Les nombres complexes |M| Exercices |Y| Exams
2008 $\mapsto$ 2022 2Bac Pc/Svt

Réalisé Par : Youssef MIGROUNE
Prof de maths au lycée

Partager

YouTube / MIGROUNE Math

Facebook / Migroune Math
Instagram / MIGROUNE Math
TikTok / MIGROUNE Math

Exercice 2 || Exam 2008 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2 - 6z + 34 = 0$ (1)

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3 + 5\text{i}$; $b = 3 - 5\text{i}$ et $c = 7 + 3\text{i}$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la translation T du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4 - 2\text{i}$

   a. Montrer que $z' = z + 4 - 2\text{i}$ puis vérifier que C est l'image du point A par la translation T $(0,75)$

   b. Montrer que : $\dfrac{b-c}{a-c} = 2\text{i}$ $(0,5)$

   c. En déduire que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$ $(0,75)$

Exercice 1 || Exam 2008 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2 - 8z + 17 = 0$ (1)

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 4 + \mathrm{i}$ et $b = 8 + 3\mathrm{i}$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la Rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2\mathrm{i}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

   a. Montrer que $z' = -\mathrm{i}z - 1 + 3\mathrm{i}$ $(0,75)$

   b. Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est $c = -\mathrm{i}$ $(0,75)$

   c. Montrer que : $b - c = 2(a - c)$ puis ne déduire que les points A, B et C sont alignés $(0,75)$

Exercice 2 || Exam 2009 Normal || 3 points

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - 2\mathrm{i}$; $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $c = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{i}$

1. Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b (1)
2. On considère la rotation R de centre le point O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$
   - a. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la Rotation R.
     Montrer que : $z' = bz$ $(0,75)$
   - b. Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R
3. Montrer que : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)\,[2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c $(0,75)$

Exercice 2 || Exam 2009 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 6z + 25 = 0$$

(1)

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 3 + 4\mathrm{i}$; $b = 3 - 4\mathrm{i}$; $c = 2 + 3\mathrm{i}$ et $d = 5 + 6\mathrm{i}$

   a. Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés (0,5)

   b. Montrer que le nombre $p = 3 + 8\mathrm{i}$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie H de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$ (0,5)

   c. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PD}\right)$ et que $PA = \sqrt{2}PD$ (1)

Exercice 2 || Exam 2010 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0$ (1)
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3 - \mathrm{i}$; $b = 3 + \mathrm{i}$ et $c = 7 - 3\mathrm{i}$. Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   - a. Montrer que : $z' = \mathrm{i}z + 2 - 4\mathrm{i}$ $(0,5)$
   - b. Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c' = 5 + 3\mathrm{i}$ $(0,25)$
   - c. Montrer que : $\dfrac{c' - b}{c - b} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$ $(1,25)$

Exercice 2 || Exam 2010 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ (1)
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 8i$; $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2\left(4\sqrt{3} + 4i\right)$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$

   a. Montrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$ $(0,5)$

   b. Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R $(0,25)$

   c. Montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique $(0,75)$

   d. En déduire que le triangle ABC est équilatéral $(0,5)$

Exercice 3 || Exam 2011 Normal || 5 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 18z + 82 = 0$ (1)

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 9 + \mathrm{i}$; $b = 9 - \mathrm{i}$ et $c = 11 - \mathrm{i}$

   a. Montrer que $\dfrac{c-b}{a-b} = -\mathrm{i}$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B (1)

   b. Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-\mathrm{i})$ $(0,5)$

   c. Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-\mathrm{i})$ puis en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$ (1)

   d. Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

   Montrer que : $z' = -\mathrm{i}z + 10 + 8\mathrm{i}$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est : $9 - 3\mathrm{i}$ $(1,5)$

Exercice 2 || Exam 2011 Rattrapage || 4 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$ (1)
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les deux points A et B d'affixes respectives : $a = 3 + 3\mathrm{i}$ et $b = 3 - 3\mathrm{i}$
   - a. Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b (0,5)
   - b. Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6 (0,75)
   - c. Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = \mathrm{i}$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est rectangle isocèle en B' (1)
   - d. Déduire de ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré (0,75)

Exercice 2 || Exam 2012 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 12z + 61 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 6 - 5\mathrm{i}$; $b = 4 - 2\mathrm{i}$ et $c = 2 + \mathrm{i}$
   - a. Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés $(0,5)$
   - b. On considère translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est $1 + 5\mathrm{i}$
     Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est : $d = 3 + 6\mathrm{i}$ $(0,5)$
   - c. Montrer que : $\dfrac{(d-c)}{(b-c)} = -1 + \mathrm{i}$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe : $-1 + \mathrm{i}$ $(0,75)$
   - d. En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}}\right)$ $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2012 Rattrapage || 3 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - \mathrm{i}$; $b = 6 - 7\mathrm{i}$ et $c = 8 + 3\mathrm{i}$

1. a Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{i}$ $(0,75)$

   b En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A $(0,75)$

2. Soit z l'affixe d'un point M du plan et $z\,'$ l'affixe du point $M\,'$ image du point M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

   a Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2\mathrm{i}$ $(0,5)$

   b Montrer que : $z\,' = -\mathrm{i}z + 9 + 5\mathrm{i}$ $(0,5)$

   c Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation $\mathbb{R}$ $(0,25)$

Exercice 2 || Exam 2013 Normal || 3 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 7 + 2\mathrm{i}$; $b = 4 + 8\mathrm{i}$ et $c = -2 + 5\mathrm{i}$

1.
   a. vérifier que : $(1+\mathrm{i})(-3+6\mathrm{i}) = -9+3\mathrm{i}$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+\mathrm{i}$ $(0,75)$

   b. En déduire que : $AC = \sqrt{2}AB$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right)$ (1)

2. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   a. Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d = 10 + 11\mathrm{i}$ $(0,75)$

   b. Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2013 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 25 = 0$ $(0,75)$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3 + 4\mathrm{i}$; $b = 4 - 3\mathrm{i}$ et $c = 10 + 3\mathrm{i}$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$

   a. Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est : $d = 10 + 9\mathrm{i}$ $(0,75)$

   b. Vérifier que : $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ sous une forme trigonométrique (1)

   c. Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}\right)} \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$ $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2014 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 2 = 0$ $(0,75)$

2. On considère le nombre complexe : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$.

   a. Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ et que : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ $(0,5)$

   b. En utilisant l'écriture de u sous forme trigonométrique, montrer que u^6 est un nombre réel $(0,75)$

3. Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
   On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 4 - \mathrm{i}4\sqrt{3}$ et $b = 8$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

   a. Exprimer z' en fonction de z $(0,5)$

   b. Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral $(0,5)$

Exercice 4 || Exam 2014 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + \mathrm{i}$; $b = 2 - \mathrm{i}$; $c = \mathrm{i}$; $d = -\mathrm{i}$ et $w = 1$.
   - a. Montrer que : $\dfrac{a-w}{b-w} = \mathrm{i}$ $(0,25)$
   - b. En déduire que le triangle ΩAB est rectangle isocèle en Ω $(0,5)$
3. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   - a. Montrer que : $z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$ $(0,5)$
   - b. Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$ $(0,5)$
   - c. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle et préciser son centre $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2015 Normal A || 3 points

Première Partie On considère le nombre complexe a tel que :

$$a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $(0,5)$
2. Vérifier que : $a = 2\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + i2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $(0,25)$
3. a. En linéarisant : $\cos^2(\theta)$, θ est un nombre réel, montrer que : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$ $(0,25)$

   b. Montrer que : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + i4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $(0,5)$

   c. Monter que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$ est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$ $(0,5)$

Deuxième Partie Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$,
on considère les deux points Ω et A d'affixes respectives : ω et a tels que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1. Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est : $2i$ $(0,5)$
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 2i| = 2$ $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2015 Normal B || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = -2 + 2\mathrm{i}$; $b = -5 + \mathrm{i}$; $c = -5 - \mathrm{i}$ et $w = -3$
   - a. Montrer que : $\dfrac{b - w}{a - w} = \mathrm{i}$ $(0,5)$
   - b. En déduire la nature du triangle ΩAB $(0,5)$
3. Soit le point D l'image du point C par la translation T du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4\mathrm{i}$
   - a. Montrer que l'affixe d du point D est $d = 1 + 3\mathrm{i}$ $(0,5)$
   - b. Montrer que $\dfrac{b - d}{a - d} = 2$ puis déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$ $(0,75)$

Exercice 3 || Exam 2015 Rattrapage || 3 points

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$ $(0,75)$

   b. On considère le nombre complexe : $a = 4 + 4\mathrm{i}$. Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif $(0,75)$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4 + 4\mathrm{i}$; $b = 2 + 3\mathrm{i}$ et $c = 3 + 4\mathrm{i}$.
   Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Montrer que : $z' = \mathrm{i}z + 7 + \mathrm{i}$ $(0,5)$

   b. Vérifier que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d = 3 + 5\mathrm{i}$ $(0,5)$

   c. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - 3 - 5\mathrm{i}| = |z - 4 - 4\mathrm{i}|$ est la droite (BC) $(0,5)$

Exercice 3 || Exam 2016 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$ $(0,75)$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives : $a = 5 + 2\mathrm{i}$; $b = 5 + 8\mathrm{i}$ et $w = 2 + 5\mathrm{i}$.

   a. Soit u le nombre complexe : $u = b - w$. Vérifier que $u = 3 + 3\mathrm{i}$ puis montrer que : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ $(0,75)$

   b. Déterminer un argument du nombre $\overline{u}$ $(0,25)$

   c. Vérifier que $a - w = \overline{u}$ puis en déduire que :

   $$\Omega A = \Omega B \text{ et } \arg\left(\frac{b-w}{a-w}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

   $(0,75)$

   d. On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'image de A par la rotation R $(0,5)$

Exercice 3 || Exam 2016 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = 4 + 5\mathrm{i}$; $b = 3 + 4\mathrm{i}$; $c = 6 + 7\mathrm{i}$ et $w = 4 + 7\mathrm{i}$.
   - a. Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A , B et C sont alignés $(0,75)$
   - b. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
     Montrer que : $z' = -\mathrm{i}z - 3 + 11\mathrm{i}$ $(0,75)$
   - c. Déterminer l'image du point C par la rotation R , puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-w}{c-w}$ $(0,75)$

Exercice 3 || Exam 2017 Normal || 3 points

On considère les nombres complexes a et b tels que :
$a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)\,\mathrm{i}$.

1. a. Vérifier que : $b = (1 + \mathrm{i})a$ $(0,25)$
   b. En déduire que : $|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(b) \equiv \dfrac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ $(0,5)$
   c. En déduire de ce qui précède que : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $(0,5)$
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
   On considère les points A et B d'affixes respectives : a et b et le point C d'affixe $c = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. Vérifier que $c = \mathrm{i}a$ et en déduire que :
   $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ $(0,75)$
   b. Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ $(0,5)$
   c. En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré $(0,5)$

Exercice 3 || Exam 2017 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$ $(0,75)$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = -2 + 2\mathrm{i}$; $b = 4 - 4\mathrm{i}$; $c = 4 + 8\mathrm{i}$

   a. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Monter que : $z' = -\mathrm{i}z - 4$ $(0,5)$

   b. Vérifier que le point B est l'image de C par la rotation R puis en déduire la nature du triangle ABC $(0,75)$

3. Soit w l'affixe du point Ω milieu du segment $[BC]$.

   a. Montrer que : $|c - w| = 6$ $(0,5)$

   b. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - w| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2018 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   a. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ $(0,25)$
   b. Soit A le point d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$ et B l'image de A par la rotation R et b l'affixe du point B . Montrer que : $b = da$ $(0,5)$
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image du point B par la translation T et c l'affixe du point C .
   a. Vérifier que : $c = b + a$ puis en déduire que : $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.
   Remarque : utiliser la question 2-b $(0,75)$
   b. Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ et en déduire que le triangle OAC est équilatéral $(0,75)$

Exercice 2 || Exam 2018 Rattrapage || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2}(1 - i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   - a. Écrire a sous forme trigonométrique $(0,25)$
   - b. Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ $(0,5)$
3.
   - a. On considère le point C d'affixe $c = 1 + i$.
     Montrer que : $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$ $(0,5)$
   - b. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation T . Montrer que : $OD = |b + c|$ $(0,5)$
   - c. En déduire que : $OD \times BC = 2\sqrt{3}$ $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2019 Normal || 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; $b = 2 + 2\mathrm{i}$; $c = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
   - a. Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$ $(0,5)$
   - b. En déduire que les points A, C et D sont alignés $(0,25)$
3. On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   Vérifier que : $z' = \dfrac{1}{2}az$ $(0,5)$
4. Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$
   - a. Vérifier que : $h = \mathrm{i}p$ $(0,5)$
   - b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2019 Rattrapage || 3 points

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$ $(0,75)$

   b. On pose $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, écrire a sous forme trigonométrique $(0,5)$

2. Soit le nombre complexe : $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, vérifier que $b^2 = \mathrm{i}$ $(0,5)$

3. On pose $h = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, montrer que : $h^4 + 1 = a$ $(0,5)$

4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, on considère le points B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   a. Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R .
   Montrer que $c = \mathrm{i}b$ $(0,5)$

   b. En déduire la nature du triangle OBC $(0,25)$

Exercice 2 || Exam 2020 Normal || 5 points

1. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z + 16 = 0$$

   a. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est :

$$\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$$

$(0,5)$

   b. En déduire les solutions de l'équation (E) (1)

2. Soient les nombres complexes : $a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

   a. Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$ $(0,75)$

   b. Écrire les complexes b et c sous forme trigonométrique $(0,5)$

   c. En déduire que $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ $(0,5)$

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points B , C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

   a. Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$ $(0,5)$
   b. Déterminer l'image du point C par la rotation R $(0,25)$
   c. Déterminer la nature du triangle OBC $(0,25)$
   d. Montrer que $a^4 = 128 \times b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés $(0,75)$

Exercice 2 || Exam 2020 Rattrapage || 5 points

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

$(0,75)$

2 On pose : $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

a Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel $(0,75)$

b Soit le nombre complexe $b = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Prouver que $b^2 = a$ $(0,5)$

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

a Vérifier que : $z' = bz$ $(0,25)$

b Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R $(0,5)$

4 a Montrer que $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC $(0,75)$

b Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$ $(0,5)$

5 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T

a Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$ $(0,25)$

b Montrer que $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés $(0,75)$

Exercice 3 || Exam 2021 Normal || 5 points

Partager

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ $(0,75)$

2. Soient les nombres complexes : $a = e^{i\pi/6}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   a. Écrire a sous forme algébrique $(0,25)$

   b. Vérifier que : $\overline{a} \times b = \sqrt{3}$ $(0,5)$

   Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et $\overline{a}$

3. Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport $(0,5)$

4 Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

- **a** Écrire z' en fonction de z et a $(0,5)$
- **b** Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, Montrer que : $d = a + 1$ $(0,25)$
- **c** Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est losange $(0,5)$

5

- **a** Vérifier que : $d - b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i})$, en déduire un argument du nombre $d - b$ $(0,75)$
- **b** Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique $(0,5)$
- **c** Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}\right)$ $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2021 Rattrapage || 5 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 3 + 2\mathrm{i}$, $b = 3 - 2\mathrm{i}$ et $c = -1 - 2\mathrm{i}$
   - a. Écrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique $(0,5)$
   - b. En déduire la nature du triangle ABC $(0,5)$

3. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4\mathrm{i}$
   - a. Écrire z' en fonction de z $(0,5)$
   - b. Vérifier que C est l'image de A par R $(0,25)$
4.
   - a. Montrer que les points A, C et D sont alignés $(0,5)$
   - b. Déterminer le rapport de l'homothétie H de centre C et qui transforme A en D $(0,5)$
   - c. Déterminer l'affixe e du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme $(0,5)$
5.
   - a. Montrer que $\frac{d-a}{e-b}$ est un nombre réel $(0,5)$
   - b. En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle $(0,5)$

Exercice 2 || Exam 2022 Normal || 3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$,le point B d'affixe $b=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1. Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$ $(0,5)$
2. On considère la rotation R de centre D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point C image du B par la rotation R est $c=-4$ $(0,5)$
3. a. Écrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique $(0,5)$

   b. En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2=\dfrac{c-d}{b-d}$ $(0,5)$

4. Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')
   - a. Vérifier que $|z+2| = 2$ $(0,25)$
   - b. Prouver que $z + \bar{z} = -8$. Remarquer que $|z| = 4$ $(0,5)$
   - c. En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera $(0,25)$

Exercice 3 || Exam 2022 Rattrapage || 3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$

1. Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$ $(0,25)$
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h $(0,5)$
3. On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R $(0,5)$

4 Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + \mathrm{i}$

a Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$ $(0,25)$

b En déduire que $\left(\overline{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$ $(0,5)$

c Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF $(0,5)$

d Déduire que les points A, D, E et F appartient à un cercle dont on déterminera un diamètre $(0,5)$