}=\vec{0}$.

b) $\vec{BA}+4\,\vec{BC}=\vec{0}$.

c) $\vec{CA}+3\,\vec{CB}=\vec{0}$.

On en déduit les coefficients.

7.7 Il faut mettre les équations sous la forme :

$\vec{AM}=a\,\vec{AB}+b\,\vec{AC}$

a) $2\,\vec{MA}+3\,\vec{MB}+\vec{MC}=\bar{0}$

donc $\vec{AM}=\frac{1}{6}(3\,\vec{AB}+\vec{AC})$

b) $2\,\vec{MA}-3\,\vec{MB}+2\,\vec{MC}=\vec{O}$

donc $\vec{AM}=2\,\vec{AC}-3\,\vec{AB}$

7.9 b) D'après les propriétés du centre de gravité d'un triangle, on a : $\vec{GA}=-2\,\vec{GI}$.

H est tel que : $\vec{GH}=2\,\vec{GI}$ d'où :

$\vec{GA}=-\vec{GH}$. G est donc milieu de [HA].

c) I est milieu de [HG] et [BC] donc HBGC est un parallélogramme d'où :

$\vec{HG}=\vec{HB}+\vec{HC}$.

d) On a : $\vec{HA}=2\,\vec{HG}=2(\vec{HB}+\vec{HC})$ d'où H barycentre de ((A,1),(B,-2)(C,-2)).

7.10 On sait que si G est barycentre de (A,a),(B,b),(C,c) et (D,d) alors

$a\,\vec{GA}+b\,\vec{GB}+c\,\vec{GC}+d\,\vec{GD}=\vec{O}$

Ainsi, on trouve $\vec{AG}=\frac{1}{8}\left[2\,\vec{AC}-\vec{AB}+5\,\vec{AD}\right]$

7.14 $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$; $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$.

$x_G=\frac{4}{3}$ et $y_G=-\frac{5}{3}$.

Chapitre VIII : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

8.1

a) $(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2=$

$(\sin(x))^2+(\cos(x))^2+2\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)$

$+(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=2$

b) $\sin^4(x)+\cos^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)=(\sin^2(x)+\cos^2(x))^2$

$=(1)^2=1$

c) $\sin^4(x)-\cos^4(x)+2\cos^2(x)=(\sin^2(x))^2-\cos^4(x)$

$+2\cos^2(x)=(1-\cos^2(x))^2-\cos^4(x)+2\cos^2(x)=1$

8.6 A l'aide du cercle trigonométrique, on arrive facilement à :

a) A = cos (θ) - sin (θ)

b) B = 2cos (θ)

8.10

$(\vec{u},-\vec{v})=\frac{5\pi}{4}$; $(\vec{w},\vec{v})=\frac{7\pi}{12}$

$(-3\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{4}$; $(2\vec{w},-\vec{v})=\frac{19\pi}{12}$

$(5\vec{v},-\vec{v})=\pi$; $(\vec{u},-\vec{w})=\frac{2\pi}{3}$

8.13

a) r = 3 ; $\theta=\frac{\pi}{2}$ b) r = 6 ; $\theta=0$

c) r = $2\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$ d) r = $5\sqrt{2}$; $\theta=\frac{5\pi}{4}$

9.2
(AC) est perpendiculaire à (BD) donc

$\vec{AC}.\vec{BD} = 0$

donc $(\vec{AD}+\vec{DC}).(\vec{BD}) = \vec{AD}.\vec{BD}+\vec{DC}.\vec{BD} = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC}+\vec{AD}.\vec{CD}+\vec{DC}.\vec{BA}+\vec{DC}.\vec{AD} = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC}+\vec{CD}.\vec{AB}+\vec{AD}(\vec{CD}+\vec{DC}) = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC}+\vec{CD}.\vec{AB} = 0$

9.7
$\vec{AB}.\vec{AC} = \overline{AB}\times\overline{AH} = 2$ .H étant le projeté de C sur (AB).
Pour calculer un produit scalaire, on a souvent intérêt à se ramener à des vecteurs de même origine :

$\vec{AB}.\vec{BC} = -\vec{BA}.\vec{BC} = -2$

$\vec{CA}+\vec{CB} = 2\vec{CH}$

car le triangle est isocèle donc : $\vec{AB}.(\vec{CA}+\vec{CB})=2\vec{AB}.\vec{CH}=0$ car (AB) est perpendiculaire à (CH). Pour les calculs d'angles, on peut utiliser les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle d'où :

$\cos(\hat{A}) = \cos(\hat{B}) = \frac{1}{4}$.

Soit $\hat{A} = \hat{B} = 75{,}5°$ et $\hat{C} = 29°$.

9.8
Equation d'un cercle :

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = R^2$ où :

A est le centre du cercle

R le rayon du cercle.

a) $(x-1)^2+(y+1)^2 = R^2$:(C)

Or,$B\in(\ell)$ donc $R^2 = 17$

donc $(x-1)^2+(y+1)^2 = 17$:(C)

b) $(x+2)^2+(y-1)^2 = 16$:(C)

c) $[AB]$ est un diamètre.

Déterminons le centre et le rayon du cercle.

Soit 0 centre du cercle : $\begin{cases} x_0 = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5}{2} \\ y_0 = \frac{y_A+y_B}{2} = 0 \end{cases}$;

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ donc AB=5 donc R=2,5

Ainsi (C):$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2 = \frac{25}{4}$

9.13
a) A(4;-1), B(3 ;2) et C(-2 ;1). Soit le point M de coordonnées (x, y).

$3\vec{MA}+\vec{MB}$ = 3 (4-x ,-1-y) + (3-x , 2-y)
= (12- 3x + 3-x , -3 - 3y + 2 - y)

d'où : $3\vec{MA}+\vec{MB}$ = (15 - 4x ; -1 - 4y)

$\vec{MA}+3\vec{MC}$ = (4 - x ; -1 - y) + 3 (-2-x ;1-y)
= (4-x - 6 - 3x ; - 1- y+ 3- 3y)

d'où : $\vec{MA}+3\vec{MC}$ = (-2- 4x ; 2- 4y)

b) $\|3\vec{MA}+\vec{MB}\| = \|\vec{MA}+3\vec{MC}\|$

équivaut à :
$(15-4x)^2+(-1-4y)^2=(-2-4x)^2+(2-4y)^2$
$(15-4x)^2+(1+4y)^2=(2+4x)^2+4(1-2y)^2$
$225-120x+16x^2+1+8y+16y^2$
$= 4+16x+16x^2+4-16y+16y^2$
$218-136x+24y=0$

$\boxed{24y = 136x-218}$

c) L'ensemble est une droite.

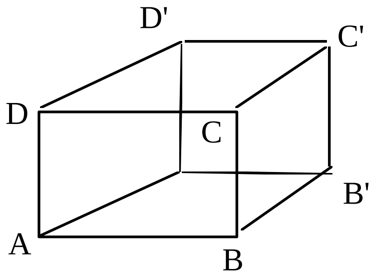
Chapitre X : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

10.3

a) (MAB) et (MAC) sont deux plans distincts. Ils ont deux points M et A en commun. Leur intersection est donc la droite (MA).

b) La droite (IJ) est dans (MIJ) et (BC) est dans (MBC). (IJ) est parallèle à (BC) donc l'intersection de (MIJ) et (MBC) est la parallèle à (BC) passant par M.

10.5



AB' diagonale de la face (AA' BB')
BC' diagonale de la face (BB' C'C)
AC diagonale de la face (ABCD)
Les diagonales dans un cube ont même longueur donc AB'C est équilatéral.

10.9

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires, alors D appartient au plan(ABC).

Déterminons le plan (ABC)

(P) : $x + by + cz + d = 0$.

Or, $A \in (P)$, $B \in (P)$ et $C \in (P)$

Donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1+2k+3c+d=0 \\ 4+5k+6c+d=0 \\ -1+2k-3c+d=0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} k=-2 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$$

Donc(P) : $x - 2y + z = 0$

$D \in (P)$ donc a=2k donc D(2k,k,0)$k \in \mathbb{R}$.

10.12

a) oui b) non c) non d) oui e) oui

10.16

$\overrightarrow{AB}$ a comme coordonnées (3,-2,-5).

$\overrightarrow{AC}$ a comme coordonnées (2,2,-2).

$\overrightarrow{BC}$ a comme coordonnées (-1,4,3).

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$

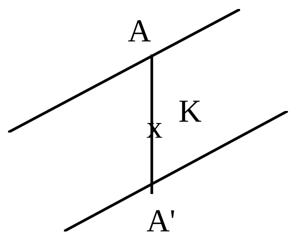
$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ =-2+8-6=0 donc le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

Chapitre XI : TRANSFORMATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE

11.4 (a) 11.2(b) 11.10(c)

a) Symétrie par rapport à K.



Si M(x,y) appartient à (D)

et M' (X,Y) appartient à (D')

alors $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KM'}$

donc $\begin{pmatrix} 3\text{-}x \\ 1\text{-}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-3 \\ Y-1 \end{pmatrix}$. Ainsi on trouve :

$$\begin{cases} x=6\text{-}X \\ y=2\text{-}Y \end{cases}$$

Ainsi,(D') : $3(6-X)+(2-Y)-14=0$

$18-3X+2-Y-14=0$

(D') : $3X+Y-6=0$

b) Tous les points de (D) sont translatés du vecteur $\vec{v}$.

Donc (D'') : $3X+Y=0$

c) $\overrightarrow{HM'''} = 2\overrightarrow{HM}$

donc $\begin{cases} X - 6 = 2(x-6) \\ Y - 0 = 2(y-0) \end{cases}$

Ainsi on obtient : (D''') : y = - 3x+10

11.7

La rotation qui transforme :
A en C et B en A a :
- pour centre, le centre du cercle circonscrit
- pour angle de rotation :

x = $C\hat{B}A = A\hat{C}B$

11.12

•Recherche du point invariant

$\begin{cases} x = -3x + 5 \\ y = -3y + 4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4x = 5 \\ 4y = 4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = 1 \end{cases}$

•Recherche du rapport d'homothétie

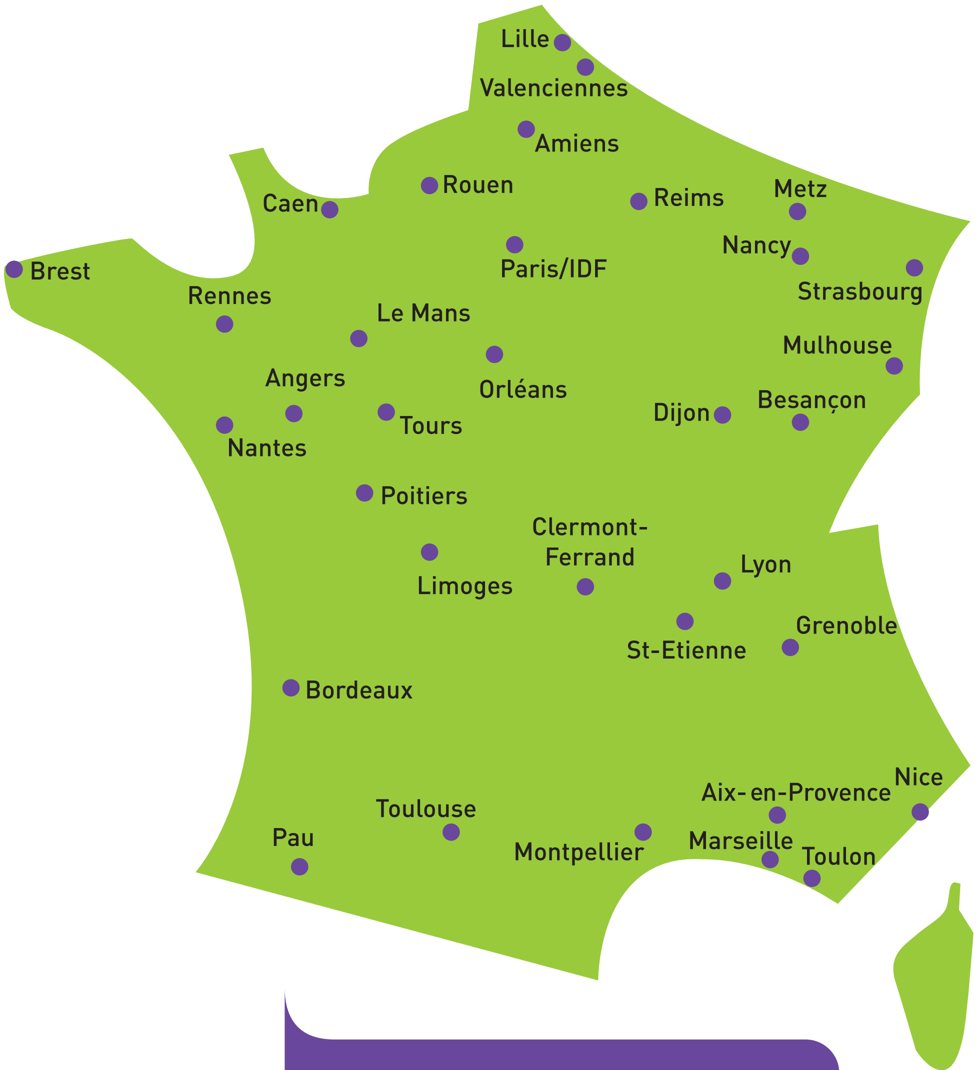
$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ donc k = -3

11.16

L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme I en B, J en C et G en H. En effet, l'image de G est sur (AH) par définition et aussi sur la droite (BC) l'image de la droite (IJ). L'homothétie conserve les barycentres donc H est le barycentre de (B,2) et (C,1).

complétude
soutien scolaire

donner envie d'apprendre



Cours particuliers
Stages en petits groupes

0 810 13 14 15
(prix appel local)

www.completude.com