Lycée Classique ABIDJAN	DEVOIR	Année Scolaire : 2021-2022
Mardi, 22 Février 2021	MATHEMATIQUES –Tle C	DUREE : 3h

EXERCICE 1

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation, suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2021} < (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2022}$ Vrai
2	L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln(1 - e^{-x})$ est $]-\infty\,;0[$ Faux
3	Pour tout entier naturel n, on a $i^{4n+3} = -i$ Vrai
4	Toue suite divergente a une limite infinie

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés suivants, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

	Enoncés		Réponses proposées
1	Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I ;J) L'ensemble des points d'affixes z tels que $\lvert i\bar{z} + 2 \rvert = 3$ est le cercle de rayon 3 et de centre	A	le point A d'affixe -2i
		B	le point B d'affixe 2i
		C	le point A d'affixe -2
2	la suite (U_n) définie par $U_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ a pour limite	A	e
		B	e^{-1}
		C	1
3	L'ensemble des points M d'affixe z tels que le complexe $z^2 + 2iz + 1 - i$ soit un imaginaire pur est :	A	un cercle
		B	une hyperbole
		C	la réunion de deux droites
4	L'équation $x \in \mathbb{R}$, $2e^{2x} - 3e^x - 5 = 0$ admet	A	une unique solution
		B	deux solutions
		C	aucune solution

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J) : unité 2 cm

Soient K ; L et M les points d'affixes respectives $-1 + 2i$; $1 + 2i$ et z tels que M est distinct de 1 .

On considère e nombre complexe $Z = \frac{iz + 2 + i}{z - 1}$

1- Montre que $\lvert Z \rvert = \frac{MK}{MI}$ puis déduis l'ensemble (D) de points M du plan tels que $\lvert Z \rvert = 1$

2- a) En posant $z = x + iy$ montre que $\mathrm{Im}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2y - 1}{(x-1)^2 + y^2}$

b) Détermine l'ensemble (C) des points M du plan tels que Z soit un réel.

3-a) Montre que (L) appartient (C).

b) Détermine l'affixe du point E de (C) situé sur l'axe des abscisses

EXERCICE 4

1a) Démontre que l'équation (E): $x \in]0\,;+\infty[$, $x + \ln x = 0$ admet une unique solution α.

b) Justifie que : $\alpha \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{1/x}$.

a) Vérifie que : $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = x$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \ln(\frac{1}{x}) = 0$.

b) Déduis-en que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique de l'équation $g(x) = x$ dans $]0\,;+\infty[$.

c) Démontre que $\forall x \in [\frac{3}{2}\,;3]$, $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}e^{2/3}$.

d) Justifie que $\forall x \in [\frac{3}{2}\,;3]$, $|g(x) - \frac{1}{\alpha}| \leq \frac{4}{9}e^{2/3}\,|x - \frac{1}{\alpha}|$

3. On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$; pour tout entier naturel n.

a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

b) Démontre que pour tout entier naturel n, $|v_{n+1} - \frac{1}{\alpha}| \leq \frac{4}{9}e^{2/3}\,|v_n - \frac{1}{\alpha}|$.

c) Déduis en que (v_n) converge et donne sa limite.

EXERCICE 5 (

1- Calcule le module et un argument du nombre complexe $a = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$

2- Ecris le nombre complexe a sous forme algébrique.

3- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = a$ et donner les solutions sous forme algébrique.

4- Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{24}$ et $\sin\frac{13\pi}{24}$

EXERCICE 6

Pour réduire les effets de la lumière sur ces fleurs, un horticulteur (celui qui cultive les jardins) se rend dans un magasin de vente de plaques de verres teintées.

Le technicien lui conseille un nouveau type de plaque verre et lui donne l'information suivante :

En traversant une plaque de verre teintée de ce type, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

Ces plaques peuvent être superposées pour réduire l'intensité lumineuse autant qu'on le souhaite.

L'horticulteur souhaite que l'intensité lumineuse reçue par ses fleurs soit inférieure ou égale au quart de l'intensité entrante. Il veut savoir le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé.

Aide le.