Exercice 1

A/ Soit un complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Ecris z sous sa forme trigonométrique.
2) Ecris z^{2022} sous la forme trigonométrique.
3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n on a z^n qui est réel ?

B/

Pour n entier naturel supérieur à 1 ; Résous dans C l'équation : $z^n = 1 - i$

C/

1. Développe $(\cos x + i\sin x)^4$.
2. Déduis - en l'expression sin4x en fonction de cosx et de sinx.

D/

Détermine les racines cubiques des complexes 8i et $4 - 4i\sqrt{3}$

E/ Soit u élément $[0 ; \pi]$.

1) Résous dans C l'équation : $z^2 - 2z\cos^2 u + \cos^2 u = 0$.
2) Détermine en fonction de u le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x, définies par:

$$\begin{cases} f(x) = e^{x\ln\left(\left|1-\frac{1}{x}\right|\right)} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°) Etudie les variations de g.

2° -a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3° -a) Etudie la continuité de f en 1.

b) Démontre que : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 1$

c) Etudie la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats.

4° -a) Etudie les variations de f.

b) Prouve que $f(\alpha) = e^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.

5°) Construire la courbe (C) et les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.

EXERCICE 3 :

Répond par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Soit a le complexe défini par : $a = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ Alors la forme trigonométrique de $\frac{1}{a}$ est $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
2) f est une fonction definie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$; Alors f n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 4 :

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$;
   On a donc :
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
   b) f est dérivable en 0
   c)La courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demie tangente horizontale
   d) Pour $x > 0$ on a $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.
2) L'ensemble des entiers relatifs x tels que $(x-3)$ divise (x^3-3) :
   a) est infini
   b) n'admet que deux solution : 1 ou 9
   c) admet plusieurs solutions dont la plus grande est 27 et la plus petite est – 9
   d) est S = {-21 ;-9 ;-5 ;-3 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;4 ;5 ;6 ;7 ;9 ;11 ;15 ;27}.
3) Soit A= 5^{2000} et B= 4^{1000} on a :
   a) $A \equiv 5(7)$
   b) $B \equiv 2(7)$
   c) $A + B \equiv 1(7)$
   d) $A + B \equiv 0\ (7)$.
4) Soit dans le plan complexe on considère les points A($a = 2 + 2i\sqrt{3}$), B($b = 2 - 2i\sqrt{3}$) et C ($c = -1 + i\sqrt{3}$) alors :
   a) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$
   b) $\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = -i\sqrt{3}$
   c) ABC est rectangle en C car $AB^2 = CA^2 + CB^2$
   d) ABC est équilatéral