Corrigé continuité et dérivabilité

1. a. *f* est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

b. $f'(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$; e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t\geq 1$. Donc *f* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

a. *A*(1) vaut 0.

b. Sur $[1\,;+\infty[$ *f* est croissante ainsi que *A*. La différence $A(x_0+h)-A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de *f*, comprise entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur *h*, et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur *h*. On a donc

$$hf(x_0)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq f(x_0+h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par *h* puisque *h* est positif.

c. Si on prend $h<0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de *f* a pour aire $A(x_0)-A(x_0+h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0+h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc

$(-h)f(x_0+h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq(-h)f(x_0)\Leftrightarrow hf(x_0+h)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0+h)\geq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)$$

en divisant par *h* (attention au changement de sens des inégalités : *h* est négatif).

d. On a le même encadrement pour *h* positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque *h* tend vers 0, ce qui donne $f(x_0)\geq\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)\Rightarrow A'(x_0)=f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de *A* au milieu de l'encadrement.

e. Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de *f* entre $x=1$ et $x=x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de *f* (la fonction *A*) telle que *A*(1)=0.