LYCEE DE SASSEMA
Classe : 1ère D
Prof : M. NASSA

Année Scolaire 2023-2024
Date : Décembre 2023
Durée : 3H00mn

# COMPOSITION DU 1ER TRIMESTRE
# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : La clarté de la copie et la qualité de la rédaction seront prises en compte lors de la correction.

**CALCULATRICE NON AUTORISEE**

## Exercice 1 : (3pts)

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x; y) \longmapsto (x + 2y; x - y)$

1) Montrer que $f$ est une application. (0,5pt)
2) Démontrer que $f$ est une bijection. (1,5pts)
3) Déterminer sa bijection réciproque $f^{-1}$. (1pt)

## Exercice 2 (7,5pts)

Soient les fonctions $f$ $et$ $g$ telles que : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $et$ $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective. (1pt)
2) Déterminer un ensemble B tel que $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ soit surjective. (0,5pt)
3) Déterminer les ensembles A et B tels que $g : A \Rightarrow B$ soit une bijection. (1pt)
4) Montrer que $f : ]2; +\infty[ \rightarrow [-1; +\infty[$ est une bijection. (1pt)
5) Etudier les variations de $f$ sur $]-\infty; 2[$ $puis$ $sur$ $]2; +\infty[$. (1pt)
6) Etudier les variations de $g$ sur $]-\infty; 2[$ $puis$ $sur$ $]2; +\infty[$. (1pt)
7) En déduire de 5) et 6) les variations de $(fog)$ $sur$ $]-\infty; 2[$ $et$ $sur$ $]2; +\infty[$. (1pt)
8) Déterminer $D_{gof}$ puis calculer $(gof)(x)$. (1pt)

## Exercice 3 (9,5pts)

(Les parties A, B, C et D sont indépendantes)

A) Soit $x$ un réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $tel$ $que$ : $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1- Déterminer $\cos x$ (0,5$pt$)

2- Déterminer la valeur de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ . (1$pt$)

3- En déduire la valeur de $x$ en remarquant que $2x \in [0; \pi]$. (1pt)

**B)** 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (0,5pt)

b) $\cos(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. *(On rappelle que* $\cos X = (\sin\frac{\pi}{2} - X))$ (0,5pt)

c) $\cos x + \sin x = 1$. (0,5pt)

d) $\sin^2 x - \sin x = 6$ $(1pt)$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $(I)$ : $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $(1{,}5pts)$

**C)** On se pose propose de calculer le nombre

$$A = \frac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}$$

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

On a : $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$. (1pt)

2) Déduire la valeur de A le plus simple possible. (0,5pt)

**D)** Soit ACB un triangle iso-rectangle en B de sens direct. (Faire une figure). (0,5pt)

Déterminer en rad, les mesures des angles suivants :

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$ ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$. (1,5pts)

**Bon Courage !!!**

Corrigé de la Compo du 1er Trim.
1re D. (2023-24).

## Exercice 1 (3pts)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+2y\,;\,x-y)$.

1) Mq $f$ est une application.

Les fonctions : $x \longmapsto x+2y$ et $y \longmapsto x-y$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Alors $D_f = \mathbb{R}^2$. Par cqt $f$ est bien une application. (0,5)

2) Mq $f$ est une bijection.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = (a;b)$.

On a: $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a \\ x-y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+2b}{3} \\ y = \dfrac{a-b}{3} \end{cases}$ (0,5)

Le système $\begin{cases} x+2y = a \\ x-y = b \end{cases}$ admet pour unique solution dans $\mathbb{R}^2$ le couple $\left(\dfrac{a+2b}{3}\,;\,\dfrac{a-b}{3}\right)$. Donc $f$ est bijective. (1)

3) Déterminons la bijection réciproque $f^{-1}$ de $f$.

$f^{-1}$ est définie par:

$f^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x;y) \longmapsto \left(\dfrac{x+2y}{3}\,;\,\dfrac{x-y}{3}\right)$. (1)

## Exercice 2 (7,5pts)

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

1) Mq $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective.

* Injectivité de $f$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \,/\, f(x_1) = f(x_2)$.

On a: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 3 = x_2^2 - 4x_2 + 3$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 + 4$.

- Or pour $x_1 = -x_2 + 4 \in \mathbb{R}$, on a $x_1 \neq x_2$. Alors $f$ n'est pas injective. (0,5)

* Surjectivité de $g$.

Soit $y \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = y$.

On a: $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = y$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = y$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 + y$

or $y \in \mathbb{R}$. si $y+1<0$ c'est-à-dire $y<-1$ alors $(x-2)^2<0$ (ce qui est impossible)

Alors l'équation $f(x)=y$ n'admet pas de solution pour $y<-1$ (0,5)

Par conséquent $f$ n'est pas surjective.

② Déterminons un ensemble B tel que $f: \mathbb{R} \longrightarrow B$ soit surjective.

De ce qui précède, si $y+1 \geq 0$ $f$ est surjective.

Alors $B = \{y \in \mathbb{R} / y+1 \geq 0\}$

$B = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$ (0,5)

D'où $\underline{B = [-1;+\infty[}$

③ Déterminons les ensembles A et B tels que $g: A \to B$ soit une bijection.

D'abord, $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\}$

Soit $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (0,5)

Soit $y \in B$. Résolvons l'équation $g(x) = y$

avec $x$ unique dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On a: $g(x) = y \iff \dfrac{3x+1}{x-2} = y$

$\iff 3x+1 = yx-2y$

$\iff 3x-yx = -1-2y$

$\iff x(3-y) = -1-2y$

$\iff x = \dfrac{1+2y}{y-3}$

$x$ est unique dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ssi $y-3 \neq 0$. soit $y \neq 3$

donc $B = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (0,5)

Par conséquent $g$ est bijective de $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ vers $B = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

④ Mq $f: [2;+\infty[ \longrightarrow [-1;+\infty[$ est une bijection.

Soit $y \in [-1;+\infty[ / f(x) = y$.

On a: $f(x) = y \iff x^2-4x+3 = y$

$\iff (x-2)^2 = 1+y$

Or $y \in [-1;+\infty[ \Rightarrow 1+y \geq 0$

Alors $x-2 = \sqrt{1+y}$ ou $x-2 = -\sqrt{1+y}$

$\Rightarrow x = 2+\sqrt{1+y}$ ou $x = 2-\sqrt{1+y}$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$: Pour $x = 2+\sqrt{1+y}$

On a : $1+y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+y} \geq 0$

$\Rightarrow 2+\sqrt{1+y} \geq 2$

$\Rightarrow x \geq 2$

Alors $x \in ]2;+\infty[$

<u>2e cas</u> : Pour $x = 2-\sqrt{1+y}$

On a : $1+y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+y} \geq 0$

$\Rightarrow -\sqrt{1+y} \leq 0$

$\Rightarrow 2-\sqrt{1-y} \leq 2$

$\Rightarrow x \leq 2$

$\Rightarrow x \notin ]2;+\infty[$

Alors l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans $]2;+\infty[$

Par cqgt $f$ est une bijection de $]2;+\infty[$ vers $[-1;+\infty[$.

1

(5) Etudions les variations de $f$ sur $]-\infty,2[$ puis sur $]2;+\infty[$.

* sur $]-\infty;2[$.

Soient $x_1, x_2 \in ]-\infty,2[ \,/\, x_1<x_2$

On a : $x_1 < x_2$

$\Rightarrow x_1-2 < x_2-2$

$\Rightarrow (x_1-2)^2 > (x_2-2)^2$

car $(x_1-2)<0$ et $(x_2-2)<0$

$\Rightarrow (x_1-2)^2-1 > (x_2-2)^2-1$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

On a : $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Alors $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;2[$.

0,5

* sur $]2;+\infty[$

0,5

Un raisonnement analogue nous permet d'établir que $f$ est strictement croissante sur $]2;+\infty[$

(6) Etudions les variations de $g$ sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$

* Sur $]-\infty;2[$.

On a : $\forall x \neq 2$, $g(x) = 3+\dfrac{7}{x-2}$

Soient $x_1, x_2 \in ]-\infty;2[ \,/\, x_1<x_2$

On a : $x_1<x_2$

$\Rightarrow x_1-2 < x_2-2$

$\Rightarrow \dfrac{7}{x_1-2} > \dfrac{7}{x_2-2}$

$\Rightarrow 3+\dfrac{7}{x_1-2} > 3+\dfrac{7}{x_2-2}$

$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

0,5

On a : $x_1<x_2$ et $g(x_1) > g(x_2)$

Alors $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty;2[$.

* Sur $]2;+\infty[$

Un raisonnement analogue nous permet d'établir que g est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$. (0,5)

⑦ Déduisons de 5) et 6) les variations de $(f\circ g)$ sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.

* sur $]-\infty;2[$.

f est ↘ sur $]-\infty;2[$ et g est ↘ sur $]-\infty;2[$. Alors $(f\circ g)$ est strictement croissante sur $]-\infty;2[$. (0,5)

* Sur $]2;+\infty[$

f est ↗ et g est ↘ sur $]2;+\infty[$ (0,5)

Alors $(f\circ g)$ est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$.

⑧ Déterminons $D_{g\circ f}$ puis calculons $(g\circ f)(x)$.

On a : $D_{g\circ f}=\{x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$

Or $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

$f(x)\in D_g \Leftrightarrow x^2-4x+3\neq 2$

Soit : $(x-2)^2-1\neq 2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2\neq 3$

$\Leftrightarrow x-2\neq\sqrt{3}$ et $x-2\neq-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x\neq\sqrt{3}+2$ et $x\neq-\sqrt{3}+2$

D'où $\boxed{D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}+2;-\sqrt{3}+2\}}$ (0,5)

Pour $x\in D_{g\circ f}$,

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$$
$$=\frac{3f(x)+1}{f(x)-2}$$
$$=\frac{3x^2-12x+9+1}{x^2-4x+3-2}$$

$$\boxed{g\circ f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+1}}$$ (0,5)

Exercice 3 (9,5 pts)

A) Soit $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ / $\sin x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

① Déterminons $\cos x$.

On a : $\cos^2x+\sin^2x=1$

$\Rightarrow \cos^2x=1-\sin^2x$

$\Rightarrow \cos^2x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or $x\in[0;\frac{\pi}{2}]\Rightarrow \cos x\geq 0$

... : $\boxed{\cos x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ (0,5)

② Déterminons la valeur $\cos(2x)$ puis celle de $\sin(2x)$.

On a : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 - 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5)

$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)$

$\boxed{\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ (0,5)

③ Déduisons la valeur de $x$.

On a : $\begin{cases} \cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{4}$

Soit $\boxed{x = \dfrac{3\pi}{8}}$ (1)

B/ 1/ Résolvons dans $\mathbb{R}$.

a) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (0,5)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \,;\, -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{2} - x = \pi - \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{18} - \dfrac{2}{3}k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ (0,5)

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{\pi}{18} - \dfrac{2}{3}k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos x + \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin x\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{4} - x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ (0,5)

$S_{\mathbb{R}} = \left\{k2\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\sin^2 x - \sin x = 6$

En posant $X = \sin x$.

On a : $X^2 - X - 6 = 0$.

On trouve $X=3$ ou $X=-2$

d'où $\sin x=3$ ou $\sin x=-2$

(impossible dans chaque cas car $\sin(x)\in[-1;1]$)

d'où $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\emptyset}$

1

② Resolvons dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ : (I) : $\sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$

A l'aide du cercle trigo

On a : $\sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (=)

$-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq-\frac{\pi}{3}$

1

d'où $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]}$

Deduisons la solution dans $[0;2\pi]$.

- si $k=0\Rightarrow S_0=\left[-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right]\not\subset[0;2\pi]$
- si $k=1\Rightarrow S_1=\left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]\subset[0,2\pi]$
- si $k=2\Rightarrow S_2=\left[\frac{10\pi}{3};\frac{11\pi}{3}\right]\not\subset[0;2\pi]$

On conclut que :

$$\boxed{S_{[0;2\pi]}=\left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]}$$

0,5

① C/ Soit $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}$

① Dq $\forall k\in\mathbb{Z}$, $x\neq\frac{\pi}{4}+k2\pi$, on a

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}.$$

On a : $\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$

$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x+2\cos x\sin x}{\cos^2x-\sin^2x}$$

$$=\frac{1+\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

En effet : $\begin{cases}\cos^2x+\sin^2x=1\\ 2\cos x\sin x=\sin(2x)\\ \cos^2x-\sin^2x=\cos(2x)\end{cases}$

1

D'où : $\boxed{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{1+\sin(2x)}{\cos(2x)}}$

② Deduisons la valeur de A.

On a : $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}$

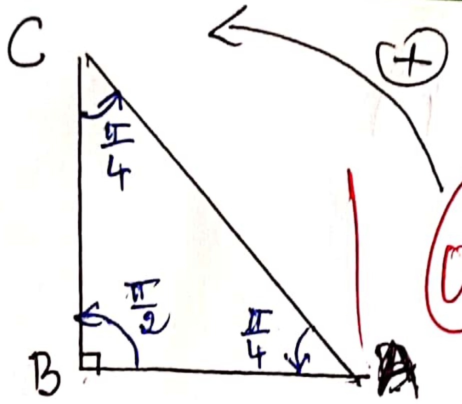
$$=\frac{1+\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{A=1+\sqrt{2}}$$

0,5

D/ Soit ACB un triangle iso-rectangle en B de sens direct. Construisons le $\Delta$ ACB.




0,5

Déterminons en rad, les mesures $(\vec{BA},\vec{CA})$, $(\vec{AB},\vec{CB})$ et $(\vec{BA},\vec{AC})$.

On a : $(\vec{BA},\vec{CA}) = (\vec{AB},\vec{AC})$

$= -(\vec{AC},\vec{AB})$

$\underline{\underline{(\vec{BA},\vec{CA}) = -\frac{\pi}{4}}}$ 0,5

$(\vec{AB},\vec{CB}) = (-\vec{BA},-\vec{BC})$

$= (\vec{BA},\vec{BC})$ 0,5

$\underline{\underline{(\vec{AB},\vec{CB}) = \frac{\pi}{2}}}$ car $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$.

$(\vec{BA},\vec{AC}) = (\vec{BA},\vec{AB}) + (\vec{AB},\vec{AC})$

(égalité de Chasles)

$= \pi + (-\frac{\pi}{4})$

Car $(\vec{BA},\vec{AB}) = \pi$ et $(\vec{AB},\vec{AC}) = -\frac{\pi}{4}$

d'où $\underline{\underline{(\vec{BA},\vec{AC}) = \frac{3\pi}{4}}}$. 0,5

FIN