Collection le Point

Fidèle C. Atchègbê
Economiste-Gestionnaire
Professeur de Mathématiques
Cel : (229) 64 12 93 40 / 97 69 37 67
E-mail : mathslepoint@yahoo.fr

de F. C. Atchègbê LE POINT MATHEMATIQUES

MATHEMATIQUES
LE POINT

RESUME DE COURS EXERCICES ET SUJETS CORRIGI

Terminales: A_1 - A_2 - B

Nouvelle Edition
2017

Collection le Point

Fidèle C. Atchègbê

Professeur de Mathématiques
Cel : (229) 64 12 93 40 / 97 69 37 67
E-mail : mathslepoint@yahoo.fr

MATHEMATIQUES

LE POINT

RESUME DE COURS EXERCICES ET SUJETS CORRIGES

Terminales : A_1 - A_2 - B

Edition 2017

Avant - Propos

L'un des problèmes que rencontrent nos apprenants des classes de **Terminale A_1 ; A_2 et B** en mathématiques est la quasi inexistence d'un document spécifiquement adapté aux Nouveaux Programmes d'Etude.

Nous avons voulu combler ce vide en écrivant **Mathématiques « LE POINT » Terminale A_1 - A_2 et B.**

Ce document comporte :

- le résumé de chaque situation d'apprentissage à travers les différentes séquences ;
- des exercices sur chaque séquence
- des sujets de BAC et d'examens blancs départementaux
- les corrigés des différents exercices et sujets.

Il n'est exclusivement pas réservé aux apprenants des classes de **Terminale A_1 - A_2 et B** car son utilité dépend de son utilisateur.

Toutefois, il ne doit pas se substituer aux cours dispensés par les professeurs de Mathématiques.

Il doit uniquement servir de guide d'application, donc un outil d'approfondissement.

Telle est notre modeste contribution au relèvement du taux de succès au Baccalauréat des séries **A_1 - A_2 et B.**

Nous espérons que cet ouvrage sera pour nos collègues et pour leurs apprenants un outil de travail utile et agréable.

Toute critique constructive serait la bienvenue pour son amélioration.

L'auteur.

SOMMAIRE

REVISION :

EQUATIONS INEQUATIONS SYSTEME

- ✓ *Equations*
- ✓ *Inéquations*
- ✓ *Système*

I- EQUATION ET INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE :

A- Equation du premier degré dans $\mathbb{R}$

On appelle équation du 1[er] degré à une inconnue réelle, toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax + b = 0$; a et b sous des réels et x l'inconnue.

Résolution de $ax + b = 0$

Pour résoudre l'équation $ax + b = 0$ trois cas sont à envisager

1[er] cas : a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$$ax = -b \implies x = -\frac{b}{a}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

2[ème] cas : $a = 0$ et $b = 0$

$$ax = b \iff 0x = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

3[ème] cas : $a = 0$ et $b \neq 0$

$$ax = b \iff 0x = b$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

Etude de signe de $ax + b$

a et b $\in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$

$ax + b = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b}{a}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$
$ax + b$	*Signe de* $-(a)$ $\quad$ 0 $\quad$ *signe de a*

B- Inéquation du 1er degré à une inconnue.

On appelle inéquation du 1er degré à une inconnue, toute inéquation pouvant se mettre sous la forme $ax < b$; $ax \leq b$; $ax > b$ ou $ax \geq b$; *a et b* étant des réels et x l'inconnue.

II- EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

A. Equation du second degré dans IR

1. Définition

Une équation du second degré à une inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$; où a, b, c sont des réels donnés et a≠0.

Exemple : $-2x^2 - 6x + 1 = 0$; $3x^2 - 7 = 0$; $x^2 - 5x = 0$

2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a, b, c ∈ IR (a≠ 0)

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du nombre $b^2 - 4ac$, qui, en raison de son importance, a été appelé discriminant de l'équation (ou du trinôme $ax^2 + bx + c$).

Il est noté Δ, lettre grecque majuscule lue « delta ». Nous admettrons ici les résultats suivants.

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a, b, c ∈ IR (a≠ 0) $\Delta = b^2 - 4ac$	
Lorsque $\Delta < 0$	L'équation n'a pas de solution
Lorsque $\Delta = 0$	L'équation a une solution (dite racine double) $x_0 = \frac{-b}{2a}$
Lorsque $\Delta > 0$	L'équation a deux solutions distinctes. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque : Lorsque a et c sont de signes contraires, on peut affirmer sans calcul que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, deux solutions distinctes : en effet, dans ce cas le nombre **ac** est strictement négatif donc – **ac** strictement positif, $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif.

Exemples de résolution d'une équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

a, b, c ∈ IR (a≠ 0).

Méthode :

1- Ecrire d'abord l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$
2- Calculer le discriminant Δ ; $\Delta = b^2 - 4ac$
3- Selon le signe de Δ, conclure en utilisant les résultats du tableau précédent.

Résolvons ainsi les trois équations suivantes :

$2x^2 = x - 1$

1. $2x^2 - x + 1 = 0$

$a=2$; $b = -1$; $c = 1$

2. Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(2)(1)$

= 1-8

Δ= -7

3. Δ est strictement négatif, donc l'équation n'a pas de solution

S = $\emptyset$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

1- L'équation est déjà écrite sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

a = 4 ; b = -12 et c =9

2- Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-12)^2 - 4(4)(9)$

= 144 – 144

$\Delta = 0$

3- Δ est égale à zéro donc l'équation a une solution et une seule $x_0 = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

S = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$4x^2 - 5 = -8x$

1- Ecrivons l'équation sous la forme

$4x^2 + 8x - 5 = 0$

$a = 4$; $b = 8$; $c = -5$

2- Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4(4)(9)$

= 144

3- Δ est strictement positif, donc l'équation a deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-12}{8} = -\frac{5}{2} x_2$

$= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-8+12}{8} = \frac{1}{2}$

S = $\left\{-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$

Factorisations d'un trinôme du second degré.

Vous savez qu'un trinôme f écrit sous la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ a deux racines x_1 et x_2, en effet, l'équation $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ a pour solution x_1 et x_2.

La réciproque est vraie, nous l'admettons ici.

Considérons le trinôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$

- Lorsque le trinôme a deux racines x_1 et x_2 , alors pour tout réel x,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Lorsque ce trinôme a une racine x_0, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$

Exemple : Considérons le trinôme $f(x) = 4x^2 + 8x - 5$

Nous avons vu que l'équation $4x^2 + 8x - 5 = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-5}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$;

donc pour tout réels x. $f(x) = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

B. Inéquation du second degré dans IR

1. Etude de signe d'un polynôme de second degré

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c ∈ IR (a≠ o) et Δ son discriminant.

On note x_1 et x_2 les racines éventuelles $(x_1 \leq x_2)$.

- **Cas où $\Delta > 0$; $f(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2.**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

- **Cas où $\Delta = 0$, $f(x)$ a une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$**

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

- **Cas où $\Delta < 0$; $f(x)$ n'a pas de racine**

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	

Exemple : Etudions le signe de $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$ et $h(x) = 4x^2 + 8x - 5$

- $f(x) = 2x^2 - x + 1$

Posons $2x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = -7$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

$\forall x \in \left]-\infty ; +\infty\right[; f(x) > 0$

EXERCICES

1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$(E_1) : (x+1)(-x-4) = 0$; $(E_2) : \frac{2x+3}{-x+1} = 0$; $(E_3) : \frac{2x+3}{2+x} = \frac{-1}{2}$; $(E_4) : \frac{-x}{3-2x} = -1$

$(E_5) : (3x+2) - (2x+1) = (x+1) - 1$; $(E_6) : \frac{1}{2}(2x+3) - (-x+4) = 0$

$(E_7) : (-5x+3) + (-x+1) - x = (-3x+2) - (4x-2)$; $(E_8) : \frac{1}{3x} + 4 = -\frac{1}{x} + 1$

2

Etudier dans un tableau le signe de chacune des fonctions ci-après :

$f(x) = 4 - 3x$, $g(x) = 2x + 3$;

$h(x) = -x - 1$ $j(x) = \frac{1}{2}x + 3$

$k(x) = -\frac{3}{4}x - 1$ $p(x) = -2x + 5$

3

Résous dans IR les équations suivantes :

1. $-x^2 + 3x = 0$
2. $x^2 + x + 1 = 0$
3. $5x^2 + 3 = 0$
4. $4x^2 = 7$
5. $21x + 3x^2 - 7 = 0$
6. $\frac{x^2}{4} - 3x + \frac{1}{2} = 0$
7. $2(x-5)(-x+2) = 0$
8. $3x^2 = 8x + 1$

4

On considère :

$f(x) = 4x^2 + 8x - 5$; $f(x) = x^2 + x + 3$

$f(x) = 2x^2 - x + 1$;

Dans chacun des cas,

1. a) Résoudre dans IR $f(x) = 0$
   b) Factorise si possible $f(x)$
2. Discuter suivant les valeurs de x ; le signe de $f(x)$
3. Résoudre dans IR les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$

5

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : \frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$ $(I_1) : \frac{-x^2+x+6}{x-1} \geq 0$

$(E_2) : \frac{x^2-x+1}{x+2} = 2x + 3$ $(I_2) : \frac{x-1}{x+1} > 0$

$(E_3) : \frac{7x^2-3x-34}{x-1} = 0$ $(I_3) : \frac{5x^2-2x-3}{(x+1)(x-3)} < 0$

6

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	?	?	$+\infty$
-2x+1				
x+4				
(-2x+1)(x+4)				

2) En déduire l'ensemble des solutions des inéquations suivantes

$(-2x+1)(x+4) \geq 0$; $(-2x+1)(x+4) < 0$.

7

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	?	?	?	$+\infty$
$-x^2+3x+4$					
$-x+1$					
$\frac{-x^2+3x+4}{-x+1}$					

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-x^2+3x+4}{-x+1} \leq 0$ et $\frac{-x^2+3x+4}{-x+1} > 0$

8

On considère les fonctions polynômes suivantes :

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$; g(x) = $2x^2 + 3x + 1$ et $h(x) = x^2 - 4x + 4$

1) Etudier le signe de chacune des fonctions polynômes $f; geth$
2) Etudier le signe des fonctions définie par k(x) = $\frac{f(x)}{h(x)}$; $J(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$
3) Résoudre dans IR les inéquations $K(x) > 0$; $J(x) \geq 0$

9

Etudier le signe de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{-x^2+3x+4}{-x+2}$; $g(x) = \frac{-2x+3}{x+3}$; $h(x) = \frac{-4}{(x-3)^3}$;

$i(x) = \frac{-2x-1}{x^2+4}$; $j(x) = (-x-1)^3(x+1)$

10

Soit le polynôme P(x) = $x^3 - 3x + 2$

1) Calcule $P(1)$
2) Justifie que p(x) = (x-1)$(x^2 + x - 2)$.
3) Résous dans IR l'équation p(x)=0
4) Résous dans IR l'inéquation $p(x) \geq 0$

11

On considère le polynôme $h(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

1) Vérifie que 3 est une racine de $h(x)$
2) Détermine les réels a ; b et c tels que $h(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ $a \neq 0, a, b$ et c ∈IR
3) Résous dans IR l'équation $h(x) = 0$
4) Résous dans IR les inéquations $h(x) \geq 0$; $h(x) < 0$.

12

Soit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24$

1) Calcule $f(3)$
2) Détermine les réels a ; b et c tels que $f(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ $a \neq 0, a, b$ et c ∈IR.
3) a. Résous dans IR l'équation $f(x) = 0$
   b. Résous dans IR l'inéquation $f(x) \leq 0$.

13

1- Résoudre dans ℝ x ℝ les systèmes d'équation suivants par la méthode de substitution

$\begin{cases} 2x - 5 + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x - 2y + 1 = 0 \\ -x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$

2- Résoudre dans ℝ x ℝ les systèmes d'équation suivants par la méthode d'addition

$\begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ -4x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{3x}{2} - y = 12 \end{cases}$

14

1- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases}$$

2- Séna spécialiste dans la couture layette dispose d'un tissu de forme rectangulaire dont le demi-périmètre mesure 14 m et la largeur mesure les ¾ de la longueur

a) En désignant par x la longueur et par y la largeur du tissu, traduire ce problème en un système d'équation

b) En déduire x *et* y

c) Calculer l'aire du tissu

d) Combien d'uniformes de bébé Séna peut-elle coudre si elle doit disposer de 980 cm² de tissu pour confectionner un uniforme.

15

1- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équation suivant

$$\begin{cases} x + y = 1\,500\,000 \\ \frac{3}{2}x + 2y = 2\,550\,000 \end{cases}$$

2- Maman Afi se rend compte dans un supermarché que deux produits électroménagers A et B avaient coûté au total 1 500 000 en 2005. En 2013, elle constate que le prix du produit A a augmenté de moitié et celui du produit B a doublé. Ces deux produits sont revenus au total à 2 550 000F

En désignant par x le prix du produit A et par y celui du produit B en 2005

a- Traduis cet énoncé par un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

b- Calcule le prix de chaque produit en 2005 puis en 2013.

SEQUENCE 1 : FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

- ✓ *Domaine de définition*
- ✓ *Parité*
- ✓ *Eléments de symétrie*
- ✓ *Limites*
- ✓ *Dérivée*

1-1- GENERALITES :

1-1-1-Domaine de définition d'une fonction numérique

1-1-1-1-Définition

Soient E et F deux ensembles de nombres non vides. Soit f une fonction de E dans F.

On appelle domaine de définition de f l'ensemble des valeurs de E ayant une image dans F par f. on la note Df. **Df = { x ∈ E/ f(x) existe et {f(x)} ∈ F}**. x élément de l'ensemble de départ tel que f(x) appartienne à l'ensemble d'arrivée.

1-1-1-2-Recherche du domaine de définition de quelques types de fonctions

Soient f ; g deux fonctions polynômes et la fonction h définie de IR vers IR.

- Toute fonction polynôme est définie sur IR ; **IR =]-∞, +∞ [** ou sur une partie de IR.
- La fonction $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est définie pour l'ensemble des valeurs de x telles que g(x) soit différent de zéro (g(x) ≠ 0). **D$_h$ = {x ∈ IR/(g(x) ≠ 0}**.
- La fonction $h(x) = \sqrt{f(x)}$ est définie pour l'ensemble des réels x tel que f(x) soit supérieure ou égale à zéro (f(x) ≥ 0). **D$_h$ {x ∈ IR /f(x) ≥ 0}**.
- La fonction $h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ est définie pour l'ensemble des valeurs de x tel que g(x)soit strictement supérieure à zéro (g(x) > 0). **D$_h$ = {x ∈ IR / g(x) > 0}**.

- La fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ est définie pour l'ensemble des valeurs de x tel que f(x)soit supérieur ou égale à zéro et g(x) différent de zéro ($f(x) \geq 0$ et $g(x) \neq 0$)

$D_h = \{x \in IR / f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$

- La fonction $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ est défini pour l'ensemble des valeurs de x tel que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ soit supérieure ou égale à zéro $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right)$ et g(x) différent de zéro ($g(x) \neq 0$).

$D_h = \{x \in IR / \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$

Exercice résolu :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$H(x) = 2x^2 + 3x - 2$ $I(x) = \sqrt{3x+5}$

$J(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ $L(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$M(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x-1}$ $Q(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Solution

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$K(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$D_K = \{x \in IR / 2x^2 + 3x - 2 \text{ existe}\}$

La fonction K est une fonction polynôme ; alors son domaine de définition est IR

$D_K = IR$ $D_K =]-\infty ; +\infty[$

$I(x) = \sqrt{3x+5}$; la fonction I est sous la forme $\sqrt{f}$

$D_I = \{x \in IR / 3x + 5 \geq 0\}$

Posons $3x + 5 \geq 0$ équivaut à

$3x \geq -5 \Rightarrow x \geq \dfrac{-5}{3}$ $D_I = \left[\dfrac{-5}{3} ; +\infty\right[$

$J(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; la fonction J est sous la forme $\dfrac{f}{g}$

$D_J = \{x \in IR / x^2 - 2x + 1 \neq 0\}$

Posons $x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) \neq 0$ $x \neq 1$

$D_J =]-\infty ; 1[\cup]1 + \infty[$

$L(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ la fonction L est sous la forme $\sqrt{\dfrac{f}{g}}$

$D_L = \{x \in IR / \dfrac{x-1}{x+2} \geq 0 \text{ et } x + 2 \neq 0\}$

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Posons $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x + 2 \neq 0$ équivaut à $\Rightarrow x \neq -2$

$x \in IR \backslash \{-2\}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty ; -2[\cup [1 ; +\infty[$

$D_L =]-\infty ; -2[\cup [1 ; +\infty[$

$M(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x-1}$ la fonction M est sous la forme $\frac{\sqrt{f}}{g}$

$D_M = \{x \in IR \,/\, 3x - 2 \geq 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\}$

Posons $3x - 2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2$ soit $x \geq \frac{2}{3}$

$3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \in IR \setminus \{1\}$

$D_M = \left[\frac{2}{3}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$

$Q(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-9}}$ la fonction Q est sous la forme $\frac{f}{\sqrt{g}}$

$D_Q = \{x \in IR \,/\, x^2 - 9 > 0\}$

Posons $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0$; $x + 3 = 0$ soit $x = -3$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x + 3		-	0	+		+	
x - 3		-		-		+	
$x^2 - 9$		+	0	-	0	+	

$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

$D_Q = \left]-\infty; -3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

1-1-2-paritè

1-1-2-1-Fonction paire

Soit f une fonction définie sur Df

f est dite paire si et seulement $\forall x \in Df$; $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$

1-1-2-2-Fonction impaire

Soit f une fonction définie sur Df.

f est dite impaire si et seulement si $\forall x \in Df$; $-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$

Exercice résolu

On considère les fonctions : $g(x) = -x^2 + 5$ et $f(x) = \frac{3}{x}$

Etudier la parité de g et de f

Résolution :

$g(x) = -x^2 + 5$

$Df = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ calculons ; $g(-x)$: $g(-x) = -(-x)^2 + 5$

$= -x^2 + 5$

$= g(x)$

g est une fonction paire. La droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f)

$f(x) = \frac{3}{x}$

$Df = \{x \in \mathbb{R}) x \neq 0\}$

$Df = \mathbb{R}^*$

$Df =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Si $x \in]-\infty, 0[$ $f(x) = \frac{-3}{x}$

Si $x \in]0, +\infty[$ $f(x) = \frac{3}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(-x) = \frac{-3}{x} = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

Remarque :

Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit de trouver un élément α de son ensemble de définition D_f tel que : $-\alpha \notin Df$ ou $f(-\alpha) \neq f(\alpha)$.

Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas impaire, il suffit de trouver un élément α de son ensemble de définition Df tel que :

$-\alpha \notin Df$ ou $f(-\alpha) \neq -f(\alpha)$.

1-1-3- Elément de symétrie.

1-1-3-1-Axe de symétrie

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit f une fonction et C_f sa représentation graphique.

Pour démontrer que la droite (D) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de Cf, on peut vérifier que pour tout nombre réel h tel que (a+h) ∈ Df on a : (a-h) ∈ Df et $f(a-h) = f(a+h)$ où Df est l'ensemble de définition de f

1-1-3-2-Centre de symétrie

Soit f une fonction et Cf sa représentation graphique.

Pour démontrer que le point Ω(a;b) est un centre de symétrie de (Cf), on peut vérifier que, pour tout nombre réel h tel que (a+h) ∈ Df on a : (a-h) ∈ Df et

$f(a+h) + f(a-h) = 2b$ où Df est l'ensemble de définition de f.

Exercice résolu :

On considère les fonctions :

$g(x) = -2x^2 + 4x + 3$ et $f(x) = x - 1 + \frac{5}{x-2}$

Prouve que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de Cg et que le point A(2 ;1) est un centre de symétrie de C_f.

Résolution

Prouvons que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (Cg)

g(x)=$-2x^2+4x+3$

Dg=$\{x \in \mathbb{R} | -2x^2 + 4x + 3 \text{ existe}\}$

Dg=$]-\infty, +\infty[$ car g est une fonction polynôme

Soit h$\in \mathbb{R}/1 + h \in Dg$

h$\in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + h \in \mathbb{R}$

h$\in \mathbb{R} \Leftrightarrow -h \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1 - h \in \mathbb{R}$ car Dg= ℝ.

g(1+h) = $-2(1+h)^2+4(1+h)+3$

$= -2h^2+5$

g(1-h) = $-2(1-h)^2+4(1-h)+3$

$= -2h^2+5$

$\forall h \in \mathbb{R}$; $(1+h) \in \mathbb{R}$; (1-h) ∈ ℝ et g(1-h)=g(1+h) d'où la droite (D) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f).

Prouvons que le point A(2,1) est un centre de symétrie de (C_f).

f(x)=$x - 1 + \frac{5}{x-2}$

D_f=$\{x \in \mathbb{R} | x - 2 \neq 0\}$

posons $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

Soit h ∈ ℝ /2+h ∈ Df.

2+ h ∈ Df ⇒ 2+ h ∈ ℝ∖{2}

⇒ 2+h≠ 2

⇒h≠0

Aussi 2-h≠ 2 ⇒ $2 - h \in Df$

$$f(2+h) = 2+h-1+\frac{5}{2+h-2}$$

$$f(2+h) = 1+h+\frac{5}{h}$$

$$f(2-h) = 2-h-1+\frac{5}{2-h-2}$$

$$= 1-h-\frac{5}{h}$$

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{1+h+\frac{5}{h}+1-h-\frac{5}{h}}{2} = 1$$

D'où A(2 ;1) est un centre de symétrie

1-2- LIMITE.

1-2-1-Limite finie en un point d'abscisse x_0

Considérons une fonction numérique f dont le domaine de définition est D_f

Soit x_0 et l deux réels donnés.

f admet l comme limite en x_0 si et seulement si $f(x_0) = l$.

Propriété :

Lorsqu'une fonction est définie en x_0, elle admet une limite l en x_0 si et seulement si

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l$

1-2-2-Limite finie à gauche et à droite en un point d'abscisse x_0

- f admet une limite l à gauche de x_0 ($x_0 \notin D_f$) si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$
- f admet une limite l à droite de x_0 ($x_0 \notin D_f$) si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$

1-2-3- Opérations sur les fonctions.

Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	+∞	-∞	-∞
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	l+l'	+∞	-∞	+∞	-∞	

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	+∞	-∞ou +∞	+∞	-∞	+∞
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'(l'≠ 0)	0	+∞	-∞	-∞
$\lim\limits_{x \to x_0} (fxg)(x)$	ll'	$\begin{cases} +\infty; si\ l' > 0 \\ -\infty; si\ l' < 0 \end{cases}$		+∞	+∞	-∞

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l(l≠ 0)	$+\infty\ ou -\infty$	0 et f(x)>0	0 et f(x)<0
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	+∞	−∞

Limite du quotient de deux fonctions :

Pour calculer la limite en x_0 de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Pour déterminer la limite en x_0 d'une fonction du type $\frac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ on peut parfois mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur puis simplifier.

Propriété

Nous admettons les résultats suivants :

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Si $n \in N$; alors $\lim_{x \to a} x^x = a^x$

Si $a \geq 0$ alors $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

$$\lim_{x \to a} |x| = |a|$$

Exercice résolu

Dans chacun des cas calcule la limite de la fonction f en x_0.

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 3$ $\quad x_0 = 0$
2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad x_0 = 1$
3) $f(x) = 3$ $\quad x_0 = 2$
4) $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ $\quad x_0 = 1$
5) $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{-x^2+3x-4}$ $\quad x_0 = 1$
6) $f(x) = \frac{-x^2+2x+1}{-x-2}$ $\quad x_0 = 2$

Résolution :

Calculons les limites de f en x_0

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 3$; $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 + 4x^2 - x + 3 = (0)^3 + 4(0)^2 - 0 + 3$$
$$= 3$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 3$ Car la fonction f est définie en 0.

2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad ; x_0 = 1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+1}{x} = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2$$

$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -2$ Car la fonction f est définie en -1

3) $f(x) = 3$ $\quad x_0 = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3 = 3$

4) $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ $\quad ; x_0 = 1$

La fonction f n'est pas définie en $x_0 = 1$ et il n'y a pas possibilité de simplifier. Nous allons calculer la limite à gauche et à droite de 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} 3x + 2 = 5 \\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x - 1 = 0^- \end{cases}$$

Tableau de signe de $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{3x+2}{x-1} = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} 3x + 2 = 5 \\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0^+ \end{cases}$$

Conclusion

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

5) $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x^2+3x-4}$; $\quad x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = lim \frac{3x^2-x-2}{x^2+3x-4} = \frac{0}{0}$$

Il y a possibilité de factoriser et de simplifier.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+4)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{x+4} = \frac{3(1)+2}{1+4} = 1$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

6) $f(x) = \frac{-x^2+2x+1}{-x-2}$; $\quad x_0 = -2$

f n'est pas définie en $x_0 = -2$ et il n'y a pas possibilité de factoriser et de simplifier.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{-x^2+2x+1}{-x-2} = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} -x^2+2x+1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} -x-2 = 0^+ \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x-2$	$+$	0	$-$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{-x^2+2x+1}{-x-2} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} -x^2+2x+1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} -x-2 = 0^- \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$

1-2-4-Limite d'une fonction à l'infinie.

Limite en infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Le tableau ci-dessous découle des propriétés relatives aux limites du produit de deux fonctions.

	$a > 0$	$a < 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^3$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^3$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{x}$	0	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a}{x}$	0	0

Propriété :

- A l'infini, un polynôme a même limite que le monôme de plus haut degré.
- A l'infini, une fraction rationnelle à même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice résolu :

Calcule dans chacun des cas les limites en -∞ et en +∞ de la fonction f.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\qquad f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x^2-x-1}$

$f(x) = -x^3 - 2x + 4$ $\qquad f(x) = \dfrac{-x^3+1}{x^2-2}$

$f(x) = -2x^2 - x + 4$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-1}{-x^2+2}$

Résolution

Calculons les limites en $-\infty$ et en $+\infty$

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

2) $f(x) = -x^3 - 2x + 4$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 - 2x + 4 = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 - 2x + 4 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

3) $f(x) = -2x^2 - x + 4$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 - x + 4 = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^2 - x + 4 = \lim_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$$

4) $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x^2-x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+3x-1}{x^2-x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3x-1}{x^2-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

5) $f(x) = \frac{-x^3+1}{x^2-2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3+1}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

6) $f(x) = \frac{x-1}{-x^2+2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{-x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

1-3- DERIVATION :

1-3-1-Calculs de dérivées

Dérivée de fonctions élémentaires.

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation des fonctions élémentaires.

$f(x)$	$f'(x)$
$k(k\in\mathbb{R})$	0
x	1
$ax\ (a\neq 0)$	a
$x^n\ (n\in\mathbb{N}; n\geq 2)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dérivées et opérations sur les fonctions

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée
U+V	U'+V'
kU (k$\in\mathbb{R}$)	kU'
UV	U'V+V'U
$\frac{1}{U}$	$-\frac{U'}{U^2}$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V-V'U}{V^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

1-3-2-Dérivée et tangente

Soit f une fonction ; (C) sa représentation graphique et A un point de (C) d'abscisse x_0.

Une équation de la tangente en x_0 est (T) : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

1-3-3-Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Conséquence

Si la dérivée d'une fonction f s'annule en changeant de signe en x_0, alors cette fonction présente en ce point un extremum (soit un maximum, soit un minimum).

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗	max	↘	

f admet un maximum relatif en x_0
valeur du maximum $=f(x_0)$

x	a		x_0		b
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	min	↗	

f admet un minimum relatif en x_0
valeur du minimum $=f(x_0)$

Exercice résolu 1

On considère les fonctions suivantes

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ $\quad h(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3$

$g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ $\quad k(x) = \frac{-x^2+4x+1}{2x^2-x+2}$

1) Détermine f' ; h' ; g' et k'.
2) Ecris une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Résolution

1) Déterminons $f'(x)$; $h'(x)$; $g'(x)$ et $k'(x)$.

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

$D_f =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme.

f est continue et dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty ; +\infty[\quad f'(x) = 6x + 4$

$h(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3$

$Dh =]-\infty ; +\infty[$ car h est une fonction polynôme.

h est continue et dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty ; +\infty[\quad h'(x) = 9x^2+8x$

$g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

$Dg = \{x \in \mathbb{R} | x - 2 \neq 0\}$

Posons $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$Dg = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

g est continue et dérivable sur chacun des intervalle $]-\infty ; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; 2[$ ou $]2; +\infty[$

$g'(x) = \frac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2}$

$g'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$

$k(x) = \frac{-x^2+4x+1}{2x^2-x+2}$

$Dk = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x + 2 \neq 0\}$

Posons $2x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(2)$

$\Delta = -15 < 0$

$Dk =]-\infty ; +\infty[$

K est continue et dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty ; +\infty[\quad k'(x) = \frac{(-2x+4)(2x^2-x+2)-(4x-1)(-x^2+4x+1)}{(2x^2-x+2)^2}$

$k'(x) = \frac{-4x^3+2x^2-4x+8x^2-4x+8+4x^3-16x^2-4x-x^2+4x+1}{(2x^2-x+2)^2}$

$k'(x) = \frac{-7x^2-8x+9}{(2x^2-x+2)^2}$

2) Ecrivons une équation de la tangente à (Cg) au point d'abscisse $x_0 = 0$

(T) : $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$g'(x_0) = g'(0) = \frac{-5}{(0-2)^2} = \frac{-5}{4}$

$g(x_0) = g(0) = \frac{2(0)+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

(T) : $y = -\frac{5}{4}(x - 0) - \frac{1}{2}$

(T) : $y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

Exercice résolu 2

On considère les tableaux de variation de deux fonctions f et g

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-10	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
g	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

1) Etudie le sens de variation de f et de g
2) Laquelle des deux fonctions admet des extrémums ? précise leur nature et leur valeur.

Résolution

1) Sens de variation de f

- $\forall x \in \left]-\infty\,;-4\right[\cup \left]1;+\infty\right[\ f'(x) > 0$ et $f'(-4) = 0; f'(1) = 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-4\right]$ et sur $\left[1;+\infty\right[$
- $\forall x \in \left]-4\,;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2};1\right[;\ f'(x) < 0$ et $f'(-4) = 0;\ f'(1) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $\left[-4\,;-\frac{3}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{3}{2};1\right]$

Sens de variation de g.

$\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\ g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) Seule la fonction f admet des extrémums car sa dérivée $f'(x)$ s'annule en -4 et en 1 en changeant de signe.

- f admet un maximum en -4 de valeurs égale à $f(-4)=-10$.
- f admet un minimum en 1 de valeur égale $f(1)=0$

DOMAINE DE DEFINITION – PARITE – ELEMENTS DE SYMETRIE

EXERCICES

1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes (on mettra D sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ $\qquad$ $J(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad$ $g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

$K(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ $\qquad$ $H(x) = x - 1$ $\qquad$ $L(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 6x + 9}$

2

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions g suivantes

$g(x) = \sqrt{3x+1}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$. $\qquad$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}}{x+2}$

3

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f suivantes

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$

4

Montrer dans chacun des cas si la fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

$f(x) = \frac{|x|}{x^2-4}$; $J(x) = \frac{3x^3-x}{|x|-1}$; $g(x) = \frac{-3}{x^2-4}$; $h(x) = \frac{x^2-3}{x^2+2}$

$k(x) = \sqrt{x+2}$; $L(x) = \frac{2x+1}{x+2}$; $v(x) = x^3 - x^2 + 1$; $r(x) = x^2 - |3x-1|$

5

Montrer que la courbe représentative de la fonction g définie IR vers IR admet la droite (Δ) comme axe de symétrie

$g(x) = x^2 - 4x - 1$; $(\Delta): x = 2$

$g(x) = -x^2 - 2x + 1$; $(\Delta): x = -1$

$g(x) = 3x^2 + 6x + 5$; $(\Delta): x = -1$

$g(x) = \frac{4x^2-32x+69}{x^2-8x+18}$; $(\Delta): x = 4$

6

Le plan est muni du repère (0, I, J). (C) est la représentation graphique de la fonction f. démontre dans chaque cas, que le point A est un centre de symétrie de (C).

$f(x) = \frac{2x}{x-1}$; A(1 ;2) — $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; A(1,2) — $f(x) = \frac{1}{x-1}$; A(1;0)

$f(x) = (x+1)^3 + 1$; $A(-1; 1)$ — $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{2x+2}$; A(-1 ;0) — $f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$; A(1/2 ; -1)

s $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; A(1,2) — $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$; A(2,0)

LIMITES

EXERCICES

1

La fonction g est définie en x_0. Dans chacun des cas suivants calculer les limites de la fonction g au point x_0

1°/ $g(x) = 5x^2 + 6$ $x_0 = 2$ — 2°/ $g(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3$ $x_0 = -1$

3°/ $g(x) = \sqrt{x} - 3x$ $x_0 = 0$ — 4°/ $g(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ $x_0 = 4$

5°/ $g(x) = \frac{(x^3-1)\sqrt{x+1}}{x-2}$ $x_0 = 0$ — 6°/ $g(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{x^2-4}$ $x_0 = -1$

7°/ $g(x) = 5x^2 - 2x - 1$ $x_0 = 3$ — 8° / $g(x) = \frac{|x+1|\sqrt{3x+2}}{x^2-2}$ $x_0 = 0$

9°/ $g(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$ $x_0 = 2$ — 10°/ $g(x) = \sqrt{x^2+4}$ $x_0 = 0$

2

Calculer les limites à gauches et à droite de x_0 de la fonction H

1°/ $H(x) = \frac{2-x}{x-3}$ $x_0 = 3$ — 2°/ $H(x) = \frac{2-x}{9-x^2}$ $x_0 = 3$

3°/ $H(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ $x_0 = 2$ — 4°/ $H(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2}$ $x_0 = 2$

3

Calculer les limites suivantes en x_0

1- $g(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ $x_0 = 5$ — 2- $g(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$ $x_0 = 2$

3- $g(x) = \frac{2x^2-5x+3}{2x-3}$ $x_0 = \frac{3}{2}$ — 4- $g(x) = \frac{x^3-1}{1-x}$ s $x_0 = 1$

5- $g(x) = \frac{x^2-2x}{x}$ $x_0 = 0$

4

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

1- $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$

2- $f(x) = x^4 - x^2 + 2x - 3$

3- $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x$

4- $f(x) = -x^6 + 2x^2 + 4$

5- $f(x) = -4x^7 + 3x^4 - 9$

6- $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^4 - 3x^2 - 1$

5

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

1°/ $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$

2°/ $f(x) = \dfrac{4-2x}{x-4}$

3°/ $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-1}$

4°/ $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

5°/ $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{1-3x^2}$

6°/ $f(x) = \dfrac{-x^3+4}{1-2x}$

6

Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3+1)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-4x^2+2x-1}{2x^2-3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1})$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{7}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x}+3}}\right)$

DERIVEE - TANGENTE - SENS DE VARIATION - TABLEAU DE VARIATION

EXERCICES

1

Soit la fonction f définie sur IR calculer la dérivée f' de la fonction f.

1°) $f(x) = x^3 + 2x^2$

2°) $f(x) = x^4 - 2x^3$

3°) $f(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 11x^2 + 3$

4°) $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + \frac{1}{3}$

5°) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 1$

6°) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2} + \dfrac{2}{x}$

7°) $f(x) = 3x - 1$

8°) $f(x) = -x^2 - x$

9°) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4$

10°) $f(x) = x$

2

Soit les fonctions f et g définies sur IR par :

$f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = 3x^2 - 4x - 4$

a- Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$

b- En déduire la dérivée de la fonction u définie sur IR par $u(x) = f(x) + g(x)$.

3

Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = (x^2+5)(-x+2)$

Calculer la dérivée h' par deux méthodes

1- A partir de la formule $(UV)' = U'V + V'U$

2- En développant d'abord h(x).

4

On considère la fonction f définie sur IR par

$f(x) = (5x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3)$ $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 1)(2x + 3)$

$f(x) = (-x - 1)(3x - 4)$ $f(x) = (-3x^2 + 7x - 1)(x^2 - 4)$

$f(x) = x^2(2x + 3)$

Calculer la dérivée f' par deux méthodes

5

Calculer dans chacun des cas la dérivée h' de la fonction h (On pourra utiliser la formule $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$).

1°) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$

2°) $h(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x - 1}$

3°) $h(x) = \frac{(x - 1)^2}{2x + 1}$

4°) $h(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

5°) $h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

6°) $h(x) = \frac{1}{x^2 - x - 1}$

6

Soit la fonction f définie par

$f(x) = x^2 - 6x + 10$

1°) Déterminer le domaine de définition de f.

2°) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 4$

3°) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 4.

7

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x + 1}{1 - 2x}$

Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

8

Une fonction est représentée par une courbe C. Au point B(2 ; 3) la courbe C a pour tangente la droite d'équation $y = 4x - 5$.

La courbe C représente l'une des 4 fonctions suivantes U ; V ; J, L

$U(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $V(x) = x^3 - 5x^2 + 15$

$J(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^2$ $L(x) = x^2(2x - 3)$

1- Calculer les dérivées U' ; V' ; J' ; l'.

2- Laquelle de ces 4 fonctions est représentée par C

3- Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) de chacune des fonctions au point d'abscisse $x_0 = -1$

9

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$f(x) = -3x^2 + 8x - 1$

1°) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

2°) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle [-4 ; 4]

3°) Dresser le tableau de variation de f.

10

Soit la fonction g définie par :

$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3$

1°) Déterminer le domaine de définition de g.

2°) Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

3°) Calculer la dérivée g' de la fonction g

4°) Etudier le sens de variation de g.

5°) Dresser le tableau de variation de g.

11

Le fonction I est définie par $I(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

1- Calculer la dérivée $I'(x)$ de I.
Etudier le sens de variation de I.

2- Dresser le tableau de variation de I.

12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$

1- Déterminer le domaine de définition de f

2- Etudier les limites aux bornes du domaine de définition puis conclure

3- Calculer la dérivée f' de f

4- Etudier le sens de variation de f

1- Dresser le tableau de variation de f.

13

Soit la fonction g définie comme suit :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1} \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1) Déterminer a et b pour que la courbe représentative (Cg) admette pour tangente en $x_0 = 0$ la droite d'équation $y = 4x + 3$.

2) Pour les valeurs a et b trouvées à la première question; démontrer que pour tout nombre réel x on a $g(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$.

SEQUENCE 2 :

FONCTIONS POLYNOMES
FONCTIONS RATIONNELLES

- ✓ *Fonctions polynômes*
- ✓ *Fonctions rationnelles*

2-1-FONCTIONS POLYNOMES

2-1-1 Position relative de deux courbes

Soit (Cf) et (Cg) les représentations graphiques de deux fonctions f et g.

Pour étudier la position relative de (C_f) et (C_g), on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x) - g(x) < 0$; (C_f) est au-dessous de (Cg)
- Si $f(x) - g(x) = 0$; (C_f) et (Cg) se coupent.
- Si $f(x) - g(x) > 0$;(C_f) est eu dessus de (Cg)

Exercice résolu

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies par :

$f(x) = -x^3 + 1$ et $g(x) = x^2 - x^3$

(C_f) et (Cg) sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Etudie suivant les valeurs de x la position des courbes (C_f) et Cg.

Résolution

Etudions suivant les valeurs de x la position des courbes (C_f) et (Cg)

$f(x) = -x^3 + 1$et $g(x) = x^2 - x^3$

$f(x) - g(x) = -x^3 + 1 - x^2 - x^3$

$\quad = 1 - x^2$

$f(x)-g(x) = 1 - x^2$

Étudions le signe de $1 - x^2$

Posons $1 - x^2 = 0$ équivaut à $(1 - x)(1 + x) = 0$

$1 - x = 0$ ou $1 + x = 0$

$x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $f(x) - g(x) < 0$; donc C_f est au-dessous de C_g sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$
- $\forall x \in]-1; 1[$ $f(x) - g(x) > 0$; donc C_f est au-dessus de cg sur l'intervalle $]-1; 1[$.

2-1-2- Etude et représentation d'une fonction polynôme

Exercice résolu

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et (Cf) sa courbe représentative.

1-a) Détermine l'ensemble de définition de f

b) Calcule les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

2-a) Détermine la fonction dérivée f' de f

Déduis –en le sens de variation de f

b) Dresse le tableau de variation de f

3-a) Détermine une équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse O.

b) Etudie la position de (C_f) par rapport à (T).

4- Construire (C_f)

Résolution :

1-a- Ensemble de définition

Df=$\{x \in \mathbb{R} / f(x) existe\}$

$D_f =]-\infty; +\infty[$ car $f(x)$ est une fonction polynôme.

b- Limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

2- dérivée et sens de variation.

f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
$f'(x) = 3(x + 1)(x - 1)$

Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $f'(x) > 0$ et $f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$
- $\forall x \in]-1; 1[$ $f'(x) < 0$ et $f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$

b) tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a- Equation de la tangente.

(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; $f'(x) = -3$; $f(0) = 2$

(T) : $y = -3(x-0)+2$

(T) : $y = -3x + 2$

b) Position de (C_f) par rapport à (T)

$f(x) - y = x^3 - 3x + 2 - (-3x+2)$

$f(x) - y = x^3$

- $\forall x \in\ ]-\infty; 0[$ $x^3 < 0$ donc C_f est en-dessous de (T) sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
- $\forall x \in\ ]0; +\infty[$ $x^3 > 0$, donc C_f est au-dessus de (T) sur l'intervalle $]0; +\infty[$

2-2- FONCTIONS RATIONNELLES

2-2-1- Asymptotes parallèles aux axes du repère :

Soit f une fonction et (C) sa représentation graphique

- Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ donne un réel a, ou conclut que la droite d'équation y=a est asymptote à la courbe (c) au voisinage de $-\infty$ ou de$+\infty$.
- Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = \pm\infty$ on conclut que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe (C).

2-2-2- Asymptotes obliques

Soit f une fonction, (C) sa représentation graphique et y la fonction affine définie par y=ax+b ;

Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax + b] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b] = 0$, on conclut que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C)au voisinage de $-\infty$ ou de$+\infty$.

Exercice résolu 1

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$ et $g(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}$

1) **Détermine le domaine de définition de f.**
2) **Calcule les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Etudie les branches infinies.**
3) **Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la représentation graphique de la fonction g.**

Résolution

1- Domaine de définition de f

$f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

D=$\{x \in \mathbb{R} / 1 - 2x \neq 0\}$

Posons$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

D=$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2- Limites aux bornes de D

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ <}} 2x+1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} 2x+1 = 0^+ \end{cases}$$

x	$-\infty$ 1/2 $+\infty$
$1-2x$	+ 0 −

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} \frac{2x+1}{1-2x} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} 2x+1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} 2x+1 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

Etude des branches infinie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$; la droite d'équation y=-1 est asymptote à (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$; la droite d'équation x=1/2 est asymptote à (C_f)

3- Montrons que la droite (Δ) : y=x-3 Asymptote oblique.

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(x-3)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-3+\frac{4}{x+1}-x+3\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x-3)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-3+\frac{4}{x+1}-x+3\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1} = 0$$

alors la droite (Δ) d'équation y= $x-3$ est asymptote à Cg aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

2-2-3-Etude et représentation d'une fonction rationnelle

Exercice résolu 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ et C_f sa représentation graphique.

1-a- Détermine l'ensemble de définition D de f.

b- Calcule les limites de f aux bornes de D.

2-a- Détermine la fonction dérivée f' de f

Déduis-en le sens de variation de f

b- dresse le tableau de variation de f

3-a- Vérifie que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

Déduis en que la droite (D) d'équation y= $x+2$ est asymptote à (C_f).

b- Etudie la position relative de (C_f) et (D).

4- a-Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées

b- construis (C_f)

Résolution

1) a- Détermine le domaine de définition de f

$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

Df $\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}$

Posons $x-1=0$ équivaut à $x=1$

Df$=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) Limites aux bornes

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\frac{x^2+x+2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^2+x+2}{x-1} = -\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x^2+x+2 = 4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} x-1 = 0^-\end{cases}$$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+x+2}{x-1} = +\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x^2+x+2 = 4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x-1 = 0^+\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

2-a-Dérivée f' de f

f est continue et dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$

$\forall x\in Df$ $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-1(x^2+x+2)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

sens de variation de f

$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$\forall x\in D$ $(x-1)^2>0$ le signe de f '(x) dépend du signe de x^2-2x-3

Posons $x^2-2x-3=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) \Rightarrow \Delta = 16 > 0$

$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$; $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	‖ $-$	0 $+$	

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[f'(x) > 0$ *et* $f'(-1) = 0$; $f'(3) = 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ et $[3; +\infty[$
- $\forall x \in]-1; 1[\cup]1; 3[f'(x) < 0$ *et* $f'(1) = 0; f'(3) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $[-1; 1[$ *et* $]1; 3]$

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

$f(-1) = -1$ $\quad\quad$ $f(3) = 7$

3) a- vérifions que $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$

Procédons par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+2 & x-1 \\ \underline{-x^2+x} & \overline{x+2} \\ 2x+\ 2 & \\ \underline{-2x+2} & \\ 4 & \end{array}$$

$\frac{x^2-x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)+4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} + \frac{4}{x-1}$

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$$

Déduisons que la droite (D) d'équation y= x+2 est asymptote oblique à la courbe C_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à Cf aux voisinages de

$-\infty$ et de $+\infty$

b) position relative de C_f et de (D)

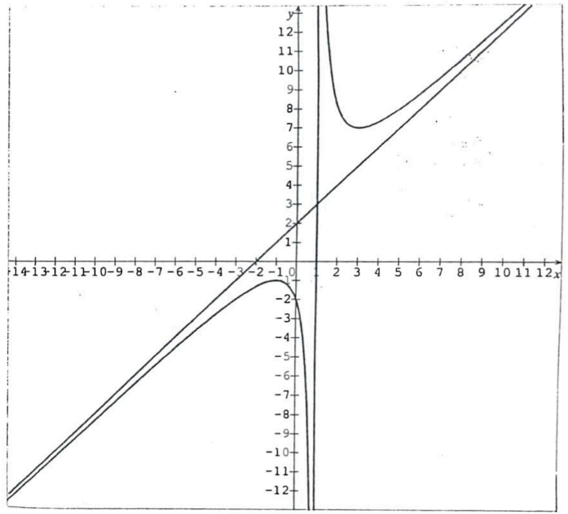
$f(x) - y = \frac{4}{x-1}\ \forall\ x \in D$

- $\forall\ x \in]-\infty; 1[\ f(x) - y < 0$ alors Cf est au-dessous de D sur $]-\infty; 1[$
- $\forall\ x \in]1; +\infty[\ f(x) - y > 0$ alors Cf est au dessus de D sur $]1; +\infty[$.

4)a- Coordonnées de C_f avec l'axe des ordonnées.

$x = 0$ et $f(0) = -2$

C_f coupe l'axe des ordonnées au point $A\binom{0}{-2}$



BRANCHES INFINIES

EXERCICES

1

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes puis donner le résultat juste si c'est faux.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$
  alors la droite d'équation x = 3 est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.
- $\lim_{x \to 2^<} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 2^>} f(x) = -\infty$
  alors la droite d'équation y = 2 est asymptote verticale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$ *et de* $+\infty$.

2

On vous communique les limites suivants.

- $\lim_{x \to -2^<} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -3$
  $\lim_{x \to 2^>} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} k(x) = 0$

Donner la nature et l'équation de l'asymptote correspondante au résultat de chaque limite trouvée.

3

On considère la fonction f de définie par :

$f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x+1}$ et la droite (Δ) d'équation y = 2x + 3

1- Déterminer la fonction h(x) définie par h(x) = f(x) − y.

2- Calculer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x)$

3- Que peux-tu dire de la droite (Δ) d'équation y = 2x + 3 à la courbe représentative de la fonction f aux voisinages de $-\infty$ *et de* $+\infty$.

4

On considère les fonctions et g définie par :

$f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x+3}$ *et* $g(x) = x + \frac{2}{3-x}$

Montrer que les droites (Δ) d'équation $y = -x + 1$ *et* (Δ') d'équation y= x sont respectivement asymptotes oblique à la courbe représentation (C) de f et (C') de g aux voisinages de - ∞ et de +∞.

5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-2}{-2x+1}$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2- Calculer les limites de f aux bornes de D.

3- Etudier les branches infinies de f

6

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$ et $g(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}$

1) Détermine le domaine de définition de f.
2) Calcule les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Etudie les branches infinies.
3) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la représentation graphique de la fonction g.

FONCTIONS POLYNOMES – FONCTIONS RATIONNELLES

EXERCICES

1

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1- Déterminer le domaine de définition de g

2- Etudier le sens de variation de g.

3- Dresser le tableau de variation de g

4- Tracer la courbe représentation C de g.

2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1- Déterminer le domaine de définition de f

2- Calculer la dérivée f' de la fonction f.

3- Etudier le sens de variation de f.

4- Dresser le tableau de variation de f

5- On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

3

Soit g la fonction telle que : quelque soit x appartenant à IR.

$g(x) = ax^2 + bx + c$;   a , b , c , étant des réels.

1- Déterminer a, b , c , sachant que la courbe représentative(C) de g passe par le point A(2 ,6) et que g admet un extremum au point B (1 , 7).

2- On donne la fonction h telle que

$h(x) = -x^2 + 2x + 6$

a- déterminer la fonction dérivée h' de h

b- Etudier le signe de h'(x)

c- Dresser le tableau de variation de h

2- Représenter la courbe (T) de h.

4

$f(x) = x^4 + x^2 - 2$ et (C) sa représentation graphique

1-a- Démontre que f est une fonction paire

b- Vérifie que $f(1) = 0$

c- En déduire un autre nombre tel que $f(\propto) = 0$

2-a- Vérifie que pour tout nombre réels x,

$f(x) = (x - 1)(x - \propto)(x^2 + 2)$

b- Détermine les points d'intersections de (C) avec l'aire des abscisses.

3-a- Détermine la fonction dérivée f' de f.

En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

b- Dresse le tableau de variation de f

c- construire (C)

5

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par :

$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

On désigne par (C) la courbe de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f

2- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x élément de D on ait

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

3- Calculer les limites de f aux bornes de D

4- a- Déduire les asymptotes de la courbe (C) b- Etudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote oblique.

5- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations

6- Tracer la courbe (C).

6

Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2x^2+11x+14}{2x+5}$

On appelle (C) la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1cm).

1°) Déterminer le domaine de définition D_h de h.

2°) Déterminer les trois réels constants a, b et c tel que $h(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+5}$

3°) Calculer la dérivée h' de la fonction h

4°) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation

5°) Montrer que la droite (Δ) : y = x + 3 est asymptote à la courbe (C) de h

6°) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ)

7°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de h au point d'abscisse - 2

8°) Représenter dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ la tangente (T), la courbe (C) de g et ses droites asymptotes.

7

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :$f(x) = \dfrac{2x+1}{1-2x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1- Détermine l'ensemble de définition D de f ; calcule $f(1)$ et $f(0)$
2- Détermine la fonction dérivée première f' de f puis calcule $f'(1)$ et $f'(0)$
3- Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
4- Calcule les limites de f aux bornes de D. Précise les asymptotes de (C).
5- Réalise le tableau de variation de f puis construis la courbe de (C).
6- Montre que le point A(1/2 ;-1) est un centre de symétrie de la courbe (C).

8

g est une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	||	-	0	+	
g	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

3- Donne le domaine de définition de g noté D.

4- g est définie par $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

a- g' est la dérivée de g. Exprime g' en fonction de a et c.

b- Trouve les réels a, b, c en utilisant les données du tableau de variation

c- Démontre que la droite (Δ) : y = x +1 est une asymptote oblique à la courbe (C) représentative de g.

d- Etude la position de (C) par rapport à (Δ)

3- Représente (C) et (D) dans le plan muni d'un repère.

a- Trouver une équation de la tangente à C en A (0 ; 2).

b- Démontrer que pour x > 0, la courbe est au-dessus de la tangente en A et que pour x <0 C est au dessous de la tangente en A

6- Construire la tangente en A puis la courbe C.

9

Soit f la fonction définie sur I =] 0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- Vérifier que $f(x) = x-3 + \dfrac{1}{x}$

2- Déterminer la limite de f en 0 puis conclure.

3- a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Pour tout x strictement positif, on note $g(x) = f(x) - (x-3)$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis conclure

4- Soit f' la dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f

Etudier la position de (C) par rapport à (Δ)

5- Tracer la courbe (C) et ses deux asymptotes.

10

On considère le plan muni d'un repère orthonormé et (Cf) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

1) Détermine le domaine de définition D_f de f
1) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Que dire de la droite (D_1) d'équation $y = 2$ à la courbe Cf ?

1) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

Que dire de la droite (D_2) d'équation $x = -1$ à la courbe (Cf)

2) Détermine la fonction dérivée f' de f
3) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

11

On considère le tableau de variation de la fonction g

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		2		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$-\frac{1}{2}$

1 -) Après lecture du tableau de variations de la fonction g, précise :

a- Le domaine de définition Dg de la fonction g.

b-) Les limites de g aux bornes de son domaine de définition

c) le signe de la dérivée g' et le sens de variations de g suivant les valeurs de x.

d-) Les extrémums relatifs (maximum et minimum) en indiquant les points où ces extrémum ont été atteints.

e-) Les asymptotes éventuelles à la courbe de la fonction g.

2-) Construis avec soin la courbe Cg (unité graphique : 1cm)

SEQUENCE 3 :

FONCTION LOGARITHME
FONCTION EXPONENTIELLE

- ✓ *Fonction logarithme*
- ✓ *Fonction exponentielle*

3-1- FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

3-1-1- Définition :

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$; s'annulant en 1 et qui a pour dérivée la fonction :

$$f: \quad]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

On la note **ln** et on a

$\ln:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln x$

Calcul d'image :

x = 1 ln(1) = 0 ; x = 2 ln(2) = 0,6931 ; x = 3 ln(3) 1,09862 ;

x = 0,2 ln(0,2) = -1,609 ; x = 0,5 ln(0,5) = -0,693

Remarques

Si 0< x ≤ 1 ln(x) ≤ 0

Si x > 1 alors ln(x) > 0

3-1-2 Propriétés

$\forall a \in IR^*_+$ et $b \in IR^*_+$

1- $\ln ab = \ln a + \ln b$.

2- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

3- $\ln 1 = \ln \frac{a}{a} = \ln a - \ln a = 0$

4- $\ln \frac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = 0 - \ln a = -\ln a$.

5- $\ln a^n = n\ln a$

6- $\forall x \in]0,1[$; $\ln x < 0$

7- $\forall x \in]1;+\infty[$ $\ln x > 0$

8- $\forall x \in]0;+\infty[$; $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

9- $\forall x \in IR^*_+$ et $y \in IR^*_+$

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$;
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$;
- $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$

Exemple : $\ln 4x = \ln 4 + \ln x$; $\ln {}^1/_4 = -\ln 4$

$\ln\frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$; $\ln\sqrt{5} = \frac{1}{2}\ln 5$

3-1-3 limites usuelles de ln

1- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

2- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

3- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x^n = +\infty$ $(n \in IN^*)$

5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\,(n \in IN^*)$

6- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

7 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0\,(n \in IN^*)$

Exercice résolu :

Dans chacun des cas suivants détermine les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

a-$f(x) = 4 - \ln x$ b-$f(x) = (\ln x)^2$ c-$f(x) = \frac{10}{\ln x}$

d-$f(x) = \frac{2+\ln x}{x}$ e-$f(x) = \ln x - x$ f-$f(x) = \ln x + x$

Résolution

a-$f(x) = 4 - \ln x$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 4 - \ln x = +\infty$ car $\left\{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty\right.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 4 - \ln x = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

b) $f(x) = (\ln x)^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x)^2 = +\infty$ car $\left\{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty\right.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ car $\left\{\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\right.$

c- $f(x) = \frac{10}{\ln x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{10}{\ln x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 10 = 10 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{10}{\ln x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 10 = 10 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

d- $f(x) = \frac{2+\ln x}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}(2 + \ln x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2 + \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

e- $f(x) = \ln x - x$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x - x = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} - 1 = -1 \end{cases}$

f- $f(x) = \ln x + x$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x + x = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x + x = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

3-1-4- Etude et représentation graphique de la fonction lnx

Domaine de définition

$f(x) = \ln x$

$Df =]0\,;+\infty[$

Limites aux bornes de Df

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation x = 0.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Cf admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Dérivée et signe

$f(x) = \ln x$

$\forall\, x \in IR_+^*\ f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition.

Tableau de variation

Valeur de x	0		1		$+\infty$
Signe de ln'(x)		+	1	+	
Variation de ln	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Points remarquables

Intersection avec l'axe des abscisses

On pose $f(x) = 0$ équivaut à $\ln x = 0$

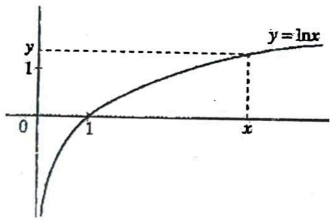
$$x = 1$$

la courbe coupe l'axe des abscisses au point A(1 ;0)

Tangente en x = 1

T : $y = f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow$ T : $y = x-1$

Représentation graphique de la fonction lnx



On appelle base du logarithme népérien l'unique nombre **e** tel que **lne=1**

3-1-5-Résolution des équations comportant des logarithmes

Méthode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :

1- Déterminer l'ensemble D des nombres réels pour lesquels l'équation est définie.
2- Transformer l'équation de façon à obtenir une égalité de la forme lna=lnb.
3- Utiliser la propriété « lna=lnb équivaut à a=b.
4- Ne retenir que les nombres appartenant à l'ensemble D et vérifiant l'égalité.

Exercice résolu

Résoudre dans IR les équations suivantes

1°) $\ln(x+3) = 0$

2°) $\ln(x+1) = \ln e$

3°) $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$

4°) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$

5°) $(1-\ln x) \times \ln x = 0$

Solution

Résolvons dans IR les équations suivantes

1°) $\ln(x+3) = 0$ équivaut à $\ln(x+3) = \ln 1$ car $\ln 1 = 0$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3>0 \Leftrightarrow x>-3 & (1) \\ x+3=1 \Leftrightarrow x=-3+1=-2 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $S_1 =]-3, +\infty[$

(2) $\Leftrightarrow$ $S_2 = \{-2\}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation

$S = S_1 \cap S_2$

$S = \{-2\}$

2°) $\ln(x+1) = \ln e$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x=e-1 \end{cases}$$

$S_1 =]-1 ; +\infty[$; $S_2 = \{e-1\}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation

$S = S_1 \cap S_2$

$S = \{e-1\}$

3°) ln (-2x +1) = ln (x+4)

$$\begin{cases} -2x+1>0 \\ x+4>0 \\ -2x+1=x+4 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x>-1 \iff x<\frac{1}{2} \Rightarrow S_1 =]-\infty ; \frac{1}{2}[\\ x>-4 \iff S_2 =]-4 ; +\infty[\\ -3x = 3 \iff x=-1 \iff S_3 = \{-1\} \end{cases}$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

$S =]-4 ; \frac{1}{2}[\cap \{-1\}$

$S = \{-1\}$

4°) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 \iff \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$ car $\ln e = 1$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e \iff \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 & (1) \\ \frac{x+1}{x-1} = e & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{x+1}{x-1} > 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x + 1		-	0	+		+	
x - 1		-		-	0	+	
$\frac{x+1}{x-1}$		+	0	-	||	+	

$S_1 =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

(2) $\frac{x+1}{x-1} = e$ équivaut à $x + 1 = e(x - 1)$

$x + 1 = ex - e \Rightarrow x - ex = -e - 1$

$x(1 - e) = -e - 1 \Rightarrow x = \frac{-e-1}{1-e}$

$S_2 = \left\{\frac{-e-1}{1-e}\right\}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation

$S = S_1 \cap S_2$

$S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\cap \left\{\frac{-e-1}{1-e}\right\}$

$S = \left\{\frac{-e-1}{1-e}\right\}$

5°) $(1 - \ln x) \times \ln x = 0 \iff \begin{cases} x > 0 & (1) \\ 1 - \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 & (2) \end{cases}$

$1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1$

$\ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

$\ln x = 0 \iff \ln x = \ln 1$; $x = 1$

$S_1 =]0 ; +\infty[$

$S_2 = \{e, 1\}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation

$S = S_1 \cap S_2$ $S = \{e, 1\}$

3-1-6 Résolution des inéquations comportant des logarithmes.

Méthode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :

1-Déterminer l'ensemble D des nombres réels pour lesquels l'inéquation est définie.

2 Transformer l'inéquation de façon à obtenir une inégalité de la forme lna<lnb
3 Utiliser la propriété :
« lna<lnb équivaut à a<b »
4 Ne retenir que les nombres appartenant à D et vérifiant l'inégalite

Exercice résolu

1°) $\ln(2x-3) > 1$
2°) $\ln(-x+2) \leq \ln(x+3)$

Solution

1°) $\ln(2x-3) > 1 \Leftrightarrow \ln(2x-3) > \ln e$

$$\ln(2x-3) > \ln e \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3>e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>3 \\ 2x>e+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} & (1) \\ x>\frac{e+3}{2} & (2) \end{cases}$$

$S_1 =]\frac{3}{2} \ ; \ +\infty[$; $S_2 =]\frac{e+3}{2} \ ; \ +\infty[$

Soit S l'ensemble des solutions

$S = S_1 \cap S_2$

$\frac{e+3}{2} > \frac{3}{2}$

$S = \left]\frac{e+3}{2} ; +\infty\right[$

2°) $\ln(-x+2) \leq \ln(x+3)$

$$\text{On a } \begin{cases} -x+2>0 & (1) \\ x+3>0 & (2) \\ -x+2 \leq x+3 & (3) \end{cases}$$

(1) $-x+2>0 \Leftrightarrow -x>-2 \Leftrightarrow x<2$

$S_1 =]-\infty \ ; 2[$

(2) $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

$S_2 =]-3 \ ; +\infty[$

(3) $-x+2 \leq x+3 \Leftrightarrow -x-x \leq 3-2 \Leftrightarrow -2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$S_3 = [-\frac{1}{2} \ ; +\infty[$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

$S = [-\infty \ ; 2[\cap]-3 \ ; +\infty[\cap [-\frac{1}{2} \ ; +\infty[$

$S = [-\frac{1}{2} \ ; 2[$

3-1-7 - Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$ $(a \neq 0)$

La fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$ $a \neq 0$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{a}{ax+b}$

D'une façon générale, la fonction $x \mapsto \ln u(x)$est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice résolu

Détermine la dérivée première de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \ln(-2x+1)$ 2) $f(x) = x + \ln(3x-4)$

3) $f(x) = \ln(x^2-2x+1)$ 4) $f(x) = x\ln x - x^2 + 1$

Résolution

Dérivée première de chacune des fonctions

1) $f(x) = \ln(-2x+1)$

$f'(x) = \frac{-2}{-2x+1} = \frac{2}{2x-1}$

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$

2) $f(x) = x + \ln(3x-4)$

$f'(x) = 1 + \frac{3}{3x-4}$

$f'(x) = \frac{3x-4+3}{3x-4} = \frac{3x-1}{3x-4}$

$f'(x) = \frac{3x-1}{3x-4}$

3) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1}$

4) $f(x) = x\ln x - x^2 + 1$

$f'(x) = \ln x + 1 - 2x$

$f'(x) = \ln x - 2x + 1$

3-2-FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

3-2-1 Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne la réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est définie comme suit :

$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$x \mapsto \exp(x)$

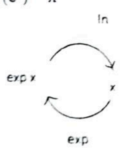
- **Notation** :

On note **exp (x) = e^x** ($\exp(x) = e^x$)

- Conséquences immédiates

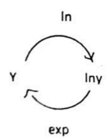
Pour tout réel x

$\ln(e^x) = x$



Pour tout réel y

$e^{\ln y} = y$



<u>**Exemple**</u> : $\ln e^4 = 4$; $e^{\ln 3} = 3$

On dit que les fonctions **ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.**

3-2-2 Propriétés

a et b étant deux réels on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$e^a = e^b \iff a = b$

$e^a > e^b \iff a > b$

$e^a < e^b \iff a < b$

$(e^a)^b = e^{ab}$

- **Pour tout réel x, e^x est strictement positif, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$**

Exercice résolu 1

En te servant des propriétés précédentes écris sous la forme e^{ax} $a \in \mathbb{R}$

1°)	$e^{2x} \times e^x$	**3°)**	$\frac{e^{5x}}{e^{-x}}$
2°)	$(e^{4x})^2$	**4°)**	$\frac{1}{e^{-3x}}$

Solution

1°) $e^{2x} \times e^x$

Remarquons que:

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

$e^{2x} \times e^x = e^{2x+x}$

$e^{2x} \times e^x = e^{3x}$;

2°) $(e^{4x})^2$

Remarquons que :

$(e^a)^b = e^{a \times b}$

$(e^{4x})^2 = e^{8x}$

3°) $\frac{e^{5x}}{e^{-x}}$

on sait que :

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\frac{e^{5x}}{e^{-x}} = e^{5x-(-x)} = e^{5x+x}$

$\frac{e^{5x}}{e^{-x}} = e^{6x}$

4°) $\frac{1}{e^{-3x}}$

$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

$\frac{1}{e^{-3x}} = e^{-(-3x)} = e^{3x}$

3-2-3- limites de référence

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x =$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^r e^x = 0$ avec $r \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$

Exercice résolu

Détermine dans chacun des cas la limite de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a-$f(x) = e^x + x$; b- $f(x) = e^x - x$; c- $f(x) = e^x + e^{-x}$; d- $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

Résolution

a-$f(x) = e^x + x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + x = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x + x = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$$

b- $f(x) = e^x - x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \end{cases}$$

c- $f(x) = e^x + e^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$$

d- $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -1 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 1 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1 \end{cases}$$

3-2-4- Etude de la fonction e^x

$f(x) = e^x$

- **Df son domaine de définition**

$Df = \text{IR} =]-\infty ; +\infty[$

- **Limites aux bornes de D_f**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

- **Branches infinies**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation

y = 0 est asymptote horizontale à la courbe (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il y a possibilité d'asymptote oblique

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

La courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (oy).

- **Sens de variation**

La fonction f est dérivable sur IR

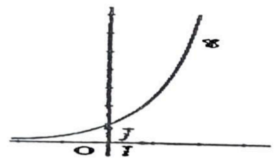
$\forall x \in \text{IR}\ f'(x) = e^x$

Puisque sur]0, + ∞[lnx est strictement croissante et que e^x est la **bijection réciproque** de **lnx** alors sur]-∞, + ∞[la fonction e^x est aussi croissante.

* Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	$0 \nearrow +\infty$

* Représentation graphique de la fonction e^x



3-2-5- Equation et inéquation comportant des exponentielles

Exercice résolu

Résoudre dans IR chacune des équations et inéquations suivantes

1°) $e^{x+3} = 5$

2°) $e^{x-3} = e^{-x-1}$

3°) $e^{2x+1} < e^{-x-2}$

4°) $e^{x-3} > 4$

Solution

1°) $e^{x+3} = 5$ équivaut à

$\ln e^{x+3} = \ln 5$

$x + 3 = \ln 5$

$x = \ln 5 - 3$

Soit S_{IR} l'ensemble des solutions de l'équation

$S_{IR} = \{\ln 5 - 3\}$

2°) $e^{x-3} = e^{-x-1} \Leftrightarrow x - 3 = -x - 1$

$x + x = 3 - 1$

$2x = 2$

$x = 1$

Soit S_{IR} l'ensemble des solutions de l'équation

$S_{IR} = \{1\}$

3°) $e^{2x+1} > e^{-x-2} \Leftrightarrow 2x + 1 < -x - 2$

$2x + x < -2 - 1$

$3x < -3$

$x < -1$

$S_{IR} =]-\infty ; -1[$

4°) $e^{x-3} > 4 \Leftrightarrow \ln e^{x-3} > \ln 4$

$x - 3 > \ln 4$

$x > \ln 4 + 3$

$S_{IR} =]\ln 4 + 3 ; +\infty[$

3-3-Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$

1. La fonction $x \mapsto e^{ax+b} (a \neq 0)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto ae^{ax+b}$.

D'une façon générale la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Exercice résolu

Détermine la dérivée première de chacune des fonctions suivantes

1- $f(x) = 3e^{-x+1}$ $\qquad$ 2- $f(x) = (x-1)e^{-x+1}$

3- $f(x) = e^{-2x} + 3e^x - 1$ 4- $f(x) = -xe^{-2x-1}$ $\qquad$ 5- $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

Résolution

1- $f(x) = 3e^{-x+1}$ $\qquad$ $f'(x) = -3e^{-x+1}$

2- $f(x) = (x-1)e^{-x^2+1}$ $\qquad$ $f(x) = e^{-x^2+1} - 2x(x-1)e^{-x^2+1}$

$f'(x) = (1 - 2x^2 + 2x)e^{-x^2+1}$

$f'(x) = (-2x^2 + 2x + 1)e^{-x^2+1}$

3- $f(x) = e^{-2x} + 3e^x - 1$ $\qquad$ $f'(x) = -2e^{-2x} + 3e^x$

4- $f(x) = -xe^{2x-1}$

$f'(x) = -e^{2x-1} - 2x^2e^{2x-1}$

$f'(x) = (-2x^2 - 1)e^{2x-1}$

5- $f(x) = e^{x^2+2x-1}$ $\qquad$ $f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x-1}$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

SIMPLIFICATION - EQUATION – INEQUATION

EXERCICES

1

Calculer :

$A = -\ln e + 2\ln e^2 + \ln e^3$ $\quad B = 5\ln e - 3\ln\frac{1}{e}$ $\quad C = \frac{1}{2}\ln e - 5\ln e^2 - \ln\frac{1}{e}$

2

Calculer en fonction de ln2 ou de ln3

$A = \ln(2e) + 5\ln 2 + \ln 4$ $\quad C = \ln(3^2) + \ln\sqrt{3} - \ln 81$

$B = \ln 2 + \ln(4e) - \ln(16e^2)$ $\quad D = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{9}{e^2}\right)$

3

On donne la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$

Calculer $f(e)$; $f(1)$; $f\left(\frac{1}{e}\right)$

4

Résoudre sur leur domaine de validité les équations suivantes :

a- $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$

b- $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

c- $\ln(8x-3) = 0$

d- $\ln(2x+5) = \ln(x-2)$

e- $\ln(8x-2) = \ln(x+4)$

f- $\ln(2x-3) + 2\ln(x-1) = \ln(6x-9)$

g- $\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3)$

5

La fonction f est définie sur I $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$.

Calculer les coordonnées des points d'intersections de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses.

6

Soit g la fonction polynôme définie sur IR par $g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1- Montrer que 1 est une racine (solution) de l'équation $g(x) = 0$

2- Montrer que $g(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$

3- Résoudre dans IR l'équation $g(x) = 0$

Résoudre dans IR l'équation $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

7

1) a- Résoudre l'équation suivante:

$2 - x = 4 - x^2$

b- Déduis- en les solutions de l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

2- Résous dans IR $\ln(x+2) = \ln(3-x)$

8

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $\ln x - 1 \leq 0$

2°) $\ln(3x+12) \leq \ln(2x-1)$

3°) $\ln(2x-1) \geq \ln x$

4°) $\ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln(x+8)$

9

Résoudre dans IR l'équation et l'inéquation suivante :

1) (E) : $X^2 - 5X + 6 = 0$

(I) : $X^2 - 5X + 6 \leq 0$

2) Utiliser les résultats précédents pour résoudre dans IR l'équation et l'inéquation suivante. (E) : $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

(I) : $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \leq 0$

10

1-La fonction f est définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 \quad \ln x$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses.

2- La fonction f est définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - \ln(x-1)$. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses.

DOMAINE DE DEFINITION - LIMITES - DERIVEE - SENS DE VARIATION

EXERCICES

11

Déterminer dans chacun des cas le domaine de définition des fonctions :

1°) $f : x \mapsto f(x) = \ln(x^2 - 1)$

2°) $f : x \mapsto f(x) = \ln(-x-2)$

3°) $f : x \mapsto f(x) = \ln(x^2 + 4)$

4°) $f : x \mapsto f(x) = \ln(2x - 3) + \ln(5x - 2)$

5°) $f : x \mapsto f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

12

Calculer

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)$

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x^2}{x}\right)$

4°) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

5°) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

6°) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(2x - 2)$

7°) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

8°) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\left(3 + \dfrac{\ln x}{x}\right)$

13

La fonction g est définie par $g(x) = \ln(2x+1)$

1°) Déterminer le domaine de définition de g

2°) Calculer la limite de g aux bonnes de son domaine de définition

14

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x \to 0^>} \sqrt{x} \ln x$

2°) $\lim\limits_{x \to 0^>} x^2 \ln x$

3°) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

4°) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\ln(x^2-1)$

5°) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ on posera ($x = \frac{2}{x}$)

6°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)$

15

Calculer la dérivée première de chacune des fonctions suivantes.

1°) $g(x) = \ln x - x + 3$

2°) $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

3°) $g(x) = \ln(x^2 - x + 3)$

4°) $g(x) = \ln(1 + x)$

5°) $g(x) = \ln(1 + x)$

6°) $g(x) = \ln(x^2) - \ln x$

7°) $g(x) = (\ln x)^2 - \ln(x^2)$

16

On considère la fonction h définie par $h(x) = \ln x - x$

1°) Calculer la dérivée $h'(x)$ puis étudier le sens de variation de h

2°) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point A $(1 ; h(1))$

17

On considère la fonction K définie sur $]0, 2[$ par

$K(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{2}$

Montrer que la dérivé K' de K vérifie pour x appartenant à $]0, 2[$

$K'(x) = 2x(\ln x + 1)$

18

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

a- Déterminer leurs domaines de définition

b- Déterminer les dérivées première $g'(x)$ et $f'(x)$

c- Etudier le sens de variation puis dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.

19

On donne la fonction h suivante telle que :

$h(x) = \ln(4 - x^2)$

d- Déterminer le domaine de définition de h

e- Déterminer la dérivée première $h'(x)$

f- Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation

PROBLEMES

20

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x - \ln x$.

1- Donner le domaine de définition de f et trouver les limites aux bornes du domaine
2- Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
3- Montrer que la courbe représentative de f admet une branche parabolique dont on précisera l'équation.
4- Etudier le sens de variation de f.
5- Dresser le tableau de variation
6- Tracer la courbe C_f.

21

On considère les fonctions h et g de la variable réelle x définie par $h(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ et $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)$.

1-a- Etudier le signe de h(x) et résoudre dans IR l'inéquation $h(x) > 0$
b- En déduire le domaine de définition de g.

2- a – Exprimer g'(x) où g' désigne la fonction dérivée de g.
b- Justifier que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-4[$ et $]3\,;+\infty[$

3- a- Etablir le tableau de variation de g
b- Résoudre dans IR les équations $g(x) = 1$ et $g(x) = 0$

22

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + x$.

1- Calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f sur I
2- Déterminer la limite de f aux bornes de l'ensemble de définition et présenter le tableau de variation de f.
3- Déterminer une équation de la tangente (T) à C au point $A(1, f(1))$.
4- Tracer C, (T) et éventuellement les asymptotes.

23

On considère la fonction de IR vers IR définie par :

$f(x) = -1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$;

1°)Déterminer le domaine de définition D de f.

2°). Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3°) Déterminer la dérivée f' de f

4°) Etudier le signe de f'(x) suivant les valeurs de x

5°) Dresser le tableau de variation de f.

6°) Le plan est muni d'un repère orthonormé (0, I, J) (unité graphique 2cm).

Soit (C) la courbe représentative de f

a- Indiquer les droites asymptotes à (C)
b- Tracer la courbe (C).

24

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = -2\ln x + x^2$.

(C_f) désigne la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

1- Etudier les variations de f sur son ensemble de définition D.
2- Construire (C_f).
3- Soit (To) la tangente à (C_f) au point $M(x_0, y_0)$.
a- Déterminer une équation de (To)
b- Déterminer les coordonnées de M_0 pour que (To) soit parallèle à l'axe des abscisses.

25

On considère la fonction f définie sur] 0, +∞[par : $f(x) = x^2 - 3 - 2\ln x$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers +∞. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2(1 - \frac{3}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2})$

3- Calculer la dérivée f' de f. Montrer que : $f'(x) = \frac{2}{x}(x-1)(x+1)$. En déduire le sens de variation de f.

4- Dresser le tableau de variation de f.

26

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 - x\ln x$

1-Donner le domaine de définition de f et trouver les limites aux bornes du domaine

2-Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

3-Etudier le sens de variation de f.

4-Dresser le tableau de variation

5-Tracer la courbe C_f.

27

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$

1-Déterminer l'ensemble de définition D de g.

2-Calculer les limites de g aux bornes de Dg

3-Déterminer la dérivée g' de g

4-Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

5Etudier les branches infinies de f.

6-Tracer C_f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

SIMPLIFICATION - EQUATION – INEQUATION

EXERCICES

1

Simplifier les expressions :

$A = \exp(\ln 4)$

$B = \exp(\ln 2)$

$C = \ln e^6$

$D = \ln e^{-3}$

$E = e^{\ln 2^3}$

$F = \ln e^{1-x}$

$G = e^{2\ln 5}$

2

Calculer :

a: $e^{\ln 3} + \ln e^5$

b: $e^{\ln 5} + \ln e^{-4}$

c : $e^{\ln 6 + \ln 5}$

d : $e^{2\ln 3 - \ln 3}$

3

Calculer:

1°) $I = e^{-x+2} \times e^{2x-2}$

2°) $J = e \times e^{2x+3}$

3°) $K = (e^{x+1})^{-1}$

4°) $L = \frac{e^{4+x}}{e^{-2+x}}$

5°) $M = e^x \times e^{-x}$

6°) $N = (e^{-x})^3$

4

1°) Calculer: $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

2°) On donne $f(x) = xe^x$

Calculer $f(0)$; $f(1)$; $f(\ln 2)$; $f(-1)$

5

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a°) $e^x = 5$

b°) $e^{2x} = 3$

d°) $e^{x-1} = 3$

e°) $e^{-x} = 6$

f°) $e^{3x-3} = e^{2x+4}$

g°) $e^{x-3} = 4$

h°) $\ln(x+3) = -2$

i°) $3\ln(x)^2 + 5\ln x - 2 = 0$

6

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a°) $e^x \leq 2$

b°) $e^x > \frac{1}{3}$

c°) $e^{x+2} < e$

d°) $e^{-x+2} < 4$

e°) $e^{3x+1} < e^{2x+4}$

f°) $e^{2x+3} > e^{-x+1}$

g°) $e^{2x+1} - 1 > 0$

7

1/a°) Résoudre dans IR l'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$

b°) En utilisant la question a°) résoudre dans IR l'équation $e^{2x} + 3e^x - 4 = ($

2/ Résoudre dans IR les équations suivantes

a- $3e^{2x} + 5e^x - 2 = 0$

b- $e^{2x} - 2e^x = -1$

c- $2e^{2x} - 2 = 3e^x$

LIMITES – DERIVEE

EXERCICES

8

Déterminer dans chaque cas la limite en + ∞, en - ∞ et en 0 de la fonction f définie sur IR.

1°) $f(x) = e^{-x+1}$

2°) $f(x) = 5x + e^{-x}$

3°) $f(x) = e^{2x-1}$

4°) $f(x) = e^{3-x}$

5°) $f(x) = e^{x^2+1}$

9

Déterminer dans chaque cas la limite en 0 et en + ∞ de la fonction f définie sur]0,+ ∞[

a°) $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$

b°) $f(x) = \dfrac{2}{e^{-x} + 1}$

c°) $f(x) = 2 - \dfrac{2}{e^x + 1}$

d°) $f(x) = \dfrac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} + 1}$

10

1) Trouver la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction g définie sur IR par $g(x) = x - xe^x$

2) Trouver la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x} - x$

3) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -2 + \dfrac{3}{e^x + 4}$

- Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de Df

- Quelle propriété peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2e^{x}-2}{5e^{x}+3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- a. Montrer que le domaine de définition de f est IR.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire que (C) admet une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.

2- a- Vérifier que, pour tout x, $f(x) = \dfrac{2-2e^{-x}}{5+3e^{-x}}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b- En déduire que (C) admet une asymptote (Δ') dont on précisera une équation

c- Vérifier que pour tout réel x.

$f(x) - \dfrac{2}{5} = \dfrac{-16}{5(5e^{x}+3)}$

En déduire la position de (C) par rapport à (Δ').

12

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 1 + \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- Détermine le domaine de définition D de g.

2- Calculer les limites de g aux bornes de D.

4- Démontrer que la droite (D) d'équation y = 2x+1 est asymptote à (C) en $-\infty$.

5- Etudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote.

13

Dans chacun des cas calculer la dérivée de la fonction f.

1- $f(x) = (x^2+2x+1)\, e^{x}$ sur IR ; 2- $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$

3- $f(x) = \ln(e^{x}+1)$ sur IR ; 4- $f(x) = (x+1)\, e^{-x}$ sur IR

5- $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{x}-2}$ sur $]\ln 2 ; +\infty[$; 6- $f(x) = x\, e^{x^2+x-1}$ sur IR

14

Soit la fonction définie de IR ver IR par $h(x) = 2e^{x} - x + 1$.

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2cm.

1°) Déterminer le domaine de définition D_h de h

2°) Calculer les limites aux bornes de D_h.

3°) a- Déterminer la fonction dérivée h' de h

b- Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation

4°) a- Déterminer l'asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

b-Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu

c- Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation y =-x + 1

d-Tracer (C)

5°) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) la droite (Δ) et les droites d'équation x = 0 et x = 2

15

Le plan est muni repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique : 2 cm. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = (2x - x^2)e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2°) a- Etudier sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ le signe de $A(x) = (x^2 - 4x + 2)$.

b- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

c- Construire (T) et (C).

16

[illegible] la fonction définie sur IR par :

$g(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 4e^{x} + 3x$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1°) a- Déterminer la dérivée g' de g

b- Résoudre dans IR l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$; puis l'équation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

c- En déduire le signe de g'(x) puis le sens de variation de la fonction g.

2°) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b- Montrer que la droite (D) d'équation y = 3x est asymptote à la courbe C en - ∞

3°) Déterminer $\lim\left(e^x\left(\frac{e^x}{2} - 4\right)\right)$ puis $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$

4°) Dresser le tableau de variation de g.

5°) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse ln2

17

Soit la fonction f définie par :

$f(x) = (ax + b)\,e^x$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé où a ∈ IR et b ∈ IR

1- Déterminer le domaine de définition D de la fonction f

2- Déterminer les réels a et b pour que la courbe (C) passe par les points A (0, 1) et B(1,0)

3- Dans cette partie, la fonction f est définie par $f(x) = (1-x)e^x$

a- Etudier les variations de la fonction f.

b- Etudier les branches infinies de la courbe (C) de f.

c- Construire la courbe (C) de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

18

Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que

- 4 cm représentent l'unité en abscisse ;
- 1 cm représente l'unité en ordonnée

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ et (C) sa représentation graphique.

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer la limite de f en $-\infty$

En déduire que la droite (D) d'équation y=-2 est asymptote à (C)

c) Démontrer que : pour tout nombre réel x, $f(x)=e^x(e^x-1)-2$

En déduire la limite de f en $+\infty$

2- a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) Démontrer que :

Pour tout nombre réel x, $f(x)=e^x(2e^x-1)$

En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3- a) Démontrer que :

pour tout nombre réel x, $f(x)=(e^x-2)(e^x+1)$

b) Etudier l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses

4- construire avec soin (C)

19

Soit f la fonction f définie sur IR par :

$f(x)=(ax+b)e^{-x+1}-1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ;J).

1- Déterminer les réels a et b pour que la (D) : y=-3x soit parallèle à la tangente T à (C) au point A(1 ;0).

2- On admet que $f(x)=(3-2x)\,e^{-x+1}-1$

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Démontrer que : ∀ x ∈ IR ; $f'(x) = (2x-5)e^{-x+1}$

c) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3- Construire (T) et (C)

20

On considère la fonction de IR vers IR définie sur]0, + ∞ [.

$f(x) = -\frac{1}{x} + e^x$

1°)Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2°) Déterminer la dérivée f' de f

3°) Etudier le signe de f'(x) .

4°) Dresser le tableau de variation de f.

5°) Le plan est muni d'un repère orthonormé (0, I, J) (unité graphique 2cm).

Soit (C) la courbe représentative de f

Tracer la courbe (C).

21

On considère la fonction f définie de IR vers IR par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1- Déterminer le l'ensemble de définition D de la fonction f

2- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définiti

3- a- Etudier les variations de la fonction f.

b- Etudier les branches infinies de la courbe (C) de f.

c- Construire la courbe (C) de f dans le repère orthonormé $(o, i$

SEQUENCE 1 :

ENTIERS NATURELS

- ✓ *Système de numération*
- ✓ *Divisibilité dans le système décimal*
- ✓ *Raisonnement par récurrence*

1-1 - SYSTEME DE NUMERATION

Base :

Soit **b** un entier supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel x non nul s'écrire de façon unique comme somme de puissances de **b**.

$$x = a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$$

avec : $0 \leq a_p < b$; $0 \leq a_{p-1} < b$; ...... $0 \leq a_1 < b$; $0 \leq a_0 < b$

On dit que l'entier naturel x s'écrit

$a_p\, a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0$ en base b. ou $\overline{a_p\, a_{p-1} \ldots\, a_1 a_0}^{\,b}$

Exercice résolu 1
Ecris l'entier naturel 109 en base 2 puis en base 8

Résolution

109 en base 2 :

Effectuons les divisions successives par 2

$109 = \overline{1101101}^2$

- 109 en base 8

  Effectuons les divisions successives par 8

  $109 = \overline{155}^8$

Exercice résolu 2

Dans le système binaire (base2) un nombre N s'écrit $\overline{1101001}$

Ecris ce nombre N dans le système décimal.

Résolution :

$N = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$N = 105$

1-2- Divisibilité dans le système décimal

Critère de divisibilité

Critère de divisibilité par 2 ou par 5

- Un nombre entier est divisible par 2 si et seulement si, le dernier chiffre de sa représentation décimale est **0,2,4,6 ou 8.**
- Un nombre entier naturel est divisible par 5 si et seulement si, le dernier chiffre de sa représentation décimale est **0 ou 5.**

Critère de divisibilité par 3 ou par 9 :

Un nombre entier naturel est divisible par 3 (resp par 9) si et seulement si, la somme des chiffres de sa représentation décimale est divisible par 3(resp. par 9)

Exercice résolu

On donne les nombres entiers naturels suivants dans le système décimal :
21105 ; 145x ; 202 ; 4554 ; 1053 ; 1002 ; 35721

1- Identifie en utilisant les critères de divisibilité
a- Les nombres divisibles par 2
b- Les nombres divisibles par 2 et 3
c- Les nombres divisibles par 5 et 9
d- Les nombres divisibles par 3 et 9
2- Trouve le chiffre x pour que 145x écrit dans la base décimale. soit divisible par 2 et 3.

Résolution

1-a- Les nombres divisibles par 2 : 202 ; 4554 ; 1002

b- Les nombres divisibles par 2 et 3 : 4554 ; 1002

c- Le nombre divisible par 5 et 9 : 21105

d) Le nombre divisible par 3 et 9 : 21105 ; 4554 ; 1053 ; 35721

2) Le chiffre x pour que 145x soit divisible par 2 et 3

145x divisible par 2 si et seulement si $x \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$

x	145x	Divisible par 3 ?
0	1450	Non
2	1452	Oui
4	1454	Non
6	1456	Non
8	1458	Oui

145x est divisible par 2 et 3 si et seulement si $x \in \{2 ; 8\}$

1-3 Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition p (n) qui concerne un entier naturel n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n, on procède en deux étapes.

- On démontre que p (x_0) est vraie
- On démontre que : pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0 , si p (k) est vraie alors p (k +1) est vraie

Exercice résolu :

Etablir par récurrence que

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Résolution

Etablissons par récurrence que

$1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Pour n=1 on a $1=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$
  d'où la propriété est vraie à l'ordre n=1
- Pour $n \in IN^*$; supposons que $1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et

  démontrons que $1+4+9+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$1+4+9+\cdots+(n+1)^2=1+4+9+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right]$

$=(n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]$

$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

$=(n+1)\frac{2(n+2)(n+\frac{3}{2})}{6}$

$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

d'où $1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ENTIERS NATURELS

EXERCICES

1

On considère les nombres entiers naturels suivants :

42 ; 151 ; 72 ; 428 ; 3125.

Donne l'écriture de chacun de ces nombres en base 2 ; 3 ; 5 et 8.

2

Les nombres x *et* y s'écrivent respectivement en base 3 et 5. 12121121 et 31010

Déterminex x *et* y.

3

Deux nombres A et B s'écrivent respectivement en base 2 1001001 et 101011

Ecris A et B en base 3.

4

1) Un nombre A s'écrit en base 5 423

Ecris dans le système décimal le nombre A

2) Ecris le nombre 64206 en base 16

5

Un nombre entier naturel A s'écrit dans le système binaire1x01y11 ;

1- Sachant que x est supérieur à y déterminer x et y.
2- Déterminer A

6

On donne les nombres suivants : 3058 ; 9420 ; 35721

Identifie les nombres divisibles par 2 ou par 5 ; 3 ou par 9.

7

Dans le système décimal un nombre entier N s'écrit $x43y$.

Détermine les couples (x , y) tel que N soit divisible par 2 et par 9.

8

Dans chacun des cas suivants détermine le nombre x pour que le nombre A soit divisible par 3 mais pas par 9.

a) A= $42x5$; b) A= $348x$; c) A= $7x32$

9

Démontre par récurrences que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3

On à : $n^2 > 2n + 1$

10

Démontre par récurrence que

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

SEQUENCE 2 :

SUITES NUMERIQUES

- ✓ *Généralités*
- ✓ *Suites arithmétiques*
- ✓ *Suites géométriques*

2-1-GENERALITES

Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de IN (ou une partie de IN) vers IR.

On note :

U : E → IR

n $\alpha U(n)$

U(n) est la notation fonctionnelle et U_n est la notation indicielle.

L'expression (U_n) est appelée la suite de terme général U_n

- Si le terme général d'une suite est fonction de n, on dit que (U_n) est définie par une formule explicite.

Exemple : La suite de terme général $U_n = 2n + 3$ est définie par une formule explicite.

- Si le premier terme d'une suite est connu et chaque terme est fonction du précédent, on dit que (U_n) est définie par une formule de récurrence.

Exemple : La suite (U_n) n∈IN définie par :

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases}$ est définie par une formule de récurrence.

2-2- SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

2-2-1-Suites Arithmétiques

2-2-1-1-Définition

Soit $(U_n)_{n\in E}$, une suite numérique.

(U_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que :

Pour tout n élément de E, $U_{n+1}=U_n + r$.

Le nombre réel r est appelé raison de la suite (U_n).

Exemple :

Considérons la suite des entiers naturels impairs.

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{+2} 11 \xrightarrow{+2} 13 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$

On constate que l'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant toujours le même nombre 2. On dit alors que la suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2. De manière générale, lorsqu'on passe d'un terme U_n au terme suivant U_{n+1} en ajoutant toujours un même nombre fixe, on dit que la suite (U_n) est arithmétique.

2-2-1-2-Formule explicite ou expression de U_n en fonction de n

(U_n) est une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout entier naturel n et p

$U_n = U_0 + nr$ **avec U_0 le premier terme.**

$U_n = U_p + (n-p)r$ **avec U_p le premier terme de la suite.**

Exemple : • (U_n) est une suite arithmétique telle que le premier terme $U_0 = 5$ et r = 3 alors on a : $U_n = 5 + 3n$

• (U_n) est une suite arithmétique telle que le premier terme $U_1 = 4$ et r = 2 alors on a :

$$U_n = 4 + (n-1)2$$

$$U_n = 4 + 2n - 2$$

$$U_n = 2n + 2$$

2-2-1-3-Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme S = $U_1 + U_2 + \cdots + U_p$ de p termes consécutifs d'une suite arithmétique est S = $\frac{P(U_1+U_p)}{2}$

S = $\frac{(nombre\ de\ termes)(premier\ terme\ +dernier\ terme)}{2}$

Nombre de termes = Indice du dernier terme – Indice du premier terme +1.

Exemple : Considérons la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 3$ et de raison r = 4

$$U_n = 3 + 4n$$

Calculons les sommes :

S = $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{10}$

S = $\frac{11\,(U_0+U_{10})}{2}$ avec $U_{10} = 3 + 4(10)$

$$U_{10} = 43$$

S = $\frac{11\,(3+43)}{2}$

S = 253

S' = $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

S' = $\frac{(n+1)\,(U_0+U_n)}{2}$

S' = $\frac{(n+1)\,(3+3+4n)}{2}$

S' = $\frac{(n+1)\,(4n+6)}{2}$

2-2-2-Suites géométriques

2-2-2-1-Définition

Soit $(U_n)_{n\in E}$, une suite numérique

(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que :

Pour tout n élément de E, $U_{n+1}=qU_n$

Le nombre réel q est appelé raison de la suite (U_n).

Exemple :

Considérons la suite des puissances de 2.

$$2^0=1 \xrightarrow{\times 2} 2^1=2 \xrightarrow{\times 2} 2^2=4 \xrightarrow{\times 2} 2^3=8 \xrightarrow{\times 2} 2^4=16$$

On passe d'un terme à son suivant en multipliant toujours par le même nombre

On dit alors que cette suite est géométrique de raison 2.

De manière générale, lorsqu'on passe d'un terme U_n au terme suivant U_{n+1} en multipliant toujours par un même nombre fixe, on dit que la suite (U_n) est géométrique.

2-2-2-2-Formule explicite ou expression de U_n en fonction de n

(U_n) est une suite géométrique de raison q. Alors pour tout nombre entier naturel n, m et p.

$U_n = U_0q^n$ **avec U_0 le premier terme de la suite.**

$U_m = U_pq^{m-p}$ **avec U_p le premier terme de la suite.**

Exemple :

- (U_n) est une suite géométrique telle que le premier terme $U_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$ alors on a : $U_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- (U_n) est une suite géométrique telle que le premier terme $U_1 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$ alors on a :

$$U_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

2-2-2-3-Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison q.

- **Si $q \neq 1$; alors $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$**

On pose $Sn = U_m + U_{m+1} + \dots + U_n$

$Sn = U_m \frac{1-q^{(n-m+1)}}{1-q}$

$m \in IN; n \in IN; m < n$

Somme = 1[er] terme de la somme $\times \frac{1-q^{(nombre\ de\ terme)}}{1-q}$

- **Si q=1 ; alors $S = n \times a$**

Exemple : Considérons la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $q = \frac{3}{4}$

Calculons les sommes :

$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$

Nombre de termes = 10 – 0 + 1 = 11

$S = 2 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}{1-\frac{3}{4}} S = 8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right]$

$S' = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$S' = 2 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} S' = 8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

2-3- SENS DE VARIATION D'UNE SUITE NUMERIQUE

2-3-1-Définition :

- La suite (U_n) est dite croissante lorsque, pour tout nombre entier naturel n, $(U_n) \leq (U_{n+1})$
- La suite (U_n) est dite décroissante lorsque, pour tout nombre entier naturel n, $(U_n) > (U_{n+1})$

2-3-2-Sens de variation d'une suite définie par une formule explicite

Pour étudier le sens de variation d'une suite définie par une formule explicite, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Méthode algébrique

Etudier le signe de $(U_{n+1} - U_n)$

- Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors la suite (U_n) est croissante
- Si $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors la suite (U_n) est décroissante

Méthode fonctionnelle

Lorsque $U_n = f(n)$; étudier le sens de variation de la fonction f :

- Si f est croissante sur $]n_0; +\infty[$, alors la suite (U_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si f est décroissante sur $]n_0; +\infty[$, alors la suite (U_n) est décroissante à partir du rang n_0.

2-4- CONVERGENCE D'UNE SUITE

2-4-1-Limite d'une suite numérique

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Si f a une limite en $+\infty$, alors U_n a une limite en $+\infty$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)$$

2-4-2-Convergence

2-4-2-1-Définition

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

1- **Convergence d'une suite arithmétique.**

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r non nulle et de premier terme U_0. Pour tout nombre entier naturel n on a :

$$U_n = U_0 + nr$$

- Si r =0, alors la suite (U_n) converge vers U_0
- Si r > 0, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ par suite, la suite (U_n) diverge vers $+\infty$.
- Si r < 0, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ par suite, la suite (U_n) diverge vers $-\infty$.

2- 4-2-2-Convergence d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.

Pour tout nombre entier naturel n on a : $U_n = U_0 q^n$

- Si q > 1, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si q =1, alors q^nest constante et $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si -1< q < 1, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite

Conséquence :

- Si q = 1, la suite (U_n) converge et sa limite est U_0
- Si -1 < q <1, la suite (U_n) converge et sa limite est 0.

SUITES ARITHMETIQUES

EXERCICES

1

Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$U_n = 5n + 1$; $V_n = -2n + 8$ et $W_n = \frac{1}{4}n - 1$

Montre que les suites (U_n) ; (V_n) et (W_n) sont arithmétiques. Précise la raison r et le premier terme.

2

On considère la suite V_n définie par $V_n = 4n + 7$ pour tout nombre entier naturel n,

Donne l'expression en fonction de n de (V_{n+1}) ; $(V_n + 1)$; (V_{n+2}) et V_{n^2}.

3

On considère la suite W_n définie par : $W_n = 7 - 3n$; $n \in IN$

1- Calculer W_0 ; W_1 ; W_2 ; W_3
2- Montrer que la suite (W_n) vérifie la relation de récurrence : $W_{n+1} = W_n - 3$

4

a- (U_n)est une suite arithmétique telle que $U_3 = 4$ et $U_{10} = -10$. Calcule U_0 ; U_5 ; U_{15}

b- (U_n) est une suite arithmétique telle que $U_5 = 2$ et $U_{15} = 22$. Calcule U_1 ; U_{12} ; U_{20}

c- (U_n)est une suite arithmétique telle que $U_9 = \frac{3}{2}$ et $U_{18} = 4$. Calcule U_6 ; U_{14} ; U_{20}

5

Dans chacun des cas, (U_n)est une suite arithmétique

a- $U_0 = 1$ et $U_{25} = 51$. Calcule r puis U_{2000} ; b-$U_0 = 0$ et $U_{20} = 20$. Calcule r puis U_{2057}

c- $U_5 = 2$ et $U_{10} = -18$. Calcul r puis U_{52} ; d- $U_{23} = 20$ et $U_{30} = -1$. Calcul r puis U_0.

6

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r

a- $U_0 = 1$ et r = 4 Calcule $S = U_3 + U_4 + \cdots + U_{2000}$
b- $U_0 = -3$ et r = -2 Calcule $S = U_{25} + U_{26} + \cdots + U_{125}$
c- $U_0 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$ Calcule $S = U_{100} + U_{101} + \cdots + U_{1000}$

7

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_5 = 8$ et $U_{10} = 28$.

1) Calcule r et U_0
2) Exprime U_n en fonction de n
3) Calcule $\lim_{n \to +\infty} U_n$
4) Calcule la somme $S = U_0 + U_2 + U_4 + \cdots + U_{98} + U_{100}$

8

On considère la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ définie par $V_n = n + 5$

1- Détermine V_1 ; V_3 et V_5
2- Montre que (V_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
3- Calcule la somme $S = V_1 + V_2 + \cdots + V_{30} + U_{31}$
4- Détermine le nombre n tel que $V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 21$

9

Fatou place, à intérêts simples, la somme de 1 000 000 au taux mensuel de 0,5%

On désigne par V_n, la valeur acquise par le capital au bout de n mois de placement.

1- Calcule V_1; V_2 et V_3
2- Exprime V_{n+1} en fonction de V_n. Déduis-en que (V_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.
3- Calcule la valeur acquise par le capital au bout de 12 mois de placement
4- Au bout de combien de temps le capital atteindra-t-il la valeur de 1 600 000 FCFA ?

10

Une entreprise commercialise le premier mois du démarrage de ses activités 2 500 unités de son produit. Les prévisions ont montré que les ventes augmenteront chaque mois de 500 unités et ceci pendant 2 ans.

On désigne par U_n la quantité de produite commercialisée au bout de n mois.

1- Calcule U_1; U_2 et U_3
2- Exprime pour tout nombre entier naturel n, U_n en fonction de n
3- Au bout de combien de mois la quantité de produits vendus sera-t-elle de 4 500 unités
4- Calcule la quantité totale de produits vendus pendant les 12 premiers mois d'activité.

11

En 2005, 400 policiers étaient en fonction dans une région. Il a été prévu le recrutement de 200 policiers tous les ans.

1- Détermine le nombre de policiers qui seront en fonction en 2006 ; 2007.
2- On désigne par C_n le nombre de policiers en fonction au bout de n années.
   a. Exprime C_n en fonction de n
   b. Quel est le nombre total de policiers en fonction pour l'année 2010 ?
   c. Au bout de combien d'année le nombre de policiers atteindra 6 000 ?
3- Quel est le nombre total de policiers en fonction de l'année 2005 à l'année 2014.

SUITES GEOMETRIQUES
EXERCICES

1

Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$; $\quad V_n = \frac{4^{n+2}}{5^n}$ $\quad$ et $\quad W_n = \frac{5^n}{4^{n+1}}$

Montre que les suites (U_n) ; (V_n) et (W_n) sont géométriques. Précise la raison q et le premier terme.

2

a- (U_n)est une suite géométrique de raison q telle que $U_5 = 1$ et $U_7 = 4$. Calcule U_6 ; U_0 ; U_{20}.
b- (U_n)est une suite géométrique de raison q telle que $U_{10} = 6$ et $U_8 = 2$. Calcule U_{14} ; U_9 ; U_4.
c- (U_n)est une suite arithmétique de raison q telle que $U_0 = 3$ et $U_2 = 48$. CalculeU_1 ; U_4 ; U_7

3

(U_n) est une suite géométrique de raison q

a- $U_5 = 3$ et q=3. Calcule U_{10} et U_0
b- $U_9 = 7$ et q=$\frac{3}{2}$. Calcule U_{13} et U_6
c- $U_{10} = 2$ et $U_{12} = 32$. Calcule q puis U_7.
d- $U_{51} = 3$ et $U_{54} = 10$. CalculeU_{57} puis U_{48}.

4

(V_n) est une suite géométrique de raison q

a- $V_0 = 1$ et q= 2. Calcule la somme $S_1 = V_3 + V_4 + \cdots + V_{10}$
b- $V_0 = -2$ et q=$\frac{3}{4}$. Calcule $S_2 = V_0 + V_1 + \cdots + V_8$.
c- $V_0 = \frac{2}{3}$et q=$\frac{3}{2}$. Calcule $S_3 = V_{10} + V_{11} + \cdots + V_{100}$.

5

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2 + \frac{3}{U_n}$ pour tout $n \in IN$

1- Calcule U_1 ; U_2 etU_3. La suite (U_n) est-elle géométrique ?

2- Soit V_n la suite définie par $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-3}$.

a- Calcule V_0 ; V_1 ; V_2 et V_3

b- Exprime V_{n+1} en fonction de V_n ; Que peut-on déduire pour la suite (V_n)

3- Exprime U_n en fonction de n. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

6

On considère une suite (U_n) définie sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$$

On pose $V_n = U_n - 3$

1- Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0

2- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3- Pout tout $n \in$ IN on pose :

$$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_2$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

7

Soit la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$. On pose $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

1- Montre que (V_n) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

2- Exprime V_n en fonction de n. Déduis-en l'expression de U_n en fonction de n.

3- Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

8

Jonas loue un studio au 1er Janvier 2000 ; le loyer annuel payé pour l'année 2000 est L_0 = 12 000F. Pour chacune des années qui suivent, le loyer annuel subit une augmentation de 10% par rapport au Loyer de l'année précédente. On appelle Ln le loyer versé pour l'année 2000+n.

1- Calcule L_1 le loyer versé en 2001

2- a) Exprime L_{n+1} en fonction de Ln

b) Déduis-en que (Ln) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison

c) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$

3- On appelle S le montant de loyer versé par Jonas pendant 20 ans.

$S = L_0 + L_1 + \ldots\ldots + L_{19}$. Calcule S.

9

Un pays A a au premier janvier 2010 une population estimée à 3 000 000 d'habitants. La population de ce pays s'accroît de 2% par an.

On note pour tout entier naturel n, U_n la population exprimée en millions d'habitants au premier janvier de l'année 2010 + n.

1- Précise U_0

2- a) Exprime U_{n+1} en fonction de U_n.
b) Déduis-en que (U_n) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison.

3- a) Exprime U_n en fonction de n
a) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

10

On considère la suite (U_n) à termes positifs, définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1+4U_n}{4+U_n} \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose $V_n = \frac{-1+U_n}{1+U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1- Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

2- En déduire que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3- Exprimer V_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

4- Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

SENS DE VARIATION ET LIMITES

EXERCICES

1

Etudie le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

a- (U_n) est une suite définie par $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$

b- (U_n)est une suite définie par $U_n = \frac{3+5n}{6} - 1$

c- (U_n)est une suite définie par $U_n = n^2 + n$

d- (U_n)est une suite définie par $U_n = n^2 - 8n$

e- (U_n)est une suite géométrique de premier terme -1 et de raison 2.

f- (U_n)est une suite géométrique de premier terme 4 et de raison ¼

g- (U_n)est une suite définie par $U_n = -\frac{3}{n+1}$.

2

Etudie le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous :

a- $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases}$ b- $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}U_n \end{cases}$

c- $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 6 \end{cases}$ d- $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = U_n - 1 \end{cases}$

3

Dans chacun des cas suivants, détermine la limite de la suite (U_n) en $+\infty$

a- $U_n = -2n + 3$ b- $U_n = \frac{1}{3}n - 4$

c- $U_n = \frac{n-5}{2n+1}$ d- $U_n = -1 + \frac{2}{-n+1}$

4

Dans chacun des cas suivants, détermine la limite de la suite (U_n) en $+\infty$

a- $U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$; b- $U_n = 10\left(\frac{1}{4}\right)^n$; c- $U_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$;

d- $U_n = (0{,}5)^n$; e- $U_n = -5\left(\frac{4}{3}\right)^n$; f- $U_n = (-0{,}25)^n$

5

Détermine la limite de la suite (U_n)en $+\infty$.

a) $U_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n}$; b) $U_n = \frac{5^n}{4^{n+2}}$

SEQUENCE 3 :

STATISTIQUE

- ✓ *Données statistiques à une variable*
- ✓ *Données statistiques à deux variables*.

3-1 –DONNEES STATISTIQUES A UNE VARIABLE

3-1-1- Définition de la statistique et Vocabulaire

Selon Albert MONTALON la statistique est une science qui a pour objet la collection, l'analyse puis l'interprétation d'un ensemble de fait, d'observation relatif à un même phénomène et susceptible d'être caraetérisé par un nombre.

Considérons l'ensemble des élèves de la Tle AB et leur note obtenue en mathématiques appliquées. On dira que l'ensemble des élèves de la Tle AB est **la population étudiée**. Chaque élève de cette classe est appelé **Individu**.

L'étude porte sur la note obtenue en mathématiques appliquées; c'est le **caractère** étudié.

On distingue deux types de caractères à savoir:

- **Les Caractères quantitatifs**
- **Les Caractères qualitatifs**

Le caractère est dit quantitatif lorsque les données sont des grandeurs mesurables.

Exemple : Taille des élèves, le poids etc.

Le caractère est dit qualitatif si les données sont des grandeurs non mesurables donc ayant une qualité.

Exemple : la langue parlée, la couleur de la peau

Les différentes valeurs prises par un caractère sont appelées **modalité**. L'effectif d'une modalité est le nombre de fois qu'apparaît cette modalité.

Exemple : Soit la série : 2 ; 5 ; 12 ; 15 ; 5 ; 7 ; 8 ; 7

Tableau 1

Modalités	2	5	7	8	12	15	**Total**
Effectifs	1	2	2	1	1	1	8

La fréquence d'une modalité est le rapport entre son effectif et l'effectif total. Elle s'exprime en pourcentage (%).

3-1-2- Grandeurs statistiques

3-1-2-1-Indicateurs de positions :

Le mode :

On appelle mode d'une série statistique, la modalité ayant le plus grand effectif.

Exemple : On considère la série

Taille (cm)	155	160	167	171	185	195	Total
Effectifs	12	15	08	20	02	01	58

Le mode de cette série est 171.

Lorsqu' il s'agit d'une série statistique présentant un regroupement en classes, la classe modale est la classe ayant le plus grand effectif ; et le centre de cette classe est appelé mode de la classe :

Exemple : [illegible]

Ages	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Effectifs	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Classe modale : [25 ; 30[

Mode = $\frac{25+30}{2}$ =27,5

Moyenne

Soit N l'effectif total de la population étudiée. On appelle moyenne d'une série statistique discrète, le nombre $\overline{X}$ définie par :

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+\cdots\ldots+x_pn_p}{N}$$

Pour une série statistique continue, les modalités x_i sont déterminées par les centres de classe

$$x_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$$

Exemple 1: Déterminons la moyenne de la série statistique relative à la taille des élèves.

$$\bar{x} = \frac{(155 \times 12)+(160 \times 15)+(167 \times 08)+(171 \times 20)+(185 \times 02)+(195 \times 01)}{58}$$

$\bar{x}$ =165,18 cm.

La taille moyenne des élèves est de 165,18cm

Exemple 2: Déterminons la moyenne de la série statistique relative à l'âge des employés.

Ages des employés *xi*	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	Total
Centre de classe	17,5	22,5	27,5	32,5	
Effectif ni	07	02	12	11	32

$$\bar{x} = \frac{(17,5 \times 7)+(22,5 \times 2)+(27,5 \times 12)+(32,5 \times 11)}{32}$$

$\bar{x}$=26,71

L'âge moyen des employés est sensiblement égal à 27ans.

Médiane

Pour déterminer la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif discret, d'effectif total N, on peut procéder comme suit :

- Déterminer la modalité x_1 correspondant au premier effectif cumulé croissant supérieur ou égal à **N/2**

- Déterminer la modalité x_2 correspondant au premier effectif cumulé décroissant supérieur ou égale à **N /2**

Calculer $\mathbf{M_e} = \frac{x1+x2}{2}$

Exemple : Déterminons la médiane relative à la taille des élèves

Construisons le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissant.

Taille des élèves	155	160	167	171	185	195
Effectif	12	15	08	20	2	1
Effectif cumulé croissant	12	27	35	55	57	58
Effectif cumulé décroissant	58	46	31	23	03	1

$$\frac{N}{2} = \frac{58}{2} = 29$$

- Le premier effectif cumulé croissant supérieur à 29 est **35 ; la modalité est 167.**
- Le premier effectif cumulé décroissant supérieur à 29 est **31 ; la modalité correspondante est 167**

  La médiane de la série est :

$$\mathbf{M_e} = \frac{167+167}{2}$$

$\mathbf{M_e} = 167$

Pour déterminer la médiane M_e d'une série statistique à caractère quantitatif continu, on peut aussi procéder comme suit.

1er procédé :

Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes. La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50%.

2ème procédé :

Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.

3-1-2-2-Indicateurs de dispersion :

Variance :

On appelle variance d'une série statistique, la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

C'est aussi le nombre réel positif noté V(x) définie par

$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2$. On démontre que : $V(x) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i)^2\right] - \bar{x}^2$

- **Ecart-types**

L'écart type de la série est le nombre réel sigma de x noté σ(x) défini par

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$ où V(x) est la variance de la série.

Exercice Résolu :

On considère les données du **tableau suivant**

Modalités	2	5	7	8	12	15	Total
Effectifs	1	2	2	1	1	1	8

1°) Calculer la moyenne de cette série

2°) Calculer la variance, en déduire l'écart type.

Résolution

1°) Calculons la moyenne de cette série

Tableau 2

Modalités x_i	2	5	7	8	12	15	**Total**
Effectifs n_i	1	2	2	1	1	1	**8**
$x_i n_i$	2	10	14	8	12	15	**61**
$x_i^2 n_i$	4	50	98	64	144	225	**585**

$$\bar{x} = \frac{(2\times1)+(5\times2)+(7\times2)+(8\times1)+(12\times1)+(15\times1)}{1+2+2+1+1+1} \quad \bar{x} = \frac{61}{8} = 7{,}625$$

2°) Calculons la variance et l'écart-type

$$V(x) = \frac{(2)^2\times1+(5)^2\times2+(7)^2\times2+(8)^2\times1+(12)^2\times1+(15)^2\times1}{1+2+2+1+1+1} - (7{,}625)^2$$

$V(x) = \frac{585}{8} - (7{,}625)^2$ $\quad V(x) = 73{,}125 - 58{,}140$ $\quad V(x) = 14{,}985$

$\sigma(x) = \sqrt{14{,}985}$ $\sigma(x) = 3{,}271$

3-2- DONNEES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

3-2-1-Définition

On peut étudier à la fois sur une population deux caractères quantitatifs. La modalité associée à chaque individu est alors un couple de nombre réel. On obtient ainsi une série statistique à deux caractères quantitatifs.

On a consigné dans le tableau ci-dessous la note obtenue au Baccalauréat par 10 candidats de la série G en étude de cas et en mathématiques appliquées.

Tableau 3

Note en Etude de cas (x)	5	8	10	16	10	13	8	17	13	16
Note en Maths Appliquées (y)	3	5	6	14	9	12	6	14	9	12

x est la note obtenue en Etude de cas.

$M_x = \{5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 10 ; 13 ; 8 ; 17 ; 13 ; 16\}$

y est la note obtenue en mathématiques appliquées.

$M_y = \{3 ; 5 ; 6 ; 14 ; 9 ; 12 ; 6 ; 14 ; 9 ; 12\}$

Ces données permettent de définir deux (02) séries statistiques à un (01) caractère **A=** (x_i, n_i) et **B=** (y_j n_j) qui sont représentés dans les deux tableaux suivants.

Ces deux tableaux représentent la série marginale liée a x et la série marginale liée à y.

*** Série marginale liée à x**

Tableau 4

Modalités	5	8	10	13	16	17	**total**
Effectifs	1	2	2	2	2	1	**10**

*** Série marginale liée à y**

Tableau 5 :

Modalités	3	5	6	9	12	14	**total**
Effectifs	1	1	2	2	2	2	**10**

A chaque couple de Modalité (x_i ; y_j) on associe le nombre $\mathbf{n_{ij}}$ qui a x_i en Etude de cas et y_j en mathématiques appliquées. Le nombre $\mathbf{n_{ij}}$ est appelé l'**effectif** de la modalité (x_i ; y_j).

La série statistique à deux caractères ainsi obtenue qui est notée (x_i ; y_j ; n_{ij}) est représentée par le tableau à **double entrée** ci-dessous.

<u>Tableau</u> 6 :

x_i / y_j	**5**	**8**	**10**	**13**	**16**	**17**	**Total**
3	1	0	0	0	0	0	**1**
5	0	1	0	0	0	0	**1**
6	0	1	1	0	0	0	**2**
9	0	0	1	1	0	0	**2**
12	0	0	0	1	1	0	**2**

14	0	0	0	0	1	1	**2**
Total	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**10**

Les totaux de la dernière ligne de ce tableau sont les effectifs de la série (x_i ; n_i) et ceux **de la dernière colonne** sont les effectifs de la série (y_j, n_j). Ces effectifs sont en marge **du tableau à double entrée** : on dit que les séries statistique (x_i ; n_i) et (y_j ; n_j) sont les **séries marginales de** la série double.

3-2-2-Fréquence marginale, Fréquence normale

❖ Les fréquences marginales sont liées aux séries marginales.

- Celle liée à la série marginale x est donnée par la formule $f_i = \frac{n_i}{N}$

Exemple :$f_1 = \frac{1}{10}$

- Celle liée à la série marginale y est donnée par la formule $f_j = \frac{n_j}{N}$.

Exemple :$f_4 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

❖ Les fréquences normales sont liées au tableau à double entrée. Ce sont les fréquences liées au couple de caractère (x_i; y_j). Elles sont données par la formule $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$. Exemple : la fréquence normale au couple de caractère (10 ;9) est $f_{3,4} = \frac{1}{10}$.

3-3- NUAGE DE POINTS ASSOCIES A UNE SERIE STATISTIQUE A DEUX CARACTERES QUANTITATIFS

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Soit (x_i ;y_j ; n_{ij}) une série statistique à deux caractères quantitatifs. A tout couple (x_i ; y_j) on associe le point

M_{ij} (x_i; y_j) du plan. L'ensemble des points M_{ij} ainsi obtenu est appelé **le nuage de point associé à cette série**. On indique à coté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij} de la modalité correspondante. On obtient ainsi une représentation appelée représentation par points pondérés du nuage.

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{P} n_i x_i$ $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{P} n_j y_j$

$\bar{x} = \frac{116}{10}$ $\bar{x} = 11,6$ $\bar{y} = \frac{90}{10}$ $\bar{y} = 9$

$G\begin{pmatrix}11,6\\9\end{pmatrix}$

3-5- AJUSTEMENT LINEAIRE

Ajustement par la méthode de Mayer

Principe

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$ de même effectif et dans l'ordre où les points se représentent.

On détermine le point moyen $\mathbf{G_1}$ lié à $\mathbf{E_1}$ et le point moyen $\mathbf{G_2}$ lié à $\mathbf{E_2}$.

$(\mathbf{G_1G_2})$ est la droite appelée droite d'ajustement par la méthode de Mayer.

On peut déterminer sans difficulté l'équation cartésienne de la droite $(\mathbf{G_1\,G_2})$ qui est sous la forme **ax + b** où $\mathbf{a} = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}}$

Exemples : Considérons les données du tableau 3

Tableau 9

$\mathbf{E_1}$

x_i	y_i
5	3
8	5
10	6
16	14
10	9
49	37

$\bar{x}_1 = \frac{49}{5} = 9,8$

Tableau 10

$\mathbf{E_2}$

x_i	y_i
13	12
8	6
17	14
13	9
16	12
67	53

$\bar{x}_2 = \frac{67}{5} = 13,4$

$\bar{y}_1 = \frac{37}{5} = 7{,}4$ $\qquad$ $\bar{y}_2 = \frac{53}{5} = 10{,}6$

$G_1\begin{pmatrix}9{,}8\\7{,}4\end{pmatrix}$ $\qquad$ $G_2\begin{pmatrix}13{,}4\\10{,}6\end{pmatrix}$

Déterminons a

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{10{,}6 - 7{,}4}{13{,}4 - 9{,}8}$$

$a = 0{,}88$

$(G_1\ G_2) : y = 0{,}88x + b$

$G_1\begin{pmatrix}9{,}8\\7{,}4\end{pmatrix}$ appartient à la droite (G_1G_2) donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

$7{,}4 = 0{,}88\,(9{,}8) + b$

$b = -\,1{,}224$

$(G_1G_2) : y = 0{,}88x - 1{,}224)$

EXERCICES

1

Le tableau ci-dessous donne la répartition de la population active ayant plus 15 ans (en milliers) suivant la catégorie socio-professionnelle (CSP) et suivant le sexe.

Sexes / CSP	Hommes	Femmes	Total
Agriculteurs	495		772
Artisans	1163	530	
Cadres supérieurs	2017		
Profession intermédiaire	2740	2267	
Employés	1719		7494
Ouvriers		1418	
Chômeurs		213	357
Appelés au service national	230	2	
Total	14070	11520	25590

1) Reproduire et compléter ce tableau.
2) Quel est le pourcentage d'hommes agriculteurs dans l'ensemble de la population étudiée ?
3) Quel est le pourcentage de femme cadres supérieur dans l'ensemble de la population étudiée ?
4) Quel est le pourcentage d'ouvrier parmi les hommes ?
5) Quel est le pourcentage d'agriculteurs parmi les femmes ?

2

Le tableau ci-dessous décrit le sexe et *la répartition des loisirs préférés des élèves de* plusieurs classes de terminale.

Loisirs / Sexes	Sport	Lecture	Musique	Danse	Sorties
Masculin	15	8	15	4	11
Féminin	14	19	21	9	20

1) Quel est l'effectif total de la population interrogée ? Combien y a-t-il de garçon ? Combien de filles ?

2) Quel est le pourcentage de garçons préférant le sport dans l'ensemble de la population ?
3) Quel est le pourcentage de garçon préférant le sport parmi les garçons ? Quel est le pourcentage de garçon préférant le sport parmi les élèves préférant le sport ?

3

Le tableau statistique suivant donne la répartition par tranches d'âge des épargnants de fonds dans une structure de placement au Bénin.

Tranche d'âge	[25;30[	[30 ;35[	[35 ;40[	[40 ;45[	45 ;50[	[50 ;55[	[55 ;60[	[60 ;65[
Nombres d'épargnants	48	179	168	155	189	284	187	91

1°) Quelle est la moyenne d'âge des épargnants ?

2°) Quel est l'écart type de l'âge des épargnants.

4

Un centre commercial spécialisé dans l'électroménager propose à ses clients huit modèles de lave-linge. Le tableau ci-dessous donne, pour chacun des huit modèles, le prix de vente à l'unité en milliers de francs et le nombre d'appareil vendus au cours du mois précédent.

Prix x	25	30	35	40	50	55	60	70
Nombres d'appareils vendus y	105	95	80	76	62	56	49	29

1°) Représenter le nuage de points associé à la série double (x_i, y_i)

2°) Calculer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i), et placer G sur le graphique.

5

Sur une même verticale, la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente, conformément au tableau suivent. (x : altitude en km ; y : pression en cm mercure).

x_i	0	1	2	4	6	10
y_i	76	67	59	46	35	20

1- Représenter graphiquement, par un nuage de points, la série statistique. Placer le point moyen G.

2- Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer. Tracer cette droite sur le graphique

1- En déduire l'altitude d'un lieu où la pression atmosphérique est de 30cm de mercure.

6

Le gérant d'un hypermarché, disposant d'un potentiel maximal de 28 caisses enregistreuses, a fait réaliser une statistique sur le temps moyen (en minutes) d'attente d'un client à une caisse.

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_i	12,25	12	11,5	11,75	10	10	9,75	9	8,25	8

On suppose qu'il y a toujours au moins 4 caisses ouvertes

1-a- Construire, dans un repère orthogonal le nuage de points associé à ce tableau statistique.

b- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique précédent.

2- Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.

3- En utilisant l'ajustement affine en 2°/ Déterminer

a- Le temps moyen d'attente d'un client à la caisse lorsque 20 caisses sont ouvertes.

b- Le nombre de caisse à ouvrir pour que le temps moyen d'attente d'un client à une caisse soit de 3 minutes.

SEQUENCE 4 :

PROBABILITE

- ✓ *Dénombrement*
- ✓ *Probabilité*

4-1- DENOMBREMENT

4-1-1-Dénombrement d'une application

4-1-1-1-Ensemble fini

Un ensemble fini est un ensemble dont on peut compter le nombre d'éléments.

Exemple : Soit **E** l'ensemble des éléments formés par les lettres de l'alphabet français. On a **E = {a, b, c ....z}**

4-1-1-2-Cardinal d'un ensemble

On appelle cardinal d'un ensemble E noté Card (E) le nombre **n** de ses éléments on a :

Card (E) = n

Exemple = Card (E) = 26

4-1-1-3-Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et F noté E x F l'ensemble formé par les couples de réels (x, y) tels que $x \in E$, $y \in F$.

Card (E x F) = card (E) x card (F)

4-1-1-4-P- Uplet - Arrangement - Permutation - Combinaison

P- Uplet

Soit E un ensemble à **n** éléments et **p** un entier naturel non nul ; on appelle P-Uplet de E tout élément de $(\text{Card}E)^P$; c'est le nombre d'élément $(n)^P$.

Un **P- Uplet** **suppose donc l'ordre des éléments avec la possibilité de répétition.**

Arrangement

Soit E ensemble à **n** élémen ; **p** un entier naturel non nultel que **p ≤ n**.

On appelle arrangement de **p** élément de E tout P-Uplet d'élément de E deux à deux distincts. Il est noté A_n^P

Un P- Arrangement suppose donc l'ordre des éléments sans la répétition.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)........(n-p+1)$$

Notation factorielle :

Soit **n** un entier naturel ; on appelle factorielle **n** noté **n !** le réel définie par

n ! = n (n-1) (n-2) .... x 2 x 1

Par convention : **0 ! = 1**

Propriétés

* **n ! = n (n – 1) !**

* $A_n^P = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Permutation

C'est le nombre d'arrangement de n éléments dans un ensemble contenant n éléments.

Il est noté A_n^n . $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$

Exercice Résolu

On jette simultanément 3 dés cubiques différenciés A ; B ; C ayant chacun 6 faces. Les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles.

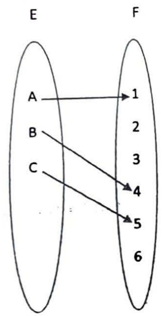
1°) Dénombrer tous les résultats possibles.

2°) Dénombrer tous les résultats où les 3 faces sont identiques.

3°) Dénombrer tous les résultats où les 3 faces sont deux à deux distinctes.

Solution

1°) Dénombrons tous les résultats possibles. Soit N_1 le nombre des résultats possibles.
Un exemple de résultat possible est :



On peut considérer cet exemple comme une application de l'ensemble E = {A ; B ; C} vers l'ensemble F = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Card E = 3 et Card F = 6

$N_1 = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$

$= (6)^3$

$N_1 = 216$

2°) Dénombrons tous les résultats où les 3 faces sont identiques.

Soit N_2 le nombre des résultats.

Un exemple de résultat possible est :

$A \to 1$

$B \to 1$

$C \to 1$

$N_2 = 6$

$N_2 = \text{Card } F = 6$

3°) Dénombrons tous les résultats où les 3 faces sont 2 à 2 distinctes.

Soit N_3 le nombre des résultats

$$N_3 = A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 6\times5\times4$$

$N_3 = 120$

Combinaison

Soit E un ensemble à **n** éléments ; **p** un entier naturel non nul tel que **p ≤ n**. On appelle combinaison de **p** éléments de E tout sous ensemble de E ayant **p** éléments.

Dans la combinaison l'ordre des éléments importe peu.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriété :

$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$

Exercice résolu

De combien de façon peut-on choisir 3 filles dans un concours de beauté ayant enregistrés 20 participantes.

Solution

Soit N le nombre de façons

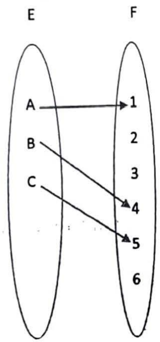
$N = C_{20}^3$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\times(20-3)!} = \frac{20!}{3!\times17!} = \frac{20\times19\times18\times17!}{3!\times17!}$$

$$= \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}$$

Solution

1°) Dénombrons tous les résultats possibles. Soit N_1 le nombre des résultats possibles.
Un exemple de résultat possible est :



On peut considérer cet exemple comme une application de l'ensemble E = {A ; B ; C} vers l'ensemble F = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Card E = 3 et Card F = 6

$N_1 = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$

$= (6)^3$

$N_1 = 216$

2°) Dénombrons tous les résultats où les 3 faces sont identiques.

Soit N_2 le nombre des résultats.

Un exemple de résultat possible est :

$A \rightarrow 1$

$B \rightarrow 1$

$C \rightarrow 1$

$N_2 = \text{Card } F = 6$

$N_2 = 6$

3°) Dénombrons tous les résultats où les 3 faces sont 2 à 2 distinctes.

Soit N_3 le nombre des résultats

$$N_3 = A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 6\times5\times4$$

$N_3 = 120$

Combinaison

Soit E un ensemble à **n** éléments ; **p** un entier naturel non nul tel que **p ≤ n**. On appelle combinaison de **p** éléments de E tout sous ensemble de E ayant **p** éléments.

Dans la combinaison l'ordre des éléments importe peu.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriété :

$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$

Exercice résolu

De combien de façon peut-on choisir 3 filles dans un concours de beauté ayant enregistrés 20 participantes.

Solution

Soit N le nombre de façons

$N = C_{20}^3$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\times(20-3)!} = \frac{20!}{3!\times17!} = \frac{20\times19\times18\times17!}{3!\times17!}$$

$$= \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}$$

C_{20}^{3} = 1140 façons

4-1-2-Notion sur les tirages

On dispose de E, ensemble à **n** éléments et on désire tirer au hasard **p** élément de E.

On distingue trois sortes de tirages

- tirage simultané
- Tirage successif sans remise
- tirage successif avec remise :

4-1-2-1-Tirage simultané

On tire une seule fois **p** élément de E. Un résultat est donc une combinaison C_n^P.

4-1-2-2-Tirage successif sans remise

On tire les **p** éléments de E un à un (1 à 1) sans remettre un élément déjà tiré pour avoir les **p** éléments. Un résultat est donc un arrangement A_n^P

4-1-2-3-Tirage successif avec remise

On tire un élément de E, on le remet dans E ainsi de suite jusqu'au tirage de **p** éléments de E. Le même élément peut être tiré les **p** fois ; un résultat est n^P.

NB :

*Etant donné un ensemble fini E de cardinal **n** et un entier naturel non nul **p**, l'objectif fondamental du dénombrement est la détermination du nombre total de possibilité de faire un choix de **p** éléments dans un ensemble contenant **n éléments**.*

Tableau récapitulatif

	Nombre N de possibilités d'opérer un choix de P objets dans un ensemble contenant n objets.
Sans ordre : Tirage simultanés	C_n^P
Avec ordre : Tirages successifs sans remise	A_n^P
Avec ordre : Tirage successif avec remises	n^P

Exercice résolu :

Une urne contient 18 boules.

1°) On tire successivement et sans remise de l'urne 4 boules. Calculer le nombre de possibilité N d'effectuer ce tirage.

2°) On tire simultanément de l'urne 3 boules. Calculer le nombre de possibilité N' d'effectuer ce tirage.

3°) On tire successivement avec remise de l'urne 5 boules. Calculer le nombre de possibilité N'' d'effectuer ce tirage.

Solution

1- Calculons le nombre de possibilité N d'effectuer ce tirage.

$$N = A_{18}^{4} = \frac{18!}{(18-4)!} = \frac{18!}{14!} = \frac{18\times17\times16\times15\times14!}{14}.$$

$$= 18 \times 17 \times 16 \times 15$$

$= 73440$ **N = 73440**

2°) Calculons le nombre de possibilité N' d'effectuer ce tirage.

$$N' = C_{18}^{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18!}{3!\ 15!} = \frac{18\times17\times16\times15!}{3!\ 15!}$$

$$= \frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}$$

$= 816$ **N' = 816**

3°) Calculons le nombre de possibilité N'' d'effectuer ce tirage.

$N'' = (18)^5 = 1889568$

N'' = 1889568

4-2-PROBABILITE

4-2-1- Vocabulaire de probabilité

Expérience aléatoire ou épreuve

Une épreuve est une expérience pouvant être répétée dans des conditions identiques et dont le résultat dû au hasard est incertain mais pour laquelle on peut définir l'ensemble des résultats possibles. Parmi ces résultats un seul est réalisé.

Univers de l'épreuve

On appelle univers de l'épreuve l'ensemble sur lequel on étudie l'épreuve.

Il est souvent noté **Ω** (lire "oméga").

Evénement

Tout élément de **Ω** est appelé évènement. C'est l'un quelconque des résultats possibles.

-Evènements élémentaires

C'est l'ensemble formé par un seul résultat.

Exemple 1 : Lancé d'une pièce

On dit qu'il y a deux évènements élémentaires

e_1 : « Sortie de face » et e_2 : « Sortie de pile ».

Exemple 2 : Une urne contient huit boules de même forme : Trois blanches, trois noires et deux rouges.

On tire une boule au hasard et on note sa couleur. Il y a trois évènements élémentaires.

e_1 : « La couleur de la boule tirée est blanche »

e_2 : « La couleur de la boule tirée est noire »

e_3 : « La couleur de la boule tirée est rouge ».

-Evènements incompatibles

Deux évènements sont dits incompatibles, s'ils ne peuvent **être réalisés simultanément**.

Autrement dit deux évènements sont incompatibles s'ils n'ont aucun évènement élémentaire en commun.

Exemple : Lancé d'un dé

Les évènements A et B sont incompatibles.

A : « le nombre sorti est impair » B : « le nombre sorti est 2 ou 4 »

-Evènements contraires

L'évènement contraire d'un évènement A est l'évènement constitué par tous les évènements élémentaires ne se trouvant pas dans A. On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A

Exemple : Lancé d'un dé

A est l'évènement : « Sortie d'un nombre pair » alors $\bar{A}$ est l'évènement « Sortie d'un nombre impair ».

-Evènement « A∩B » ou « A et B »

L'évènement « A∩B » ou « A et B » est constitué par tous les évènements élémentaires se trouvant à la fois dans A et dans B.

Exemple : Lancé d'un dé

A est l'évènement : « Sortie de l'un des nombres 1 ; 2 ; 3 ou 4 »

B est l'évènement : « Sortie de l'un des nombres 2 ; 3 ; 5 ou 6 »

Alors « A∩B » ou « A et B » est l'évènement : « Sortie de l'un des nombres 2 ou 3 ».

-Evènement « A∪B » ou « A ou B »

L'évènement « A∪B » ou « A ou B » est constitué par tous les évènements élémentaires se trouvant dans l'un au moins des évènements A ; B.

Exemple : Lancé d'un dé

A est l'évènement : « Sortie de l'un des nombres 2 ; 3 ; 4 ou 5 »

B est l'évènement : « Sortie de l'un des nombres 1 ; 2 ou 6 »

Alors « A∪B » est l'évènement « Sortie de l'un des nombres « 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6 ».

-Evènement impossible

C'est l'évènement qui n'est jamais réalisé.

Exemple : Lancé d'un dé

A est l'évènement : « Sortie du nombre 7 »

-Evènement certain

C'est l'évènement qui est toujours réalisé

4-2-2-Probabilité d'un évènement

1. Lancé d'une pièce

On lance une pièce équilibrée et on note la face supérieure qui apparaît.

Les deux faces de la pièce ont la même chance d'apparition. Chaque face a une chance sur deux d'apparaître.

Nous avons ici deux évènements élémentaires.

e_1 : « Sortie de face » et e_2 : « Sortie de pile ».

La probabilité de chaque évènement est égale à ½ . P (e_1) = P $(e_2) = \frac{1}{2}$

2. Lancé d'un dé

Nous avons ici six (06) évènements élémentaires.

e_1 : « Sortie de 1 » ; e_2 : « Sortie de 2 » ;…………….. ; e_6 : « Sortie de 6 ».

Si le dé a une forme cubique régulière, la probabilité de chaque évènement est égale à $\frac{1}{6}$.

P (e_1) = P (e_2)=……………… = P $(e_6)=\frac{1}{6}$

Propriété :

Si les **k** évènements élémentaires e_1 ; e_2 ; e_3 ; ……………; e_k d'une expérience aléatoire sont équiprobables, il est clair que chacun d'eux a une probabilité égale à $\frac{1}{k}$.

P (e_1) = P (e_2)=……………… = P $(e_k)=\frac{1}{k}$

Formule fondamentale

Une urne contient douze (12) boules de même forme ; cinq blanches ; quatre noires et trois rouges. On tire au hasard une boule et on note sa couleur.

Nous avons trois évènements élémentaires.

e_1 : « La couleur de la boule tirée est blanche »

e_2 : « La couleur de la boule tirée est noire »

e_3 : *« La couleur de la boule tirée est rouge »*

Puisqu'il y a cinq boules blanches parmi les douze, on conçoit alors que : $p(e_1)=\frac{5}{12}$.

De même $p(e_2)=\frac{4}{12}$ et $p(e_3)=\frac{3}{12}$

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est :

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorables à A}}{\textbf{Nombre de cas possibles}}$$

La probabilité d'un évènement A est noté p(A).

Le nombre de cas favorables à A est aussi appelé Card(A).Le nombre de cas possibles est aussi appelé Card(Ω).

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Propriété:

- La probabilité p(A) d'un évènement A est un nombre de l'intervalle $[0; 1]$
- La probabilité d'un évènement certain est égale à 1
- La probabilité d'un évènement impossible est égale à 0
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

Evènements contraires

D'après les définitions de $\bar{A}$ et de la probabilité d'un évènement, $p(A) + p(\bar{A})$ est égale à la somme des probabilités de tous les évènements élémentaires, c'est-à-dire égale à 1.

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Remarque :

- L'évènement contraire de $\bar{A}$ est **A.**
- Deux évènements contraires sont incompatibles.

Exemple : on considère une classe de 35 élèves dont 20 garçons. Une épreuve consiste à choisir un élève.

Soit A l'évènement « l'élève choisi est un garçon » ; $p(A) = \frac{20}{35}$

$\bar{A}$ est donc l'évènement « l'élève choisi est une fille »

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\bar{A}) = \frac{15}{35}$.

Réunion d'évènements

Supposons par exemple que :

A soit constitué par les évènements élémentaires $e_1; e_2 ; e_3$

B soit constitué par les évènements élémentaires $e_2; e_3 ; e_4 ; e_5$

Alors « A∪B » est constitué par les évènements élémentaires e_1; e_2 ; e_3 ; e_4; e_5 et « A∩B » par e_2 ; e_3 . On a donc :

$p(A\cup B) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5)$

$p(A\cap B) = p(e_2) + p(e_3)$

$p(A) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3)$

$p(B) = p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5)$

$p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5) - [p(e_2) + p(e_3)]$

$p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5)$.

$p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(A\cup B)$

Propriété :

La probabilité de la réunion de deux évènements est égale à la somme de leurs probabilités, diminuées de la probabilité de leur intersection

$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

Remarque :

Dans le cas où l'évènement «A∩B» ne contient aucun évènement élémentaire $p(A\cap B) = 0$; d'où si A et B sont incompatibles ; $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$.

<u>**NB**</u> : Pour la recherche des nombres de cas favorables et de cas possibles, on pourra utiliser dans certaines situations la combinaison C_n^p ; l'arrangement A_n^p ou le p-uplet n^p.

Exercice résolu :

Une urne contient 18 boules dont 6 rouges et 12 vertes.

1°) On tire successivement et sans remise de l'urne 4 boules. Calculer la probabilité d'avoir 4 boules rouges.

2°) On tire simultanément de l'urne 3 boules. Calculer la probabilité d'avoir 3 boules vertes

3°) On tire successivement avec remise de l'urne 5 boules. Calculer la probabilité d'avoir 2 boules rouges et 3 boules vertes dans cet ordre.

Solution

1- Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

soit A "Avoir 4 boules rouges"

$$\text{Card } \Omega = A_{18}^{4} = \frac{18!}{(18-4)!} = \frac{18!}{14!} = \frac{18\times17\times16\times15\times14!}{14}$$

$$\mathbf{A_{18}^{4}} = 73440$$

$$\text{Card A} = A_{6}^{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 6\times5\times4\times3$$

$$\mathbf{A_{6}^{4}} = 360$$

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{360}{73440} = \frac{1}{204}$$

$$\mathbf{P(A) = \frac{1}{204}}$$

2°) Soit Ω l'univers associé à cette épreuve

Soit B "Avoir 3 boules vertes"

$$\text{Card } \Omega = C_{18}^{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18!}{3!\ 15!} = \frac{18\times17\times16\times15!}{3!\ 15!} = \frac{18\times17\times16}{3\times2\times1} = 816$$

$$\mathbf{C_{18}^{3} = 816}$$

$$\text{Card B} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\ 9!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{3!\ 9!} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

$$\mathbf{C_{12}^{3}} = 220$$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{220}{816} = \frac{55}{204}$$

$$P(B) = \frac{55}{204}$$

3°) Soit Ω l'univers associé à cette épreuve soit C "Avoir 2 boules rouges et 3 boules vertes"

$$\text{Card } \Omega = (18)^5 = 1889568$$

$$\text{Card C} = (6)^2 \times (12)^3$$

$$= 36 \times 1728$$

$$= 62208$$

$$P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{62208}{1889568} = 0{,}032$$

P(C) = 0,032

DENOMBREMENT – PROBABILITE

EXERCICES

1

Calculer : A_{10}^{4} ; A_{18}^{3} ; A_{6}^{2}

C_{6}^{2} ; C_{12}^{5} ; C_{9}^{5}

2

Un fonctionnaire dispose de 3 chemises de différentes couleurs (Bleue, rouge, blanche) et deux pantalons de couleurs noir et gris. De combien de manière peut-il choisir une chemise et un pantalon.

3

Calculer le nombre de manière de garer 6 voitures sur un parking à 10 places

4

De combien de manière distinctes peut-on choisir 3 responsables dans une classe de 30 élèves sachant qu'il faut un premier responsable, un deuxième et un troisième responsable dans cet ordre.

5

De combien de manière distinctes peut-on faire asseoir 8 invités autour d'une table à 8 chaises.

6

De combien de façon peut-on tirer simultanément 5 bics dans un carton contenant 25 bics.

7

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

a- Combien de jurys différents peut-on former ?

b- Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?

c- Monsieur x refuse de siéger avec madame Y. dénombrer le nombre de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes.

8

Deux des 6 faces d'un dé équilibré portent le numéro 1 ; une porte le numéro 2 et trois portent le numéro 3. On lance une fois le dé et on s'intéresse au numéro obtenu.

1- Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro.
2- Quelle est la probabilité pour que le numéro soit impair.

9

On lance deux dés cubique parfaits dont les faces sont numéroté de 1 à 6. On attend qu'ils s'immobilisent et on lit les numéros inscrits sur les faces supérieures.

1- Déterminer la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit supérieure ou égale à 10

2- Déterminer la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit paire.

10

On considère 2 dés normaux, l'un noir et l'autre rouge. On lance simultanément les deux dés

1- Déterminer l'ensemble des éventualités Ω_1 associé au dé rouge et celui Ω_2 associé au dé noir liés à cette épreuve.

2- Combien de possibilité de résultat peut-on obtenir de cette épreuve ?

3- Déterminer le nombre de possibilités

a- d'obtenir une somme paire

b- d'obtenir une somme impaire

c- d'obtenir au plus un chiffre paire

d- d'obtenir un total égal à 9

e- d'obtenir un total multiple de 2.

11

On joue avec deux dés. On les jette simultanément et on note les chiffres trouvés sur les faces supérieurs de chaque dé. Soit A l'évènement le premier démarque 2 et B l'évènement le deuxième dé marque 5.
Déterminer la probabilité des évènements.
A ; B ; et $A \cap B$.
Les évènements A et B sont-ils indépendants.

12

Soit un univers U et deux événements incompatibles A et B tels que :

$p(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}5$.

Calculer $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$

13

Soit un univers U deux évènements A et B tels que $p(A) = p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $p(A \cup B)$; $p(\overline{A})$; $p(\overline{B})$; $p(\overline{A \cup B})$ et $p(\overline{A \cap B})$.

14

Soit un univers U et deux évènements A et B tels que $p(A) = 0{,}2$; $p(\overline{B}) = 0{,}6$ et $p(A \cup B) = 0{,}5$.

Calcule $p(\overline{A})$; $p(B)$ et $p(A \cap B)$.

15

Dans un Lycée, 70% des élèves vont à la mer pendant les vacances ; 35% à la montagne et 20% à la mer et à la montagne. On rencontre par hasard un élève de ce lycée.
Calcule les probabilités suivantes :
a- « L'élève rencontré va à la mer »
b- « L'élève rencontré va à la montagne »
c- « l'élève rencontré va à la mer et à la montagne »
d- « L'élève rencontré va à la mer ou à la montagne ».

16

Enock possède 4 chemises bleues, 3 chemises rouges et 2 chemises vertes. Le matin, il choisit une chemise au hasard.

1- Quelle est la probabilité pour qu'il prenne une chemise rouge

2- S'apercevant [illegible] choisie à une tache, il décide d'en prendre une au[illegible] qui ne soit encore une chemise rouge ?

17

Une urne contient 12 boules rouges numérotées de 1 à 12 et 18 boules vertes numérotées de 1 à 18. On tire au hasard une boule de l'urne et on suppose tous les tirages équiprobables. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « On tire la boule verte numérotée 1 »
B : « On tire une boule portant le numéro 4 »
C : « On tire une boule portant le numéro 14 »
D : « On tire une boule verte ou une boule dont le numéro est inférieur ou égal à 4. »

18

Un sac contient 5 jetons :

- Un bleu valant 3 points
- Deux rouges valant chacun 2 points ;
- Deux verts valant chacun 1 point

1- On tire un jeton au hasard
   a- Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?
   b- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux points ?
2- On tire un jeton, puis un deuxième jeton sans remettre le premier jeton dans le sac. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Tirer deux jetons de couleurs différentes »

B : « Obtenir 4 points »

C : « Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes

D : « Obtenir au moins 4 points ».

19

Une boite contient 150 boutons de 10 types différents, destinés a la confection de vêtements. Le tableau donne leur répartition en fonction de leur nombre de trous x_i et de leur diamètre en mm y_i. On tire au hasard un bouton de la boîte et on admet que ce tirage est effectué en situation d'équiprobabilité. Calculer la probabilité d'obtenir

a- Un bouton à 3 trous de 10mm de diamètre

b- Un bouton de 14mm de diamètre

c- Un bouton à 2 trous

d- Un bouton de diamètre égal à 6 ou à 10mm.

xi \ yi	6	10	14	18
2	21	24	18	0
3	12	15	12	3
4	0	9	27	9

20

Un comité de supervision des élections locales est composé de 5 membres pris au hasard dans une liste comportant dix hommes et huit femmes ?

1- Quelle est la probabilité pour que ce comité ne comprenne aucune femme ?

2- Quelle est la probabilité pour que ce comité comprenne trois hommes et deux femmes

3- Quelle est la probabilité pour que ce comité comprenne au moins une femme.

21

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules noires. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A "obtenir rien que des boules rouges "

B " obtenir 3 boules rouges et 1 boule noire"

C " obtenir des boules de même couleur".

On reprend l'expérience avec un tirage successif et sans remise.

Calcul les probabilités des évènements A, B et C.

22

Une urne contient 15 boules dont 3 rouges, 7 jaunes et 5 noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer

1- 3 boules rouges

2- 2 boules jaune et 1 boules noires

3- 3 boules de chaque couleur

4- au moins deux jaunes

5- au plus une boule noire.

23

Un bassin contient 30 poissons : 5 carpes, 10 tranches et 15 gardons. On pêche quatre poissons par un heureux corps de filet. Si l'on admet que chaque poisson à la même probabilité d'être pris dans le filet, calculer les probabilités des événements suivants.

1- E_1 : *Aucun des quatre poissons n'est un gardon*

2- E_2 : *Il y a au moins un gardon dans le filet*

3- E_3 : Le filet contient une carpe, une tranche et deux gardons.

SUJET 1

Contexte : Modernisation d'une ferme piscicole en zone de montagne.

Finagnon et ses camarades, élèves en classe de terminale littéraire ont visité une ferme piscicole située dans une région montagneuse.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), le trajet des eaux qui sont canalisées pour alimenter les étangs de cette ferme a été assimilé à une portion de la courbe (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x - x$. D'autres études ont permis de savoir que la quantité, en kilogrammes, de poissons produits dans la ferme en un mois s'écrit $\overline{423}^{\,5}$.

Pour accroitre la productivité de cette ferme, son directeur a initié un projet de construction de deux mini- barrages.

Finagnon veut déterminer dans le système de numération décimale la quantité de poissons, construire la courbe (e) et aussi procéder à une étude statistique des données relatives au projet de construction.

Tâche

Tu es invité (e) à apporter des réponses aux préoccupations de Finagnon en résolvant les deux problèmes ci- après.

Problème 1

1-

a) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) Justifie que pour tout élément x de] - ∞ ; + ∞[, $f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$

c) Justifie que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2-

a) Détermine la fonction dérivée f' de f.

b) Etudie le signe de $f'(x)$ pour tout non nombre réel

c) Dresse le tableau des variations de f.

d) Construis la courbe la courbe (C)

3- Ecris en base 10 la quantité de poissons produits en moi par la ferme piscicole.

Problème 2

Huit (8) entrepreneurs ont postulé pour l'appel d'offres lancé par le directeur de la ferme. Les coûts proposés (en million de francs CFA) pour la construction des deux barrages sont présentés dans le tableau ci-après.

Coûts du barrage N°1 x_i	3	4	3	4	5	2	5	4
Coûts du barrage N°2 y_i	2	1	2	3	3	1	4	3

On obtient ainsi une série statistique à deux caractères (x, y).

4- Représente le nuage de points de cette série statistique.

5- Détermine les coordonnées du point moyen du nuage.

SUJET 2

Contexte : Gestion d'une coopérative

Une coopérative agricole, composé de 6 hommes et de 4 femmes est spécialisée dans la production de jus de fruit. Les installations peuvent permettre à la coopérative de produire jusqu'à 2000 cartons de jus par mois.

Une étude a permis d'établir que le bénéfice mensuel, en millions de francs CFA, est donné par : $f(x) = \frac{5(1+\ln x)}{x}$, x , en milliers d'unités, étant le nombre de cartons de jus de fruit produits.

En vue d'assurer le bon fonctionnement de la coopérative, il sera mis en place un bureau pour la diriger.

Bio, un membre de la coopérative et féru des mathématiques est chargé de déterminer la quantité de jus de fruits à produire en vue d'assurer un bénéfice maximal. Il veut également estimer ses chances d'être membre du bureau.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Bio à trouver une réponse à ses préoccupations en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème 1

1) a- détermine l'ensemble de définition D de la fonction f.

b- justifie que l'on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

2) a- Justifie que pour tout x]0 ; + ∞[, $f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2}$.

b- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations.

c- Justifie que f admet un maximum sur $]0 ; +\infty[$ et précise ce maximum.

d- Détermine le nombre de cartons de jus de fruit à produire pour réaliser le bénéfice maximal et donne ce bénéfice.

Problème 2

Le bureau chargé de diriger la coopérative est composé de trois membres.

3) Détermine la probabilité pour que Bio soit membre du bureau.

4) Détermine la probabilité pour que le bureau soit composé de Bio et d'au moins une femme.

SUJET 3

Contexte: Management touristique.

En vue d'une excursion au village lacustre de Ganvié, une agence de voyage a enregistré un groupe de vingt (20) touristes composé d'africains et d'européens. Le nombre d'européens est le double de celui des africains, diminué de 1. La prestation de l'agence a fait l'objet d'un contrat signé par deux (2) touristes choisis au hasard parmi les 20.

Dodo, élève en classe terminale, se propose de connaître le nombre de touristes européens et celui des africains de ce groupe, le coût du contrat, et d'évaluer les chances pour que ce contrat soit signé par deux touristes de continents différents.

Tâche: Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Dodo en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème1

1) Justifie que le nombre x de touristes africains et celui, y, de touristes européens, sont liés par les relations : $x + y = 20$ et $2x-y-1=0$.

2) Détermine, dans ce groupe, le nombre de touristes de chacun des deux continents.

3) Calcule la probabilité pour que le contrat soit signé par :

a) deux touristes africains ;

b) deux touristes d'un même continent ;

c) deux touristes de continents différents.

Problème 2

Le coût $C(n)$ de la prestation de l'agence, exprimé en centaines de milliers de francs CFA pour n personnes (n, entier naturel), est donné par: $C(n) = \ln(2n + 1)$, où ln est le symbole du logarithme népérien.

4) Soit f la fonction définie sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$.

a)Etudie les variations de la fonction f, puis dresse son tableau de variation.

b) Dans un repère orthonormé (O, I, J), trace la courbe représentative (C) de f pour x appartenant l'intervalle $[0;10]$.

5) Calcule le coût du contrat pour les 20 touristes.

SUJET 4

Situation d'évaluation

Contexte : Management d'une ferme d'élevage de lapins.

Cocou dispose d'une parcelle rectangulaire sur laquelle il élève des lapins. La longueur de la parcelle est 35 mètres et la largeur représente les $\frac{4}{7}$ de la longueur.

A quelques semaines de la fête du nouvel an, il a fait le point des lapins susceptibles d'être vendus. Le tableau suivant donne la répartition de ces lapins suivant le prix de vente en francs CFA.

Prix de vente	2000	2500	3000	4000
Nombre de lapins	32	103	75	40

Cocou a sollicité son ami Bio pour étudier l'évolution des charges journalières de production.

Tâche: Tu es invité à déterminer l'aire de la parcelle de Cocou, le prix de vente moyen des lapins et à étudier l'évolution des charges journalières de production.

I-

1°) Ecris le nombre 35 en base 2.

2°) Calcule :

a) la largeur de la parcelle de Cocou ;

b) l'aire de la parcelle de Cocou.

3°) Détermine le prix de vente moyen des lapins susceptibles d'être vendus pour la fête du nouvel an.

II-

L'étude menée par Bio a conduit au résul' t selon lequel les charges journalières $f(x)$, exprimées en centaines de francs, corre ,ondant à l'utilisation d'une quantité x (en kilogrammes) de provende, sont données pa :$f(x) = x + \ln x$.

Dans le plan muni d'un r:père orthonormé (O, I, J), (C) désigne la courbe représentative de la fonction numériqu f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ainsi définie.

4°) a) Détermine l'ensemble de définition D de f.

b) Calcule les limites : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

5°) a) Démontre que f est strictement croissante sur D.

b) Dresse le tableau des variations de f.

6°) a) Justifie que la droite d'équation x = 0 est une asymptote à la courbe (C).

c) Complète le tableau suivant dans lequel tu donneras les valeurs de $f(x)$ au centième près.

X	1	2	3	4
$f(x)$				

d) Construis la courbe (C) dans le repère (O, I, J)

SUJET 5

Contexte

Une entreprise décide de fabriquer des chaussures communément appelées **"Aidez-moi à grandir"**. Elle veut employer des ouvriers qui seront fichés à l'aide de numéros matricules de 3 chiffres distincts choisis dans l'ensemble {1 ; 2 ; S ; 4 ; 5 ; 6}.

Les ouvriers seront répartis en deux catégories :

•La catégorie A comprend les ouvriers dont les numéros matricules ne contiennent pas le chiffre 2

•La catégorie B comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent le chiffre 2.

Le Directeur de l'entreprise se propose d'étudier le personnel employé et le coût moyen de production journalière pour minimiser les charges,

Tâche Tu es invité (e) à aider le Directeur à travers la résolution des problèmes suivants.

Problème 1 :

1 Détermine le nombre maximal d'ouvriers que le Directeur peut gérer

On suppose que l'entreprise emploie 120 ouvriers.

2. Détermine le no nbre d'ouvriers de chacune des catégories A et B.
3. Le Directeur choisit au hasard un ouvrier.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants : A « L'ouvrier est de la catégorie A » B « L'ouvrier est de la catégorie B ».

Problème 2 :

Yovo et Yémalin sont des ouvriers de l'entreprise dont les numéros matricules s'écrivent respectivement

$n_1 = 145$ et $n_2 = \overline{361}^8$

4. Ecris le nombre n_1 en base 2.
5. Ecris le nombre n_2 en base 10.

Problème 3 :

Le coût moyen de production journalière en milliers de FCFA et en fonction de la quantité x (en centaines) de chaussures fabriquées est donné par la fonction définie par $f(x) = 5 - x + x\ln x$

6. Justifie que l'ensemble de définition de f est D =]0 ; +∞ [
7. Calcule les limites de f aux bornes de D.

(On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$)

8.a) Calcule $f'(x)$ pour tout x de D.

b) Etudie le signe de $f'(x)$.

c) Dresse le tableau de variation de f

d) Quel est le nombre n de chaussures à fabriquer par jour pour avoir un coût moyen minimal. Précise ce coût.

9.) Construis la représentation graphique (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (0,i, j) sur l'intervalle]o; +∞ [. Unité graphique : 1 cm.

SUJET 6

Situation d'évaluation

Contexte : La maîtrise d'un incendie.

Un incendie au deuxième étage d'un bâtiment administratif a suscité l'appel des sapeurs-pompiers qui ont répondu promptement avec deux véhicules à citernes remplies d'eau. Suite à l'observation de l'évolution du feu et à partir de deux positions stratégiques des véhicules, l'eau est envoyée à deux points précis de l'étage suivant l'allure d'une portion de la courbe (C) de la fonction numérique d'une variable réelle $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Un responsable administratif est impressionné par la trajectoire des jets d'eau des sapeurs-pompiers et s'intéresse à la quantité d'eau utilisée pour éteindre le feu.

Tâche : Tu es invité (e) à aider le responsable administratif en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème 1

1. Justifie que l'ensemble de définition D de f est $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$.
2. Calcule les limites de f aux bornes de D.
3. Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. Précise les asymptotes de la courbe (C).
5. Justifie que le point A (-3 ; 2) est centre de symétrie de la courbe (C).

Problème 2

La quantité Q d'eau exploitée pour maîtriser l'incendie, exprimée en hectolitre (hl), dans le système octal est $\overline{40x4}^{8}$ et divisible par 7 dans le système décimal.

6. Exprime Q en fonction de x dans le système décimal,
7. Détermine la valeur de x.
8. Déduis-en la quantité d'eau Q utilisée par les sapeurs-pompiers au cours de l'opération.

SUJET 7

Contexte :

Une entreprise décide d'analyser les montants X des frais de publicité et les montants Y de son chiffre d'affaires, exprimés en millions de francs.

Le tableau suivant donne alors les valeurs de X et Y pour huit années.

X	4	4,6	5	5,2	5,8	6	6,4	7
Y	102	116	117	118	128	130	138	142

Le Directeur Général désire réaliser un chiffre d'affaire de 300 millions de francs et se préoccupe d'une estimation des frais de publicité nécessaires pour parvenir à son objectif.

Tâche : Tu es invité (e) à étudier la relation entre les frais de publicité et les chiffres d'affaires et à tester tes connaissances sur les fonctions en résolvant les deux problèmes suivants :

Problème 1 :

1) Représente le nuage de points associé à cette série statistique.
2) Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage et place G.
3) On partage le nuage de points en deux sous-nuages F_1 et F_2 constitués respectivement par les quatre premiers couples (x_i, y_i) et les quatre derniers couples (x_j, y_j).
   a) Calcule les coordonnées du point moyen G_1 associé au sous-nuage F_1 et les coordonnées du point moyen G_2 associé au sous-nuage F_2.
   b) Détermine une équation de la forme y=ax +b de la droite d'ajustement de Mayer (G_1 G_2).
   c) Détermine une estimation du budget de publicité Xo permettant de réaliser le chiffre d'affaires prévu par le Directeur Général.

Problème 2 :

Les recherches ont conduit le Directeur Général à la définition d'une fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 8x + 35 \ln x$

telle que f(Xo) soit approximativement le chiffre d'affaires de 300 prévus en millions de francs.

1) Détermine le domaine de définition D de f et justifie que D=] 0, + ∞[
2) Détermine la fonction dérivée f' de f et prouve que $\forall$ x ε D, $f'(x) > 0$.
3) a) dresse le tableau de variation de f.
   b) détermine les branches infinies de la courbe (C) de f.
   c) détermine l'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 4.
4) a) calcule $f(X_0)$.
   X_0 est la valeur des frais de publicité obtenu dans le problème 1, question 3-C
   b) les recherches du Directeur Général sont-elles fiables ?

5°) Réalisons le tableau de variation de *f* puis construisons la courbe (C)

$$f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

- Sens de variation :

$\forall$ x $\in$ D, $f'(x) > 0$ *f* est strictement croissante sur]- ∞, 1/2 [et]1/2 +∞ [

Tableau de variation

x	- ∞		½		+∞
$f(x)$		+	‖	+	
f	-1	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-1

- Interception avec les axes :

Axe des abscisses :

On pose : $f(x) = 0$

$$\frac{2x+1}{1-2x} = 0$$

1-2x ≠ 0

2x + 1 = 0 équivaut à x = - 1/2

La courbe coupe l'axe des abscisse au point I(-1/2 ; 0)

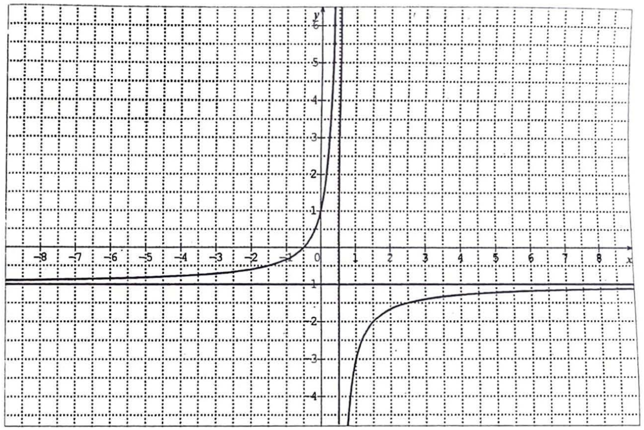
- Axe des ordonnées :

- On calcul ici $f(0)$

$f(0) = 1$ (voir question 1)

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point J(0 ; 1).

Courbe



8

1°) Donnons le domaine de définition D de g

D =]- ∞, -1[∪]-1,+ ∞[

Remarque : le double trait dans le tableau de variation montre que – 1 n'appartient pas au domaine de définition.

- 2 et 0 sont les zéros ou racines de l'équation g'(x) = 0

2°) On définie $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

a-) Exprimons g'(x) en fonction de a et c

g est continue et dérivable comme étant la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle dérivable sur]- ∞, -1[et sur]-1, +∞[

$$g'(x) = a + \frac{0(x+1) - c}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

SUJET 8

CONTEXTE: La gestion d'une tontine,

Madame Agnon dispose au 31 Décembre 2012 d'une somme de un million deux cent mille (1.200.000F) francs, issue d'une tontine qu'elle désire fructifier en partie. Elle décide de renforcer son capital commercial avec le $\frac{1}{3}$; garder $\frac{1}{5}$ pour les besoins de la famille, soixante mille (60.000F) pour les frais de scolarité de son fils et le reste sera placé en banque. Mais elle fait partie d'un groupe de tontine de cinq femmes et sept hommes, dirigé par un bureau de trois membres : un président, un secrétaire et un trésorier. Pour cette tontine chaque membre cotise cinquante mille (50.000F) par mois que l'un d'eux ramasse.

Pour bien gérer cette somme, elle fait appel à sa fille Abiath, élève en classe de terminale série A pour l'aider dans les calculs. Tu es invité à aider Abiath à résoudre les problèmes suivants.

PROBLEME 1 :

1) Calcule le montant total placé.
2) Calcule la probabilité p qu'une femme ramasse la première tontine.
3) Calcule la probabilité p' que le bureau soit formé des personnes de même sexe.

PROBLEME 2 :

Elle place finalement, à intérêt simple, cinq cent mille (500.000f) à la banque le 1er Janvier 2013 au taux annuel de 10%.

4) Calcule l'intérêt de ce placement et le montant total dont elle disposera au 1er Janvier 2014.

5) On note Cn, le capital disponible en banque au 1er Janvier de l'année (2013 + n) où n désigne le nombre d'années de placement.

a- Calcule C_0, C_1 et C_2.

b- Exprime C_n en fonction de n.

c- Calcule le capital C_{10} disponible en banque dix ans après le placement.

PROBLEME 3 :

1) a- Une autre banque lui propose un placement suivant la formule $C_n = C_0\,[1+\ln(n)]$ pour une période d'au moins deux ans où n désigne le nombre d'années de placement ; C_0 étant le capital initial. Etudie les variations de la fonction f définie sur

$]0,+\infty[$ par $f(x) = 1+ \ln(x)$ (tu établiras le tableau de variation de f).

b-Recopie et complète la table de valeurs ci-après, puis construis la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

X	1	1	2	e
f(x)				

2) Calcule le capital C_2 pour un placement de deux ans.

SUJET 9

Contexte : Le champ de Sylvain.

Sylvain dispose d'un champ rectangulaire d'aire 1000 m² et dont le périmètre p, exprimé en mètre, est le nombre entier d'écriture $\overline{632}^{8}$ (632 en base 8).

Pour irriguer le champ, Sylvain utilise deux rigoles. Afin de procéder à un réaménagement, jean, fils de sylvain et élève en classe de terminale, veut déterminer par calcul, la longueur L et la largeur l du champ. Il veut aussi place un piquet en un point idéal d'observation des deux rigoles.

Tâche : Tu es invité (e) à trouver des solutions aux préoccupations de jean en résolvant les deux problèmes suivants :

Problème 1

1- Justifie que le périmètre du champ est 410 m.

2- a) Justifie que la longueur L et la largeur l vérifient le système :

$$\begin{cases} L + l = 205 \\ L \times l = 10\,000 \end{cases}$$

b) Déduis-en que L *et* l sont solutions de l'équation $x^2 - 205x + 10000 = 0$

3- Détermine les dimensions du champ de Sylvain.

Problème 2

Les deux rigoles sont modélisées par une partie de la courbe représentative $(\mathcal{C})$, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{2-x}{x-1}$ et dont le tableau des variations, incomplet, est présenté ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖	↘	

4- a) Précise la limite de f en $-\infty$.

b) Etudie le sens de variation de f.

5- a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$

b) Reproduis puis complète le tableau des variations

6- Justifie que K(1 ; -1) est le centre de symétrie de la courbe.

SUJET 10

Contexte : Gestion d'une petite entreprise

Akouvi a contracté le 1er janvier 2012 un prêt auprès d'une amie, pour installer une petite entreprise de production de jus d'ananas.

Elle a engagé huit ouvriers qu'elle a répartis en deux catégories : la catégorie A des ouvriers qui pressent l'ananas et la catégorie B de ceux qui conditionnent le jus en bouteille.

Akouvi paie 1 500F par jour à chaque ouvrier de la catégorie A et 1000F à chaque ouvrier de la catégorie B. elle dépense quotidiennement 10 500 F pour payer tous les ouvriers.

Akouvi se préoccupe de savoir en quelle année elle finira de payer sa dette.

Tâche : Tu vas déterminer le nombre d'ouvriers de chaque catégorie et répondre à la préoccupation de Akouvi

I- Tu désigneras par x le nombre d'ouvriers de la catégorie A et par y le nombre d'ouvriers de la catégorie B.

1) Justifie que les nombres x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$$

2) Détermine le nombre d'ouvriers de chaque catégorie

II- Akouvi a emprunté 750 000 F auprès de son amie. Elle rembourse le 1er janvier de chaque année, à partir de 2013, un montant total de 10 000F

augmentés des 40% de ce qu'elle reste devoir à son amie, jusqu'au règlement définitif.

3) a- Détermine le montant remboursé par Akouvi le 1er janvier 2013.

b) Déduis-en la somme qu'elle reste devoir à son amie après remboursement.

4) Soit u_n la somme (en franc) que Akouvi reste devoir à son amie en (2012 + n), où n est un nombre entier naturel.

a) Justifie que $u_0 = 750\,000$ et $u_1 = 440\,000$.

b) Prouve que pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n - 10\,000$.

c) Calcule u_2

5- $(v_n)_n$ est la suite numérique définie par :

$v_n = u_n + 25\,000$

a- Calcule v_0

b- Démontre que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison.

c- Exprime v_n en fonction de n pour tout n, élément de ℕ.

d- Justifie que pour tout élément n de ℕ,

$$u_n = 775\,000 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 25\,000.$$

6- a- Calcule u_6

b) Déduis-en l'année à laquelle Akouvi finira de rembourser sa dette et précise à l'unité près le montant qu'elle aura à payer cette année-là.

DOMAINE DE DEFINITION

1

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions

$f(x) = x^2 + 2x - 1$

$Df = \{x \in IR / x^2 + 2x - 1 \text{ existe}\}$

f est une fonction polynôme par conséquent son domaine de définition est IR.

$Df =]-\infty ; +\infty[$

$L(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 6x + 9}$

$D_L = \{x \in IR / x^2 - 6x + 9 \neq 0\}$

Posons $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$

$D_L =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

3

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

$f(x) = \sqrt{x+3} - 1$

$Df = \{x \in IR / x + 3 \geq 0\}$

Posons $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3 ; +\infty[$

$Df = [-3 ; +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$Df = \{x \in IR / x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$

Posons $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $x = 2$

$Df =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

$f(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$

$Df = \{x \in IR / x^2 - 4 > 0\}$

Posons $x^2 - 4 = 0$

$x = 2$ ou $x = -2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x+2	-	0	+		+
x-2	-		-	0	+
x^2-4	+	0	-	0	+

$Df =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

$f(x) = \frac{|x+2| - 1}{\sqrt{-x-3}}$

$Df = \{x \in IR / -x - 3 > 0\}$

$-x - 3 > 0$

$-x > 3 \Rightarrow x < -3$

$x < -3 \Rightarrow x \in]-\infty ; -3[$

$Df =]-\infty ; -3[$

LIMITES

1

Calculons les limites de la fonction g au point x_0

1°) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^2+6 = g(2)$

$\lim\limits_{x\to 2} 5x^2+6 = 26$

4°) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+x-1}{x-1} = \lim \dfrac{4^2+4-1}{4-1} = \dfrac{19}{3}$

8°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x+3} = g(2)$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x+3} = \dfrac{3}{5}$

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+x-1}{x-1} = \dfrac{19}{3}$

Remarque : Pour **l'exercice 1** la fonction g est définie en $x_0$ou du moins x_0 appartient au domaine de définition Dg. Calculer la limite de g en x_0 revient simplement à calculer g(x_0).

2

Calculons les limites à gauche et à droite de x_0

1°) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{2-x}{x-3} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} 2-x = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} x-3 = 0^- \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{2-x}{x-3} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} 2-x = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} x-3 = 0^+ \end{cases}$

Les signes du 0 (au dénominateur) sont déterminés à partir du tableau de signe de x – 3

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x-3	-	0	+

4°) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \dfrac{1}{3}$

4

Calculons dans chacun des cas les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et en $-\infty$

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3-2x^2+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3-2x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4-x^2+2x-3 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^4 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^4-x^2+2x-3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^7+3x^4-9 = \lim\limits_{x\to+\infty} -4x^7 = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^7+3x^4-9 = \lim -4x^7 = +\infty$

5

Déterminons les limites des fonctions en $+\infty$ et en $-\infty$

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{2x+3}$

$= \dfrac{3}{2}$ car $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$

3°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{3x^2}$

$= \dfrac{1}{3}$ car $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}\right.$

6°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3+4}{1-2x} = \lim \dfrac{-x^3}{-2x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2}$

$= +\infty$

DERIVEE - TANGENTE - SENS DE VARIATION - TABLEAU DE VARIATION

1

Calculons la dérivée *f'* de la fonction *f*

1°) $f(x) = x^3+2x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

2°) $f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

4°) $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + \frac{1}{3}$

$f'(x) = -6x^2 + \frac{2}{4}x - 5$

$f'(x) = -6x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

6°) $f(x) = \frac{x^2-1}{2} + \frac{2}{x}$

$f'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{2}{x^2}$

$f'(x) = x - \frac{2}{x^2}$

3

Calculons les dérivées

1°) $h(x) = (x^2+5)(-x+2)$

$h'(x) = 2x(-x+2) - (x^2+5)$

$= -2x^2 + 4x - x^2 - 5$

$h'(x) = -3x^2 + 4x - 5$

2°) $h(x) = (x^2 + 5)(-x + 2)$

$h(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 10$

$h'(x) = -3x^2 + 4x - 5$

5

Calculons dans chacun des cas la dérivée h' de la fonction h.

1°) $h(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$;

$h'(x) = \frac{2x(x-3)-(x^2-1)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2+1}{(x-3)^2}$

$h'(x) = \frac{2x^2-6x-x^2+1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$ $\quad h'(x) = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$

2°) $h(x) = \frac{x^2-x-3}{x-1}$

$h'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+3}{(x-1)^2}$ $\quad h'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$

9°) $h(x) = h\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

$h'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)^2-2(x+1)(x-1)^2}{(x+1)^4}$

$= \frac{2(x+1)[x^2-1-x^2+2x-1]}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)(2x-2)}{(x+1)^4}$ $\quad h'(x) = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

10°) $h(x) = \frac{1}{x^2-x-1}$

$h'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x-1)^2}$ $\quad h'(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x-1)^2}$

6

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - 6x + 10$

1°) Déterminons le domaine de définition de *f*

$Df = \mathbb{R} =]-\infty + \infty[$ car *f* est une fonction polynôme

2°) Equation de la tangente (T)

$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = f'(4) = 2$; $f(x_0) = f(4) = 2$

$(T) : y = 2(x-4) + 2$

$(T) : y = 2x - 6$

7

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-2x}$

Ecrivons l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$Df =]-\infty ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$

La fonction f est continue et dérivable sur Df

$\forall x \in Df\ f'(x) = \dfrac{2(1-2x)+2(2x+1)}{(1-2x)^2} = \dfrac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2} = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$

(T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = f'(0) = 4$

$f(x_0) = f(0) = 1$

$y = 4(x-0) + 1 \Rightarrow y = 4x + 1$

(T) : $y = 4x + 1$

9

On considère $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$

1°) Calculons la dérivée f' de la fonction f

f est continue et dérivable sur IR

$\forall x \in IR\quad f'(x) = -6x + 8$

2°) Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [-4, 4]

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

x	-4		$\frac{4}{3}$		4
$f'(x)$		+	0	-	

$\forall x \in [-4 ; \frac{4}{3}[\ f'(x) > 0$ et $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, alors f est strictement croissante sur $\left[-4; \frac{4}{3}\right]$

$\forall x \in]\frac{4}{3}; 4]\ f'(x) < 0$ et $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, alors f est strictement décroissante sur $\left[\frac{4}{3}; 4\right]$

3°) Dressons le tableau de variation de f

$\lim_{x\to -4} f(x) = f(-4) = -81$; $f\left(\frac{4}{3}\right) = 13$; $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = -17$

Tableau de variation

x	-4		$\frac{4}{3}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
f	-81	↗	13	↘	-17

13

$g(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

1°) Déterminons a et b pour que (C) admet pour tangente en $x_0 = 0$ la droite d'équation

$y = 4x + 3$

(T) : $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$= g'(0)(x - 0) + g(0)$

$y = g'(0)x + g(0)$

$y = 4x + 3$

On en déduit donc

$\begin{cases} g'(0) = 4 \\ g(0) = 3 \end{cases}$

g est continue et dérivable sur IR

$\forall x \in IR\ g'(x) = \dfrac{(6x+a)(x^2+1) - 2x(3x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$g'(0) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{a}{(1)^2} = 4$ $\quad a = 4$

$g(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{b}{1} = 3$ $\quad b = 3$

2°) démontrons que $\forall x \in IR\ g(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$

$g(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1} = \dfrac{3x^2+3}{x^2+1} + \dfrac{4x}{x^2+1}$

$= 3\dfrac{(x^2+1)}{x^2+1} + \dfrac{4x}{x^2+1} = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$ d'où $g(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$

BRANCHES INFINIES

1

a- Faux :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ alors la droite d'équation y=3 est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction *f* aux voisinages de -∞ et de +∞ ; ou bien la courbe (C_f) de la fonction *f* admet une asymptote horizontale d'équation y=3 aux voisinages de -∞ et de +∞.

b- Faux

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f ; ou bien la courbe (C_f) de la fonction admet une asymptote verticale d'équation x=2.

3

1- Déterminons la fonction h(x).

$h(x) = f(x) - y \Leftrightarrow h(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x+1} - 2x - 3 \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{x+1}$

2- Calculons

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty\end{cases}$

3- Conclusion :

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ alors la droite (Δ) d'équation y = 2x+3 est ...ptote oblique à la courbe (C_f) aux voisinages de -∞ et de +∞.

6

1- Domaine définition de *f*

$f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

$D=\{x \in \mathbb{R} / 1-2x \neq 0\}$

Posons $1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$D = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1- Limites aux bornes de D.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = +\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} 2x+1 = 2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} 2x+1 = 0^+\end{cases}$$

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
$1-2x$	+	0	−

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} \frac{2x+1}{1-2x} = -\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} 2x+1 = 2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} 2x+1 = 0^-\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

Etude des branches infinies.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$; la droite d'équation y = -1 est asymptote horizontale à (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} f(x) = -\infty$; la droite d'équation x=1/2 est asymptote verticale à la courbe (C_f)

2- Montrons que la droite (Δ) : y=x-3 Asymptote oblique.

$\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[x - 3 + \frac{4}{x+1} - x + 3\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 3 + \frac{4}{x+1} - x + 3\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0$;

donc la droite (Δ) d'équation y= $x - 3$ est asymptote oblique à la courbe Cg aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

FONCTION POLYNOME - FONCTION RATIONNELLE

1

Soit $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1°) Déterminons le domaine de définition D de g

D = IR car g est une fonction polynôme

$$D =]-\infty\ ;+\infty[$$

2°) Etudions le signe de g'(x) suivant les valeurs de x.

La fonction g est continue et dérivable sur D.

$\forall x \in D\ g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$g'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

- $\forall x \in]-\infty\ ; 0[\cup]2\ ;+\infty[$ $g'(x) > 0$ et $g'(0) = 0$; $g'(2) = 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[2\ ;\ +\infty[$
- $\forall x \in]0\ ; 2[$ $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$; $g'(2) = 0$ alors g est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 2]$.

3°) Dressons le tableau de variation de g.

Calculons les limites aux bornes du domaine de définition

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x^2 - 1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3$$

$$= +\infty$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

$g(0) = -1$ et $g(2) = -5$

4°) Traçons la courbe représentative C de g.

Branches infinies

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x}$$

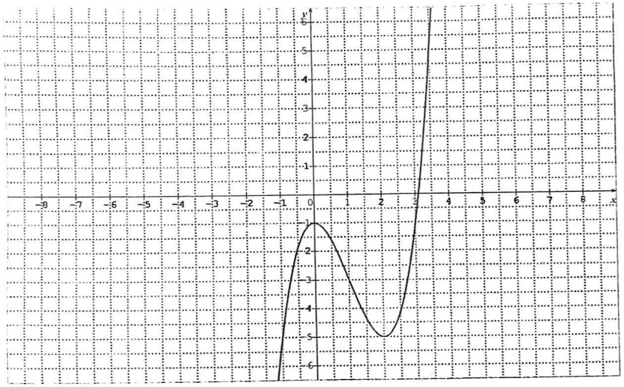
$$= +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2$$

La courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x}$$

$$= +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2$$

La courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnée en $+\infty$



3

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$; a, b, c étant des réels

1°) Déterminons a, b, c avec les conditions posées.

(C) passe par A(2, 6) équivaut à $g(2) = 6$

f admet un extremum au point B(1,7) équivaut à $g(1) = 7$ et $g'(1) = 0$

On a le système :

$$\begin{matrix} g(1) = 7 \\ g'(1) = 0 \end{matrix} \iff \begin{cases} a + b + c = 7 & (2) \\ 2a + b = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 6 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a - 2b - c = -6 \\ a + b + c = 7 \\ \hline -3a - b = 1 \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 & (3) \\ -3a - b = 1 & (4) \\ \hline -a = 1 \end{cases} \iff \quad a = -1$$

a = -1 **b = 2** **c = 6**

$g(x) = -x^2 + 2x + 6$

2°) On donne $h(x) = -x^2 + 2x + 6$

a-) Déterminons la fonction dérivée h' de h.

h(x) est dérivable comme étant une fonction polynôme dérivable sur $]-\infty, +\infty[$

$h'(x) = -2x + 2$

$h'(x) = -2(x - 1)$

b-) Etudions le signe de h'(x)

Posons $h'(x) = 0$ équivaut à

$-2x + 2 = 0 \iff$ à $x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x + 2$		+	0	-	

$\forall x \in]-\infty, 1[$ $h'(x) > 0$ et $h'(1) = 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$

$\forall x \in]1, +\infty[$ $h'(x) < 0$ et $h'(1) = 0$ donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

c-) Dressons le tableau de variation de h.

Etudions les limites aux bornes de D_h.

$D_h =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 2x + 6) = \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 2x + 6) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h	$-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

$h(1) = 7$

4

On considère $f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

1°) L'ensemble de définition D de *f*.

$D = \{x \in IR \ / \ 1-2x \neq 0\}$

Posons $1-2x = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$

$D = IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad$ $D =]-\infty\,, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,; +\infty[$

Calculons $f(1)$ et $f(0)$

- $f(1) = \frac{2(1)+1}{1-2(1)} = \frac{2+1}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3 \ f(1) = -3$
- $f(0) = \frac{2(0)+1}{1-2(0)} = +1 \ f(0) = 1$

2°) Déterminons la fonction dérivée première f' de f

$f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

f est dérivable sur D comme étant le quotient de deux fonctions polynômes dérivables sur D

$$f'(x) = \frac{2(1-2x)+2(2x+1)}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

Calculons $f'(1)$ et $f'(0)$

$f'(1) = \frac{4}{(1-2(1))^2} = \frac{4}{(-1)^2} = 4 \qquad f'(1) = 4$

$f'(0) = \frac{4}{(1-2(0))^2} = \frac{4}{1} = 4 \ f'(0) = 4$

3°) Ecrivons l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= 4(x-0) + 1$

(T) : y = 4x + 1

4°) Calculons les limites de $f(x)$ aux bornes de D et précisons les asymptotes de (C)

$f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x}$

  $= -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{1-2x}$

  $= -1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$

La droite d'équation **y = -1** est asymptote horizontale à la courbe (C)

- $\lim\limits_{\substack{x\to1/2\\x>1/2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\x>1/2}} \frac{2x+1}{1-2x} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\>}} 2x+1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\>}} 1-2x = 0^- \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to1/2\\x<1/2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\x<1/2}} \frac{2x+1}{1-2x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\<}} 2x+1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1/2\\<}} 1-2x = 0^+ \end{cases}$

Remarque : se servir du tableau de signe pour déterminer le signe du zéro du dénominateur

x	$-\infty$	½	$+\infty$
$1-2x$	+	0	-

$\lim\limits_{x\to1/2} f(x) = \infty$ la droite d'équation x = ½ est une asymptote verticale à la courbe (C)

b-) Trouvons les réels a, b, c en utilisant les données du tableau de variation.

Selon le tableau de variation on a :

$$\begin{cases} g'(-2) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g(-2) = -2 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

- $g'(-2) = 0 \Rightarrow a - c = 0$

$g(-2) = -2 \Rightarrow -2a + b - c = -2$ On a le système : $\begin{cases} -2a + b - c = -2 & (1) \\ b + c = 2 & (2) \\ a - c = 0 & (3) \end{cases}$

$g(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad b + c = 2$

(1) + (2) donne $-2a + 2b = 0$ (4)

(2) + (3) donne $a + b = 2$ (5)

(4) + 2(5) donne $(-2a + 2b) + (2a + 2b) = 4$

$4b = 4 \Rightarrow b = 1$

$a + b = 2 \Rightarrow a = 1$

$a - c = 0 \Rightarrow c = 1$

a = 1 ; b = 1 ; c = 1

$g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$

c-) Démontrons que la droite (Δ) : y = x + 1 est une asymptote oblique à la courbe (C)

$$\lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x + 1 + \frac{1}{x+1} - x - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$= 0$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [g(x) - y] = 0$ la droite d'équation D : y = x + 1 est asymptote oblique à (C).

d-) Etudions la position de (C) par rapport à (Δ)

Etudions le signe de la fonction

$$h(x) = g(x) - y \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = \frac{1}{x+1}$$

Pour tout x ∈]- ∞,-1[h(x) < 0 ; la courbe (C) est en dessous de l'asymptote sur]- ∞,-1[.

Pour tout x ∈]-1, +∞[h(x) > 0 ; la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote sur]-1, +∞[.

9

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$

1°) Vérifions que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{x^2 - 3x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x(x-3)}{x} + \frac{1}{x} = x - 3 + \frac{1}{x}$$

d'où $\quad f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$

2°) Déterminons la limite de f en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x - 3 + \frac{1}{x}\right] = +\infty \qquad \text{car } \begin{cases} x - 3 \to -3 \\ \dfrac{1}{x} \to +\infty \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à (C)

3°) a-) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 3 + \frac{1}{x}\right] = +\infty \qquad \text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x - 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

b-) $g(x) = f(x) - (x - 3)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 3 + \frac{1}{x} - x + 3\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

La droite d'équation y = x – 3 est asymptote à la courbe (C) de f.

4°) Vérifions que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

f est continue et dérivable sur **I**

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

d'où $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

Tableau de variation

Posons $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 0 \quad \forall x \in Df \ \ x^2>0$

$(x+1)(x-1) = 0$; $\quad x+1 = 0$ ou $x-1 = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in]0, 1[$ $f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

$\forall x \in]1, +\infty[$ $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

4°) Etudions la position de (C) par rapport à Δ

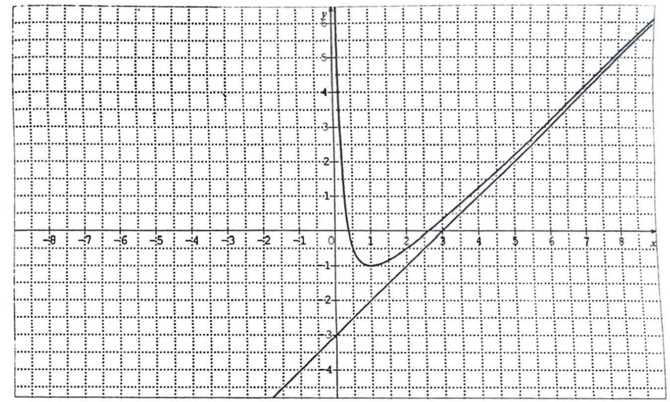
On étudiera ici le signe de la fonction

$g(x) = f(x) - (x-3) \iff g(x) = \dfrac{1}{x}$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	

$\forall x \in]0, +\infty[$ $g(x) > 0$; la courbe est donc au dessus de Δ

5°) Tracer



4°) Vérifions que $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

f est continue et dérivable sur I

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

d'où $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

Tableau de variation

Posons $f'(x) = 0 \iff \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 0$ $\forall x \in Df$ $x^2>0$

$(x + 1)(x-1) = 0$; $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

$\forall x \in]0, 1[$ $f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

$\forall x \in]1, +\infty[$ $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

4°) Etudions la position de (C) par rapport à Δ

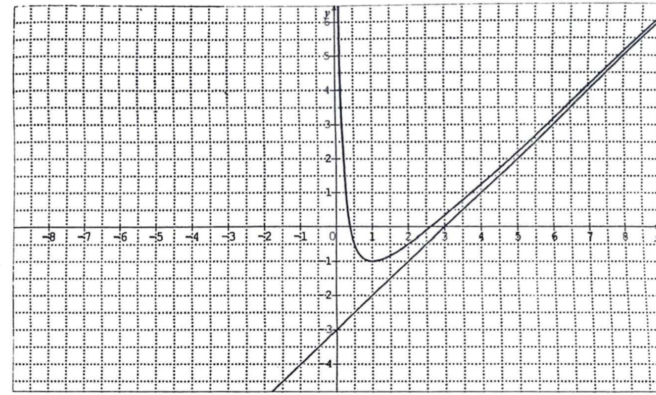
On étudiera ici le signe de la fonction

$g(x) = f(x) - (x - 3) \iff g(x) = \frac{1}{x}$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$

$\forall x \in]0, +\infty[$ $g(x) > 0$; la courbe est donc au dessus de Δ

5°) Tracer



FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
SIMPLIFICATION - EQUATION - INEQUATION

2

Calculons en fonction de ln2 ou de ln3

$A = \ln(2e) + 5\ln 2 + \ln 4$

$A = \ln 2 + \ln e + 5\ln 2 + \ln 2^2$

$= \ln 2 + 1 + 5\ln 2 + 2\ln 2$

$A = 8\ln 2 + 1$

$B = \ln 2 + \ln(4e) - \ln(16e^2)$

$B = \ln 2 + \ln 4 + \ln e - (\ln 2^4 + \ln e^2)$

$= \ln 2 + 2\ln 2 + 1 - 4\ln 2 - 2$

$B = -\ln 2 - 1$

$C = \ln 3^2 + \ln\sqrt{3} - \ln 81$

$= 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - 4\ln 3$

$C = -\frac{3}{2}\ln 3$

$D = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{9}{e^2}\right)$

$= -\ln 3 - 2\ln 3 + 2$

$D = -3\ln 3 + 2$

8

Résolvons les inéquations suivantes

2°) $\ln(3x + 12) \le \ln(2x - 1)$

$$\begin{cases} 3x+12>0 \\ 2x-1>0 \\ 3x+12 \le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-12 \\ 2x>1 \\ 3x-2x \le -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>\frac{1}{2} \\ x \le -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-4;+\infty[\\ x \in]\frac{1}{2};+\infty[\\ x \in]-\infty;-13] \end{cases}$$

Cette inéquation n'admet aucune solution dans IR. $S = \emptyset$

3°) $\ln(2x-1) \le \ln x$

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x>0 \\ 2x-1 \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ x>0 \\ 2x-x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]\frac{1}{2};+\infty[\\ x \in]0;+\infty[\\ x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

Soit S l'ensemble des solutions

$S = [1 ; +\infty[$

4°) $\ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln(x+8)$

$\ln(x+2)(x+4) < \ln(x+8)$

$$\begin{cases} (x+2)(x+4)>0 \\ x+8>0 \\ (x+2)(x+4)<x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4)>0 \\ x+8>0 \\ x^2+6x+8<x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+4>0 \\ x+8>0 \\ x^2+6x+8-x-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4)>0 \\ x->-8 \\ x^2+5x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty;-4[\cup]-2;+\infty[\\ x \in]-8;+\infty[\\ x \in]-5;0[\end{cases}$$

Soit S l'ensemble des solutions

$S =]-5 ;-4[\cup]-2 ; 0[$

9

Résolvons dans IR l'équation et l'inéquation

(E) : $X^2 - 5X + 6 = 0$ équivaut à $(X-2)(X-3) = 0$ équivaut à

$X = 2$ ou $X = 3$

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation $S_{IR} = \{2; 3\}$

(I) : $X^2 - 5X + 6 \le 0$ $(X-2)(X-3) \le 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		-	0	+		+	
$x-3$		-		-	0	+	
$(x-2)(x-3)$		+	0	-	0	+	

Soit S l'ensemble des solutions $S = [2 ; 3]$

2) utilisons les résultats précédents pour résoudre dans IR l'équation et l'inéquation.

(E) : $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

Posons $\ln x = X$

$\ln x = 2 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^2$ $\qquad x = e^2$

$\ln x = 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = 3$ $\qquad x = e^3$

soit S l'ensemble des solutions de cette équation

$S = \{e^2 ; e^3\}$

(I) : $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \leq 0$

Posons $\ln x = X$ $\qquad x \in [e^2 ; e^3]$ $\qquad S = [e^2 ; e^3]$

DOMAINE DE DEFINITION - LIMITES - DERIVEE - SENS DE VARIATION

11

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions

1°) $f(x) = \ln(x^2-1)$

$Df = \{x \in IR / x^2-1 > 0\}$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \qquad x = -1$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Df =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

4°) $f(x) \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x-2}\right)$

$Df = \left\{x \in IR / \dfrac{2x-3}{5x-2} > 0 \text{ et } 5x-2 \neq 0\right\}$

Posons $2x - 3 = 0$ et $5x - 2 = 0$

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$; $\qquad 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x-3}{5x-2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty ; \dfrac{2}{5}[\cup]\dfrac{3}{2} ; +\infty[$

5°) $f(x) = \ln(2x-3) + \ln(5x-2)$

$D_f = \{x \in IR / 2x - 3 > 0 \text{ et } 5x - 2 > 0\}$ h

$2x - 3 > 0 \Rightarrow x \in]\dfrac{3}{2} ; +\infty[$ $\quad 5x - 2 > 0 \Rightarrow x \in]\dfrac{2}{5} ; +\infty[$

$Df =]\dfrac{3}{2} ; +\infty[\cap]\dfrac{2}{5} ; +\infty[\qquad Df =]\dfrac{3}{2} ; +\infty[$

15

Calculons la dérivée première de chacune des fonctions

1°) $g(x) = \ln x - x + 3$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$= \frac{1-x}{x}$

4°) $g(x) = \ln(x^2 - x + 3)$

$g'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$

6°) $g(x) = \ln(x^2) - \ln x$

$g'(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$

7°) $g(x) = (\ln x)^2 - \ln(x^2)$

$g'(x) = 2\ln x - \frac{2x}{x^2}$

$g'(x) = 2\ln x - \frac{2}{x}$

16

On considère $h(x) = \ln x - x$

1°) Calculons la dérivée h'(x) puis étudions le sens la variation de

$D_h = \{x \in IR / x > 0\}$ *$D_h =]0 ; +\infty[$*

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[\ln x - x] = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x \to -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -x \to 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \end{cases}$

La fonction h est continue et dérivable sur D_h

$\forall x \in D_h$ $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ $h'(x) = \frac{1-x}{x}$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	||	+	0	-	

$\forall x \in]0 ; 1[$ $h'(x) > 0$ et $h'(1) = 0$ alors h est strictement croissant sur $]0; 1]$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$ $h'(x) < 0$ et $h'(1) = 0$ donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

2°) Déterminons une équation de la tangente à (C) au point A(1,h(1))

(T) : $y = h'(1)(x-1) + h(1)$ $h'(1) = 0$ et $h(1) = -1$ (T) : $y = -1$

PROBLEMES

21

1°) a- Etudions le signe de h(x) et résolvons l'inéquation h(x) > 0

$h(x) = \frac{x-3}{x+4}$

Posons $x - 3 = 0$ et $x + 4 = 0$ $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		-	0	+		+	
$x-3$		-		-	0	+	
$\frac{x-3}{x+4}$		+	||	-	0	+	

$h(x) > 0 \Rightarrow x \in]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation *$S =]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$*

b°) Déduisons le domaine de définition de g

$g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$

$D = \{x \in IR / \frac{x-3}{x+4} > 0$ et $x+4 \neq 0\}$ $D =]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$

2°) a- Exprimons g'(x)

$\forall x \in D$ $g'(x) = \frac{(x+4)-(x-3)}{(x+4)^2} \times \frac{x+4}{x-3}$

b°) Justifions que g est strictement croissante sur chacun des intervalles

]-∞ ;-4 [et]3, +∞[$g'(x) = \frac{7}{(x+4)(x-3)}$

$\forall x \in]-\infty ; -4[$ $(x + 4)(x - 3) > 0$ par conséquent $g'(x) > 0$ sur $]-\infty ; -4[$ on conclut que g est strictement croissante sur $]-\infty ; -4[$.

$\forall$ x $\in$]3 ; + ∞[(x + 4) (x – 3) > 0 par conséquent g'(x) > 0 sur]-∞ ; -4[on conclut que g est strictement croissante sur]3 ; +∞[.

3°)a-Etablissons le tableau de variation de g.

Calculons les limites aux bornes de D.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-4\\ <}} \ln\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-4} x-3 = -7 \\ \lim\limits_{x\to-4} x+4 = 0^- \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} \ln\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} x-3 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} x+4 = 7 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x+4} = 1$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
g'(x)		+				+	
g	0 ↗	$+\infty$			$-\infty$ ↗		0

22

On considère f(x) = lnx + x

Df = {x $\in$ IR / x > 0 }

x > 0 => x $\in$]0 ; +∞[

Df =]0 ; + ∞ [

1°) Calculons f'(x) puis étudions le sens de variation de f sur I

La fonction f est continue et dérivable sur Df

$\forall$ x $\in$ Df $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x} f'(x) = \dfrac{1+x}{x}$

$\forall$ x $\in$ Df f'(x) > 0 alors f est strictement croissante sur]0; +∞[

2°) Déterminons les limites aux bornes puis présentons le tableau de variation

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}(\ln x + x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} x = 0^+ \end{cases}$

La droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x + x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + 1\right) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x + x - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = +\infty$ on conclut que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite y = x

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3°) Déterminons une équation de la tangente T à (C) au point A(1 ; f(1))

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$

$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1$

(T) : $y = 2x - 1$

25

On considère $f(x) = x^2 - 3 - 2\ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$

1°) Déterminons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 - 3 - 2\ln x = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 - 3 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -2\ln x = +\infty \end{cases}$

2°) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3 - 2\ln x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{3}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = 1 \end{cases}$

3°) Calculons la dérivée f' de f

f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$\forall x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$ d'où $f'(x) = \frac{2}{x}(x-1)(x+1)$

Déduisons le signe de $f'(x)$. $f'(x) = 0$ $\forall x \in]0, +\infty[$ => $x - 1 = 0$ $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	

$\forall x \in]0 ; 1[$ $f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

$\forall x \in]1 ; +\infty[$ $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$ alors f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

4°) Dressons le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

SIMPLIFICATION – EQUATION – INEQUATION

3

Calculons

$I = e^x$	$L = e^6$
$J = e^{2x+4}$	$M = 1$
$K = e^{-x-1}$	$N = e^{3x}$

6

Résolvons dans IR les inéquations suivantes :

a°) $e^x \leq 2$

$\ln e^x \leq \ln 2$

$x \leq \ln 2$

Soit S l'ensemble solution

$S =]-\infty ; \ln 2]$

c°) $e^{x+2} < e$

$\ln e^{x+2} < \ln e$

$x + 2 < 1$

$x < -1$

Soit S l'ensemble solution

$S =]-\infty ; -1[$

e°) $e^{3x+1} < e^{2x+4}$

$\ln e^{3x+1} < \ln e^{2x+4}$

$3x + 1 < 2x + 4$

$x < 3$

$S =]-\infty ; 3[$

f°) $e^{2x+3} > e^{-x+1}$

$\ln e^{2x+3} > \ln e^{-x+1}$

$3x > -2$

$x > \frac{-2}{3}$

$S =]\frac{-2}{3} ; +\infty[$

7

1°)a- Résolvons dans IR l'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$

$\Delta = (3)^2 + (4)(4) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$ $X_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$; $X_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$

Soit S l'ensemble solution. $S_{IR} = \{-4 ; 1\}$

b°) Résolvons dans IR l'équation $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

Posons $e^x = X$. Il faut que $X > 0$

$X = -4$ ne convient pas. $X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

$S_{IR} = \{0\}$

2°) a- Résolvons dans IR l'équation

$3e^{2x} + 5e^x - 2 = 0$

Posons $e^x = X$ On a $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Delta = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$ $X_1 = \frac{-5-7}{6} = -2$; $X_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$

$e^x = X$. Il faut que $X > 0$ par conséquent $X = -2$ ne convient pas.

$X = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 1 - \ln 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3$

$S_{IR} = \{-\ln 3\}$

LIMITES - DERIVEE

10

1°) Trouvons la limite en + ∞ de la fonction g définie sur IR par g(x) = x – xe^x

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - xe^{x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{x})$$

$$= = -\infty \ car \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 1-e^{x} = -\infty \end{cases}$$

2°)Trouvons la limite en + ∞ de la fonction h définie parh(x) = xe^-x-x

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{-x} - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(e^{-x}-1)$$

$$= -\infty \ car \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} - 1 = +\infty \end{cases}$$

3°) Calculons la limite de *f* en + ∞

$$f(x) = -2 + \frac{3}{e^{x}+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{3}{e^{x}+4}\right)$$

$$= -2 \ car \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -2 = -2 \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^{x}+4} = 0 \end{cases}$$

On peut conclure que la droite d'équation y = - 2 est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f* au voisinage de +∞.

12

Soit $g(x) = 2x + 1 + \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

1°) Calculons $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\right)$$

$$= -\infty \quad car \begin{cases} 2x+1 \to -\infty \\ \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} \to 0 \end{cases}$$

2°) Démontrons que la droite d'équation y = 2x + 1 est asymptote à (C) en - ∞.

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x+1+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-2x-1\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1} = 0$$

d'où y = 2x + 1 est asymptote oblique à la courbe (C).

Etudions la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote

Etudions le signe de [g(x) – y].

$$g(x) - y = \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

∀ x ∈ IR $\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.

13

Dans chacun des cas calculons la dérivée de la fonction *f*.

1°) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\, e^{x}$

La fonction *f* est continue et dérivable sur IR

∀ x ∈ IR $f'(x) = (2x + 2)\, e^{x} + e^{x}(x^2 + 2x + 1)$

$f'(x) = e^{x}(x^2 + 4x + 3)$

2°) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x-1}$

f est continue et dérivable sur $]1, +\infty[$

$\forall$ x $\in$ $]1 ; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

3°) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

La fonction f est continue et dérivable sur IR

$\forall$ x $\in$ IR $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

4°) $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

f est continue et dérivable sur IR

$\forall$ x $\in$ IR $f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x + 1)$

$f'(x) = -xe^{-x}$

5°) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^x - 2}$

f est continue et dérivable sur $]\ln 2 ; +\infty[$

$\forall$ x $\in$ $]\ln 2 ; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}(e^x-2)-e^xe^{3x}}{(e^x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2e^{3x}(e^x-3)}{(e^x-2)^2}$

6°) $f(x) = xe^{x^2+x-1}$

f est continue et dérivable sur IR

$\forall \in$ IR $f'(x) = e^{x^2+x-1} + (2x+1)xe^{x^2+x-1}$ $f'(x) = (2x^2+x+1)e^{x^2+x-1}$

PROBLEMES

14

Soit $h(x) = 2e^x - x + 1$

1°) Déterminons le domaine de définition D_h de h

$D_h =]-\infty ; +\infty[$

2°) Calculons les limites aux bornes de D_h

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - x + 1)$

$= +\infty \quad car \begin{cases} 2e^x \to 0 \\ -x+1 \to +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x - x + 1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(2 - \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x})$

$= +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \end{cases}$

3) a- Déterminons la fonction dérivée h' de h.

La fonction h est continue et dérivable sur D_h $\forall$ x $\in$ $]-\infty ; +\infty[$ $h'(x) = 2e^x - 1$

b) Etudions le sens de variation de h et dressons son tableau de variation

$h'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 1 = 0$

$e^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	

$\forall$ x $\in$ $]-\infty ; -\ln 2[$ $h'(x) < 0$ et $h'(-\ln 2) = 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; -\ln 2]$

$\forall$ x $\in$ $]-\ln 2 ; +\infty[$ $h'(x) > 0$ et $h'(-\ln 2) = 0$ alors h est strictement croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h	$+\infty$	↘	h(-ln2)	↗	$+\infty$

4) a- Déterminons l'asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x - x + 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{2e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [\,h(x) + x\,] = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x + 1 = 1$

La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

b) calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$= +\infty$

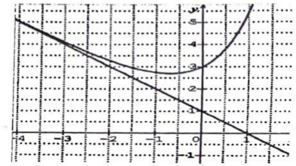
(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$

c) Etudions la position de (C) par rapport à Δ ; y = -x + 1

$[h(x) - y] = 2e^x - x + 1 + x - 1 = 2e^x$

$\forall x \in]-\infty ; +\infty[$ $2e^x > 0$ la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote

b°) Tracer



17

Soit la fonction f définie par $f(x) = (ax + b)\,e^x$.

1°) Déterminons le domaine de définition D et f

$Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

2°) Déterminons les réels a et b pour que la courbe (C) passe par les points A (0, 1) et B (1, 0)

C passe par A $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$

C passe par B $\Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow (a + 1)\,e = 0 \Leftrightarrow (a + 1) = 0$

$a = -1$

$f(x) = (1 - x)\,e^x$

3°) a- Etudions les variations de la fonction f.

La fonction f est continue et dérivable sur D

$\forall x \in D$ $f'(x) = -e^x + e^x(1-x)$

$f'(x) = -xe^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $\forall x \in D$ $e^x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

$\forall x \in]-\infty, 0[$ $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$

$\forall$ x $\in$]0, +∞[$f'(x) < 0$ et $f'(0) = 0$ alors f est strictement décroissante sur [0; +∞[.

Limites aux bornes de D

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} xe^x$$

$$= 0 \qquad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^x$$

$$= -\infty \qquad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

x	- ∞		0		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗	1	↘	-∞

b°) Etudions les branches infinies de la courbe (C)

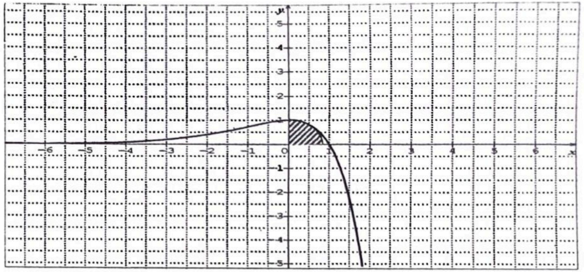
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x = -\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de +∞

c°) Allure de la courbe



ENTIERS NATURELS

1

Donnons l'écriture de 42 en base 2

42 | 2
0 21 | 2
1 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1 | 2
1 0

$$42 = \overline{10\,10\,10}^{\,2}$$

Donnons l'écriture de 151 en base de 3

151 | 3
1 50 | 3
2 16 | 3
1 5 | 3
2 1 | 3
1 0

$$151 = \overline{12\,12\,1}^{\,3}$$

Donnons l'écriture de 72 en base 4

72 | 4
0 18 | 4
2 4 | 4
0 1 | 4
1 0

$$72 = \overline{10\,20}^{\,4}$$

2

Déterminons *x et y*

$x = (1x3^7) + (2x3^6) + (1x3^5) + (2x3^4) + (1x3^3) + (1x3^2) + (2x3^1) + (1x3^0)$

$x = 4093$

$y = (3x5^4) + (1x5^3) + (0x5^2) + (1x5^1) + (0x5^0)$

$y = 2005$

3

- A en base 2 donne 1001001

Ecrivons d'abord A dans le système décimal

$A = (1x2^6) + (0x2^5) + (0x2^4) + (1x2^3) + (0x2^2) + (0x2^1) + (1x2^0)$

A = 73

Ecrivons maintenant A en base 3.

73 | 3
1 24 | 3
0 8 | 3
2 2 | 3
2 0

$$73 = \overline{2201}^{\,3}$$

- B en base 2 donne 10 10 11

Ecrivons d'abord B dans le système décimal.

$B = (1x2^5) + (0x2^4) + (1x2^3) + (0x2^2) + (1x2^1) + (1x2^0)$

B = 43

Ecrivons maintenant B en base 3

43 | 3
1 14 | 3
2 4 | 3
1 1 | 3
1 0

$$43 = \overline{1121}^{\,3}$$

7

Déterminons x pour que A = 42x5 soit divisible par 3 mais pas 9

- A est divisible par 3 si et seulement si $11 + x$ est divisible par 3 donc $x \in \{1 ; 4, 7\}$.

A est divisible par 9 si et seulement si $11 + x$ est divisible par 9 donc $x \in \{7\}$.

A divisible par 3 mais pas par 9 si et seulement si $x \in \{1 ; 4\}$.

- A = 348x est divisible par 3 si et seulement si $15 + x$ est divisible par 3 donc $x \in \{0 ; 3 ; 6 ; 9\}$.

A = 348x est divisible par 9 si et seulement si $15+x$ est divisible par 9 donc $x \in \{3\}$.

A = 348x est divisible par 3 mais pas par 9 si et seulement si $x \in \{0 ; 6, 9\}$.

SUITES ARITHMETIQUES

1

Montrons que les suites (U_n) et (W_n) sont arithmétiques. Précisons la raison r et le premier terme

* $U_n = 5n + 1 \Rightarrow U_{n+1} = 5(n+1) + 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = 5n + 5 + 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n + 5$

$U_{n+1} - U_n = 5$

$U_0 = 5(0) + 1 \Rightarrow U_0 = 1$ d'où r = 5 et $U_0 = 1$

* $V_n = -2n + 8 \Rightarrow V_{n+1} = -2(n+1) + 8$

$\Rightarrow V_{n+1} = -2n - 2 + 8$

$\Rightarrow V_{n+1} = -2n + 8 - 2$

$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = -2$

$V_{n+1} - V_n = -2$ et $V_0 = 8$ d'où V_n est une suite arithmétique de raison r = -2 et de premier terme $V_0 = 8$

* $W_n = \frac{1}{4}n - 1 \Rightarrow W_{n+1} = \frac{1}{4}(n+1) - 1$

$\Rightarrow W_{n+1} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} - 1$

$\Rightarrow W_{n+1} = W_n + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow W_{n+1} - W_n = \frac{1}{4}$ et $W_0 = -1$ d'où W_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{4}$ et de premier terme $W_0 = -1$.

2

Donnons en fonction de n l'expression de (V_{n+1}) ; $(V_n + 1)$; (V_{n+2}) et (V_{n}^{2})

$V_n = 4n + 7$

* $V_{n+1} = 4(n+1) + 7$

$V_{n+1} = 4n + 11$

* $V_n + 1 = 4n + 7 + 1$

$V_n + 1 = 4n + 8$

* $V_{n+2} = 4(n+2) + 7$

$= 4n + 8 + 7$

$V_{n+2} = 4n + 15$

* $V_{n^2} = 4(n^2) + 7$

$V_{n^2} = 4n^2 + 7$

4

Dans chacun des cas, utiliser la formule $U_n = U_p + (n-p)r$.

a) $U_3 = 4$ et $U_{10} = -10$

Calculons U_0 ; U_5 et U_{15}.

Déterminons d'abord la raison r

$U_{10} = U_3 + (10-3)r \Rightarrow -10 = 4 + 7r$

$\Rightarrow -14 = 7r$ **r = -2**

$U_{10} = U_0 + 10r \Rightarrow -10 = U_0 - 20$ $\mathbf{U_0 = 10}$

$U_5 = U_3 + (5-3)r \Rightarrow U_5 = 4 - 4$ $\mathbf{U_5 = 0}$

$U_{15} = U_{10} + (15-10)r \Rightarrow U_{15} = -10 - 10$ $\mathbf{U_{15} = -20}$

b) Déterminer r à partir de U_5 et U_{15}. Calculer U_1 ; U_{12} et U_{20}.

c) Déterminer r puis procéder de la même manière.

6

Dans chacun des cas, calculons la somme S. (U_n) est une suite arithmétique.

a. $U_0 = 1$ et $r = 4$

$S = U_3 + U_4 + \dots\dots + U_{2000}$

Déterminons le nombre N de termes.

$N = 2\,000 - 3 + 1$ **N = 1 998 termes ;** $U_n = U_0 + nr$

$U_3 = U_0 + 3r \Rightarrow U_3 = 1 + 12$ $U_3 = 13$

$U_{2000} = 1 + 4\,000 \Rightarrow U_{2000} = 4\,001$

$S = \frac{1998}{2}(13 + 4001)$ $S = 4009\,986$

b. $U_0 = -3$ et $r = -2$

$S = U_{25} + U_{26} + \dots\dots\dots + U_{125}$

$N = 125 - 25 + 1$ N = 101 termes.

$U_n = U_0 + nr$

$U_{25} = -3 + 25(-2)$ $U_{25} = -53$

$U_{125} = -3 + 125(-2)$ $U_{125} = 253$

$S = \frac{101}{2}(-53 - 253)$ **S = - 15 453**

7

1. **Calculons r et U_0**

(U_n) suite arithmétique $\Rightarrow U_n = U_p + (n-p)r$

$U_{10} = U_5 + (10-5)r$

$28 = 8 + 5r \Rightarrow r = 4$

$U_5 = U_0 + 5r \Rightarrow U_0 = U_5 - 20$

$U_0 = 8 - 20\ U_0 = -12$

2. **Exprimons U_n en fonction de n**

$U_n = U_0 + nr \Rightarrow U_n = -12 + 4n$

3. **Calculons $\lim_{x \to +\infty} U_n$**

$\lim_{x \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty}(-12 + 4n) = +\infty$ car $r > 0$.

4. **Calculons la somme :**

$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{99} + U_{100}$

$S = \frac{101}{2}(U_0 + U_{100})$; $U_{100} = 388$

$S = \frac{101}{2}(-12 + 388)$; $S = 18\,988$

SUITES GEOMETRIQUES

1

Montrons que les suites (U_n) ; (V_n) et (W_n) sont géométriques.

* $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1+1}}$

$= \frac{2^n \times 2}{3^{n+1} \times 3}$

$U_{n+1} = \frac{2^n}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3}$

$U_{n+1} = U_n \times \frac{2}{3}$ et $U_0 = \frac{1}{3}$ d'où U_n est une suite géométrique de 1er terme $U_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.

* $V_n = \frac{4^{n+1}}{5^n} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{4^{n+1+1}}{5^{n+1}}$

$V_{n+1} = \frac{4^{n+1} \times 4}{5^n \times 5}$ $\qquad V_{n+1} = V_n \times \frac{4}{5}$

$V_0 = 4$ d'où V_n est une suite géométrique de 1er terme $V_0 = 4$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.

2

Utiliser la formule $V_n = U_p q^{n-p}$ et calculer d'abord la raison q.

a- $U_7 = U_5 q^2 \Rightarrow 4 = q^2$ $\qquad q = 2$

Calculons U_6 ; U_0 ; U_{20}

$U_6 = U_5 q \Rightarrow U_6 = 2$

$U_5 = U_0 q^5 \Rightarrow U_0 = \frac{U_5}{q^5}$ $\qquad U_0 = \frac{1}{32}$

$U_{20} = U_7 q^{13} \Rightarrow U_{20} = 4 \times (2)^{13}$ $\qquad U_{20} = 32\,768$

$U_6 = 2$; $U_0 = \frac{1}{32}$; $U_{20} = 32\,768$

Pour b- et c-, Calculer q et procéder de la même manière.

4

a- $V_0 = 1$ et $q = 2$

Calculons la somme $S_1 = V_3 + V_4 + \cdots + V_{10}$

Nombre de termes = 10 – 3 + 1

Nombre de termes = 8

$V_3 = V_0 q^2$ $\qquad V_3 = 4$

$S_1 = 4\frac{1-(2)^8}{1-2}$; $\qquad S_1 = 1020$

b- $V_0 = -2$ et $q = \frac{3}{4}$

Calculons la somme $S_2 = V_0 + V_1 + \cdots + V_8$

Nombre de termes = 8 – 0 + 1

Nombre de termes = 9

$S_2 = -2\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^9}{1-\frac{3}{4}}$ $\qquad S_2 = \frac{242\,461}{32\,643}$

5

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2 + \frac{3}{U_n}$

1. **Calculons U_1 ; U_2 et U_3**

$U_1 = 2 + \frac{3}{U_0} \Rightarrow U_1 = 5$

$U_2 = 2 + \frac{3}{U_1} \Rightarrow U_2 = \frac{13}{5}$

$U_3 = 2 + \frac{3}{U_2} \Rightarrow U_3 = \frac{41}{13}$

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$; la suite (U_n) n'est donc pas géométrique.

2. $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-3}$

a- **Calculons V_0 ; V_1 ; V_2 et V_3.**

$V_0 = \frac{U_0+1}{U_0-3} \Rightarrow V_0 = -1$

$V_1 = \frac{U_1+1}{U_1-3} \Rightarrow V_1 = 3$

$V_2 = \frac{U_2+1}{U_2-3} \Rightarrow V_2 = -9$

$V_3 = \frac{U_3+1}{U_3-3} \Rightarrow V_3 = 27$

b- **Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n.**

$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-3} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-3}$

$V_{n+1} = \frac{2+\frac{3}{U_n}+1}{2+\frac{3}{U_n}-3}$ $\quad\quad$ $\mathbf{V_{n+1} = -3V_n}$

La suite (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = -1$ et de raison q = -3.

$\mathbf{V_n = V_0 q^n}$

$\mathbf{V_n = (-1)(-3)^n}$

3. **Exprimons U_n en fonction de n**

$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-3} \Rightarrow V_n(U_n - 3) = U_n + 1$ on a finalement $U_n = \frac{3V_n+1}{V_n-1}$

$U_n = \frac{-3(-3)^n+1}{(-1)(-3)^n-1}$

Déterminons $\lim_{x \to +\infty} U_n$

V_n n'admet pas de limite en $+\infty$ car $q < -1$ par conséquent on ne peut donc déterminer la limite de U_n en $+\infty$.

8

1. **Calculons L_1 le loyer versé en 2001**

$L_0 = 12\,000$

$L_1 = L_0 + 0{,}1L_0 \Rightarrow L_1 = 1{,}1L_0$

2. **a- Exprimons L_{n+1} en fonction de L_n.**

$L_2 = L_1 + 0{,}1L_1 \Rightarrow L_2 = 1{,}1\, L_1$

$L_3 = L_2 + 0{,}1L_2 \Rightarrow L_3 = 1{,}1L_2$

$L_n = L_{n-1} + 0{,}1L_{n-1}$

$L_n = 1{,}1L_{n-1}$

$L_{n+1} = L_n + 0{,}1L_n$ $\quad\quad$ $\mathbf{L_{n+1} = 1{,}1L_n}$

b- Déduisons que (L_n) est une suite géométrique $\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1{,}1$ alors (L_n) est unesuite géométrique de premier terme $L_0 = 12\,000$ et de raison q = 1,1.

c- Calculons $\lim_{n \to +\infty} L_n$

$L_n = 12000(1{,}1)^n$

$\lim_{n \to +\infty} L_n = \lim_{n \to +\infty} (1{,}1)^n$

$\lim_{n \to +\infty} L_n = +\infty$ car $q > 1$

3. Calculons $S = L_0 + L_1 + \cdots + L_{19}$

$S = L_0 \frac{1-q^{20}}{1-q} \Rightarrow S = 12000 \frac{1-(1{,}1)^{20}}{1-1{,}1}$

S = 687 299,99

STATISTIQUE

3

1°) Calculons la moyenne d'âge des épargnants.

Les modalités x_i correspondant à chaque effectif n_i est $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}$

x_i	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	Total
n_i	48	179	168	155	189	284	187	91	1301

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i n_i$$

$$\bar{x} = \frac{60352{,}5}{1301} = 46{,}38$$

$$\bar{x} = 46{,}38$$

2°) Calculons l'écart type

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i^2 n_i - \bar{x}^2 \qquad V(x) = \frac{2924531{,}25}{1301} - (46{,}38)^2 = 96{,}80$$

$$\sigma(x) = \sqrt{96{,}80} = 9{,}83 \qquad \sigma(x) = 9{,}83$$

4

1°) Représentons le nuage de points associé à la série double (x_i, y_j)

Tableau à double entrée :

y_j \ x_i	25	30	35	40	50	55	60	70	Total
105	1	0	0	0	0	0	0	0	1
95	0	1	0	0	0	0	0	0	1
80	0	0	1	0	0	0	0	0	1
76	0	0		1	0	0	0	0	1
62	0	0	0	0	1	0	0	0	1
56	0	0	0	0	0	1	0	0	1
49	0	0	0	0	0	0	1	0	1
29	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Total	1	1	1	1	1	1	1	1	8

2°) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i n_i = \frac{365}{8} = 45{,}62 \qquad \bar{x} = 45{,}62$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_j n_j = \frac{552}{8} = 69 \qquad \bar{y} = 69 \qquad G\begin{pmatrix}45{,}62\\69\end{pmatrix}$$

5

1°) Représentons graphiquement par un nuage de point la série statistique

Tableau à double entrée

y_j \ x_i	0	1	2	4	6	10	Total
20	0	0	0	0	0	1	1
35	0	0	0	0	1	0	1
46	0	0	0	1	0	0	1
59	0	0	1	0	0	0	1
67	0	1	0	0	0	0	1
76	1	0	0	0	0	0	1
Total	1	1	1	1	1	1	6

Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i n_i = \frac{23}{6} = 3,83$

$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_j n_j = \frac{303}{6} = 50,5$ $G\begin{pmatrix}3,83\\50,5\end{pmatrix}$

2°) Déterminons une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer

x_i	y_j
0	76
1	67
2	59
3	202

$\bar{x}_1 = \frac{3}{3} = 1$

$\bar{y}_1 = \frac{202}{3} = 67,33$

$G_1\begin{pmatrix}1\\67,33\end{pmatrix}$

x_i	y_j
4	46
6	35
10	20
20	101

$\bar{x}_2 = \frac{20}{3} = 6,66$

$\bar{y}_2 = \frac{101}{3} = 33,66$

$G_2\begin{pmatrix}6,66\\33,6\end{pmatrix}$

$y = ax + b$

$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{33,66 - 67,33}{6,66 - 1} = -5,94$

$(G_1 G_2) : y = -5,94x + b$

G_1 appartient à la droite $(G_1 G_2)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite

$67,33 = -5,94 \times 1 + b$

$b = 73,27$

$(G_1 G_2) : y = -5,94x + 73,27$

3°) Déduisons l'altitude d'un lieu où la pression atmosphérique est de 30cm de mercure

$y = 30 \Leftrightarrow 30 = -5,94x + 73,27$

$x = \frac{73,27 - 30}{5,94} = 7,28$

L'altitude du lieu est de 7,28 km.

PROBABILITE

2

Soit A l'ensemble des chemises et B l'ensemble des pantalons.

card A = 3 et card B = 2. **Ce fonctionnaire dispose le nombre N de manière**

N = card A ×card B = 3 × 2 = 6

N = 6

4

Un triplet de responsable (1^{er}, $2^{ème}$, $3^{ème}$) est un arrangement de 3 élèves parmi les 30 élèves d'où le nombre de choix N est $N = A_{30}^3$

N = 24360

7

Jury composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

a°) Nombre de différents jurys qu'on peut former.

Soit N_1 ce nombre. **$N_1 = 19448$**

b°) Nombre de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes. Soit N_2 ce nombre

$N_2 = C_8^5 \times C_9^5 = 7056$ **$N_2 = 7056$**

c°) Nombre de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes sachant que monsieur X et madame Y refusent de siéger ensemble.

Soit N_3 ce nombre

Le nombre de jurys où X et Y siègent ensemble est $C_7^4 \times C_8^4 = 2450$

$N_3 = N_2 - 2450 = 7056 - 2450$ **$N_3 = 4606$**

9

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1°) Soit P_1 la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit supérieures ou égale à 10.

$P_1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2°) Soit P_2 la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit paire

$P_2 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

12

Puisque A et B sont incompatibles, l'évènement $A \cap B$ est impossible. Donc $P(A \cap B) = 0$.

Puisque A et B sont incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5$ $\quad$ $\mathbf{P(A \cup B) = 0,8}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3$ $\quad$ $\mathbf{P(\overline{A}) = 0{,}7}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - 0{,}5$ $\quad$ $\mathbf{P(\overline{B}) = 0{,}5}$

15

a- Notons A l'évènement « l'élève rencontré va à la mer ». **$P(A) = 0{,}7$**
b- Notons B l'évènement « l'élève rencontré va à la montagne ». **$P(B) = 0{,}35$**
c- Notons $A \cap B$ l'évènement « l'élève rencontré va à la mer et à la montagne ». **$P(A \cap B) = 0,2$.**
d- Notons **$A \cup B$** l'évènement « l'élève rencontré va à la mer ou à la montagne ».

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}35 - 0{,}2$ $\quad$ $\mathbf{P(A \cup B) = 0{,}85}$

16

1°) Enock possède au total 9 chemises. Puisqu'il choisit au hasard, il y a équiprobabilité. Puisqu'il a 3 chemise rouges, la probabilité demandée vaut $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

2°) Enock choisit maintenant entre 8 chemises et il y a toujours équiprobabilité. Puisqu'il y a 2 chemises rouges, la probabilité vaut $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

24

Calculons la probabilité des évènements soit (Ω ; P (Ω) ; P) l'espace de probabilité associé.

card $= C_{10}^4 = 210$ car il s'agit ici d'un tirage simultané.

A l'évènement « obtenir rien que des boules rouges ».

card A $= C_6^4 \times C_4^0 = 15$

$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$. $\quad$ $\mathbf{P(A) = \frac{1}{14}}$

B l'événement « obtenir 3 boules rouges et 1 boule noire »

card B $= C_6^3 \times C_4^1 = 80$

$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$ $\quad$ $P(B) = \frac{8}{21}$

C l'évènement « obtenir des boules de même couleur »

cardC $= C_6^4 + C_4^4 = 16$

$P(C) = \frac{cardc}{card\Omega} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$ $\quad$ $P(C) = \frac{8}{105}$

On reprend l'expérience avec un tirage successif sans remise

Calculons les probabilités des événements A, B et C

Soit (Ω ; P(Ω) ; P) l'espace de probabilité associé

card$\Omega = A_{10}^4 = 5040$

A l'évènement «obtenir rien que des boules rouges »

Car A = $A_6^4 = 360$

$P(A) = \frac{360}{5040} = \frac{1}{14}$ $\quad P(A) = \frac{1}{14}$

B l'évènement « obtenir 3 boules rouges et 1 boule noire »

Card B = $A_6^3 \times A_4^1 = 480$

$P(B) = \frac{480}{5040} = \frac{2}{21}$ $\quad P(B) = \frac{2}{21}$

C l'évènement «obtenir des boules de même couleur »

Card C = $A_6^4 + A_4^4 = 384$

$P(C) = \frac{384}{5040} = \frac{24}{315}$ $\quad P(C) = \frac{24}{315}$

SUJET 1

Problème 1 :

1-a- Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$f(x)=e^x-x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to -\infty} e^x-x$

$=+\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (fx) = +\infty$

b) Justifions que ∀ x €] 0 ; +∞[; $f(x)=x(\frac{e^x}{x}-1)$

$f(x)= x(\frac{e^x}{x}-1)$

$= \frac{x\,e^x}{x} - x$

$= e^x - x$ d'où ∀ x ∈] 0 ; +∞ [$f(x)=x(\frac{e^x}{x}-1)$

c) Justifions que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)= +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to +\infty} e^x-x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x(\frac{e^x}{x}-1)$

$= +\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -1 = -1 \end{cases}$

2-a- **Déterminons la fraction dérivée f' de f**

$f(x) = e^x - x$

f est continue et dérivable sur] - ∞ ; + ∞[

$\forall x \in] -\infty [;\quad f'(x) = e^x - 1$

b) Etudions le signe $f'(x)$

$f'(x) \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\ln e^x = \ln 1$

$x=0$

x	-∞	0	+∞
$f'(x)$	-	0	+

•$\forall x \in]+\infty ; 0]$ $f'(x) \leq 0$ alors f est strictement décroissante sur $]+\infty ; 0]$

•$\forall x \in [0; +\infty[$ $f'(x) \geq 0$ alors f es strictement croissante sur $[0+\infty]$

c) **Dressons le tableau des variations de f**

x	-∞	0	+∞
$f'(x)$	-	0	+
f	+∞ ↘	1	↗ +∞

3) **Ecrivons en base 10 la quantité de poissons produits en un mois**

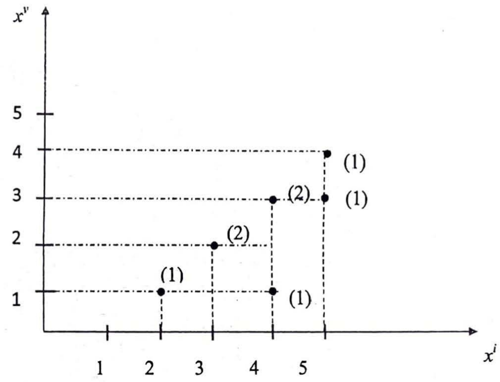
$\overline{423}^{\,5} = 4 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \times 5^0$

$= 113$

$\overline{423}^{\,5} = 113$ poissons

Problème 2

Représentons le nuage de point.



5) Déterminons les coordonnées du point moyen du nuage

$$\bar{x} = \frac{3+4+3+4+5+2+5+4}{8} = 3{,}75$$

$$\bar{y} = \frac{2+1+2+3+3+1+4+3}{8} = 2{,}375$$

$G\begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 2{,}375 \end{pmatrix}$

SUJET 2

1) **a- Déterminons l'ensemble de définition D de la fonction f.**

$f(x) = \frac{5(1+\ln x)}{x}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$x>0 \Longrightarrow x \in]0, +\infty[$

$Df =]\,0 ; +\infty[.$

a- Justifions que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{5(1+\ln x)}{x}$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{5}{x}(1+\ln x) = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{5}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln x) = -\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5(1+\ln x)}{x}$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{5\ln x}{x}\right) = 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\ln x}{x} = 0 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) a- **Justifions que $\forall$ x $]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-5\ln x}{x}$**

f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$\forall$ x $]0, +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{\frac{5}{x}x - 5(1+\ln x)}{x^2}$

$$= \frac{5-5-5\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2}$$

b- **Sens de variation de f puis tableau de variation**

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2}$$

$\forall x \in D$, $x^2 > 0$; *posons* $-5\ln x = 0$

$$\ln x = 0$$
$$\ln x = \ln 1$$
$$x = 1$$

x	0	1	$-\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

- $\forall$ x $]0, 1[$ $f'(x)>0$ et $f'(1) = 0$, *alors f est strictement croissante sur* $]0, 1]$.
- $\forall$ x $]1, +\infty[$ $f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$, *alors f est strictement décroissante sur* $[1, +\infty[$

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	5	↘ 0

$f(1) = 5$

c) Justifions que f admet un maximum sur $]0, +\infty[$.

$f'(x)$ s'annule en 1 en changeant de signe ; de plus f est strictement croissante sur $]0, 1]$ donc f admet en 1 un maximum de valeur égale à 5

d) Le nombre de cartons de jus de fruit à produire est de 1000 cartons et le bénéfice maximal est de 5 000 000 F CFA

Problème 2 :

Soit Ω l'univers des possibles associé à cette épreuve

Card (Ω) = C_{10}^3

Card Ω = 120

3) **Soit A l'évènement Bio soit membre du bureau**

Card (A) = C_9^2

Card (A) = 36

P (A) = $\frac{card\,(A)}{card\,\Omega} \Longrightarrow$ P (A) = $\frac{36}{120}$

P (A) = $\frac{3}{10}$

4) **Soit B l'évènement le bureau soit compose de Bio et d'au moins une femme**

Card (B) = $(C_4^1 \times C_5^1) + C_4^2$

= (4 x 5) + 6

Card (B) = 26

P (B) = $\frac{card\,(B)}{card\,\Omega}$

P (B) = $\frac{26}{120} = \frac{13}{60}$ P (B) = $\frac{13}{20}$

SUJET 4

I- **1- Ecrivons le nombre 35 en base 2**

35 | 2
1 17 | 2
1 8 | 2
0 4 | 2
0 2 | 2
0 1 | 2
1 0

$35 = \overline{100011}^{\,2}$

2 a) Calculons la largeur ℓ de la parcelle de cocou.

En désignant par L la longueur de la parcelle on a :

$\ell = \frac{4L}{7}$ or L = 35 donc $\ell = \frac{4 \times 35}{7}$

$\ell = 20m$

a) Calculons l'aire A de la parcelle de cocou :

$A = L \times \ell$

$A = 35 \times 20 = 700\ m^2$

1- Déterminons le prix de vente moyen $\overline{P}$ des lapins :

$\overline{P} = \frac{\sum nipi}{\sum ni}$

$\overline{P} = \frac{2000 + 2500 + 3000 + 4000}{4}$

$\overline{P} = 2875$ F

II-

2- a) Déterminons l'ensemble de définition D de f

$f(x) = x + \ln x$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$x \in D \Leftrightarrow x \in]0 ; +\infty[$ *et alors*

$D =]0 ; +\infty[$

b) Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [x + \ln x] = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x + \ln x] = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

3- *a) Démontrons que f est strictement croissante sur D*

f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$f'(x) = \frac{x+1}{x}$

$\forall x \in]0, +\infty[\qquad x+1 > 0$ *et* $x > 0$

donc $f'(x) > 0$ *alors f est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$

a) Dressons le tableau des variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4- a) Justifions que la droite $x=0$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à ($\mathcal{C}$).

b) Complétons le tableau suivant

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2,69	4,09	5,38

SUJET9

Problème 1 :

1- Justifions que le périmètre est 410m.

Le périmètre p exprimé en mètre es $\overline{632}^{8}$

On a : $\overline{632}^{8} = 6 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 410$ donc le périmètre est 410 mètres

2- a- Justifions que la longueur L et la largeur ℓ vérifient le système

$$\begin{cases} L + \ell = 205 \\ L \times \ell = 10\,000 \end{cases}$$

L'aire du terrain est L x ℓ et son périmètre est $2(L + \ell)$ donc on a :

$$\begin{cases} 2(L + \ell) = 410 \\ L \times \ell = 10\,000 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} L + \ell = 205 \\ L \times \ell = 10\,000 \end{cases}$$

b- Déduisons-en que L et ℓ sont les solutions de l'équation

$x^2 - 205x + 10\,000 = 0$

L et ℓ ont pour somme 205 et pour produit 10 000 ; donc L et ℓsont les solutions de l'équation x^2-205x + 10 000=0

3- Déterminons les dimensions du champ de sylvain

Résolvons l'équation x^2-205x + 10 000 = 0 soit Δ son discriminant

$\Delta = 205^2 - 4 \times 10\,000 = 2045 = 45^2$

Les solutions de l'équation sont

$x_1 = \frac{205-45}{2} = 80$ et $x_2 = \frac{205+45}{2} = 125$

Puisque L> ℓ alors L = 125m et ℓ = 80m

Problème 2

4- Précisons la limite de f en $-\infty$

a) D'après le tableau des variations on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

b) Etudions le sens de variation de f.

Du tableau des variations donné, on déduit que f est strictement décroissante sur]$-\infty$,1[et sur]1 ; $+\infty$[

5- *a)* Calculons $\lim f(x)$ *et* $\lim f(x)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{2-x}{x-7} = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} 2 - x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0^+ \end{cases}$

a) reproduisons puis complétons le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	||	-
f	$-1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -1$

6- justifions que k(1 ;-1) est le centre de symétrie de la courbe.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; 2-x $\in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f(2-x) + f(x) = -2$.

Donc le point K est le centre de symétrie de la courbe. Par conséquent, le point idéal recherché est le point K.

SUJET 10

Problème 1

1- justifions que les nombres x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$

x et y vérifient *$x+y = 8$ et $1500x + 1000y = 10500$ soit*

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 500\,(3x + 2y) = 500 \times 21 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$$

2- **déterminons le nombre d'ouvriers de chaque catégorie**

$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Donc 5 ouvriers travaillent dans la catégorie A et 3 dans la catégorie B.

<u>Problème 2</u>

3- a) **Déterminons le montant remboursé par akouvi le 1[er] janvier 2013**

Soit D ce montant. On a $D = 10\,000 + \frac{40}{100} \times 750\,000$ soit $D = 310\,000$.

b) **Déduisons-en la somme qu'elle reste devoir**

Elle reste devoir la somme

$D' = 750\,000 - 310\,000$ soit

$D' = 440\,000$

4- a)**Justifions que $U_0 = 750\,000$ et $U_1 = 440\,000$**

- U_0 est la somme due en 2012 donc $U_0 = 750\,000$
- U_1 est la somme due en 2013 donc $U_1 = 440\,000$

c) **Prouvons que tout entier naturel n,**

$U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n - 10\,000$

$U_{n+1} = U_n - (10\,000 + \frac{40}{100} U_n) = \frac{60}{100} U_n - 10\,000$

Donc $U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n - 10\,000$

d) **Calculons U_2**

On a : $U_2 = \frac{3}{5} U_1 - 10\,000$

$= \frac{3}{5} \times 440\,000 - 10\,000$

$U_2 = \underline{254\,000}$

5- a) **Calculons V_0**

On a $V_0 = U_0 + 25\,000$

$= 750\,000 + 25\,000$

$V_0 = 775\,000$

b) **Démontrons que (V_n) est une suite géométrique**

$V_{n+1} = U_{n+1} + 25\,000$

$\frac{3}{5} U_n - 10\,000 + 25\,000$

$= \frac{3}{5} U_n + 15\,000$

$= \frac{3}{5} (U_n + 25\,000) = \frac{3}{5} V_n$ d'où (V_n) est une suite géométrique de raison

$q = \frac{3}{5}$

c) **Expressions V_n en fonction de n**

On a $V_n = V_0\, q^n$ donc $V_n = 775\,000 \times (\frac{3}{5})^n$

d) **Justifions que $U_n = 775\,000 \times (\frac{3}{5})^n - 25\,000$**

On a : $V_n = U_n + 25\,000$ donc

$U_n = V_n - 25\,000 = 775\,000 \times (\frac{3}{5})^n - 25\,000$

d'où $U_n = 775\,000\ (\frac{3}{5})^n - 25\,000$

b) **Calculons U_6**

a) On a : $U_6 = 775\,000 \times (\frac{3}{5})^6 - 25\,000$

$= \frac{55792}{5} = 11158{,}4$

b) **Déduisons l'année de fin de remboursement de la datte.**

En (2012 + 6) il restera à payer 11158,4 ;

En (2012 + 7) le montant possible à payer

est $10\,000 + \frac{40}{100}\, 11158{,}4 = 14463{,}36$ or $14463{,}36 > 11158{,}4$ donc Akouvi finira de payer sa dette en 2019 et payera 11159F

TABLES DES MATIERES

ISBN 978-99919-2-573-8

Dépôt légal N° 9007 du 31/10/16 Bibliothèque Nationale du Bénin, 4ème trimestre.
Achevé d'Imprimerie Presse Indépendante (IPI) BP : 196 Womey - République du Bénin
Tél : 97 11 61 54 / 94 00 71 30