❖ EXERCICE N°1

I. Résoudre dans IR, les équations suivantes

a. $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5)$

b. $\ln|x + 1| + \ln|x - 5| = \ln 16$

c. $\ln|6 - x| = 1$

d. $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$

II. Résoudre dans IR, les inéquations suivantes :

a. $\ln(x^2 - 10x + 9) \geq \ln(3x - 27)$

b. $\ln(x(3 - x)) \leq \ln 2$

c. $2(\ln 2x)^2 - 5\ln(2x) - 3 \leq 0$

❖ EXERCICE N°2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

a.
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 6\ln 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$$

❖ EXERCICE N°3

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes .

a. $f(x) = 2x + 1 + \ln(3x - 12)$

b. $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5)$

c. $f(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$

d. $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

e. $f(x) = \ln|-3x + 12|$

❖ EXERCICE N°4

Calculer la limite de f en x_0 .

1. $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$; $x_0 = 0$

2. $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x^2}$; $x_0 = +\infty$

3. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$; $x_0 = 0$

4. $f(x) = \frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$; $x_0 = +\infty$

5. $f(x) = \ln(\cos x) \ln x$; $x_0 = 0^+$

6. $f(x) = x - \sqrt{x} \ln x$; $x_0 = 0$

7. $f(x) = \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}$; $x_0 = 0$

8. $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \ln x$; $x_0 = +\infty$

9. $f(x) = \tan x \cdot \ln x$; $x_0 = 0^+$

10. $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$; $x_0 = 0$

11. $f(x) = x(\ln x - 1)$; $x_0 = 0^+$ et $x_0 = +\infty$

12. $f(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x}$; $x_0 = +\infty$ et $x_0 = 0^+$

❖ EXERCICE N°5

Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la fonction, dresser le tableau de variation et tracer la courbe de f .

1. $f(x) = \ln|x|$
2. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
3. $f(x) = x \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$
4. $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

❖ EXERCICE N°6

▪ PARTIE A

On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1. Etudier les variations de g .
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$

▪ PARTIE B

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

1. Etudier les variations de f
2. Démontrer que (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique.
3. Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (Δ)
4. Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) .
5. Donner une équation de cette tangente
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$
Puis une solution unique $\beta \in]3 ; 4[$.
7. Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé unité 1cm

❖ EXERCICE N°7

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

▪ PARTIE A : Soit $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. Déterminer Dg
2. Montrer que si $0 \leq x \leq 1$ alors $g(x) \geq 1$.
3. Etudier le sens de variation de g sur $[1 ; +\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
6. Donner le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

COURS EN LIGNE // 70 713 09 21

▪ PARTIE B

- i. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
- ii. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$
- iii. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iv. Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1
- v. Donner le tableau de variation de f puis tracer Cf

❖ EXERCICE 8

- **PARTIE A :** On considère dans $]0 ; +\infty[$ la fonction g donné par

$$g(x) = x \ln x - 1$$

1. Dresser le tableau de variation de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; +\infty[$
3. Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

- **PARTIE B :** On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1+x}{1+\ln x}.$$

1. Déterminer Df
2. Calculer les limites aux bornes de Df
3. Etudier les branches infinies à Cf
4. Etudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f
5. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha$
6. Tracer (Cf)

❖ EXERCICE N°9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x}, & x \leq 1 \\ 1 - (\ln x)^2, & x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f

1. Déterminer Df
2. Démontrer que f est continue en 1.
3. Etudier la dérivabilité de f en 1.
4. Calculer les limites de f aux bornes de Df et préciser les branches infinies de Cf
5. Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de Cf
6. Tracer (Cf)
 - Soit h la restriction de f sur $]1 ; +\infty[$
 - a. Démontrer que h réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
 - b. En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

- c. Calculer $h^{-1}(-1)$
- d. Justifie que h^{-1} est dérivable en -1
- e. h^{-1} est-elle dérivable sur son domaine de définition
- f. Tracer la courbe de h^{-1}
- g. Expliciter $h^{-1}(x)$

❖ **EXERCICE N°10**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+\ln x), & x \geq 1 \\ (1-x)\ln(1-x), & x < 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. Etudier la dérivabilité de f en 1.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de Df .
5. Etudier les branches infinies de f .
6. Dresser le tableau de variation de f .
7. Tracer Cf
 - Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$
 - a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations
 - b. Résoudre $h^{-1}(x) = e$ puis calculer $(h^{-1})'(2 - 2e)$.
 - c. Tracer la courbe de h^{-1}

❖ **EXERCICE N°11**

Soit f la fonction définie $\begin{cases} f(x) = x^2\sqrt{|\ln x|} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Préciser $f'(0)$ sans calculer l'expression de $f'(x)$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.
3. Etudier les variations de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .

COURS EN LIGNE // 70 713 09 21