Institut Africain d'Informatique **Année académique 2008-2009**
Concours d'Entrée en 1^{er} Année Miage
Pour l'année académique 2008-2009

Epreuve de Mathématiques générales
Durée : 4 heures. Sans document.
Ce sujet comporte quatre (04) pages.
N.B. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.

Exercice 1 .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que :*

1. (a) *Si* f *est paire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) *Si* f *est impaire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(c) *Si* f *est périodique de période* T *alors*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

Exercice 2 .

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par:*

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

1. *Montrer que* f *est une densité de probabilité?*
2. *Soit* X *la V.A.R. dont la loi de probabilité est* f . *Calculer* $E(X)$ *et* $V(X)$
3. *Calculer* $F(x)$ *la fonction de répartition de la V.A.R.X*
4. *Calculer* $P(-0,5 \leq X \leq 1)$ *et* $P(\ X \geq 0,5)$

5. *Déterminer un intervalle fermé* I *centré sur* 0 *de longueur* $2l$ *tel que*

$$P(X \in I) \geq 0,75$$

6. *Quelle est la probabilité exacte de l'évènement* $(X \in I)$?

7. *Calculer la fonction caractéristique de la V.A.R.X*

8. *Peut-on définir une fonction génératrice sur* X?

Exercice 3 .

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

Partie I.

Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice:

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a *représente un nombre réel.*

1. *Montrer que pour tous réels* a, b, *on a :*

$$M(a) \times M(b) = M(a+b-3ab).$$

2. *En déduire les valeurs de* a *pour lesquelles la matrice* $M(a)$ *est inversible et exprimer son inverse.*

3. *Justifier le fait que M(a) est diagonalisable.*

4. *Déterminer le réel* a_0 *non nul tel que*

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

5. *On considère les matrices:*

$$P = M(a_0)$$

et

$$Q = I - P$$

où I *désigne la matrice carrée unité d'ordre* 3.

(a) *Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que:*

$$M(a) = P + \alpha Q$$

(b) *Calculer P^2, PQ, QP, Q^2.*

(c) *Pour tout entier naturel n non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et de Q.*

(d) *Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.*

Partie II. *Evolution d'un titre boursier au cours du temps.*

Dans la suite de l'exercice, on suppose que a appartient à $]0, \frac{2}{3}[$.

1. *On définit les suites $(p_n)_{n\in \mathbb{N}*}$,$(q_n)_{n\in\mathbb{N}*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}*}$, par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence:*

$$\left\{\begin{array}{r} p_{n+1} = (1-2a)p_n + a.q_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{array}\right.$$

   (a) *Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n,p_1, q_1, r_1.*

   (b) *Etudier la convergence de ces suites.*

2. *Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que:*

   - *le premier jour le titre est stable,*
   - *si un jour n le titre monte, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $\frac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$,*
   - *si un jour n le titre est stable, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$,*
   - *si un jour n le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et baissera avec la probabilité $\frac{2}{3}$.*

On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l'événement «le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n».

(a) *Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n.*

(b) *En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.*

(c) *Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini?*