

EXERCICE 1

Indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1- Le nombre complexe z vérifiant $(\sqrt{3} - i)z = 2 - i$ a pour forme algébrique

a) $\frac{2-i}{\sqrt{3}-i}$

b) $\frac{1+2\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

c) $\frac{1+2\sqrt{3}}{4} + i\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

2- Soit z un nombre complexe non nul d'argument 0. Un argument du complexe $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3} + 0$

b) $\frac{2\pi}{3} + 0$

c) $\frac{2\pi}{3} - 0$

3- Soit z un nombre complexe, $|z - i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$

b) $|z - 1|$

c) $|i - 1|$

4- Soit n un entier naturel. le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 3$

b) $n = 6k + 3$ avec k entier relatif

c) $n = 6k$ avec k entier relatif

5- Soit A et B deux points d'affixes respectifs i et -1 . L'ensemble des points M d'affixe z tels $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) La droite (AB)

b) le cercle de diamètre [AB]

c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6- L'ensemble des points M d'affixes $z = x + iy$ (x et y des réels) vérifiant $|z - 1| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$

b) $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$

c) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$

7- Le nombre complexe $(-1 + i\sqrt{3})^5$ est égal à

a) $-16(1 + i\sqrt{3})$

b) $16(-1 + i\sqrt{3})$

c) $16(1 - i\sqrt{3})$

PROBLEME

Pour chaque entier naturel n , on définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

Partie A : étude du cas particulier $n = 0$. f_0 est donc définie sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Justifier, pour tout réel u , l'inégalité $e^u \geq u + 1$. En déduire que pour tout réel x , $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, puis que, pour tout réel x , $1 + (x - 1)e^x \geq 0$.

2. Déterminer les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, la dérivée de f_0 est donnée par $f_0'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. En

déduire le sens de variation de f_0 .

4. Représenter la courbe C_0 de f_0 dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie B : étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$. On appelle C_n la courbe représentative de f_n .

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. En déduire que C_n possède une asymptote que l'on précisera.

3. Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1} .

4. Montrer que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

5. Pour tout entier naturel non nul n , montrer qu'il existe un unique réel a_n appartenant à $]0; 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$.

6. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $f_{n+1}(a_n) = \ln(a_n)$. En déduire que $a_n \leq a_{n+1}$, puis que la suite (a_n) est convergente.

7. a. En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1[$, $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $\ln(a_n) \geq \frac{1-e}{n}$, puis que $a_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c. En déduire la limite de la suite (a_n) .

8. Construire sur le graphique précédent les courbes C_1 et C_2 .