Corrigé centre de gravité

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

A. 1. $g(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$.

2. $\int g = x-\ln(x+1)$.

B. 1. $S=\int_0^2 g(x)\,dx = 2-\ln 3 - 0+\ln 1 = 2-\ln 3$.

B. 2. a. $X=\dfrac{1}{2S}\int_0^2 x\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\dfrac{1}{2S}\int_0^2 x-\dfrac{x}{x+1}\,dx=\dfrac{1}{2S}\left[\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^2=\dfrac{\ln 3}{2(2-\ln 3)}\approx 0{,}61$.

b.

$Y=\dfrac{1}{2S}\int_0^2\left[f(x)\right]^2dx=\dfrac{1}{2S}\int_0^2\left[1-\dfrac{1}{x+1}\right]^2dx=\dfrac{1}{2S}\int_0^2 1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx=\dfrac{1}{2S}\left[x-2\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^2$

, soit $Y=\dfrac{1}{2S}\left(2-2\ln 3-\dfrac{1}{3}+1\right)=\dfrac{8-6\ln 3}{6(2-\ln 3)}\approx 0{,}26$.